

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова



# **ЛИНЕЙНЫЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКИХ И ТВЁРДЫХ СРЕДАХ**

**Учебное пособие для физического практикума  
по акустике**

К.В. Дмитриев, А.А. Карабутов, А.И. Коробов,  
О.Д. Румянцева, О.А. Сапожников,  
В.А. Хохлова, С.А. Цысарь

*Под общей редакцией*

А.И. Коробова, О.В. Руденко, О.А. Сапожникова

Физический факультет МГУ

Москва 2017

ББК 22.32  
УДК 534

К.В. Дмитриев, А.А. Карабутов, А.И. Коробов, О.Д. Румянцева,  
О.А. Сапожников, В.А. Хохлова, С.А. Цысарь. **Линейные  
ультразвуковые волны в жидких и твёрдых средах.** Учебное пособие для  
физического практикума по акустике. — М.: Физический факультет МГУ,  
2017, 114 с.

Учебное пособие знакомит с основными свойствами звуковых волн в жидкостях и твёрдых телах в форме описания нескольких задач, выполняемых в специальном практикуме кафедры акустики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Обсуждаются способы возбуждения звуковых волн, а также особенности их распространения в зависимости от типа среды и наличия границ. Описываются методы нахождения упругих и вязких характеристик веществ на основе определения скоростей звуковых волн или наблюдения резонансных явлений. Описание экспериментальных установок и практических упражнений предваряется теоретическим материалом. Сборник предназначен для обучения студентов старших курсов естественных факультетов. Кроме того, он может служить практическим пособием для лиц, заинтересованных в повышении квалификации в области акустики.

Рецензенты:

Профессор, доктор физ.-мат. наук В.П. Митрофанов  
Доцент, кандидат физ.-мат. наук В.Б. Волошинов

*Печатается по решению Ученого совета физического факультета МГУ  
им. М.В. Ломоносова*

ISBN 978–5–8279–0142–6

© А.И. Коробов, О.В. Руденко,  
О.А. Сапожников, отв. редакторы,  
2017 г.

© Физический факультет МГУ, 2017 г.

## Введение

Если в каком-либо участке упругой среды создать деформацию (например, сжать или растянуть среду), то соответствующее возмущение параметров среды не останется неизменным, а благодаря упругости и инерции среды будет передаваться соседним участкам и распространяться в среде с определённой скоростью. Такие распространяющиеся возмущения называют *акустическими волнами* [1–3]. Акустические волны с частотами от 20 до 20000 Гц относятся к слышимым, т.е. звуковым волнам. Волны с частотой ниже 20 Гц называются *инфразвуком*, а возмущения с частотами от 20 кГц до  $10^9$  Гц – *ультразвуком*. Волны более на частотах более  $10^9$  Гц называют *гиперзвуком*, в нормальных условиях они не распространяются вследствие сильного поглощения. Инфразвук и ультразвук (и, тем более, гиперзвук) не слышимы человеком. Однако в современном употреблении, особенно в физике, термин *звук* относят не только к явлениям в воздухе, связанным со слухом человека, а ко всем акустическим волнам, свойства которых основаны на одних и тех же физических принципах. Поэтому в широком смысле термины *звук* и *акустическая волна* часто не различаются.

Акустические волны могут распространяться не только в газах, но и в жидкостях и твёрдых телах. В газах и жидкостях возможен только один тип акустических волн, который связан с упругим откликом в отношении сжатия и растяжения участков среды. При этом волны являются *продольными*: частицы среды в плоской волне перемещаются вдоль направления распространения звука. В отличие от жидкостей и газов, твёрдые среды обладают упругостью по отношению к изменению не только объёма участков среды, но и их формы. Соответствующий механизм определяется сдвиговой упругостью. В результате в твёрдых телах наряду с продольными волнами распространяются и *поперечные* (или *сдвиговые*)

волны, которые распространяются примерно вдвое медленнее по сравнению с продольными волнами.

Распространение волн в твёрдых телах становится более сложным при наличии границ. В этом случае суперпозиция продольных и поперечных волн может формироваться в устойчивые возмущения, распространяющиеся в виде волн специального вида. Примерами таких волн являются упругие волны в стержнях и пластинах, а также поверхностные акустические волны.

Для исследования свойств акустических волн в физическом практикуме удобно иметь дело с такими упругими возмущениями, у которых длина волны находится в миллиметровом и сантиметровом диапазоне, чтобы волновые явления можно было наблюдать на масштабе лабораторного стола. Соответствующий диапазон относится к ультразвуковым частотам килогерцового и мегагерцового диапазона частот. В настоящем пособии рассматривается несколько лабораторных работ, иллюстрирующих основные свойства линейных акустических волн в жидкостях и твёрдых телах.

Лабораторные работы являются составной частью исследований, проводимых студентами старших курсов в специальном физическом практикуме кафедры акустики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Методические аспекты рассмотренных задач частично были разработаны на кафедре много лет назад К.М. Ивановым-Шицом, В.А. Красильниковым, Л.К. Зарембо, В.Е. Лямовым, О.Ю. Сердобольской, И.Ю. Солодовым и В.А. Буровым. Настоящее пособие отражает произошедшие за последние годы изменения как в преподавании акустики (что нашло отражение в теоретической части описаний задач), так и в усовершенствовании приборной базы практикума.

## Часть 1

# ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ЖИДКОСТЯХ

## 1.1 Уравнения для описания акустических волн

### в газах и жидкостях

Рассмотрим более подробно уравнения, описывающие свойства акустических волн в жидкостях и газах. Для описания произвольных движений таких сред используются уравнения гидродинамики [4]. Если не учитывать диссипативные процессы (приближение идеальной жидкости), то для задания состояния среды достаточно знать скорость частиц среды  $\mathbf{v}$ , давление  $p$  и плотность среды  $\rho$ . Под частицей здесь понимается элемент среды, размер которого гораздо меньше характерных масштабов изменения давления и других характеристик, но в то же время намного превышает расстояние между молекулами среды. Каждая частица, тем самым, содержит огромное количество молекул, а её скорость является средней по скоростям всех молекул, т.е. является намного меньшей их среднеквадратичной скорости. Молекулярная природа среды при этом теряется, т.е. среда рассматривается как сплошная.

Акустические волны в жидкостях и газах представляют собой возмущения давления, распространяющиеся в среде с некоторой скоростью (скоростью звука). Изменение давления сопровождается деформацией среды и возникающими при этом изменениями плотности, температуры и других термодинамических параметров. В присутствии волны частицы среды колеблются относительно своего исходного положения со скоростью  $\mathbf{v}$ , которая называется *колебательной скоростью*. Важно не путать колебательную скорость (скорость движения *частиц* среды) со скоростью звука (скоростью распространения *изменений* колебательной

скорости, давления и других параметров). Как отмечалось выше, колебательная скорость отличается также и от характерной скорости молекул среды. Для акустических возмущений величина колебательной скорости всегда гораздо меньше как скорости звука, так и среднеквадратичной скорости движения молекул.

Система уравнений гидродинамики в рамках приближения сплошной среды может быть записана в виде [4]:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p , \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (1.2)$$

$$p = p(\rho) . \quad (1.3)$$

Здесь оператор «набла»  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  задаёт дифференцирование по пространственным переменным  $x, y, z$ .

Уравнение (1.1) – это второй закон Ньютона для элемента сплошной среды. Выражение в левой части уравнения (1.1) представляет собой произведение плотности (т.е. массы элемента единичного объёма) на ускорение – полную производную скорости частицы во времени  $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ , а выражение в правой части – сила, действующая на единичный объём среды. Уравнение (1.1) называется также *уравнением Эйлера*.

Уравнение (1.2) – это закон сохранения массы с учётом сплошности среды, т.е. отсутствия в ней пустот. Чтобы отразить это обстоятельство, оно называется *уравнением непрерывности* (или *уравнением неразрывности*).

Уравнение (1.3) – это уравнение состояния. Распространение звуковой волны вызывает в среде сжатия и разрежения, сопровождаемые локальными изменениями температуры. В большинстве случаев эти

процессы происходят настолько быстро, что выравнивания температуры не происходит. Поэтому процессы сжатия и разрежения можно считать обратимыми и описывать адиабатическим уравнением состояния. Для идеального газа это уравнение имеет вид

$$p = p_0 (\rho / \rho_0)^\gamma, \quad (1.4)$$

где  $p_0$  и  $\rho_0$  – равновесные давление и плотность,  $\gamma = c_p / c_v$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объёме. В случае жидкостей вывести простое уравнение состояния из первых принципов не удаётся, поэтому вместо уравнения (1.4) обычно используют похожее на него модельное уравнение Тэта

$$p + P_* = (p_0 + P_*) (\rho / \rho_0)^\Gamma. \quad (1.5)$$

Здесь  $p_0$  и  $\rho_0$ , как и для газа, равновесные давление и плотность, постоянная  $\Gamma$  является эмпирической и в случае жидкостей уже не связана с теплоемкостями  $c_p$  и  $c_v$ . Константа  $P_*$  называется внутренним давлением жидкости. Как видно, формально при  $p = -P_*$  плотность жидкости стремится к нулю, т.е. внутреннее давление имеет смысл характерного давления, удерживающего молекулы жидкости вместе. Для воды найденные из измерений значения констант составляют  $\Gamma \approx 7$  и  $P_* \approx 3 \cdot 10^8$  Па. Заметим, что при  $P_* = 0$  уравнение (1.5) переходит в уравнение (1.4), т.е. модельное уравнение Тэта при нулевом внутреннем давлении совпадает с уравнением адиабаты идеального газа.

Для получения из системы (1.1) – (1.3) уравнения для акустических волн предположим, что исходное равновесное состояние с параметрами  $p_0$ ,  $\rho_0$  и  $\mathbf{v}_0 = 0$  испытывает возмущение:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'. \quad (1.6)$$

Подставим выражения (1.6) в систему (1.1) – (1.3). Уравнения примут более громоздкий вид, но в них появятся в явном виде члены, линейные по возмущениям  $p'$ ,  $\rho'$  и  $\mathbf{v}'$ , слагаемые пропорциональные  $\rho'^2$ ,  $\mathbf{v}'^2$  и  $\rho'\mathbf{v}'$  (т.е. квадратичные по возмущениям), а также нелинейные члены более высоких степеней.

Предположим, что возмущения  $p'$ ,  $\rho'$  и  $\mathbf{v}'$  малы (оправданность такого допущения пояснена ниже). Тогда нелинейные по возмущениям члены имеют более высокий порядок малости по сравнению с линейными и поэтому в первом приближении могут быть отброшены. В результате такой процедуры, которая называется *линеаризацией*, исходная система уравнений принимает более простой вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' , \quad (1.1-л)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' = 0 , \quad (1.2-л)$$

$$p' = c^2 \rho' . \quad (1.3-л)$$

При линеаризации уравнения состояния (1.3) введено обозначение:

$$c^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} . \quad (1.7)$$

Как будет видно из дальнейшего, величина  $c$ , имеющая размерность скорости, является скоростью звука.

Анализ отброшенных при линеаризации нелинейных членов показывает, что использование предположение о малости  $p'$ ,  $\rho'$  и  $\mathbf{v}'$  фактически означает  $|p'| \ll \rho_0 c^2$ ,  $|\rho'| \ll \rho_0$  и  $|\mathbf{v}'| \ll c$ . Эти условия на практике выполняются с запасом даже для очень интенсивных акустических волн, что и оправдывает проведённую линеаризацию.

Для сведения системы (1.1-л) – (1.3-л) к одному уравнению удобно учесть (1.3-л) и исключить переменную  $\rho'$ . Тогда вместо (1.1-л) и (1.2-л) получаются следующие соотношения:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = 0, \quad (1.8)$$

$$\rho_0 \nabla \mathbf{v}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = 0. \quad (1.9)$$

Если подействовать на (1.8) оператором пространственного дифференцирования набла  $\nabla$  (т.е. вычислить дивергенцию), соотношение (1.9) продифференцировать по времени, а затем вычесть результаты друг из друга, то придём к следующему уравнению для возмущения давления:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \quad (1.10)$$

Здесь  $\Delta = \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа. Как будет пояснено в следующем параграфе, получившееся уравнение имеет своим решением акустические волны.

## 1.2 Скорость распространения волны

Прежде чем продолжать описывать акустические возмущения, рассмотрим некоторые свойства волн общего вида. Одной из важных характеристик любых волн является скорость – расстояние, проходимое ими за единицу времени. Численные значения скоростей волн разной природы могут сильно отличаться. Например, скорость волн метровой длины на поверхности воды составляет около 1 м/с, скорость акустических волн в жидкостях имеет порядок  $10^3$  м/с, а скорость света в вакууме равна  $3 \cdot 10^8$  м/с. Величина скорости волны определяется конкретным физическим

механизмом поддержания волнового движения и поэтому служит важным диагностическим параметром при исследовании сред.

Из того факта, что волна распространяется с постоянной скоростью, может быть выведено уравнение для описания пространственно-временной эволюции волны. Покажем это. Пусть  $u$  – параметр, характеризующий волновой процесс. Для простоты рассмотрим одномерные (плоские) волны, для которых функция  $u$  зависит только от одной пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ :  $u = u(x, t)$ . Если волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $c$ , имеет в начальный момент  $t = 0$  профиль  $u = u(x, 0) = U_+(x)$ , то в другие моменты времени профиль сдвинется вдоль оси  $x$  на расстояние  $ct$ , т.е. примет вид

$$u(x, t) = U_+(x - ct) . \quad (1.11)$$

Указанная запись отражает тот простой факт, что для наблюдателя, движущегося со скоростью волны, профиль волны неизменен. Точно так же можно показать, что при распространении волны в противоположном направлении (т.е. со скоростью  $-c$ ) профиль волны имеет вид  $u(x, t) = U_-(x + ct)$ . Поэтому в общем случае, когда допускаются волны обоих направлений,  $u(x, t) = U_+(x - ct) + U_-(x + ct)$ . Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что независимо от вида функций  $U_{\pm}(x)$  это общее выражение для профиля волны  $u$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) называется *классическим волновым уравнением для недиспергирующих волн* или просто *классическим волновым уравнением* [5].

Можно показать, что решение в виде волн  $u(x, t) = U_+(x - ct) + U_-(x + ct)$  является общим решением этого уравнения. Поэтому если теоретический

анализ какого-либо физического процесса приводит к уравнению вида (1.12), то сразу можно заключить, что решение имеет вид волн, сохраняющих свою форму по мере распространения. Коэффициент  $c$ , входящий в это уравнение, является не чем иным, как скоростью этих волн.

Выведенное в предыдущем разделе уравнение для акустического давления (1.10) имеет вид классического волнового уравнения, обобщённого на 3-мерный случай. Если рассматривать одномерные движения, то  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$ , т.е. приходим к уравнению (1.12), где в качестве функции  $u(x, t)$  выступает акустическое давление:  $u = p'$ . Таким образом, введённая в (1.7) величина  $c$  действительно есть скорость распространения волны, т.е. скорость звука.

Важным частным случаем волновых возмущений являются гармонические волны, т.е. волны с синусоидальным профилем. Зная поведение таких волн, можно рассчитать характеристики волны произвольной формы, поскольку любая ограниченная функция представима в виде суперпозиции гармонических функций (теорема Фурье). Решение для бегущей волны (1.11) в случае гармонического пространственного профиля  $U_+(x) = A \cos(kx - \varphi_0)$  принимает вид:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) . \quad (1.13)$$

Постоянная величина  $A > 0$ , характеризующая диапазон изменения волновой функции  $u$  (от  $-A$  до  $+A$ ), называется *амплитудой волны*, аргумент тригонометрической функции

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0 . \quad (1.14)$$

называется *фазой волны*, а  $\varphi_0$  – начальной фазой. Фаза является безразмерной величиной и обычно измеряется в радианах. Величина  $\omega$  называется *циклической частотой*, а её пространственный аналог  $k$  – *волновым числом*. Смысл указанных величин становится ясным, если

записать выражение для профиля волны (1.13) в виде  $u(x, t) = A \cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda + \varphi_0)$ . Как видно,  $u(x, t + T) = u(x, t)$ ,  $u(x + \lambda, t) = u(x, t)$ , т.е.  $T$  – период волны во времени, или просто *период волны*, а  $\lambda$  – период волны в пространстве, или *длина волны*. Таким образом, циклическая частота определяется периодом волны или её частотой  $f = 1/T$ :  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ , а волновое число выражается через длину волны:  $k = 2\pi/\lambda$ .

Из сравнения выражений (1.11) и (1.13) следует связь скорости гармонической волны с циклической частотой и волновым числом:

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.15)$$

### 1.3 О связи скорости звука с параметрами среды

Тот факт, что скорость акустических волн оказалась напрямую связанной с уравнением состояния  $p(\rho)$  формулой (1.7), позволяет использовать измерение скорости звука для изучения термодинамических свойств среды. С учётом того, что изменение объёма среды происходит без теплообмена, т.е. при постоянной энтропии, выражение для скорости звука правильнее писать с использованием обозначений, принятых в термодинамике:

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (1.16)$$

где нижний индекс указывает на постоянство энтропии. Предполагается также, что производная (1.16) вычисляется при равновесных значениях термодинамических параметров, т.е. при  $\rho = \rho_0$ .

Наиболее просто связать скорость звука с термодинамическими параметрами вещества в случае газов. Действительно, если исходить из модели идеального газа, то из адиабатического уравнения состояния (1.4) получается следующее выражение для квадрата скорости звука (1.7):

$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (1.17)$$

Измерив скорость звука и зная равновесные значения плотности и давления, отсюда можно найти отношение теплоёмкостей  $\gamma = c_p / c_v$  данного газа.

Из уравнения состояния газа  $\frac{p}{\rho} = \frac{k_B T}{m}$  ( $k_B$  - постоянная Больцмана,  $m$  – масса молекулы) следует, что скорость звука в идеальном газе зависит лишь от его абсолютной температуры:  $c = \sqrt{\frac{\gamma k_B}{m} T} \sim \sqrt{T}$ , а не от давления или плотности как таковых. Как видно, при нагреве газа скорость звука возрастает. Интересно также сравнить значение скорости звука с характерными значениями скорости движения молекул газа. Как известно из молекулярно-кинетической теории, среднеквадратичное значение скоростей молекул идеального газа составляет  $V_{c.кв.} = \sqrt{\frac{3k_B}{m} T}$ , что с точностью до константы порядка единицы совпадает со скоростью звука:  $V_{c.кв.} = c\sqrt{3/\gamma} \sim c$ . Такое совпадение не является случайным. Оно отражает тот факт, что именно посредством хаотически движущихся и соударяющихся молекул происходит передача импульса и энергии в среде – процесс, который на макроскопическом уровне имеет вид распространяющихся со скоростью звука акустических возмущений.

Для описания микроскопического строения жидкостей не существует простой модели типа модели идеального газа. Жидкость отличается от газов тем, что она является конденсированной средой, взаимодействие молекул

которой очень существенно. В то же время, в отличие от твёрдых тел, в жидкости отсутствует дальний порядок. Поэтому многие свойства жидкости не удаётся объяснить из первых принципов, и приходится зачастую руководствоваться эмпирическими моделями типа упомянутого выше уравнения Тэта. Анализ свойств воды (в известном смысле самой важной жидкости) провести ещё сложнее, т.к. многие её свойства отличаются от свойств других жидкостей. Тем не менее измерение скорости звука как функции температуры и давления находит применение и при проверке моделей строения жидкостей. Такая проверка основана на общих термодинамических соотношениях, выполняющихся независимо от конкретного вида среды.

Если исходить из уравнения Тэта (1.5), то выражение для скорости звука примет вид:  $c^2 = \Gamma(p_0 + P_*)/\rho_0 \approx \Gamma P_*/\rho_0$ , т.е. при известной плотности находится величина  $\Gamma P_* = \rho_0 c^2$ . Если параметр  $\Gamma$  найден из независимых измерений, например, на основе анализа нелинейных акустических эффектов, то измерение скорости звука тем самым позволяет определить величину внутреннего давления  $P_*$ , т.е. получить представление о том, как велико притяжение молекул жидкости друг к другу.

Выражение (1.16) на самом деле не зависит от конкретной модели жидкости или газа, т.е. может быть использовано для экспериментальной проверки следствий различных моделей. Раздел акустики, в котором на основе измерения акустических параметров – скорости распространения и коэффициента поглощения звука – исследуются особенности молекулярной и атомной структуры вещества, называется *молекулярной акустикой*. При исследованиях, как правило, используются акустические волны ультразвукового диапазона. Вычисляя скорость звука на основе той или иной модели и сравнивая результаты расчёта с опытными данными, в ряде

случаев можно оценить правдоподобность используемой модели и определить энергию взаимодействия молекул. На скорость звука влияют особенности молекулярной структуры, силы межмолекулярного взаимодействия и плотность упаковки молекул. Так, например, увеличение плотности упаковки молекул, появление водородных связей, полимеризация приводят к увеличению скорости звука, а введение в молекулу тяжёлых атомов – к её уменьшению. Отметим, что скорость звука может быть определена экспериментально как функция температуры и давления. Кроме того, может быть измерено поведение скорости звука в зависимости от других параметров среды, например, от относительного содержания компонент в смесях различных жидкостей, концентрации растворённых веществ и т.д. Дополнительную информацию дают измерения дисперсии – зависимости скорости звука от частоты. Результаты таких измерений для многих веществ можно найти в справочниках [6].

Наряду с использованием скорости звука для измерения структурных особенностей вещества, чувствительность скорости звука к параметрам среды может быть использована для измерения указанных параметров. Например, с использованием известной температурной зависимости скорости звука осуществляется мониторинг средней температуры различных участков Мирового океана, при этом удаётся регистрировать изменения температуры менее десятых долей градуса.

## 1.4 Методы измерения скорости звука в жидкостях

Существует несколько методов определения скорости распространения звуковых волн в жидкостях [8]. Методы можно подразделить на резонансные методы, метод интерферометра, импульсные методы, оптические методы (с использованием явления дифракции света на ультразвуке) и некоторые другие [9]. Наибольшую точность можно получить, используя импульсно-фазовые методы. Оптические методы позволяют измерить скорость волн на гиперзвуковых частотах, вплоть до  $10^{11} - 10^{12}$  Гц. Точность измерения скорости звука зависит от того, надо ли получить её абсолютные значения, или же можно ограничиться относительными измерениями скорости звука при изменении каких-либо внешних параметров, например, в зависимости от температуры или же в зависимости от наличия примесей. Точность  $\Delta c/c$  абсолютных измерений на лучшей аппаратуре составляет около  $10^{-5}$ , тогда как точность относительных изменений гораздо выше, она достигает величины порядка  $10^{-7}$ .

Рассмотрим два возможных подхода к измерению скорости звука.

### 1.4.1 Импульсный метод

Метод основан на выражении (1.11) для плоской бегущей волны произвольной формы. Его можно переписать в виде:

$$u(x, t) = F(t - t_{\text{зад}}), \quad (1.18)$$

где введено время задержки, т.е. время, которое волна затрачивает на прохождение расстояния  $x$ :

$$t_{\text{зад}} = \frac{x}{c}. \quad (1.19)$$

Таким образом, скорость звука может быть найдена на основе измеренной задержки, в чем и состоит суть метода.

Задержка не всегда может быть измерена однозначно. Например, если волна является гармонической, то задержка может быть определена лишь тогда, когда она не превышает одного периода волны (см. рис. 1.1). В противном случае возникает неопределённость, поскольку внесение задержки в целое число периодов не меняет вида синусоидального сигнала. Когда волновое возмущение длится бесконечно долго, без пропусков, его принято называть *непрерывной волной* (в английской литературе используется термин *continuous wave*, сокращённо *CW*). Примером такой волны является синусоидальная волна. Альтернативой непрерывной волне является импульсное возбуждение, когда волна имеет чёткую локализацию во времени (и, как следствие, в пространстве). Для реализации метода измерения скорости звука по задержке используется именно импульсный режим, при котором неопределённость во времени запаздывания отсутствует.

#### **1.4.2 Фазовые методы. Способы измерения сдвига фаз.**

##### ***Метод фигур Лиссажу***

Скорость гармонической волны может быть найдена на основе измерения фазы волны. Как отмечалось ранее, фаза плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , имеет вид (1.14):  $\varphi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0$ . Фаза волны на источнике (при  $x=0$ ) равна  $\varphi(0, t) = \omega t + \varphi_0$ . Как видно, разность фаз  $\Phi$  между сигналами источника и приёмника не зависит от времени и является весьма простой функцией расстояния и частоты:

$$\Phi(x, f) = \varphi(0, t) - \varphi(x, t) = kx = \frac{2\pi}{c} \cdot f \cdot x . \quad (1.20)$$

Из формулы (1.20) видно, что разность фаз  $\Phi$  линейно зависит и от расстояния  $x$ , и от частоты  $f$ , причём скорость роста фазы обратно пропорциональна скорости волны  $c$ . Отсюда следуют две возможности нахождения скорости:

- 1) При фиксированной известной частоте измеряется зависимость сдвига фаз  $\Phi$  в зависимости от расстояния  $x$  и из наклона получившейся прямой  $\partial\Phi/\partial x = 2\pi f/c$  находится скорость  $c$ .
- 2) На известном расстоянии  $x$  между источником и приёмником измеряется зависимость сдвига фаз  $\Phi$  от частоты  $f$  и из наклона получившейся прямой ( $\partial\Phi/\partial f = 2\pi x/c$ ) находится скорость  $c$ .

Для измерения разности фаз между двумя синусоидальными колебаниями (например, сигналами источника и приёмника) можно использовать различные способы. Рассмотрим самые простые из них, основанные на анализе изображений сигналов на экране осциллографа. Пусть имеется два сигнала:

$$U_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) , \quad (1.21)$$

$$U_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) . \quad (1.22)$$

Указанные зависимости изображены на рис. 1.1. Поскольку указанные гармонические сигналы имеют разные амплитуды, то нельзя считать, что

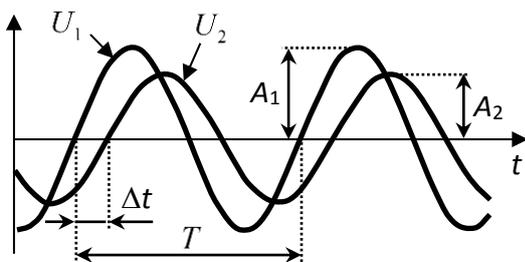


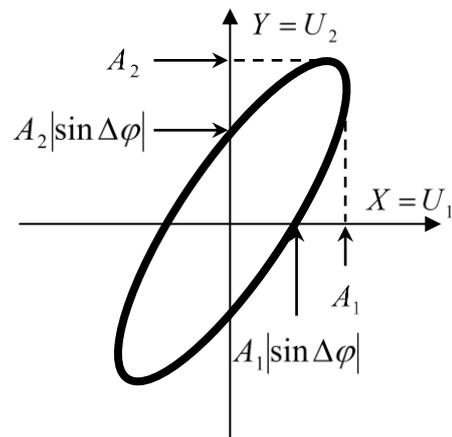
Рис. 1.1

они отличаются друг от друга просто сдвигом по времени. Однако точки одинаковой фазы, например, нули указанных функций, отличаются друг от друга лишь сдвигом по времени  $\Delta t$ . Если выражение для второго сигнала записать в виде

$U_2 = A_2 \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_1]$ , то из сравнения с выражением (1.22) можно заключить, что фазовый сдвиг напрямую связан с временным сдвигом:  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega \Delta t$ . С учётом того, что период волны составляет  $T = 2\pi/\omega$ , фаза может быть найдена чисто графическим способом по отношению временных интервалов на осциллограмме (рис. 1.1):  $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \Delta t/T$ .

Другой графический способ основан на сравнении двух сигналов путём рассмотрения замкнутой траектории, прочерчиваемой изображающей точкой на плоскости, когда абсцисса точки равна  $X = U_1(t)$ , а ордината  $Y = U_2(t)$ .

Впервые такие траектории были изучены французским математиком Ж. Лиссажу (Jules Antoine Lissajous, 1822–1880), который показал, что вид фигур зависит от соотношения между частотами, фазами и амплитудами сигналов. В интересующем нас



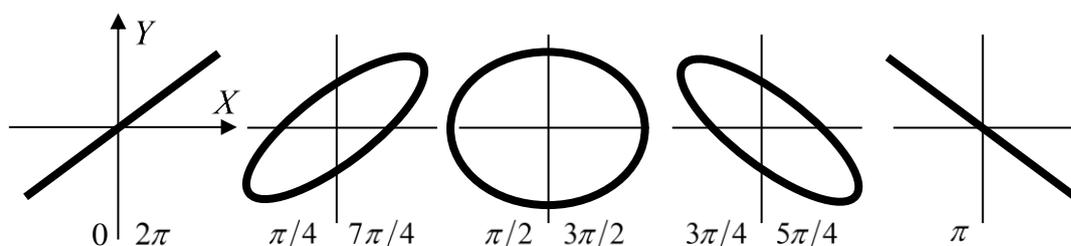
**Рис. 1.2.** Фигура Лиссажу в случае одинаковых частот сравниваемых гармонических сигналов  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$

простейшем случае одинаковых частот фигура Лиссажу представляет собой эллипс. Это нетрудно показать из выражений (1.21) и (1.22), если путём тригонометрических преобразований исключить время:

$$\left(\frac{U_1}{A_1}\right)^2 - 2\frac{U_1}{A_1}\frac{U_2}{A_2}\cos\Delta\varphi + \left(\frac{U_2}{A_2}\right)^2 = \sin^2\Delta\varphi.$$

Получившаяся кривая на плоскости  $(X, Y) = (U_1, U_2)$  является наклонённым эллипсом. По его характерным точкам находятся амплитуды колебаний и сдвиг фаз между ними (рис. 1.2).

Метод измерения сдвига фаз  $\Delta\varphi$  по виду фигуры Лиссажу становится особенно простым, если при проведении измерений величина  $\Delta\varphi$  изменяется в широком диапазоне и достаточно фиксировать изменение  $\Delta\varphi$  на целое число  $\pi$ . Действительно, если разность фаз равна  $\Delta\varphi = \pi n$  ( $n$  – целое число), то эллипс независимо от значения амплитуд сигналов вырождается в отрезок прямой линии (рис. 1.2). Если фаза изменяется на величину  $2\pi$ , то фигура Лиссажу делает полный оборот, т.е. если в исходном положении приёмника установить фигуру Лиссажу в виде отрезка, то при изменении фазы сигнала на  $2\pi$  она вновь примет вид того же отрезка (рис. 1.3).



**Рис. 1.3.** Фигуры Лиссажу при различном сдвиге фаз  $\Delta\varphi$  (указан под фигурами)

Рассмотрим особенности применения метода фигур Лиссажу для измерения скорости звука упомянутыми выше двумя возможными способами, основанными на анализе сдвига фаз  $\Phi$  между сигналами источника и приёмника. Количество полных оборотов фигур Лиссажу составит  $N = \Phi/(2\pi)$ .

*В первом способе используется перемещение приёмника при фиксированной частоте волны.* Если при перемещении приёмника из одной точки в другую эллипс совершает  $N$  оборотов, то согласно формуле (1.20) величина пространственного сдвига приёмника  $\Delta x$  связана с  $N$  следующим образом:

$$\Delta x = c \cdot N / f, \quad (1.23)$$

Таким образом, если изменять расстояние между источником и приёмником и регистрировать соответствующие сдвиги  $\Delta x$  в точках полного оборота фигуры Лиссажу, то из наклона получившейся линейной зависимости  $\Delta x(N)$  найдётся скорость звука. Отметим, что формула (1.23) может быть записана в виде  $\Delta x = \lambda \cdot N$ , где  $\lambda = c/f$  – длина волны, т.е. полный оборот фигуры Лиссажу происходит при сдвиге на одну длину волны, как и должно быть, поскольку длина волны является пространственным периодом волны.

*Второй способ основан на изменении частоты при фиксированном расстоянии.* Если проводить измерение фазы методом фигур Лиссажу, то следует использовать вытекающую из (1.20) формулу, связывающую число полных оборотов фигуры Лиссажу с частотой:

$$f = c \cdot N/x , \quad (1.24)$$

В эксперименте следует регистрировать значения частот, при достижении которых фигура Лиссажу делает целое число полных оборотов. Из наклона получившейся линейной зависимости  $f(N)$  с учётом известного расстояния  $x$  между источником и приёмником найдётся скорость звука. На практике могут возникнуть мешающие факторы, не учтённые в нашем упрощённом рассмотрении. Дело в том, что измеряемыми сигналами являются не непосредственно параметры акустической волны в среде, а электрические сигналы на источнике и приёмнике. В силу разных факторов, одним из которых является резонансный характер электроакустического преобразования в пьезопластинах, между электрическими и акустическими сигналами может возникнуть частотно-зависимый фазовый сдвиг. Поэтому для повышения точности измерений следует работать в диапазоне частот, не слишком близких к резонансным частотам источника и приёмника.

## 1.5 Фазовый метод измерения скорости продольных волн в твёрдых телах при прохождении звука через тонкую пластину, помещённую в жидкость

Акустические волны, распространяющиеся в жидкости, могут быть использованы для измерения скорости звука в помещённых в неё объектах. Пусть, например, на пути распространения гармонической волны между источником и приёмником находится плоскопараллельная пластина толщины  $L$ , ориентированная перпендикулярно направлению распространения волны. После прохождения пластины волна приобретает дополнительный набег фаз по сравнению со случаем отсутствия пластины. Указанный фазовый сдвиг зависит от скорости звука в пластине и, следовательно, может быть использован для нахождения указанной скорости.

Чтобы получить выражение для фазового сдвига, рассмотрим волны в жидкости и упругом слое (рис. 1.4). При нормальном падении на слой возникает отражённая волна. Из-за отражения от границ пластины внутри неё возникает две продольные волны противоположного направления. Справа от жидкости имеется лишь одна (прошедшая) волна.

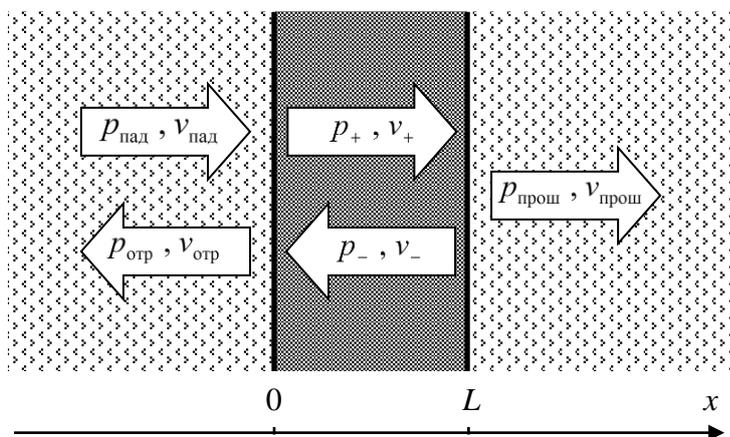


Рис. 1.4. Волны, распространяющиеся в жидкости и пластине

Из уравнений (1.8) и (1.9) можно получить, что в плоской бегущей волне акустическое давление  $p'$  и колебательная скорость  $v'$  связаны соотношением  $p'/v' = \pm \rho c$ , где  $\rho$  и  $c$  – плотность и скорость звука в среде, знаки «+» и «-»

соответствует волнам, распространяющимся вправо и влево, соответственно. Произведение  $z = \rho c$  называется акустическим импедансом среды. Если для описания гармонической волны использовать комплексное представление  $\sim \exp(-i\omega t + ikx)$ , то акустическое давление и колебательная скорость для пяти волн, показанных на рис. 1.4, запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 p_{\text{пад}} &= P_{\text{пад}} \exp(-i\omega t + ikx), & v_{\text{пад}} &= \frac{P_{\text{пад}}}{z} \exp(-i\omega t + ikx), \\
 p_{\text{отр}} &= P_{\text{отр}} \exp(-i\omega t - ikx), & v_{\text{отр}} &= -\frac{P_{\text{отр}}}{z} \exp(-i\omega t - ikx), \\
 p_{+} &= P_{+} \exp(-i\omega t + ik_*x), & v_{+} &= \frac{P_{+}}{z_*} \exp(-i\omega t + ik_*x), \\
 p_{-} &= P_{-} \exp(-i\omega t - ik_*x), & v_{-} &= -\frac{P_{-}}{z_*} \exp(-i\omega t - ik_*x), \\
 p_{\text{прош}} &= P_{\text{прош}} \exp(-i\omega t + ikx), & v_{\text{прош}} &= \frac{P_{\text{прош}}}{z} \exp(-i\omega t + ikx).
 \end{aligned}$$

Индекс «\*» помечает параметры материала пластины:  $k_* = \omega/c_*$ ,  $z_* = \rho_* c_*$ ,  $\rho_*$  и  $c_*$  – плотность и скорость звука в пластине. Граничными условиями на сторонах пластины  $x=0$  и  $x=L$  является равенство скоростей и давлений. В результате приходим к системе 4-х линейных уравнений для нахождения 4-х неизвестных комплексных амплитуд  $P_{\text{отр}}$ ,  $P_{+}$ ,  $P_{-}$  и  $P_{\text{прош}}$ :

$$\begin{cases}
 P_{\text{пад}} + P_{\text{отр}} = P_{+} + P_{-} ; & \frac{P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}}}{z} = \frac{P_{+} - P_{-}}{z_*} , \\
 P_{+} \exp(ik_*L) + P_{-} \exp(-ik_*L) = P_{\text{прош}} \exp(ikL) , \\
 \frac{P_{+} \exp(ik_*L) - P_{-} \exp(-ik_*L)}{z_*} = \frac{P_{\text{прош}}}{z} \exp(ikL) .
 \end{cases} \quad (1.25)$$

Отсюда для амплитуды прошедшей волны  $P_{\text{прош}} = T_p \cdot P_{\text{пад}}$  получим следующий коэффициент прохождения по давлению:

$$T_p = \frac{4 \frac{z}{z_*} \exp(-ikL)}{\left(1 + \frac{z}{z_*}\right)^2 \exp(-ik_*L) - \left(1 - \frac{z}{z_*}\right)^2 \exp(ik_*L)}. \quad (1.26)$$

Коэффициент прохождения является комплексной величиной  $T_p = |T_p| \cdot \exp(-i\Phi)$ , где  $\Phi$  – дополнительный набег фазы волны, обусловленный присутствием слоя. Из выражения (1.26) следует:

$$\text{tg}(kL - \Phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z_*} + \frac{z_*}{z} \right) \text{tg}(k_*L). \quad \text{Учитывая используемые обозначения,}$$

получившееся выражение можно переписать в виде трансцендентного уравнения, позволяющего выразить искомую скорость продольных волн в материале слоя  $c_*$  через возникший из-за наличия слоя фазовый сдвиг  $\Phi$  в предположении, что параметры жидкости  $\rho$  и  $c$ , толщина пластины  $L$ , плотность твёрдого тела  $\rho_*$  и частота волны  $f$  – известные величины:

$$F(c_*) \equiv \left( \frac{\rho c}{\rho_* c_*} + \frac{\rho_* c_*}{\rho c} \right) \text{tg} \left( \frac{2\pi f}{c_*} L \right) - 2 \text{tg} \left( \frac{2\pi f}{c} L - \Phi \right) = 0. \quad (1.27)$$

Отметим, что поскольку  $\text{tg}(2\pi f L/c_*)$  является периодической функцией, то функция  $F(c_*)$  имеет, вообще говоря, бесконечное количество нулей. Указанная многозначность пропадает, если выполняется условие  $2\pi f L/c_* < \pi$ , т.е. толщина исследуемого слоя не превышает  $\lambda_*/2$ , где  $\lambda_* = c_*/f$  – длина продольной упругой волны в материале пластины.

## 1.6 Описание экспериментальной установки

Перейдём к рассмотрению экспериментальной части лабораторной работы. Схема установки приведена на рис. 1.5. Установка представляет собой ванну (В), наполненную водой, в торцевую стенку которой встроен источник ультразвука (И). Источником является круглая пьезокерамическая пластина диаметром 30 мм, к противоположным сторонам которой от генератора (Г) прикладывается электрическое напряжение с частотой, изменяемой в диапазоне 0.7 –

1.3 МГц. За счёт обратного пьезоэффекта под действием меняющегося напряжения пластина испытывает колебание по толщине и, как следствие, сжимает и растягивает граничащие с ней слои жидкости, вызывая появление квазиплоских ультразвуковых волн. На некотором расстоянии от источника расположен

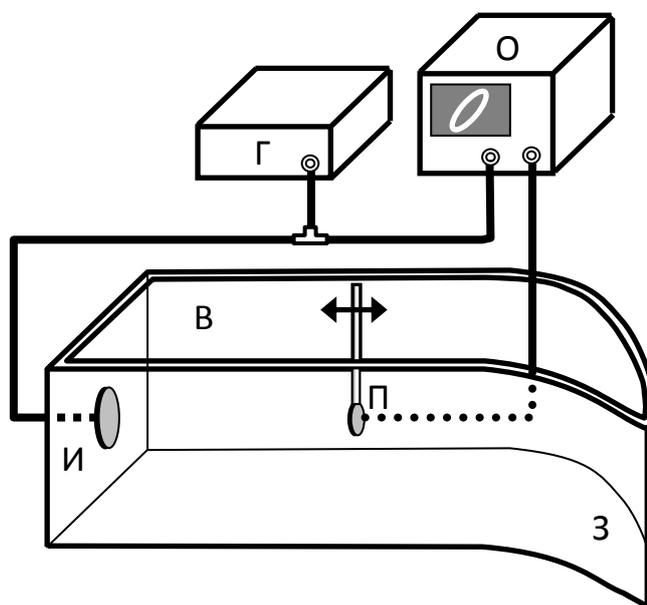
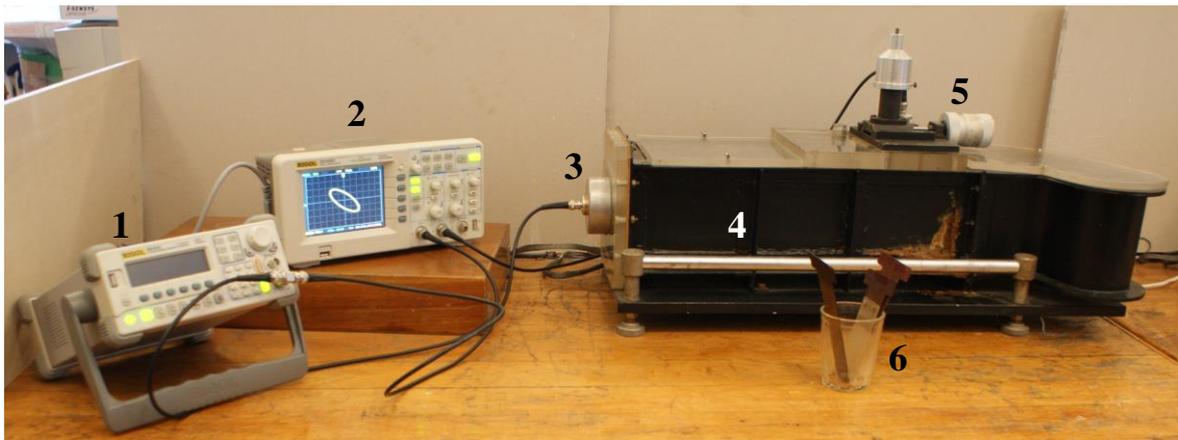


Рис. 1.5. Схема экспериментальной установки

приёмник (П). Он представляет собой круглую пьезокерамическую пластину диаметром 18 мм. Плоскость приёмника ориентирована параллельно волновому фронту падающей на него волны. Под действием переменного давления приходящей ультразвуковой волны приёмная пластина испытывает сжатия и растяжения, и в результате прямого пьезоэффекта между обкладками возникает электрическое напряжение, пропорциональное акустическому давлению падающей на приёмник волны. Электрический сигнал приёмника поступает на осциллограф (О). Фотография установки приведена на рис. 1.6.



**Рис. 1.6.** Фотография экспериментальной установки: 1 – генератор сигналов, 2 – осциллограф, 3 – ультразвуковой источник, 4 – ванна с водой, 5 – микрометрическая подача, 6 – твердотельные пластины

Отметим, что ультразвуковые волны довольно слабо поглощаются в воде. На частоте 1 МГц амплитуда волны заметно затухает лишь на расстоянии нескольких десятков метров. Если не принять специальных мер, то в ванне небольших размеров возникнет реверберация (многократные переотражения волны от стенок ванны), т.е. волновое поле будет представлять суперпозицию волн разных направлений, и измерение скорости волны станет затруднительным. Чтобы избежать реверберации, противоположный от источника торец ванны изготовлен в виде закручивающегося и сужающегося канала, стенки которого покрыты поглощающей ультразвук резиной. Такой канал играет роль акустической заглушки (помеченной буквой 3 на рис. 1.5), т.к. попадающая в него волна претерпевает многократные отражения от резиновых стенок и поэтому быстро затухает.

Приёмник опускается в воду через прорезь в крышке ванны и зажимается держателем. С помощью микрометрического винта вместе с держателем он может перемещаться вдоль направления звукового пучка. Скорость звука в воде зависит от температуры. Поскольку температура воды может отличаться от комнатной, для ее измерения предусмотрен термометр.

Описание режимов работы и подключения генератора и осциллографа приведено в Приложении 1.1. Перед включением приборов рекомендуется ознакомиться с расположением органов управления на передней панели осциллографа (рис. 1.7) и генераторе (рис. 1.8).

## 1.7 Описание заданий

### УПРАЖНЕНИЕ 1. Определение скорости звука в воде фазовым методом с помощью перемещения приёмника

Измерения проводятся последовательно для пяти частот звуковой волны: 0.8, 0.9, 1.0, 1.1 и 1.2 МГц.

1. Включить аппаратуру (см. Приложение 1.1).
2. Установить рабочую частоту генератора 0.8 МГц.
3. Установить приёмник в нулевое положение шкалы микрометра. Далее переместить приёмник в направлении от излучателя до установления прямолинейной фигуры Лиссажу (см. описание процедуры в Приложении 1.1). Записать показания микрометра  $x_0$ .
4. Продолжить перемещение приёмника в том же направлении (этим исключается люфт микрометра) до тех пор, пока фигура Лиссажу не совершит полный оборот и примет прежний прямолинейный вид. При этом разность фаз изменится на  $2\pi$ , т.е. приёмник сместится на одну длину волны. Записать показания микрометра  $x_1$ . Вновь продолжить перемещение приёмника и провести аналогичные измерения  $x_N$  ( $N = 2, 3, \dots$ ) вплоть до  $N = 10$  оборотов фигуры Лиссажу.
5. Выполнить аналогичные измерения для частот 0.9, 1.0, 1.1 и 1.2 МГц.

Результаты представить в таблице:

Номер измерения $N$	Показания микрометра (мм)	Частота $f$ (МГц)				
		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
0	$x_0$ ,					
1	$x_1$					
...	...					
10	$x_{10}$					

6. Для каждой из частот оценить скорость звука исходя из данных измерений на минимальном и максимальном расстоянии между излучателем и приёмником (т.е. на основе  $x_0$  и  $x_{10}$  :). Использовать формулу (1.27):  $c = \Delta x \cdot f / N$  при  $\Delta x = x_{10} - x_0$  и  $N=10$ .

7. Для каждой из частот построить график  $\Delta x(N)$ , где  $\Delta x = x_N - x_0$  – сдвиг приёмника относительно исходного положения,  $N = 0, 1, \dots, 10$  – соответствующее число оборотов фигуры Лиссажу. Используя метод наименьших квадратов (см. Приложение 1.2), провести прямую, рассчитать среднее значение, стандартное отклонение и относительную ошибку измерений скорости звука.

## **УПРАЖНЕНИЕ 2. Определение скорости звука в воде фазовым методом с помощью изменения частоты**

Измерения проводятся для трёх расстояний между излучателем и приёмником, соответствующих положению 0, 10 мм и 20 мм по шкале микрометра, в диапазоне изменения частот 1150 – 1250 кГц. В общем случае при этом получается некоторое среднее значение  $c$  в рабочем диапазоне частот, но в отсутствие дисперсии мы приходим к обычному значению скорости звука. Убедиться в отсутствии дисперсии на основании полученных в 1-м упражнении оценок скорости звука для нескольких частот.

1. Установить приёмник в нулевое положение шкалы микрометра, предварительно выбрав люфт в направлении от излучателя. Это положение соответствует расстоянию  $x = 375$  мм между излучателем и приёмником.
2. Установить рабочую частоту генератора 1.15 МГц, затем плавно (см. Приложение 1.1) увеличивать частоту до установления прямолинейной фигуры Лиссажу; записать полученную частоту  $f_0$ .
3. Увеличивать частоту до прохождения  $N = 10$  полных оборотов фигуры Лиссажу, записывать показания частоты после каждого оборота.
4. Повторить измерения для положения приемника 10 мм и 20 мм по шкале микрометра (т.е. для расстояний между источником и приёмником, равных  $x = 385$  мм и 395 мм). Устанавливать положение приёмника, перемещая его в направлении от излучателя (для компенсации люфта). Результаты представить в следующей таблице:

Номер измерения $N$	Частота (МГц)	Положение приёмника по шкале микрометра		
		0	10 мм	20 мм
0	$f_0$ ,			
1	$f_1$			
...	...			
10	$f_{10}$			

5. Оценить скорость звука для каждого из расстояний  $x$  по данным измерений на минимальной  $f_0$  и максимальной частотах  $f_{10}$ , используя формулу (1.28):  $c = \Delta f \cdot x / N$ ,  $\Delta f = f_{10} - f_0$ , где  $N = 10$  – число оборотов.

6. Для каждого из расстояний  $x$  построить график  $\Delta f(N)$ , где  $\Delta f = f_N - f_0$  – сдвиг частоты относительно начального значения,  $N = 0, 1, \dots, 10$  – соответствующее число оборотов фигуры Лиссажу. Используя метод наименьших квадратов, провести прямую, рассчитать среднее значение, стандартное отклонение и относительную ошибку измерений скорости звука.

### **УПРАЖНЕНИЕ 3. Определение скорости звука в твёрдых телах способом компенсации**

Измерения проводятся для трёх тонких пластин из различных материалов: плексиглас, гетинакс и целлулоид. Нижняя часть каждой пластины имеет форму клина, поэтому, вынимая пластину, можно проследить, в каком направлении происходит поворот фигуры Лиссажу. Физические параметры пластин, необходимые для расчётов, приведены в таблице. Плотность воды

считать равной  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ , а для скорости звука  $c$  использовать значение, полученное в упражнении 1.

	оргстекло	гетинакс	целлулоид
плотность $\rho_*$	1.3 г/см <sup>3</sup>	1.25 г/см <sup>3</sup>	1.4 г/см <sup>3</sup>
толщина $L$	2 мм	1.45 мм	0.52 мм

1. Выбрать рабочую частоту генератора 0.8 МГц. Опустить пластину исследуемого материала в воду через специальную прорезь в крышке ванны. После этого необходимо выждать некоторое время для уравнивания температур воды и пластины.
2. Установить приёмник в максимальное положение шкалы микрометра, предварительно выбрав люфт в направлении к излучателю. Перемещением приёмника установить фигуру Лиссажу в виде прямой линии, после чего пластину вынуть. Убедиться, что угол поворота фигуры не превосходит  $\pi$ . Перемещая приёмник, скомпенсировать возникший сдвиг фазы путём восстановления исходной Лиссажу. Компенсирующее перемещение  $\Delta x$  отсчитывается по микрометру и должно быть направлено так, чтобы эллипс на экране кратчайшим путем снова перешёл в прямолинейный отрезок с исходным наклоном. Убедиться, что это направление соответствует перемещению приемника к излучателю.
3. Провести последовательно 10 измерений компенсирующего перемещения  $\Delta x$ , повторяя следующую последовательность действий: опустить пластину, установить фигуру Лиссажу в виде прямой линии, перемещая приемник к излучателю, вынуть пластину, провести измерение  $\Delta x$ . В присутствии пластины использовать фигуры Лиссажу в виде прямых как с положительным (правосторонним), так и отрицательным

(левосторонним) наклоном. При измерениях перемещать приемник только к излучателю. Результаты измерений представить в следующей таблице:

Материал	Показания микрометра, мм						
	1	2	...	9	10		
оргстекло	начальное						$\langle \Delta x \rangle =$
	конечное						
	$\Delta x$						
гетинакс	начальное						$\langle \Delta x \rangle =$
	конечное						
	$\Delta x$						
целлулоид	начальное						$\langle \Delta x \rangle =$
	конечное						
	$\Delta x$						

4. По результатам измерений определить для средние значения компенсирующего перемещения  $\langle \Delta x \rangle$  определить скорость звука  $c_*$  в каждой из пластин, решая трансцендентное уравнение:

$$F(c_*) = \left( \frac{\rho c}{\rho_* c_*} + \frac{\rho_* c_*}{\rho c} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi f}{c_*} L \right) - 2 \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi f}{c} (L - \langle \Delta x \rangle) \right) = 0.$$

Это уравнение является записью уравнения (1.31) при использовании выражения  $\Phi = \frac{2\pi f}{c} \langle \Delta x \rangle$  для оценки дополнительного набега фазы при прохождении волны в пластине. Рассчитать стандартное отклонение и относительную ошибку для перемещения  $\langle \Delta x \rangle$  и скорости  $c_*$ .

Уравнение  $F(c_*)=0$  решается путём построения графика функции  $F(c_*)$  при изменении аргумента  $c_*$  в диапазоне  $1600 \text{ м/с} \leq c_* \leq 3500 \text{ м/с}$ . Соответствующие графики приложить к отчёту.

## 1.8 Контрольные вопросы

1. Нарисовать схему экспериментальной установки. Как измерить скорость звука фазовым методом по смещению приёмника? В каком диапазоне частот проводятся измерения? Рассчитать длину волны в воде для частоты 0.8 МГц, приближённо считая скорость звука равной 1500 м/с. Привести основную формулу для определения скорости звука по данным измерений. Что можно сказать о зависимости скорости звука в воде от частоты?
2. Как измерить скорость звука фазовым методом по изменению частоты? Привести основную расчётную формулу. В каком диапазоне частот проводятся измерения?
3. Как измерить скорость звука в тонкой пластине, помещённой в воду? Вывести приближённую формулу для определения скорости звука в пластине в приближении однократного прохождения волны, т.е. без учёта переотражений в пластине. Каковы требования к толщине пластины и материалу, из которого она изготавливается? В какую сторону нужно перемещать приёмник для компенсации разности фаз, возникающей после извлечения пластины из воды (считать известным, что скорость звука в пластине больше, чем в воде) ?

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1.1.

## Инструкция пользования осциллографом и генератором

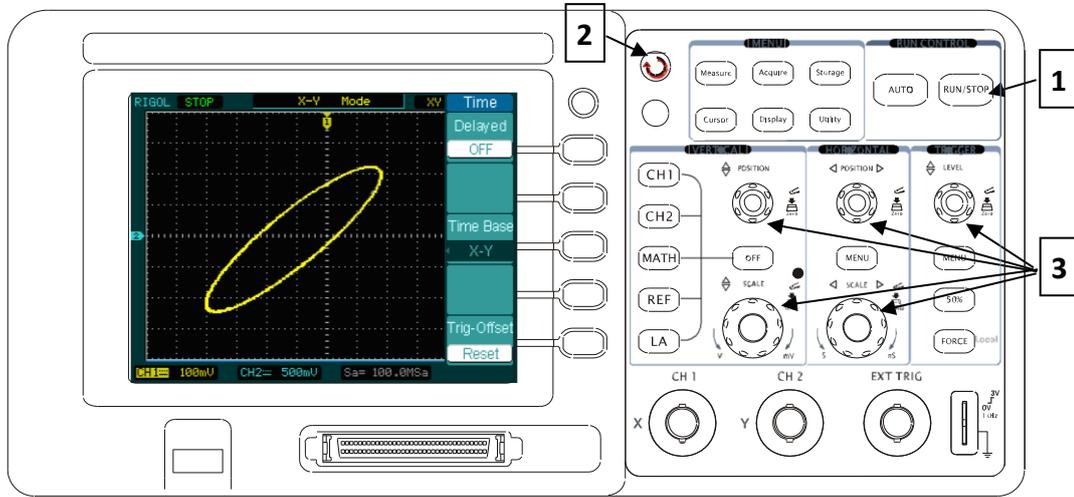


Рис. 1.7. Лицевая панель осциллографа

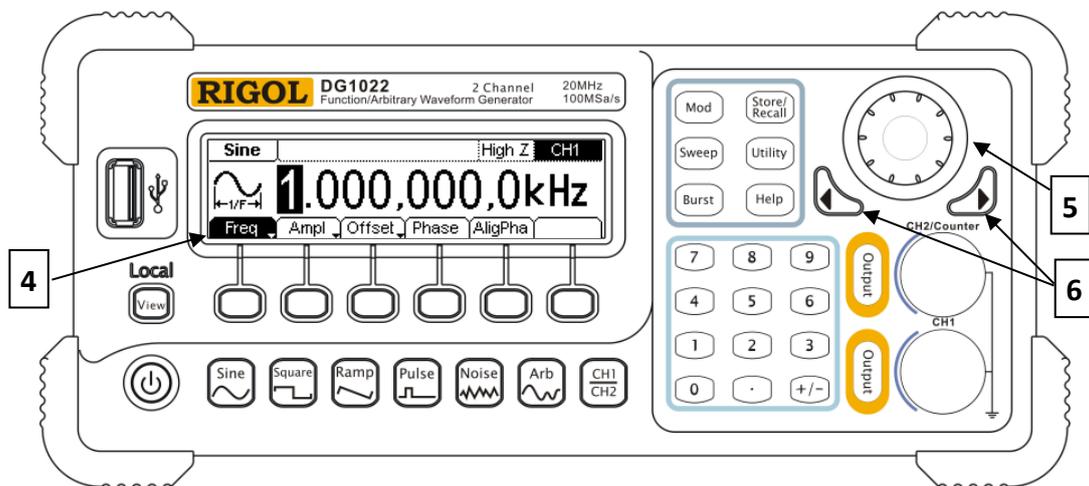


Рис. 1.8. Лицевая панель генератора

## Обозначения, используемые далее в описании:

- Название кнопки даётся в рамке, например **RUN/STOP** обозначает правую верхнюю кнопку осциллографа **1**;
-  - многофункциональная поворотно-нажимная ручка управления осциллографом **2**;
-  **SCALE**,  **POSITION**,  **LEVEL** обозначают соответствующие ручки панели управления осциллографом **3**;
- **Time Base** обозначает кнопки экранного меню и соответствуют отображаемой на экране надписи. На осциллографе они расположены справа от экрана, на генераторе - под экраном: например, в случае, изображенном на рисунке 1.8, **Freq** соответствует первая кнопка **4**.
- Плавное изменение частоты производится вращением ручки **5** генератора, разряд частоты увеличивается или уменьшается нажатием кнопок **6**.

## Подготовка приборов к работе

1. Не включая генератор, включить осциллограф (кнопка сверху слева на крышке);
2. Для обоих каналов X и Y установить минимальную чувствительность на осциллографе. Для этого:
  - установить горизонтальную развертку в режим наблюдения фигуры Лиссажу, нажав **MENU** раздела HORIZONTAL, в появившемся меню выбрать значение «X-Y», нажатием соответствующей кнопки Time Base, далее поворотом  до попадания курсора на «X-Y», затем нажатием на .

- нажать **CH1**, крутить ручку **SCALE** раздела VERTICAL против часовой стрелки до чувствительности 5.0 В/дел (надпись слева внизу экрана CH1 ~ 5.00V) ;
  - нажать **CH2**, крутить ручку **SCALE** раздела VERTICAL против часовой стрелки до чувствительности 5.0 В/дел (надпись слева внизу экрана CH2 ~ 5.00V) .
3. Проверить правильность подключения приборов (рис. 1.5 и 1.6).
4. Включить генератор, подать на выход №1 (CH1) сигнал частотой 0.8 МГц. Для этого:
- проверить, что выбран первый канал (надпись в правом верхнем углу экрана CH1 или CH2). Если горит CH2, то выбрать CH1 нажатием кнопки 

CH1
CH2

 ;
  - если включён импульсный режим (в левом верхнем углу экрана видна надпись **BURST**), выключить его нажатием кнопки **BURST** ;
  - нажать **SINE**, выбрав тем самым гармонический профиль сигнала;
  - установить частоту 0.8 МГц, выбрав **Freq** (кнопка **4** на рис. 1.8), затем нажав последовательно **0** **.** **8** и экранную кнопку **MHz**. При этом на экране появится надпись 800.000,00 kHz. Плавное изменение частоты (упр. 2) производить вращением ручки **5**, выбирая разряд изменения частоты с помощью кнопок **6**;
  - установить максимальную амплитуду выходного сигнала. Для этого нажать экранную кнопку **Ampl**, установить вращением ручки по часовой стрелке максимальное значение 20 Vpp;

- включить выход CH1, нажав кнопку **OUTPUT** рядом с гнездом первого канала. Кнопка **OUTPUT** должна загореться зелёным цветом;

5. Установить на экране осциллографа фигуру Лиссажу. Для этого:

- переключая направление масштабирования попеременным нажатием кнопок **CH1** и **CH2** и вращая ручку **SCALE** раздела **VERTICAL**, добиться полного попадания эллипса в пределы экрана. При выборе канала появляется соответствующая надпись **CH1** либо **CH2** в верхнем правом углу экрана;
- нажать кнопку **MENU OFF** (круглая кнопка справа сверху от экрана) для очистки экрана от меню;
- вращая ручку **SCALE** раздела **HORIZONTAL** по часовой стрелке, увеличить частоту обновления экрана осциллографа в этом режиме.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1.2. Обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов

Пусть результатом эксперимента является совокупность прямых независимых измерений  $\{X_i, Y_i\}$ , связанных линейным соотношением

$$Y = a \cdot X + b, \quad (\text{П1.2.1})$$

причем величины  $X_i$  известны точно, а величины  $Y_i$  измерены с некоторой одинаковой ошибкой. Тогда средние значения  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  параметров прямой и их дисперсии  $\sigma_a^2$  и  $\sigma_b^2$  можно определить, используя следующие соотношения:

$$\Delta = k \sum_{i=1}^k X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k X_i \right)^2, \quad (\text{П1.2.2})$$

$$\Delta_a = k \sum_{i=1}^k X_i Y_i - \sum_{i=1}^k X_i \cdot \sum_{i=1}^k Y_i, \quad \Delta_b = \sum_{i=1}^k X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k Y_i - \sum_{i=1}^k X_i \cdot \sum_{i=1}^k X_i Y_i, \quad (\text{П1.2.3})$$

$$\bar{a} = \Delta_a / \Delta, \quad \bar{b} = \Delta_b / \Delta, \quad (\text{П1.2.4})$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_0^2 k / \Delta, \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^k X_i^2}{\Delta}, \quad \text{где } \sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (Y_i - aX_i - b)^2}{k - 2}. \quad (\text{П1.2.5})$$

Наглядно, идею метода легко понять следующим образом. На график  $Y(X)$  наносятся экспериментальные точки, через которые нужно провести прямую таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений каждой из экспериментальных точек от этой прямой была минимальна. Параметры прямой и будут средними значениями  $a$  и  $b$ . Описанный метод называется *методом наименьших квадратов* (МНК). Более подробно метод изложен в разработке [10]. Для обработки данных методом наименьших квадратов можно также использовать функцию LINEST(...) в программе Excel; в русифицированной версии Excel эта функция имеет название ЛИНЕЙН(...).

При измерениях скорости звука методом изменения расстояния линейная зависимость связывает измеряемое по шкале микрометра расстояние  $x$  и количество оборотов фигуры Лиссажу  $N$ :

$$x = x_0 + c \cdot N / f. \quad (\text{П1.2.6})$$

Здесь  $x_0$  – минимальное показание микрометра при начальном установлении фигуры Лиссажу в виде прямой линии ( $N = 0$ ),  $N$  – число оборотов фигуры Лиссажу; т.е. в формулах (П1.2.1)  $X = N$ , а  $Y = x$ . Параметр  $a = c/f$  в этом случае, с точностью до известного множителя  $1/f$ , совпадает с величиной скорости звука. Рассчитанные методом наименьших квадратов среднее значение и стандартное отклонение параметра  $a$  дадут необходимые величины для скорости звука.

Аналогично, при измерениях скорости звука методом изменения частоты линейная зависимость связывает измеряемую частоту  $f$  и количество оборотов  $N$ :

$$f = f_0 + c \cdot N/x, \quad (\text{П1.2.7})$$

т.е.  $X = N$ ,  $Y = f$ ,  $a = c/x$ , где  $x$  – известное расстояние между излучателем и приёмником, на котором проводились измерения.

## Часть 2

# УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ

## 2.1 Вводные замечания

Акустические методы находят широкое применение в физических исследованиях, в частности они позволяют изучать разнообразные явления в твёрдых телах. В общем случае в среде могут распространяться упругие волны нескольких типов, характеристики которых несут информацию о различных свойствах среды. Наряду с объёмными (продольными и поперечными) упругими волнами в исследованиях широко применяются поверхностные волны. Усовершенствование техники эксперимента, расширение диапазона частот упругих волн (до  $10^{11}$  Гц) наряду с развитием теоретических представлений о механизме распространения упругих волн в твёрдых телах привели к тому, что ультразвуковые методы стали весьма полезными, а иногда и незаменимыми в физике твёрдого тела. В частности, сведения об электронных свойствах металлов и полупроводников, природе фазовых переходов, ангармонизме межатомных сил взаимодействия могут быть получены с помощью современных акустических методов.

Кроме того, ультразвуковые волны в твёрдых телах в настоящее время находят широкое применение на практике. Высокая чувствительность ультразвуковых волн к наличию механических неоднородностей среды привела к созданию ультразвуковой дефектоскопии, позволяющей определить наличие и характер дефектов в материалах, «непрозрачных» при исследовании другими методами. В настоящее время ультразвуковая дефектоскопия является одним из главных методов в системе неразрушающего контроля. Малая величина скорости упругих волн (на пять порядков меньше скорости распространения электромагнитных волн), а

следовательно, и длины волны при той же частоте позволяет создавать микроминиатюрные высокоэффективные устройства обработки информации (линии задержки, фильтры, системы кодирования и т.д.). Использование нелинейных эффектов при распространении ультразвуковых волн в твёрдых телах привело к созданию частотных умножителей, смесителей, параметрических усилителей, а также приборов корреляционного анализа сигналов.

Объёмные и поверхностные волны играют большую роль и в природных условиях. Например, упругие волны непрерывно возникают и затухают в земной коре, и наиболее интенсивно это проявляется при землетрясениях. Такие волны называются сейсмическими. При этом продольная волна носит название Р-волны (*prima*), поскольку она при землетрясениях и взрывах приходит от места возникновения первой. Поперечная волна, приходящая вслед за продольной, называется S-волной (*seconda*). Упругие Р- и S-волны успешно используются при анализе землетрясений, для геофизических исследований, поиска полезных ископаемых. По свободной поверхности среды могут распространяться еще и поверхностные волны. При землетрясениях именно они обычно вызывают наибольшие разрушения.

Цель настоящей работы – ознакомление с экспериментальной методикой возбуждения и приёма, а также с основными закономерностями распространения объёмных и поверхностных ультразвуковых волн в изотропных твёрдых телах.

## **2.2 Объёмные волны**

В общем случае деформация твёрдого тела характеризуется изменениями объёма и формы элементов среды, что сопровождается

возникновением механических напряжений. Уравнение движения частиц среды (2-й закон Ньютона) имеет вид [3]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} . \quad (2.1)$$

Здесь индексы  $i, j = 1, 2, 3$  соответствуют декартовым координатам  $x, y, z$ ,  $\rho$  – плотность среды,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  – вектор смещения частиц. Правая часть уравнения (2.1) описывает силу, действующую на единицу объёма среды. Она выражается через пространственные производные от тензора механических напряжений  $T_{ij}$ . В общепринятом обозначении тензора напряжений первый индекс показывает направление силы, действующей на единичную площадку, второй – направление нормали к этой площадке. Когда индексы совпадают, сила перпендикулярна площадке (например,  $T_{xx}$ ), а при разных индексах – касательна этой площадке (например,  $T_{xy}$ ).

Деформация среды может быть охарактеризована пространственными производными  $\partial u_i / \partial x_j$  компонент вектора смещения. Например,  $\partial u_x / \partial x$  характеризует продольную деформацию,  $\partial u_y / \partial z$  – деформацию сдвига. Для задания деформации произвольного вида обычно вводится тензор деформаций  $S_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ . Тензор напряжений связан с тензором деформаций: сила возникает под действием деформации среды и, наоборот, при наличии силы среда деформируется. Для малых деформаций упругого тела (когда амплитуда волны мала) связь между компонентами тензоров  $T_{ij}$  и  $S_{ij}$  может считаться линейной, т.е. имеет вид закона Гука. Можно показать, что в изотропной среде [11, § 24]:

$$T_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} , \quad (2.2)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронёкера, а  $\lambda$  и  $\mu$  – константы, характеризующие упругость среды. Они называются постоянными Ламе. Коэффициент  $\lambda$

описывает напряжения при изменении объёма. Константа  $\mu$  характеризует сдвиговые деформации и называется модулем сдвига.

Если подставить закон Гука (2.2) в уравнение движения (2.1), то получится следующее уравнение [3]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} . \quad (2.3)$$

Это уравнение называется *уравнением Ламе*. Оно позволяет определить характеристики распространения произвольного упругого возмущения в изотропном твёрдом теле.

Рассмотрим одномерные возмущения, для которых деформация среды изменяется в пространстве лишь в одном направлении – например, вдоль оси  $x$ . Тогда все компоненты вектора смещения  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  зависят лишь от  $x$  и  $t$ , и уравнение (2.2) записывается в виде трёх скалярных уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} . \quad (2.4)$$

Как видно, все компоненты смещения описываются дифференциальными уравнениями, имеющими вид классического волнового уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Иначе говоря, упругие возмущения являются волнами.

Примечательно, что скорости распространения соответствующих волн являются неодинаковыми для продольных и поперечных (по отношению к направлению распространения) деформаций, т.е. в среде имеется несколько типов упругих волн – *продольные*, характеризующиеся продольной компонентой смещения  $u_x$ , и *поперечные*, характеризующиеся перпендикулярными к направлению распространения компонентами смещения  $u_y$  и  $u_z$ . Согласно (2.4), продольные волны распространяются со скоростью

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (2.5)$$

а поперечные волны – с меньшей скоростью

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.6)$$

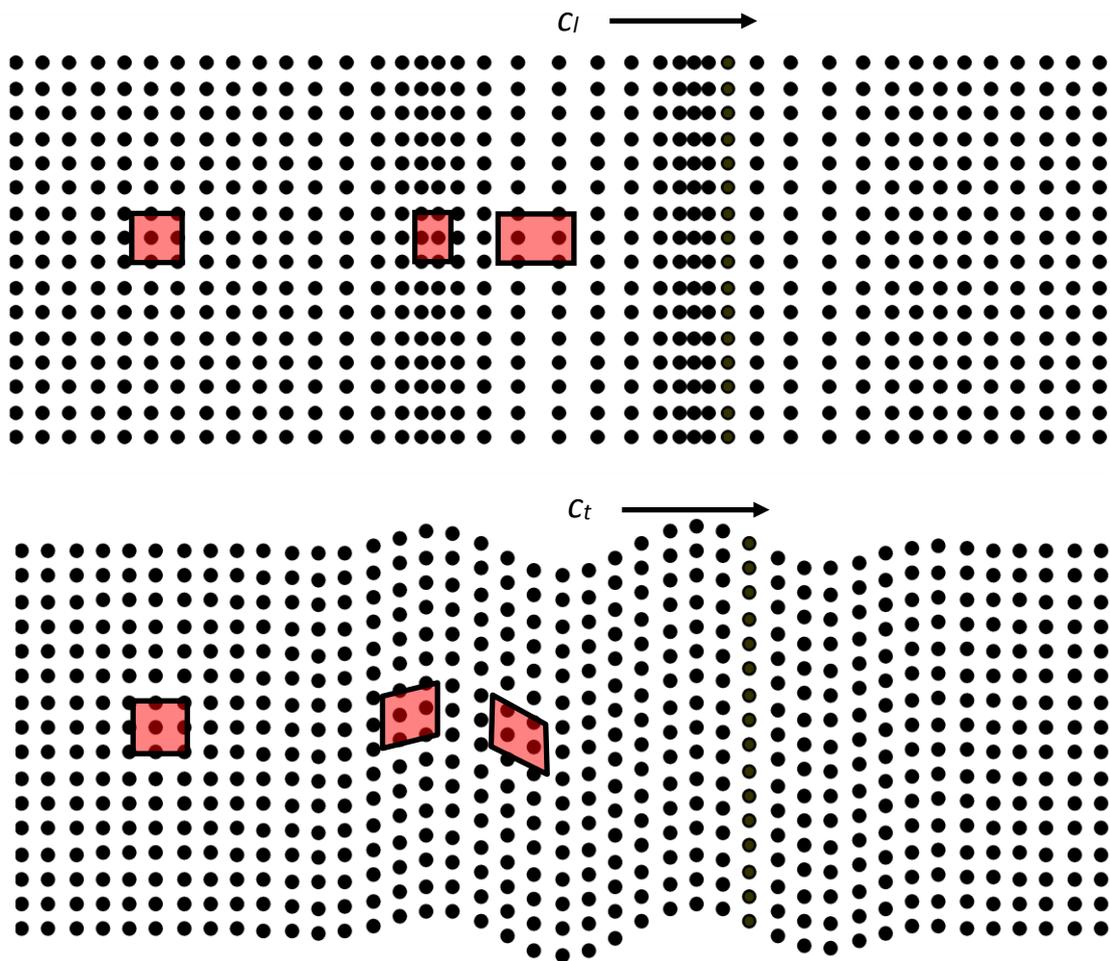
Здесь индексы у скоростей соответствуют английским названиям волн (*longitudinal* и *transversal*, соответственно).

Отметим, что согласно формулам (2.5) и (2.6) скорости объёмных волн не зависят от частоты, т.е. в среде отсутствует дисперсия. Это неудивительно, поскольку в безграничной сплошной однородной среде отсутствуют возможные причины для частотной избирательности – нет никаких характерных пространственных или временных масштабов, с которыми можно было бы сравнить длину волны или её частоту.

Иногда в теории упругости вместо постоянных  $\lambda$  и  $\mu$  используют модуль Юнга  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  и коэффициент Пуассона  $\sigma = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$ . В этом случае выражения для скоростей продольных и поперечных волн в изотропном теле принимают вид:

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (2.7)$$

Заметим, что отсюда следует  $c_t/c_l = \sqrt{(1-2\sigma)/[2(1-\sigma)]}$ . Поскольку для большинства твёрдых тел коэффициент Пуассона лежит в диапазоне  $0.25 \leq \sigma \leq 0.35$  [12], то для них  $c_t \approx (0.5 - 0.6)c_l$ .



**Рис. 2.1.** Деформация среды при распространении в ней плоской продольной (сверху) и поперечной (снизу) волн

Характер деформации среды при распространении в ней продольных и поперечных волн проиллюстрирован на рис. 2.1. В продольной волне частицы среды смещаются вдоль направления распространения. При этом исходный невозмущённый элементарный объём (выделен квадратным контуром слева) после прихода волны изменяется, т.е. среда сжимается или растягивается: на рисунке квадраты в области деформаций превращаются в прямоугольники. В поперечной волне частицы среды смещаются перпендикулярно направлению распространения волны: происходит чистый сдвиг, не сопровождающийся изменением объёма – на рис. 2.1 внизу в области локализации волны исходные квадраты превратились в параллелограммы той же площади. Сопротивление среды сжатию выражено всегда сильнее, чем сдвигу (в идеальной жидкости для деформации сдвига

вообще не требуется усилий), т.е. эффективная жёсткость среды при распространении продольных волн выше, чем при распространении поперечных волн. Именно этим можно объяснить более высокую скорость продольных волн.

## 2.3 Поверхностные волны

Если твёрдое тело ограничено, то помимо продольных и поперечных волн в нём могут существовать и другие типы волн, характеристики которых определяются наличием границы. Граница изменяет упругие свойства твёрдого тела около неё и вдали от неё по-разному. Так, свободная поверхность твёрдого тела оказывается своеобразным волноводом, способным переносить упругие волны, локализованные в приповерхностном слое – *поверхностные* волны; они называются также *волнами Рэлея*.

Общие характеристики рэлеевских волн можно установить на основе уравнения (2.3) при учёте условия отсутствия напряжений на свободной границе полупространства. Пусть ось  $x$  направлена вдоль поверхности в направлении распространения волны, а ось  $z$  перпендикулярна поверхности и направлена вглубь среды. Тогда граничное условие записывается при  $z = 0$  и имеет вид:  $T_{xz} = T_{yz} = T_{zz} = 0$ .

Наиболее просто решение задачи находится в случае гармонической волны. Пусть вдоль поверхности с некоторой скоростью  $c_R$  распространяется волна, параметры которой не зависят от поперечной координаты  $y$ . Компоненты вектора смещения в гармонической волне могут быть представлены в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(z)\exp[-i\omega(t - x/c_R)]$ . Если подставить это выражение в уравнение Ламе (2.3) и учесть граничные условия, то можно получить выражение для скорости волны  $c_R$  и компонент

вектора амплитуды смещения  $\mathbf{u}_0(z)$ . Фазовая скорость поверхностных волн  $c_R$  меньше фазовых скоростей продольных и поперечных волн  $c_l$  и  $c_t$  и определяется из уравнения [3, 11–14]:

$$\eta^3 - 8\eta^2 + 8(3 - 2\xi)\eta - 16(1 - \xi) = 0, \quad (2.8)$$

где  $\eta = (c_R/c_t)^2$  – искомая величина,  $\xi = (c_t/c_l)^2 = (1 - 2\sigma)/[2(1 - \sigma)]$  – известная константа. Из (2.8) видно, что скорость поверхностных волн не зависит от частоты, а определяется лишь упругими свойствами твёрдого тела.

Для практических расчётов удобно пользоваться приближённым решением уравнения (2.8) [12, 15]:

$$c_R \approx c_t \frac{0.875 + 1.125\sigma}{1 + \sigma}. \quad (2.9)$$

Величина  $c_R/c_t$  слабо зависит от коэффициента Пуассона. Согласно формуле (2.9), в практически интересном диапазоне  $0.25 \leq \sigma \leq 0.35$  получается  $c_R \approx (0.92 - 0.94)c_t$ .

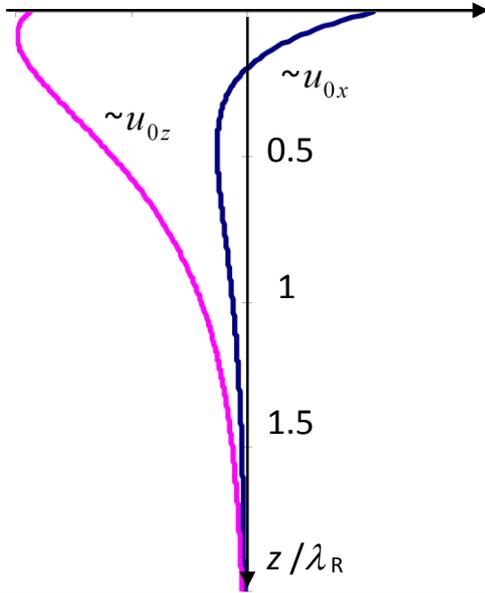
Поперечная структура волны задаётся векторной функцией  $\mathbf{u}_0(z)$ . Можно показать, что её  $y$ -компонента равна нулю, а остальные компоненты зависят от глубины  $z$  следующим образом [15]:

$$u_{0x} = A \left[ \left(1 - \frac{c_R^2}{2c_t^2}\right) e^{-qz} - \sqrt{\left(1 - \frac{c_R^2}{c_l^2}\right) \left(1 - \frac{c_R^2}{c_t^2}\right)} e^{-sz} \right], \quad (2.10)$$

$$u_{0z} = -iA \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_l^2}} \cdot \left[ \left(1 - \frac{c_R^2}{2c_t^2}\right) e^{-qz} - e^{-sz} \right], \quad (2.11)$$

где  $A$  – константа, характеризующая амплитуду волны, а коэффициенты затухания  $q$  и  $s$  имеют вид:

$$q = \frac{\omega}{c_R} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_l^2}}, \quad s = \frac{\omega}{c_R} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_t^2}}. \quad (2.12)$$



**Рис. 2.2.** Изменение с глубиной амплитуд компонент смещения в поверхностной волне

Зависимости величин  $u_{0x}$  и  $i u_{0z}$  от расстояния показаны на рис. 2.2 для случая  $\sigma = 0.25$ . Согласно (2.10) и (2.11), заметный спад смещения происходит на масштабах  $q^{-1}, s^{-1}$ , которые имеют порядок длины рэлеевской волны  $\lambda_R \sim c_R/\omega$ . Таким образом, возмущение распространяется лишь тонком приповерхностном слое, что и позволяет называть волну «поверхностной».

Вследствие сдвига фазы колебаний вертикальной компоненты смещения  $u_{0z}$  относительно горизонтальной  $u_{0x}$  на  $\pm \pi/2$  (наличие множителя  $i$  в выражении (2.11)), движение частиц среды происходит по эллиптическим траекториям, большая полуось которых перпендикулярна поверхности, а малая параллельна направлению распространения волны. Из выражений (2.10)–(2.11) следует, что на некоторой глубине  $\sim (0.15 - 0.3) \lambda_R$  эллипс вырождается в отрезок прямой линии, при этом движение частиц в гармонической волне происходит чисто в вертикальном направлении. Выше этой характерной глубины частицы среды движутся против часовой стрелки, ниже – по часовой стрелке (если волна распространяется слева направо). Таким образом, поверхностную волну в целом нельзя считать ни продольной, ни поперечной.

Так же как и скорости объёмных волн  $c_l$  и  $c_t$ , скорость поверхностной волны  $c_R$  не зависит от частоты (см. (2.8) – (2.9)). Физическая причина отсутствия дисперсии волн Рэлея та же, что и для

объёмных волн – отсутствие в полубесконечной однородной среде характерных пространственных и временных масштабов. Отметим, что поперечная структура волны зависит от частоты; в частности, толщина приповерхностного слоя, в котором локализована энергия волны, уменьшается обратно пропорционально частоте. Это означает, что если волна не является монохроматической, то поперечный профиль зависит от вида частотного спектра волны.

На рис. 2.3 показан характер деформации среды при распространении в ней поверхностной волны. Картинка соответствует импульсному возмущению в виде 1–2 периодов синусоидальной волны – именно такие сигналы используются при измерениях в данной задаче практикума. Если сравнить рис. 2.1 и 2.3, то можно увидеть, что волна Рэлея не похожа ни на продольную, ни на поперечную волны. Кроме уже обсуждённой выше локализации деформаций вблизи поверхности в слое порядка длины волны, отметим смешанный продольно-поперечный характер смещений частиц среды.

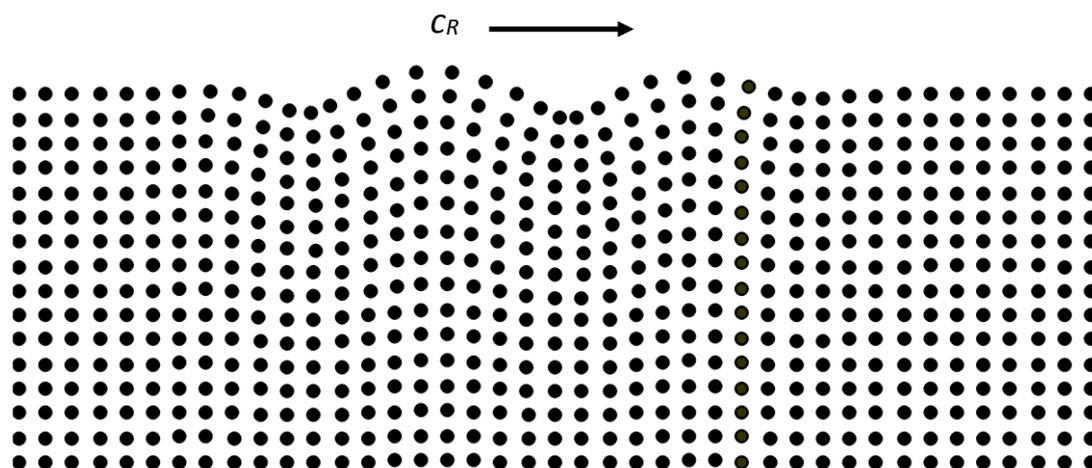


Рис. 2.3 Деформация среды при распространении в ней поверхностной волны Рэлея

## 2.4 Экспериментальная установка и методика измерений

### 2.4.1 *Некоторые принципы ультразвуковых измерений*

В рассматриваемой лабораторной задаче специального физического практикума исследуются поверхностные волны и один тип объёмных волн – продольные волны. Возбуждение упругих волн осуществляется с помощью пьезоэлектрических преобразователей, создающих упругие импульсы на мегагерцовых частотах. Приём осуществляется либо тем же пьезодатчиком (режим эхо-импульсов), либо аналогичным дополнительным пьезопреобразователем. Задача заключается в наблюдении на мониторе электрических сигналов, соответствующих приходящим на датчик упругим волнам, и измерении времени распространения указанных волн. Такой подход является стандартным в современном неразрушающем контроле материалов и конструкций [16, 17].

Базовой частью экспериментальной установки является промышленный прибор отечественного производства – универсальный ультразвуковой дефектоскоп УД2В-П45. В силовом электронном блоке дефектоскопа создаётся короткий импульс электрического напряжения. Этот импульс подаётся на датчик, основой которого является пьезоэлектрическая пластина. За счёт обратного пьезоэффекта возникает изменение толщины пластины, пропорциональное подаваемому на её обкладки электрическому напряжению [16]. Внешняя сторона пьезопластины является рабочей поверхностью датчика. Она прижимается к поверхности исследуемого образца. В результате в образце возбуждается продольная волна – короткий импульс в виде нескольких периодов синусоидального сигнала. Этот импульс распространяется в образце и отражается от возможных рассеивателей и границ. Рассеянный сигнал может быть принят либо тем же датчиком, либо вторым аналогичным

датчиком, помещённым в другом месте поверхности образца. При приёме акустическая волна падает на пьезопластину, вызывает изменение её толщины и, вследствие прямого пьезоэффекта, приводит к возникновению на обкладках электрического напряжения. Принятые сигналы обрабатываются приёмным электронным блоком и отображаются на жидкокристаллическом мониторе дефектоскопа. По их амплитуде и задержке при известной скорости волны можно находить глубину залегания и силу рассеивателей (дефектов или границ образца). Решение указанной задачи является основным назначением дефектоскопа. В современном промышленном производстве ультразвуковая дефектоскопия применяется для поиска дефектов материала (поры, различные включения, неоднородная структура) и контроля качества проведения работ при сварке, пайке, склейке. Ультразвуковой контроль уже давно является обязательной процедурой при изготовлении и эксплуатации многих ответственных изделий, таких как части авиационных двигателей, трубопроводы атомных реакторов или железнодорожные рельсы. Измерение скоростей упругих волн позволяет также определить упругие константы исследуемого материала [17].

При проведении измерений важно обеспечить должный контакт между поверхностями датчика и образца, чтобы упругая волна могла проходить из одного тела в другое (говорят, что нужен «хороший акустический контакт»). Дело в том, что при простом соприкосновении двух поверхностей они контактируют друг с другом лишь в небольшом количестве точек, т.к. всегда имеются шероховатости и неровности. В результате из-за большой разницы акустических импедансов воздуха и твёрдого тела прохождение акустической волны через границу раздела оказывается очень неэффективным. Чтобы обойти указанную трудность, поверхность контакта обычно смачивается жидкостью или гелем, которые, в отличие от воздуха, близки по акустическому импедансу к материалу

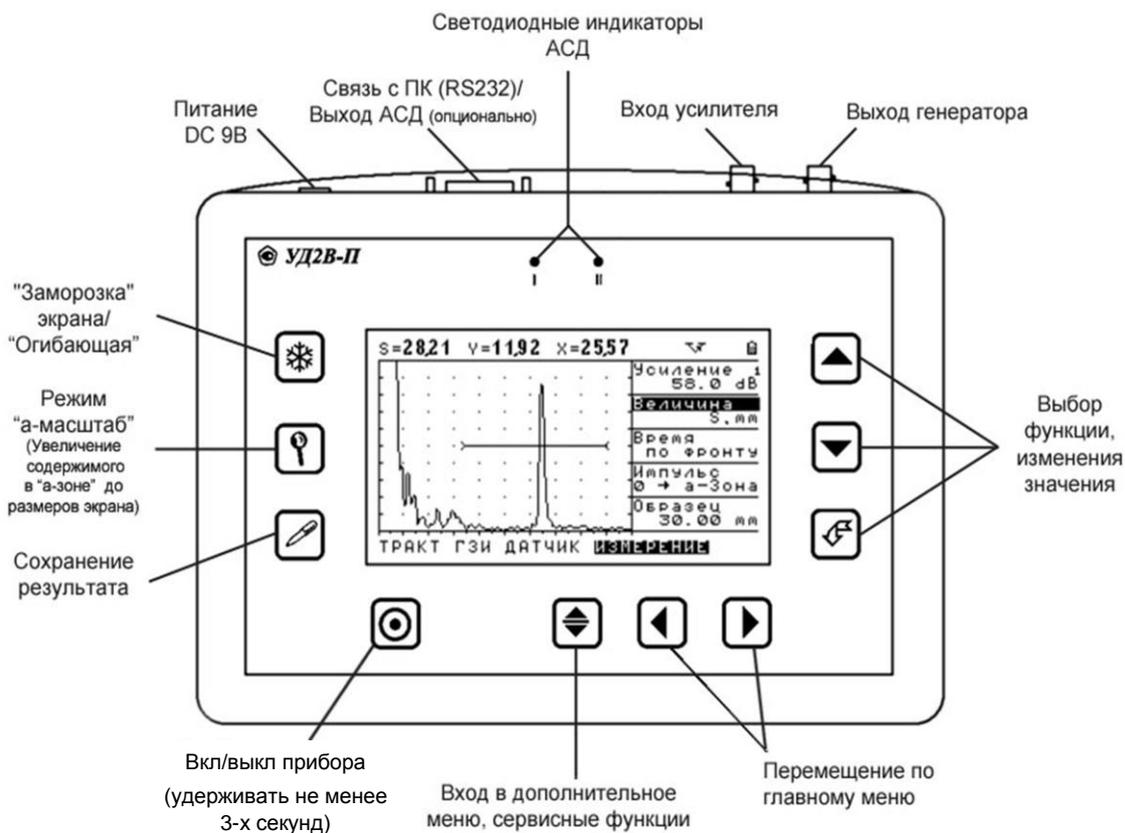
образцов. В настоящей работе в качестве такой согласующей жидкости используется трансформаторное масло, небольшое количество которого наносится кисточкой на поверхность контакта. Отметим, что даже при слабом прижиге датчика к образцу слой контактной жидкости достаточно тонок, т.е. он не влияет на характеристики излучаемых и принимаемых сигналов.

Если расстояние между источником и приёмником известно, дефектоскоп можно применить для измерения скорости упругих волн в однородных материалах. Именно для таких измерений используется дефектоскоп в настоящей работе.

#### ***2.4.2 Особенности работы с ультразвуковым дефектоскопом УД2В-П45***

Как отмечалось выше, принцип работы дефектоскопа довольно прост: он возбуждает в образце короткие акустические импульсы и принимает эхо-импульсы (при использовании одного датчика) или проходящие импульсы (при использовании двух датчиков). Дефектоскопы разных моделей отличаются рабочими частотами, размером датчиков, способом обработки сигнала и его вывода на экран.

Внешний вид передней панели дефектоскопа УД2В-П45, используемого в данной работе, показан на рис. 2.4. Для включения прибора необходимо нажать кнопку «вкл/выкл» и удерживать её в нажатом состоянии не менее 3 секунд (кнопка расположена в левом нижнем углу лицевой панели). Выключение производится аналогичным образом.



**Рис. 2.4.** Внешний вид передней панели дефектоскопа УД2В-П45

Управляющее меню дефектоскопа состоит из главного «меню», разделы которого отображаются в информационной строке под окном отображения, и «подменю», отображаемого в ячейках колонки справа от окна изображения. Перемещение между разделами главного меню осуществляется кнопками  и . Выбор соответствующего раздела подменю производится кнопками  и . Вход в режим редактирования значения выбранного пункта подменю осуществляется кнопкой . Изменение значений производится кнопками  и . Для выхода из режима редактирования необходимо нажать на кнопку . Помимо главного меню и подменю, есть дополнительное сервисное меню, вход в которое осуществляется с помощью кнопки , расположенной под окном

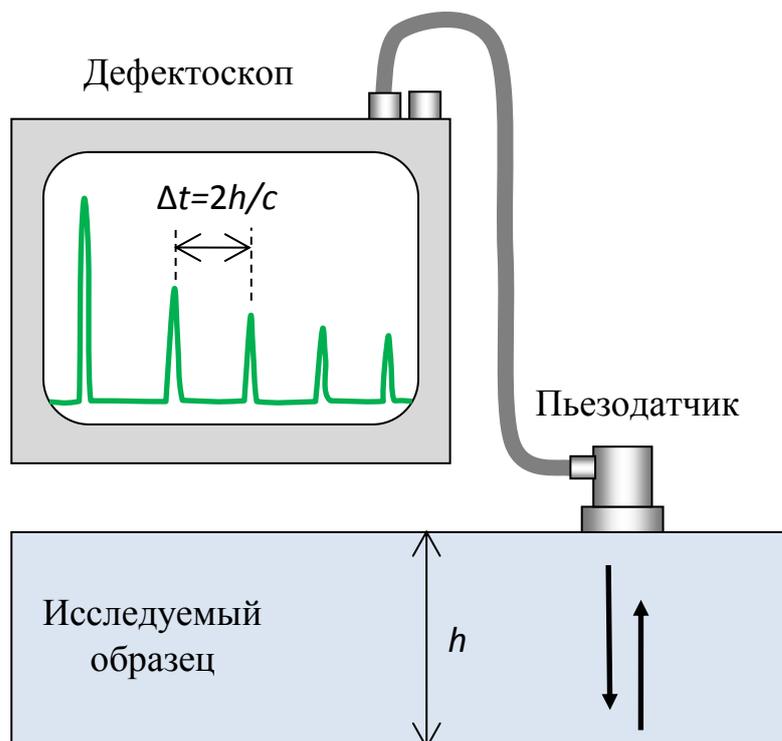
изображения слева от кнопок ◀ и ▶. Для запоминания содержимого экрана в интересующий оператора момент измерений необходимо нажать на кнопку ❄ «заморозка» экрана, которая находится в верхнем левом углу.

Ультразвуковые преобразователи подключаются к дефектоскопу посредством кабелей, присоединяемых к высокочастотным разъёмам «вход усилителя» и «выход генератора» справа на верхней боковой стороне дефектоскопа.

### 2.4.3 Методика измерения скорости продольных волн

При измерении скорости продольных волн эхо-импульсным методом используется один преобразователь, как показано на рис. 2.5. В качестве образцов используются плоскопараллельные пластины из различных материалов: оргстекла, стекла, меди, латуни, стали, алюминиевого сплава (дюралюминий) и магниевое сплава (электрон). На пьезопреобразователь подаётся короткий электрический импульс, в результате чего происходит

**Рис. 2.5.** Принцип измерения скорости продольных волн в плоскопараллельной твердотельной пластине. При излучении короткого импульса на датчике появляется периодическая серия эхо-импульсов, следующих друг за другом с периодом  $\Delta t = 2h/c$ , где  $h$  – толщина пластины,  $c$  – скорость продольных волн.



излучение в образец импульсной продольной волны, имеющего вид короткого радиоимпульса с центральной частотой около 5 МГц и длительностью огибающей около 0.6 мкс. Указанный ультразвуковой импульс распространяется в образце, отражается от тыльной поверхности, возвращается к датчику, отражается от него, и вновь распространяется в направлении тыльной поверхности. Этот процесс многократно повторяется до тех пор, пока импульс не затухнет из-за поглощения в среде и дифракционной расходимости. В результате на мониторе дефектоскопа можно наблюдать затухающую серию эквидистантных импульсов. Для проведения измерения времени прихода и пикового значения сигналов часто достаточно знать поведение огибающей высокочастотного импульса. Для этого в электронном приёмном устройстве дефектоскопа предусмотрена операция детектирования. На мониторе дефектоскопа сигналы представляются, как правило, в виде импульсов огибающей (см. рис. 2.5). Отметим, однако, что использование полного сигнала, а не огибающей, позволяет более точно измерять задержки сигналов. Поэтому в некоторых случаях имеет смысл отказаться от рассмотрения огибающей и провести анализ высокочастотного заполнения. Переход между режимами огибающей и полного сигнала в дефектоскопе УД2В-П производится в разделе меню «ТРАКТ» и разделе подменю «Детектор».

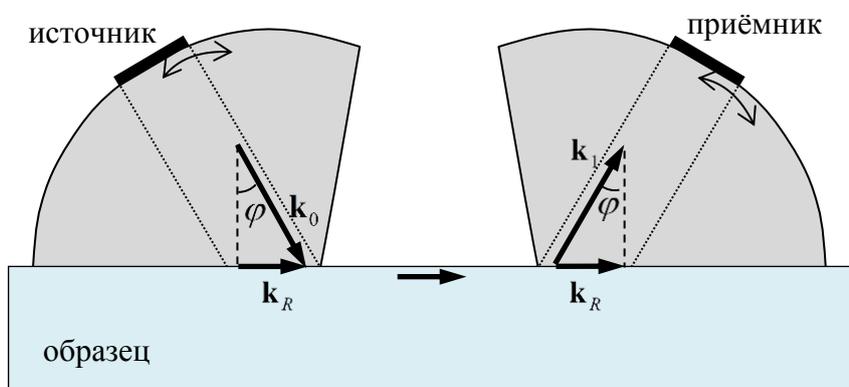
Поскольку каждый последующий эхо-импульс проходит расстояние, равное удвоенной толщине пластины  $h$ , то временная задержка между соседними импульсами равна  $\Delta t = t_2 - t_1 = 2h/c$ . Следовательно, скорость волны найдётся как:

$$c = \frac{2h}{t_2 - t_1} . \quad (2.13)$$

#### 2.4.4 Способ возбуждения и приёма поверхностных волн

Для измерения скорости поверхностной волны нужно иметь способы её эффективного возбуждения и приёма. При этом необходимо добиться того, чтобы поверхностная волна наблюдалась отдельно от объёмных волн. Для этой цели в настоящей работе используется метод возбуждения и приёма поверхностных волн, основанный на использовании эффектов взаимодействия между различными типами упругих волн, происходящими при падении ультразвукового пучка на границу раздела двух сред.

Используемый в работе метод возбуждения поверхностной волны пояснён на рис. 2.6. На плоскую поверхность исследуемого образца помещается клиновидный блок из оргстекла. В его верхней части располагается пьезоэлектрический излучатель, создающий пучок продольных волн, падающих на поверхность образца под углом падения  $\varphi$ . Излучатель может скользить вдоль верхней выпуклой поверхности клина, что позволяет изменять угол падения. При падении волны на поверхности образца возникают упругие напряжения и появляется возможность для возбуждения поверхностной волны. Однако в общем случае эффективность такой генерации волны Рэлея очень мала. Исключение составляет случай волнового резонанса, когда след падающей из клина волны движется по поверхности исследуемого образца со скоростью рэлеевской волны  $c_R^{(обр)}$ .



**Рис. 2.6.** Метод клина для возбуждения и приёма поверхностных волн

Если  $c_l^{(\text{кл})}$  – скорость продольной волны в материале клина, то скорость следа волны составляет  $V = c_l^{(\text{кл})} / \sin \varphi$ . Условие волнового резонанса  $V = c_R^{(\text{обр})}$  даёт следующее выражение для угла падения, при котором возбуждение поверхностной волны происходит наиболее эффективно:

$$\sin \varphi = \frac{c_l^{(\text{кл})}}{c_R^{(\text{обр})}} . \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) соответствует условию фазового синхронизма, согласно которому горизонтальная составляющая волнового вектора падающей на поверхность раздела (или излучаемой этой поверхностью) продольной волны совпадает с волновым вектором поверхностной волны (см. рис. 2.6). Соответствующее условие

$$k_0 \sin \varphi = k_R . \quad (2.15)$$

переходит в формулу (2.14) с учётом того, что  $k_0 = \omega / c_l^{(\text{кл})}$  и  $k_R = \omega / c_R^{(\text{обр})}$ . Отметим, что в выражение (2.14) для угла  $\varphi$  входят скорости волн в различных материалах:  $c_l^{(\text{кл})}$  – скорость продольных волн в материале клина, а  $c_R^{(\text{обр})}$  – скорость поверхностных волн в материале образца. Поэтому угол оптимального возбуждения  $\varphi$  для разных материалов будет разным.

В случае гармонической волны формула (2.14) следует из требования согласованности фаз падающей волны и волны Рэлея, что эквивалентно условию совпадения касательной проекции волнового вектора падающей волны с волновым вектором волны Рэлея (рис.2.6):  $(\omega / c_l^{(\text{кл})}) \sin \varphi = \omega / c_R^{(\text{обр})}$ , что даёт (2.14).

Заметим, что в общем случае продольная волна, падающая из клина на образец, может создать в образце две преломлённые волны – продольную и поперечную. Углы преломления  $\psi_l$  и  $\psi_t$  определяются законом Снеллиуса:  $c_l^{(\text{кл})} / \sin \varphi = c_l^{(\text{обр})} / \sin \psi_l = c_t^{(\text{обр})} / \sin \psi_t$ . Нетрудно видеть, что если угол  $\varphi$  выбрать по формуле (2.14), то синусы углов преломления для объёмных

волн окажутся равными  $\sin \psi_l = c_l^{(\text{обр})} / c_R^{(\text{обр})}$  и  $\sin \psi_t = c_t^{(\text{обр})} / c_R^{(\text{обр})}$ , т.е. превысят единицу, поскольку поверхностная волна распространяется медленнее обеих объёмных волн. Таким образом, при возбуждении поверхностных волн в соответствии с условием (2.14) объёмные волны внутрь образца распространяться не будут - будет происходить их полное внутреннее отражение. Это облегчает процесс исследования поверхностной волны.

Так как скорость поверхностных волн зависит от физических характеристик материала образца, то для их возбуждения для каждого образца необходимо подбирать соответствующий угол падения  $\varphi$ . При этом условие (2.14) может быть достигнуто лишь при  $c_R^{(\text{обр})} > c_l^{(\text{кл})}$ . Именно поэтому в качестве материала клина следует брать тот, в котором скорость продольных волн невелика. Выбор оргстекла ( $c_l^{(\text{кл})} \approx 2700$  м/с) обусловлен, в частности, этим обстоятельством. Другой удобной особенностью оргстекла является относительно высокий коэффициент поглощения ультразвуковых волн, что позволяет исключить реверберацию в клине.

Описанное устройство может работать и в качестве приёмников поверхностных ультразвуковых волн, поскольку под действием волны, распространяющейся вдоль поверхности образца, в материале клина возбуждаются объёмные волны. Наиболее эффективно генерация волн в клине происходит при совпадении скорости движения их следа со скоростью источника, которым в данном случае является поверхностная волна. Это означает, что излучение будет происходить преимущественно под углом  $\varphi$ , задаваемым формулой (2.14).

## 2.5 Практическая часть

### 2.5.1 Измерение скорости продольных волн эхо-импульсным методом (к упражнению 1)

Перед началом измерения следует соединить кабелем пьезоэлектрический датчик (см. рис. 2.7), с любым из двух каналов дефектоскопа (см. рис. 2.5). Рабочую поверхность датчика с помощью кисточки слегка смазать трансформаторным маслом для обеспечения акустического контакта с образцом.

Включить дефектоскоп, удерживая в нажатом состоянии более 3 секунд кнопку включения (см. рис. 2.4).

После появления картинки на экране следует выбрать эхо-импульсный режим дефектоскопа, т.е. посылка и приём импульсов будут осуществляться одним и тем же пьезоэлектрическим датчиком. Для этого необходимо сделать следующее.



**Рис. 2.7.** Внешний вид пьезоэлектрического датчика, используемого для возбуждения и приёма продольных волн

- 1) Войти в дополнительное сервисное меню, нажав кнопку .
- 2) В появившемся меню переместить курсор (чёрная полоса) кнопками  и  выделить пункт «Режим контроля».
- 3) Перейти в режим редактирования кнопкой .
- 4) Переключить режим работы в режим «эхо» кнопками  и  (альтернативным является режим «теневой» - он в данных измерениях не нужен).

- 5) Выйти из режима редактирования кнопкой  (фон слова «эхо» при этом станет светлым) и из дополнительного меню кнопкой .
- 6) Перейти в меню к разделу «ДАТЧИК», используя кнопки  и  (добиться того, чтобы в нижней части экрана появилось слово «ДАТЧИК» на тёмном фоне)
- 7) Кнопками  и  выбирать раздел подменю «Совм. режим» (добиться того, чтобы в правой части экрана появилось слово «Совм. режим» на тёмном фоне).
- 8) Войти в режим редактирования () и перевести его статус кнопками  и  в состояние «Да».
- 9) Выйти из режима редактирования (

Далее следует выставить параметры дефектоскопа таким образом, чтобы при прижиге датчика к поверхности образца на экране наблюдалась серия переотражённых импульсов. Для этого проделать следующее:

- 1) Выбрать меню раздел «ОСНОВНЫЕ» (слово в нижней части экрана), используя кнопки  и .
- 2) Выделить в подменю раздел «Усиление» (слово в правой части экрана) кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой . Установить значение 50 дБ, пользуясь кнопками  и . Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 3) Выделить в подменю раздел «Скорость» кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой . Установить значение 1000 м/с, пользуясь кнопками  и . (Конкретное значение скорости в данных

измерениях непринципально и выбрано здесь лишь для удобства).

Выйти из режима редактирования кнопкой .

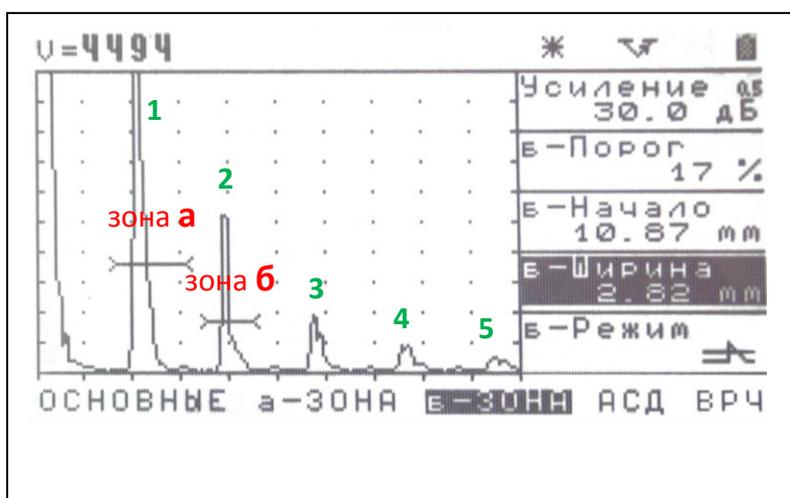
- 4) Выделить в подменю раздел «Задержка» кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой . С помощью кнопок  и  установить значение задержки 1 мкс. Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 5) Выделить в подменю раздел «Развертка» кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой . Прижать датчик к поверхности образца и, начиная от значения 10.00 мм, увеличивать значение развертки с помощью кнопок  и  до тех пор, пока на экране не будет видна серия затухающих импульсов. Установить такое значение развёртки, чтобы на экране поместилось два или более отражённых импульсов. Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 6) Если амплитуды импульсов слишком велики или слишком малы, вновь выделить в подменю раздел «Усиление» кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой . Пользуясь кнопками  и , установить значение усиления таким образом, чтобы первый отражённый импульс занимал по высоте весь экран. Выйти из режима редактирования кнопкой .

После этого следует выбрать два переотражённых сигнала, временная задержка  $\Delta t$  между которыми будет использоваться для измерения скорости звука. Интервалы времени, в которых производится измерение времени прихода указанных двух импульсов, называются в настройках дефектоскопа «а-зоной» и «б-зоной». При измерении скорости звука необходимо настроить «а-зону» на первый отражённый импульс, а «б-зону»

- на второй импульс. Типичный вид сигнала на экране дефектоскопа показан на рис. 2.8.

Чтобы не прижимать датчик к образцу в процессе настройки на а- и б-зоны, удобно текущую картинку (типа показанной на рис. 2.8) «заморозить», нажав на короткое время кнопку . Для снятия «заморозки» после окончания настройки следует повторно нажать эту кнопку.

Последовательность подгонки положения зон к выбранным 1-му и



**Рис. 2.8.** Вид экрана дефектоскопа при наблюдении эхо-импульсов в пластине, с указанием порядка переотражений. Знаки интервалов >--< выделяют зоны **а** и **б**, в которых автоматически измеряется время прихода максимума сигнала. Цифрами отмечен порядковый номер эхо-импульсов

2-му отражённому импульсам является следующей:

- 1) Выделить в меню раздел «а-ЗОНА», используя кнопки  и .
- 2) Выделить в подменю раздел «а-Начало» кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой .
- 3) Изменить начало зоны кнопками  и  таким образом, чтобы начало значка зоны >---< находилось на расстоянии порядка нескольких длительностей импульса слева от первого отражённому импульса. Режим регулировки (плавный или грубый) может быть установлен кнопкой . При плавной регулировке подменю будут отображать текст строчными буквами («а-Начало»), при грубой – заглавными («а-НАЧАЛО»). Выйти из режима редактирования нажать кнопку .

- 4) Аналогичным образом задать ширину интервала измерения (пункт подменю «а-Ширина») кнопками  и  таким образом, чтобы конец значка зоны >---< находился на расстоянии в несколько длительностей импульса справа от первого отражённого импульса. Выйти из режима редактирования, нажав кнопку .
- 5) Чтобы малоамплитудные шумы не влияли на измерения, необходимо выставить уровень отсечки – пункт подменю «а-Порог». Действуя аналогично предыдущим настройкам, установить высоту положения отрезка значка зоны >---< на уровне, превышающем шумы, но лежащем ниже пика импульса.
- 6) Если необходимо, отрегулировать усиление сигнала в пункте подменю «Усиление». Добиться того, чтобы вершина первого импульса находилась в верхней половине экрана.
- 7) Выделить в меню раздел «б-ЗОНА», используя кнопки  и , а затем, выбрав в качестве импульса 2-й отражённый сигнал, выставить параметры в той же последовательности, как описано выше для 1-го импульса.

Дефектоскоп позволяет измерять скорость звука автоматически. Однако для этого необходимо предварительно ввести информацию о толщине образца и указать явным образом, что и как будет измеряться. Это делается следующим образом:

- 1) Выбрать меню «ИЗМЕРЕНИЕ» (слово в нижней части экрана), используя кнопки  и .
- 2) Выделить подменю «Усиление» (слово в правой части экрана) кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой , и установить усиление таким, чтобы оба используемых импульса были выше уровня, на котором находятся маркеры зон >---<. При этом должны загореться оба красных индикатора над экраном. Выйти из режима редактирования, нажав кнопку .

- 3) Выделить раздел подменю «Величина» кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой , и выбрать в качестве измеряемой величины скорость «V, м/с». Выйти из режима редактирования, нажав кнопку .
- 4) Выделить раздел подменю «Время» кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой , и выбрать в качестве метода регистрации времени прихода импульса «по пику». Выйти из режима редактирования, нажав кнопку .
- 5) Выделить раздел подменю «Импульс» кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой , и выбрать в качестве режима измерения «а → б-Зона». Выйти из режима редактирования, нажав кнопку .
- б) Выделить раздел подменю «Образец» кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой , ввести численное значение толщины исследуемого образца, изменяя число на экране кнопками  и . Выйти из режима редактирования кнопкой .

Убедиться, что оба импульса полностью находятся в пределах экрана, а маркеры зон >--< находятся ниже пиков соответствующих импульсов. Если это условие не выполнено, то отрегулировать высоту импульсов регулировкой раздела подменю «Усиление», а высоту положения маркеров >--< - в разделах меню «а-ЗОНА» и «б-ЗОНА», как пояснялось выше.

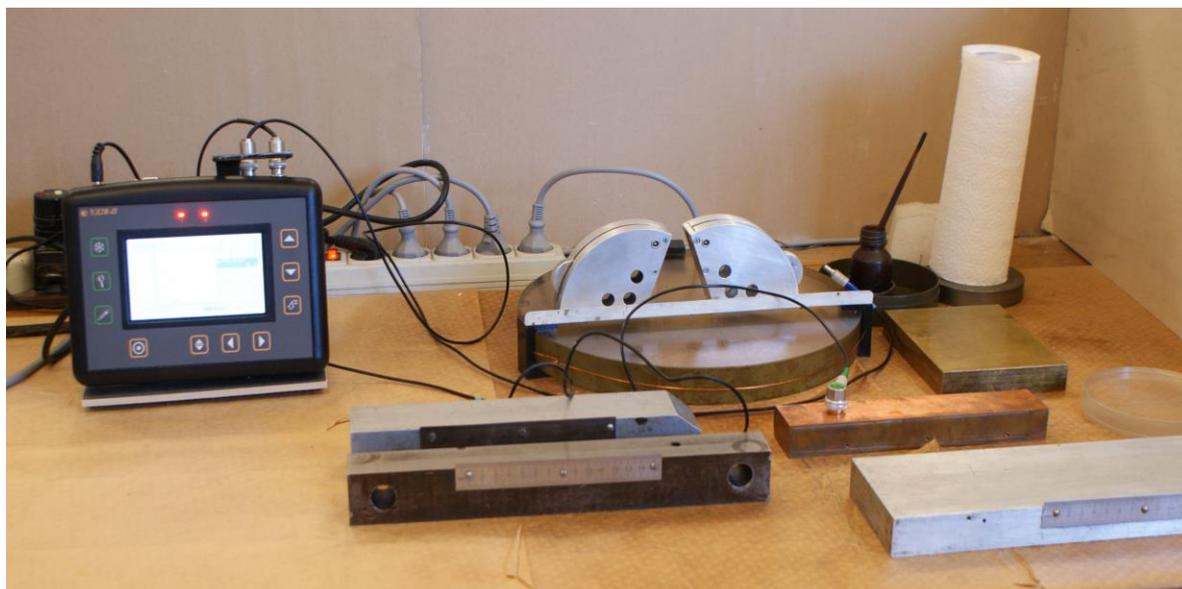
Значение скорости материала, выраженное в м/с, будет отражено в левом верхнем углу экрана. Для повышения точности измерения рекомендуется приложить датчик к 10-ти различным участкам поверхности образца, находящихся друг от друга на удалении не менее 1 см, и записать соответствующие показания. Затем рассчитать среднее значение и стандартное отклонение.

При переходе от одного образца к другому не забывайте изменить толщину образца в настройках дефектоскопа! Толщины образцов приведены в Приложении 2.1 в Таблице 2.1.

## **2.5.2 Измерение скорости поверхностных волн**

**(к упражнению 2)**

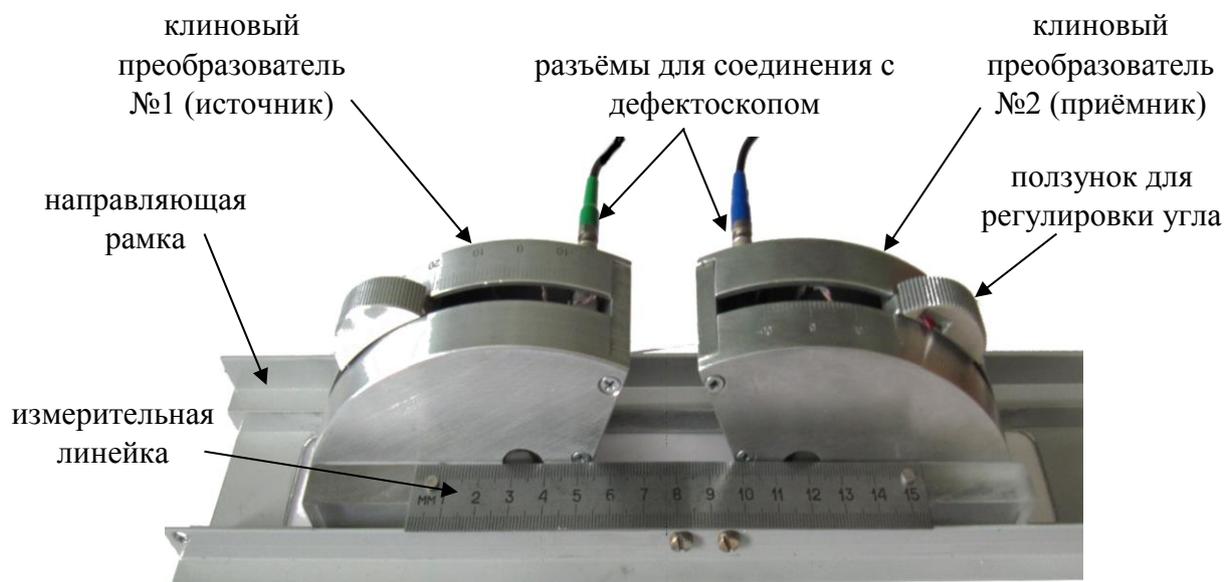
Фотография измерительной установки приведена на рис. 2.9. Используется обсуждённая выше схема возбуждения и приёма поверхностных волн, показанная на рис. 2.6.



**Рис. 2.9.** Фотография экспериментальной установки по измерению скоростей упругих волн в твёрдых телах

Внешний вид акустической части установки показан на рис. 2.10. Для удобства установки взаимного расположения источника и приёмника на исследуемой твердотельной пластине может быть использована направляющая рамка. Измерение расстояния между источником и приёмником производится с помощью линейки, укрепленной на рамке. Угол наклона акустического пучка, падающего из клина на поверхность исследуемого образца, регулируется ручками-ползунками. Величина угла

наклона находится по показаниям соответствующей шкалы. Для более плавного перемещения ползунка необходимо слегка нажать на него.



**Рис. 2.10.** Внешний вид источника и приёмника поверхностных волн

Перед началом измерения необходимо присоединить два кабеля, идущих от дефектоскопа, к излучающему и принимающему клиновидным преобразователям. Разъёмы, с помощью которых осуществляется такое соединение, указаны на рис. 2.10. Важно осуществлять соединение и разъединение именно в этих местах, а не на дефектоскопе (где более высока вероятность повреждения разъёмов). Соединение и разъединение кабелей следует проводить максимально бережно, чтобы избежать их поломки. При этом усилия следует прилагать лишь к металлическим частям разъёмов.

Приёмник (серийный номер 14-014) и излучатель (серийный номер 14-127) подключаются к левому и правому гнездам дефектоскопа соответственно (если смотреть на лицевую панель см. рис. 2.4).

Излучаемый сигнал имеют вид короткого радиоимпульса длительностью около 1 мкс и частотой заполнения около 2 МГц.

В отличие от предыдущего упражнения, при измерении скорости поверхностных волн используется не режим эхо-импульсов, а режим измерения «на проход». Поэтому дефектоскоп необходимо настроить соответствующим образом:

- 1) Войти в дополнительное сервисное меню, нажав кнопку .
- 2) В появившемся меню переместить курсор (чёрная полоса) кнопками  и  выделить пункт «Режим контроля», перейти в режим редактирования кнопкой  и переключить кнопками  или  режим работы в режим «теневой» (т.е. альтернативный к ранее использованному режиму «эхо»). Выйти из режима редактирования кнопкой  и из дополнительного меню кнопкой .
- 3) Перейти в меню к разделу «ДАТЧИК», используя кнопки  и .
- 4) Кнопками  и  выбрать пункт подменю «Совм. режим», войти в режим редактирования () и перевести его статус кнопками  и  в состояние «Нет» (вместо ранее использованному состоянию «Да»). Выйти из режима редактирования (

Установить клиновые преобразователи на образце, поместив их в направляющую рамку, смазав предварительно поверхность образца маслом. Расстояние между преобразователями сделать минимальным. Перемещая ползки, установить углы падения и приёма равными  $60^\circ$ . Далее следует установить временное окно для наблюдения поверхностной волны. Для этого проделать следующие настройки:

- 1) Выбрать меню раздел «ОСНОВНЫЕ», используя кнопки  и .

- 2) Выделить в подменю раздел «Усиление» кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой . Установить значение 100 дБ, пользуясь кнопками  и . Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 3) Убедиться, что в разделе подменю «Скорость» стоит значение 1000 м/с. Если это не так, то перейти к этому разделу кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой  и установить значение 1000 м/с, пользуясь кнопками  и , а затем выйти из режима редактирования кнопкой .
- 4) Выделить в подменю раздел «Развертка» кнопками  и  и войти в режим редактирования кнопкой . Прижать датчик к поверхности образца и с помощью кнопок  и  установить значение 50.00 мм. Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 5) Выделить в подменю раздел «Задержка» кнопками  и , войти в режим редактирования кнопкой . С помощью кнопок  и  установить значение задержки 30.00 мкс. Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 6) На этом этапе примерно в центре экрана должен быть виден импульс, соответствующий поверхностной волне. Если он не виден или слишком велик, то вернуться к разделу подменю «Усиление» и отрегулировать усиление так, чтобы импульс имел пиковое значение в верхней части экрана.
- 7) Меняя ползками на клиновых преобразователях величины углов падения и приёма (соблюдая их примерное равенство), добиться максимума

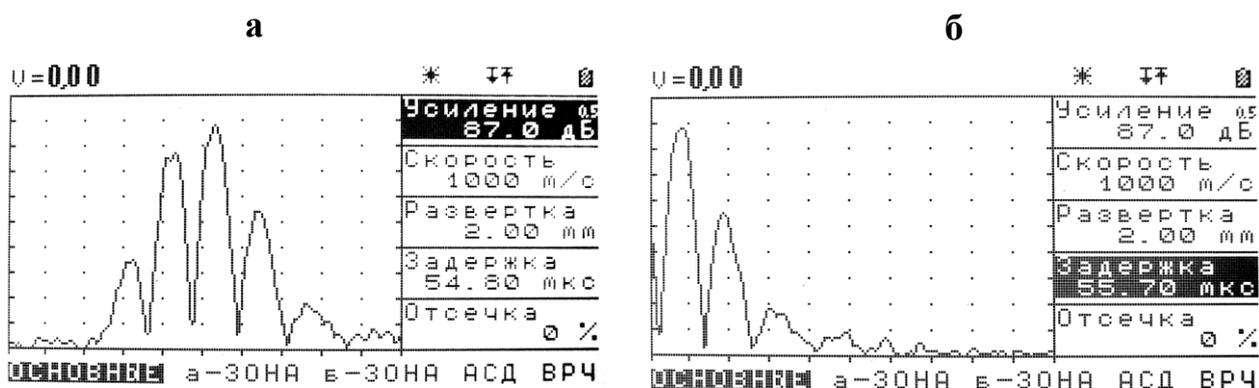
сигнала. Записать полученные углы излучения  $\varphi_{\text{изл}}$  и приёма  $\varphi_{\text{пр}}$  для данного материала (они потребуются для отчёта).

Нахождение скорости поверхностной волны основано на измерении задержки импульсного сигнала. Отметим, что в используемой установке и возбуждение, и приём поверхностных волн происходят посредством продольных волн в клине, причём области взаимодействия указанных волн на поверхности являются распределёнными, т.е. нельзя говорить о каком-то конкретном расстоянии между источником и приёмником поверхностной волны. Абсолютное значение задержки связано и с задержкой продольных волн в излучающем и принимающем клиновых преобразователях. Чтобы избавиться от указанной неопределённости, в данной задаче измеряется не сама задержка, а её изменение при взаимном сдвиге источника и приёмника на известное расстояние. Для более точного измерения задержки необходимо изменить установки дефектоскопа таким образом, чтобы была видна тонкая временная структура сигнала. Рекомендуется выполнить следующие действия:

- 1) Находясь в разделе меню «ОСНОВНЫЕ», перейти кнопками  и  в раздел подменю «Задержка» и войти в режим редактирования кнопкой . С помощью кнопки  увеличить задержку до тех пор, пока начало импульса не установится между 0-м и 1-м делениями у левой границы области изображения. Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 2) Перейти кнопками  и  в раздел подменю «Развёртка» и войти в режим редактирования кнопкой . С помощью кнопки  уменьшить развёртку до тех пор, пока не проявится тонкая структура импульса (она представляет собой модуль от величины истинного сигнала). Сигнал на экране дефектоскопа будет иметь вид, показанный на рис. 2.11 а. Кнопками  и  выбрать развёртку такой, чтобы

расстояние между нулями наблюдаемого сигнала составляло примерно одно деление временной шкалы. Выйти из режима редактирования кнопкой .

- 3) Вновь перейти кнопками  и  в раздел подменю «Задержка» и войти в режим редактирования кнопкой . С помощью кнопки  увеличить задержку до тех пор, пока первый ноль слева от самого высокого пика импульса не окажется максимально близко к левой границе области изображения. При этом сигнал должен выглядеть примерно так, как показано на рис. 2.11 б.



**Рис. 2.11.** Вид сигнала на экране дефектоскопа в процессе измерения задержки сигнала поверхностной волны. Изображённый на экране сигнал соответствует модулю полного сигнала, т.е. сам сигнал имеет вид радиоимпульса, состоящего из 2–3 периодов синусоидальной волны. Слева (а) показан сигнал сразу после изменения развёртки шкалы (см. описание в тексте). Справа (б) показан сигнал после выставления задержки, при которой ноль сигнала, расположенный слева от его пика, подведён к началу шкалы

- 4) Записать получившееся значение задержки  $t_1$ . Выйти из режима редактирования кнопкой .
- 5) Записать координаты  $x_1$  и  $y_1$  (в миллиметрах) точек пересечения края измерительной линейки и наклонных граней клиновых преобразователей. Рассчитать начальное расстояние  $L_1 = y_1 - x_1$ .

- 6) Перейти кнопками  и  в раздел подменю «Развертка», войти в режим редактирования кнопкой . С помощью  вновь установить развертку равной 50.00 мм. Выйти из режима редактирования кнопкой . На экране вблизи левой границы должен быть виден тот же короткий импульс, что и в начале измерений.
- 7) Аккуратно придерживая клиновые преобразователи, развести их так, чтобы расстояние между ними увеличилось примерно на 50 мм. Убедиться, что сигнал поверхностной волны присутствует на экране (при увеличении расстояния между клиновыми преобразователями сигнал сместится вправо). В противном случае проверить надёжность прижима клиновых преобразователей к поверхности образца и, если нужно, смазать поверхность маслом.
- 8) Записать координаты  $x_2$  и  $y_2$  (в миллиметрах) точек пересечения края измерительной линейки и наклонных граней клиновых преобразователей. Рассчитать новое расстояние  $L_2 = y_2 - x_2$ .
- 9) Повторить шаги 1 – 4 и записать получившееся значение задержки  $t_2$ .
- 10) Рассчитать скорость поверхностной волны по формуле
- $$c_R = (L_2 - L_1) / (t_2 - t_1).$$

### 2.5.3 Описание заданий

Перед началом выполнения работы нужно получить у лаборанта ультразвуковые преобразователи и соединительные кабели. После окончания измерений их следует сдать лаборанту или преподавателю.

## **УПРАЖНЕНИЕ 1. Определение скорости продольных волн эхо-импульсным методом**

Измерения проводятся последовательно для 7-и образцов – для всех материалов, указанных в Приложении 2.1 (Табл. 2.1).

1. Ознакомиться с регулировками дефектоскопа, используя пояснения на рис. 2.4.
2. Подсоединить пьезоэлектрический датчик, показанный на рис. 2.7, к одному из двух кабелей, идущих от дефектоскопа (всё равно к какому) Убедиться, что второй кабель при этом свободен: если он подсоединён к одному из клиновых преобразователей, то отсоединить его. Внимание! Все подсоединения и отсоединения кабелей просьба проводить максимально аккуратно во избежание поломки высокочастотных разъёмов.
3. Включить дефектоскоп и провести измерения согласно п. 2.5.1.
4. Для каждого образца записать выдаваемое дефектоскопом значение скорости волны в 10-ти точках, приложив датчик к 10-ти различным участкам поверхности образца, находящихся друг от друга на удалении не менее 1 см. Рассчитать среднее значение измеренной скорости и её стандартное отклонение.
5. Пользуясь табличными значениями модуля Юнга и коэффициента Пуассона (см. Табл. 2.1 в Приложении 2.1), по формуле (2.7) рассчитать теоретические значения скоростей продольных и поперечных волн для всех исследуемых материалов.

## УПРАЖНЕНИЕ 2. Определение скорости поверхностных волн

Измерения проводятся для 4-х образцов из следующих материалов: дюралюминий, сталь, стекло, электрон.

1. Отсоединить от кабеля пьезоэлектрический датчик, использованный в предыдущем упражнении. Подсоединить этот кабель и второй свободный кабель к клиновым преобразователям в соответствии с описанием в начале п. 2.5.2.
2. Провести измерения в последовательности, изложенной в п. 2.5.2. Результатом измерения для каждого образца должны быть величины  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , рассчитанные на их основе скорости поверхностных волн  $c_R = (L_2 - L_1)/(t_2 - t_1)$  и оптимальные углы для излучения  $\varphi_{\text{изл}}$  и приёма  $\varphi_{\text{пр}}$  поверхностных волн.
3. Пользуясь рассчитанными теоретическими значениями скорости поперечных волн и табличным значением коэффициента Пуассона (см. Табл. 2.1 в Приложении 2.1), для всех исследуемых материалов по формуле (2.9) рассчитать теоретические значения скоростей поверхностных волн, а по формуле (2.14) – значения углов оптимального возбуждения. Скорость продольных волн в материале клина считать равной  $c_l^{(\text{кл})} = 2700$  м/с.

По результатам измерений и теоретических расчётов заполнить следующую таблицу, указав для экспериментальных значений ошибку (представив данные измерений в виде  $\bar{c} \pm \Delta c$ ):

МАТЕРИАЛ	$c_l$ (м/с)	$c_t$ (м/с)	$c_R$ (м/с)		$\varphi$ (град)			
	теор.	эксп.	теор.	теор.	эксп.	теор.	ЭКСП. $\varphi_{изл}$	ЭКСП. $\varphi_{пр}$
Оргстекло								
Латунь								
Медь								
Дюралюминий								
Стекло								
Сталь								
Электрон								

## 2.6 Контрольные вопросы

1. Написать уравнение движения в твёрдом теле. Что такое тензор напряжений и тензор деформаций? Каким законом они связаны друг с другом?
2. Чем отличаются продольные и поперечные волны в безграничном изотропном твёрдом теле? Сравнить направления смещения частиц и особенности деформации среды в таких волнах. От чего зависят скорости указанных волн и каковы их примерные значения для типичных сред?
3. Описать характер деформации и траектории движения частиц среды при распространении поверхностной волны Рэлея. Какова характерная толщина приповерхностного слоя, в котором локализована такая волна? Как соотносится скорость поверхностной волны со скоростью объёмных волн? Какая из указанных волн самая медленная и какая самая быстрая?
4. Суть эхо-импульсного метода измерения скорости продольных волн в пластине. Нарисовать схему измерений и выписать теоретические соотношения, поясняющие принцип измерения скорости.
5. Описать метод клина для возбуждения и приёма поверхностных волн. Сформулировать условие волнового резонанса (фазового синхронизма) и вывести из него выражение для угла оптимального возбуждения волны Рэлея. Всегда ли существует такой угол?
6. Нарисовать схему измерений скорости поверхностных волн и выписать формулу, поясняющую принцип измерения скорости.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2.1 Справочные данные об исследуемых образцах

Теоретические значения скоростей упругих волн могут быть рассчитаны по формулам (2.7) и (2.9) на основе известных значений коэффициента Пуассона и модуля Юнга материалов. В Таблице 2.1 приведены соответствующие данные.

Отметим, что все исследуемые плоскопараллельные пластины имеют разные толщины. В Таблице 2.1 для каждого образца его толщина указана в правой колонке. Для удобства, материалы расположены в порядке увеличения толщины.

**Таблица 2.1.** Параметры материалов и толщины соответствующих образцов

МАТЕРИАЛ	Плотность $\rho$ (кг/м <sup>3</sup> )	Коэф. Пуассона $\sigma$	Модуль Юнга $E$ (10 <sup>10</sup> Н/м <sup>2</sup> )	Толщина образца $h$ (мм)
Оргстекло	1150	0.39	0.42	18.0
Латунь (~70% Cu, 30% Zn)	8500	0.36	10.0	23.6
Медь	8900	0.35	12.3	26.3
Дюралюминий (~94% Al, 6% Cu+Mg+Mn)	2700	0.34	7.0	29.3
Стекло	2500	0.24	7.0	32.6
Сталь	7800	0.30	21.0	39.5
Электрон (~90% Mg, 10% Al+Zn+Mn)	1800	0.35	4.8	41.7

## Часть 3

# РЕЗОНАНСНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

### 3.1 Введение

Механические свойства упругих изотропных твёрдых тел могут быть описаны двумя упругими модулями и плотностью (см. раздел 2.2). Обычно в качестве упругих модулей используют модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$  или постоянные Ламе  $\lambda$  и  $\mu$ . Величину  $\mu$  также называют модулем сдвига. Между этими параметрами существует однозначная связь [3, гл. 5]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \quad \sigma = \frac{E - 2\mu}{2\mu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad \lambda = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}. \quad (3.1)$$

Для исследования упругих свойств твёрдых тел в динамическом режиме широкое распространение получила резонансная акустическая спектроскопия (РАС). Метод РАС основан на анализе спектра резонансных частот образца, изготовленного из исследуемого материала. Наиболее просто анализировать экспериментальные результаты, если образец имеет форму цилиндра, длина которого существенно больше его радиуса. Образцы такой формы принято называть стержнями. Положения максимумов амплитуды вынужденных колебаний стержня определяют резонансные частоты, а ширина резонансной кривой дает возможность определить его добротность.

Несмотря на то, что экспериментальная установка для реализации метод РАС проста и не требует дорогостоящего оборудования, метод РАС обеспечивает высокую точность измерений. Это вызвало его широкое применение при исследовании различных физических явлений, таких,

например, как изучение внутреннего трения и фазовых переходов, измерение упругих констант второго и третьего порядков. Наиболее просто с помощью этого метода измеряются модуль Юнга  $E$  и модуль сдвига  $\mu$ . В стержне, изготовленном из исследуемого материала, возбуждаются продольные или крутильные колебания. Измеряя спектр колебаний (резонансные частоты) стержня при этих колебаниях, добротность  $Q$ , вычисляют модули  $E$  и  $\mu$ , а также коэффициенты вязкости.

## 3.2 Упругие волны в стержнях

Акустические волны, распространяющиеся в металлических стержнях, существенно отличаются от волн, распространяющихся в неограниченной среде. При этом речь идет о волнах, длина которых велика или сравнима с радиусом  $R$  стержня. Строгий анализ распространения таких волн связан с довольно громоздкими и трудными математическими расчётами. Наличие размерного параметра  $R$ , сравнимого с длиной акустической волны  $\lambda$  (обозначаемой той же буквой, как и постоянная Ламе  $\lambda$ ; по контексту будет очевидно, о какой физической величине идет речь) приводит к тому, что в металлических стержнях могут распространяться три семейства нормальных волн, обладающих значительной геометрической дисперсией. Рассмотрим их свойства.

### 3.2.1 Семейство нормальных продольных волн

Семейство нормальных продольных волн в стержнях в общем случае характеризуется двумя компонентами смещения: по радиусу стержня и его длине. Каждая из этих компонент обладает симметрией относительно оси стержня. В высокочастотном пределе, когда частота  $\omega = 2\pi f \rightarrow \infty$ ,

скорость акустических волн в стержне стремится к скорости продольных волн в неограниченной среде  $c_l \equiv c_{np}$  [11, § 22]:

$$c_{np} = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}} ,$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала.

Модуль Юнга будет определен ниже, а коэффициент Пуассона определяется отношением относительного поперечного сжатия однородного стержня к относительному продольному растяжению. Так, если к стержню с исходной длиной  $l$  и радиусом  $R$  приложить растягивающую его силу, то длина и радиус станут равными  $l + \Delta l$  и  $R + \Delta R$ , соответственно; при этом

$$\sigma = - \frac{\Delta R/R}{\Delta l/l} .$$

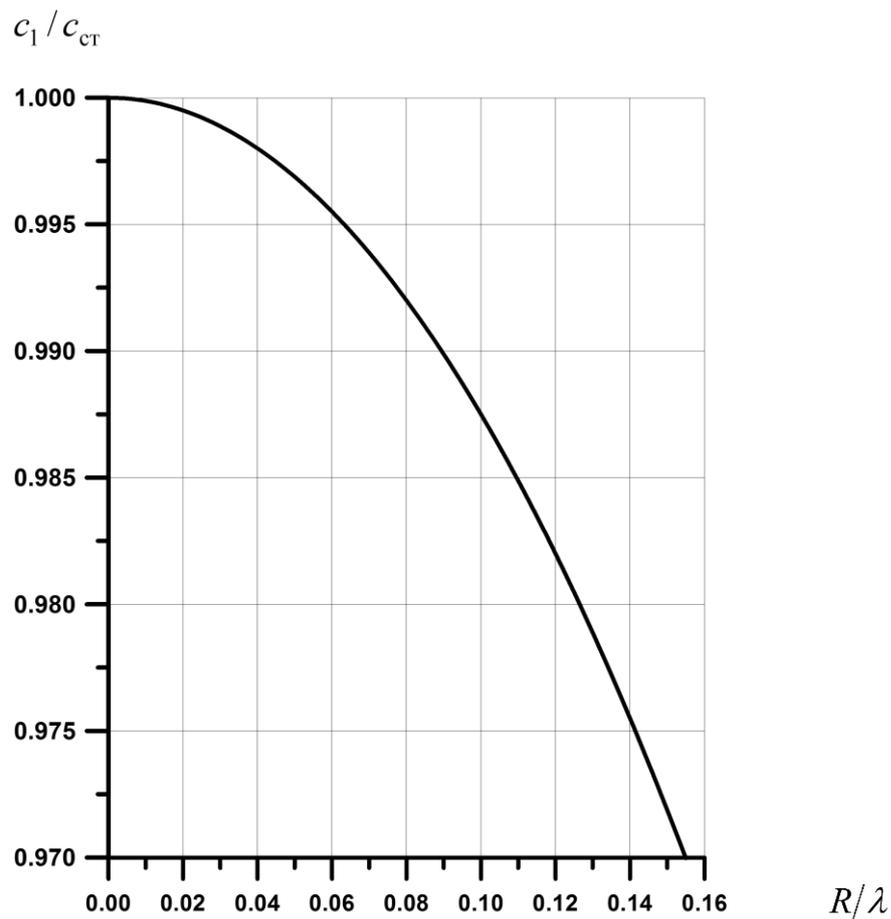
Коэффициент Пуассона для большинства материалов положителен. Существуют также материалы (преимущественно полимеры), у которых коэффициент Пуассона отрицателен, т.е. при приложении растягивающего усилия поперечное сечение тела увеличивается. Однако это скорее экзотика; в обычных же материалах величина  $\sigma$  лежит в диапазоне  $0.15 \leq \sigma \leq 0.5$ , возрастая при переходе от хрупких твёрдых тел к резиноподобным материалам. Приведём значения  $\sigma$  для некоторых традиционных материалов: бетон 0.16 – 0.18, кварцевое стекло 0.17, обычное стекло 0.25, сталь 0.28, алюминий 0.34, медь 0.35, свинец и олово 0.44, резина 0.5.

Наибольший интерес для наших исследований представляет низшая мода семейства симметричных («продольных») нормальных волн. Она существует вплоть до нулевой частоты, тогда как все высшие нормальные продольные моды имеют критические частоты. (С частотами ниже

критических выше моды в стержне не могут распространяться.) В низкочастотном пределе при стремлении частоты  $\omega = 2\pi f \rightarrow 0$  скорость этой волны стремится к величине [11, § 25]

$$c_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.2)$$

называемой *стержневой скоростью*. В случае, когда отношение радиуса стержня  $R$  к длине волны  $\lambda = c_{\text{ст}}/f$  мало, дисперсия этой моды незначительна (рис. 3.1). В дальнейшем в наших исследованиях будет использоваться эта мода.



**Рис. 3.1.** Зависимость нормированной фазовой скорости первой продольной моды  $c_1$  от отношения радиуса  $R$  стержня к длине волны  $\lambda$

### 3.2.2 Семейство нормальных крутильных волн

Одной из характерных особенностей волнового движения в нормальных крутильных волнах является наличие только одной компоненты смещения, которая в цилиндрической системе координат описывается углом поворота  $\delta\gamma$ . Решение волнового уравнения в цилиндрических координатах для случая, когда смещение частиц зависит только от угловой координаты  $\gamma$  (угла закручивания стержня в плоскости, перпендикулярной оси стержня), дает семейство нормальных волн, обладающих дисперсией. Для таких волн фазовая скорость монотонно уменьшается с увеличением частоты и на очень высоких частотах приближается к скорости поперечной акустической волны  $c_t \equiv c_{\text{поп}}$  в неограниченной среде.

Кроме упомянутых выше нормальных волн, характеризующихся наличием дисперсии, существует еще нулевая нормальная крутильная мода, не обладающая дисперсией, для которой фазовая скорость  $c_{\text{крут}}$  равна скорости поперечной (сдвиговой) акустической волны  $c_{\text{поп}}$  в неограниченной среде

$$c_{\text{крут}} = c_{\text{поп}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

В отличие от первой продольной нормальной моды, для которой дисперсия в области низких частот хотя и мала, но все же существует, для нулевой нормальной крутильной моды дисперсия отсутствует полностью. Поэтому она удобна для исследования упругих свойств различных материалов.

### 3.2.3 Семейство нормальных изгибных волн

В отличие от продольных и крутильных нормальных волн, в которых распределение смещений обладает полной симметрией относительно оси цилиндра и не зависит от угловой координаты  $\gamma$ , в случае изгибных колебаний зависимость смещений от координаты  $\gamma$  существует и, кроме того, существует зависимость от  $n\gamma$ , где  $n$  – целое число. Каждому значению  $n$  соответствует бесконечное множество нормальных изгибных мод, которые обладают значительной дисперсией. Анализ распространения таких волн связан со значительными трудностями и, как правило, для исследования упругих свойств материалов они не используются.

### 3.2.4 Распространение продольных волн в тонких стержнях

Рассмотрим распространение продольной волны вдоль оси тонкого стержня постоянного сечения площадью  $S$ . Стержень считается тонким в том случае, когда радиус стержня  $R$  мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Направим ось  $X$  вдоль геометрической оси стержня (рис. 3.2).

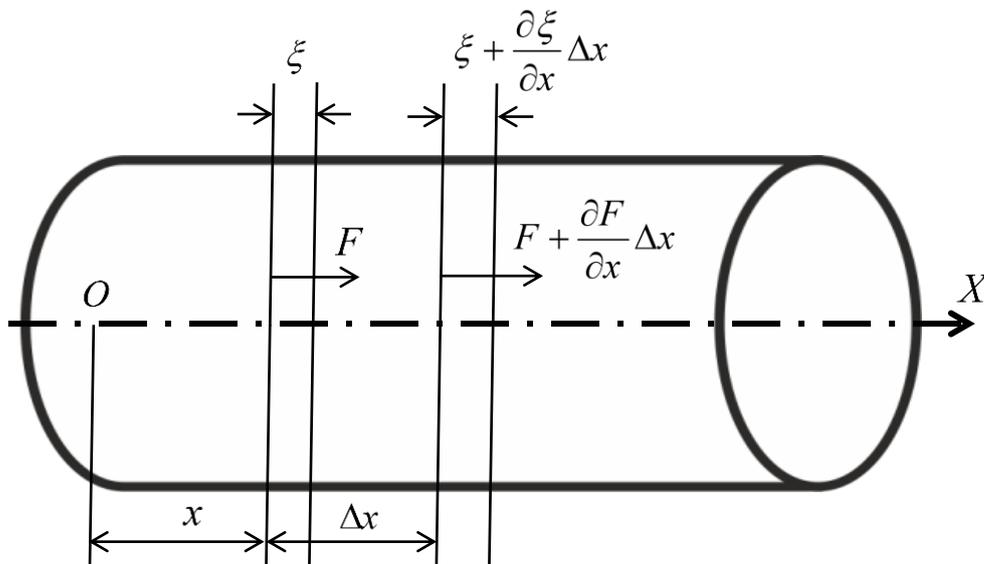


Рис. 3.2. Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

Под действием сил, действующих со стороны соседних участков, элементарный отрезок упругого стержня  $\Delta x$ , ограниченный плоскостями с координатами  $x$  и  $x + \Delta x$ , растянется или сожмётся на величину  $\Delta \xi$ . Относительное удлинение, т.е. деформация элемента стержня, будет равна  $\Delta \xi / \Delta x = \partial \xi / \partial x$  (здесь учтено, что  $\Delta \xi$  и  $\Delta x$  предполагаются бесконечно малыми). Напряжение  $T$ , т.е. сила, приходящаяся на единицу поперечного сечения стержня, согласно закону Гука, будет равна

$$T = \frac{F}{S} = E \frac{\partial \xi}{\partial x} .$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  носит название модуля Юнга и имеет размерность Н/м<sup>2</sup>.

В результате переменной деформации вдоль оси стержня будут распространяться продольные волны. Покажем это. Заметим, что напряжение в сечениях  $x$  и  $x + \Delta x$  в общем случае неодинаково, т.е. на выделенный элемент действует сила, равная разности сил, приложенных с противоположных сторон:

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left( SE \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \Delta x = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x . \quad (3.3)$$

Эта сила вызовет движение элемента стержня массой  $m = S\rho\Delta x$  вдоль оси  $X$ . Уравнение движения (2-й закон Ньютона) можно записать в виде

$$\overbrace{S \rho \Delta x}^m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x , \quad (3.4)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня. С учётом того, что  $E = \rho c_{\text{ст}}^2$  (см. (3.2)), выражение (3.4) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_{\text{ст}}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) описывает распространение продольных волн в стержне и имеет вид классического волнового уравнения. Таким образом, в упругом стержне действительно могут распространяться волны. Известно [18], что решение волнового уравнения можно представить в форме двух бегущих волн, распространяющихся в обе стороны вдоль оси  $X$  со скоростью  $c_{ст}$ . Отметим, что скорость продольных волн в стержнях  $c_{ст}$  меньше скорости продольных волн  $c_{пр}$  в сплошной среде (разница составляет 10% – 15%). Как известно, решением волнового уравнения (3.5) в общем случае является функция вида (см. раздел 1.2)

$$\xi(x, t) = Z_1(x - c_{ст} t) + Z_2(x + c_{ст} t) ,$$

где  $Z_1$  и  $Z_2$  – произвольные функции. В случае гармонического возбуждения колебаний решение (3.5) можно записать следующим образом:

$$\xi(x, t) = \xi_+ \exp(-i\omega t + ikx) + \xi_- \exp(-i\omega t - ikx) . \quad (3.6)$$

Здесь  $\xi_+$  и  $\xi_-$  – амплитуды смещения частиц стержня в продольных волнах, распространяющихся, соответственно, в положительном и отрицательном направлениях;  $\omega$  – частота,  $k = \omega / c_{ст}$  – волновое число.

При выводе волнового уравнения не учитывались силы, связанные с поперечными деформациями; деформации, и, следовательно, связанные с ними напряжения считались малыми; не учитывались потери энергии, т.е.  $k$  и  $c_{ст}$  считались действительными числами. Для учёта затухания распространяющейся волны в уравнение движения вводят силы вязкости. Затухание волн в реальных стержнях будет происходить не только за счёт наличия вязкости, но и за счёт излучения звука в окружающую среду, за счёт потерь в местах крепления и т.д. Однако здесь мы будем учитывать только потери, связанные с наличием вязких сил. Обычно считают, и это

подтверждается экспериментом, что вязкие напряжения  $T_{\text{вязк}}$  пропорциональны градиенту скорости деформации  $\partial \xi / \partial t$ , т.е.

$$T_{\text{вязк}} = E' \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right),$$

где  $E'$  (Н·с/м<sup>2</sup>) – коэффициент вязкости.

Уравнение движения с учётом сил вязкости запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{E'}{\rho} \frac{\partial^3 \xi(x, t)}{\partial t \partial x^2}. \quad (3.7)$$

Решение будем искать в виде (при гармонической вынуждающей силе)

$$\xi(x, t) = \xi(x) \exp(-i\omega t), \quad (3.8)$$

где  $\omega = 2\pi f$  – частота вынуждающей силы. Подставим  $\xi(x, t)$  в (3.7), получим уравнение для определения амплитуды колебания  $\xi(x)$ :

$$\frac{d^2 \xi(x)}{dx^2} + (k')^2 \xi(x) = 0. \quad (3.9)$$

Волновое число  $k'$  становится теперь комплексным и равным

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{E - i\omega E'}{\rho}}}.$$

Величину  $E - i\omega E'$  называют *комплексным модулем упругости*. Решение уравнения (3.9) описывается функцией

$$\xi(x) = \xi_1 \exp(ik'x) + \xi_2 \exp(-ik'x). \quad (3.10)$$

Сначала ограничимся только одной волной, бегущей в положительном направлении. Подставив выражение (3.10) в уравнение (3.8), получим окончательное решение уравнения (3.7):

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp(-i\omega t + ik'x) . \quad (3.11)$$

Так как для большинства твердых тел  $\omega E' \ll E$ , то выражения для величин  $k'$  и  $c'$  могут быть записаны следующим образом:

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{(E - i\omega E')/\rho}} \approx \omega \frac{1 + i\omega E'/2E}{\sqrt{E/\rho}} = k + i\delta , \quad (3.12)$$

$$c' = \frac{\omega}{k'} = c_{\text{ст}} \left( 1 - i \frac{\omega E'}{2E} \right) = c_{\text{ст}} \left( 1 - i \frac{\delta}{k} \right) , \quad (3.13)$$

где введён так называемый коэффициент пространственного затухания

$$\delta = \frac{\omega^2 E'}{2c_{\text{ст}} E} .$$

В этом случае решение (3.11) уравнения (3.7) можно записать в виде:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp(-\delta \cdot x) \exp(-i\omega t + ikx) . \quad (3.14)$$

Поскольку мнимая часть скорости относительно мала, то фазовая скорость акустической волны в стержне с затуханием близка к скорости в стержне без потерь. Из выражения (3.14) видно, что в стержне будет распространяться продольная бегущая волна с амплитудой, экспоненциально убывающей с расстоянием.

Уменьшение амплитуды бегущей волны с расстоянием, вызванное вязкостью, характеризуется введённым выше коэффициентом пространственного затухания  $\delta$ . В случае стоячей волны, которая является суперпозицией встречных бегущих волн, колебания частиц в каждой точке

пространства экспоненциально затухают. Поскольку за время  $t$  волна пробегает расстояние  $x = c_{\text{ст}} t$ , то выражение для временного коэффициента затухания  $\alpha$  можно получить, заменив в (3.14)  $\exp(-\delta \cdot x)$  на  $\exp(-\alpha t)$ , где  $\alpha = c_{\text{ст}} \delta$ . Таким образом, временной коэффициент затухания стоячих волн в стержне выражается следующим образом:

$$\alpha = \frac{\omega^2 E'}{2E} .$$

Для характеристики затухания часто пользуются логарифмической единицей – децибел (дБ). Указывают, на сколько децибел затухает волновой процесс на длине  $\Delta x$  или за время  $\Delta t$ . Амплитуда колебаний на расстоянии  $x_1$  от начала координат (или через промежуток времени  $t_1$  от начала колебаний) определяется выражением

$$\xi_{01} = \xi_0 \exp(-\delta \cdot x_1) = \xi_0 \exp(-\alpha t_1) ,$$

а на расстоянии  $x_2$  (соответственно через промежуток времени  $t_2$ ) – выражением

$$\xi_{02} = \xi_0 \exp(-\delta \cdot x_2) = \xi_0 \exp(-\alpha t_2) .$$

Изменение амплитуды в точке  $x_2$  относительно точки  $x_1$  в дБ будет равно

$$\Delta(\text{дБ}) = 20 \lg\left(\frac{\xi_{02}}{\xi_{01}}\right) = -8.68 \cdot \delta \cdot (x_2 - x_1) .$$

Для временной характеристики аналогично получается

$$\Delta(\text{дБ}) = 20 \lg\left(\frac{\xi_{02}}{\xi_{01}}\right) = -8.68 \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1) . \quad (3.15)$$

Например, при  $x_2 - x_1 = 1$  м, получается затухание

$$\Delta_1 = 8.68 \cdot \delta \text{ [дБ/м]} ,$$

или при  $\Delta t = 1 \text{ с}$

$$\Delta_2 = 8.68 \alpha \text{ [дБ/с]} .$$

### **3.3 Распространение продольных волн в тонком стержне конечной длины**

Для стержня конечной длины уравнение колебаний (3.7), выражения для волнового числа (3.12) и фазовой скорости (3.13), а также решения (3.11, 3.14) уравнения (3.7) остаются справедливыми. Однако, теперь в решении уравнения (3.10) нельзя отбрасывать второе слагаемое, соответствующее отраженной волне, и необходимо учитывать оба члена. Кроме того, для решения задачи о колебаниях стержня конечной длины, необходимо учесть граничные условия на его обоих концах.

В соответствии с особенностями описанной ниже экспериментальной установки будем считать, что на одном конце стержня при  $x = 0$  в направлении его оси действует вынуждающая периодическая сила

$$F = F_0 \exp(-i\omega t) .$$

Разместим на этом же конце начало координат  $x = 0$ . Вторым концом стержня при  $x = l$  будем считать свободным. К нему никаких внешних сил не приложено, и он может свободно колебаться вдоль оси. В этом случае граничные условия задаются следующим образом:

- а) в сечении при  $x = 0$ , где приложена сила, возникающее в материале в результате деформации напряжение, равно напряжению, создаваемому внешней силой ( $F / S$ ):

$$(E - i\omega E') \frac{d\xi(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{F}{S} ; \quad (3.16)$$

б) второй конец стержня при  $x=l$  свободен, и поэтому можно записать:

$$(E - i\omega E') \frac{d\xi(x)}{dx} \Big|_{x=l} = 0 . \quad (3.17)$$

Решение уравнения (3.7), с учетом граничных условий (3.16) и (3.17), имеет вид

$$\xi(x,t) = - \frac{F_0 \exp(-i\omega t) \operatorname{ch}[ik'(l-x)]}{ik'S(E - i\omega E') \operatorname{sh}(ik'l)} . \quad (3.18)$$

Решение (3.18) для стержня без затухания ( $E' = 0$ ) принимает вид

$$\xi(x,t) = \frac{F_0 \exp(-i\omega t) \cos[\omega(l-x)/c_{\text{ст}}]}{kES \sin(\omega l/c_{\text{ст}})} . \quad (3.19)$$

Из выражения (3.19) следует, что в стержне без затухания устанавливается чисто стоячая волна, причем амплитуда смещения по длине стержня распределена точно по косинусоиде. Присутствие в знаменателе величины  $\sin(\omega l/c_{\text{ст}})$  указывает на сильную зависимость амплитуды от частоты. При частотах  $\omega_n$  вынуждающей силы

$$\sin(\omega_n l/c_{\text{ст}}) = 0 . \quad (3.20)$$

амплитуда стержня стремится к бесконечности. Эти частоты называются резонансными. На этих частотах амплитуда колебаний стержня резко возрастает, и он начинает громко звучать. Из условия (3.20) можно получить значения резонансных частот:

$$\frac{\omega_n l}{c_{\text{ст}}} = n\pi , \text{ или } \omega_n \equiv 2\pi f_n = \frac{n\pi}{l} c_{\text{ст}} , \text{ откуда } f_n = \frac{n}{2l} c_{\text{ст}} , \quad (3.21)$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$  .

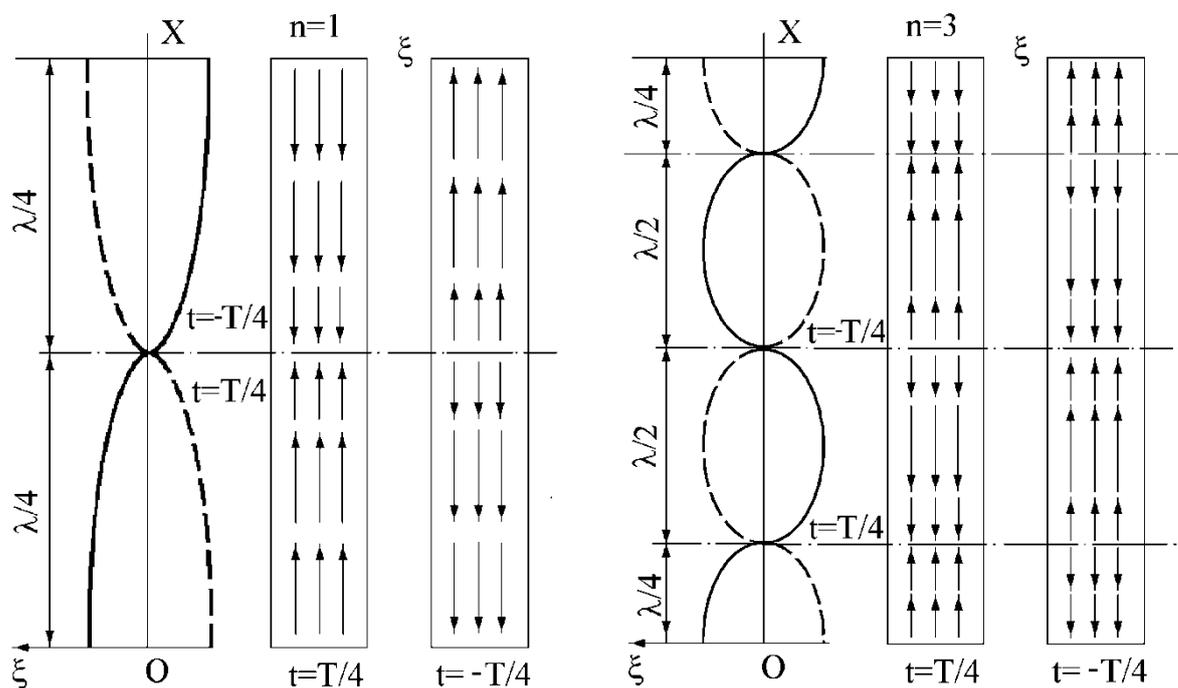
Таким образом, стержень представляет собой распределенную колебательную систему, где могут существовать различные собственные колебания (моды), каждое из которых имеет свою собственную частоту  $\omega_n$ , определяемую выражением (3.21). Спектр собственных частот продольных колебаний тонкого стержня является эквидистантным.

Условие (3.21) означает, что на длине стержня укладывается целое число полуволен:  $l = \frac{c_{ст}}{2f_n} n$ . При первом резонансе ( $n = 1$ ) на длине стержня укладывается половина длины волны, при втором ( $n = 2$ ) – одна длина волны, при третьем ( $n = 3$ ) –  $3/2$  длины волны и т.д. Резонансным частотам нечётного порядка соответствуют колебания с одним, тремя и т.д. узлами, причём один из них попадает на середину стержня. Резонансным частотам чётного порядка соответствуют колебания с чётным числом узлов, причём на середине стержня в этом случае всегда находится максимум амплитуды смещения.

*Если середина стержня закреплена, то колебания при резонансных частотах чётного порядка будут заглушены и стержень эффективно возбуждается только на нечётных гармониках  $n = 2m - 1$ :*

$$f_{n=2m-1} = (2m - 1) \frac{c_{ст}}{2l}, \text{ где } m=1, 2, 3, \dots (n=1, 3, 5, \dots).$$

На рис. 3.3 показано пространственное распределение продольного смещения частиц стержня, закреплённого в середине, для частот возбуждения двух первых резонансов ( $n=1$  и  $n=3$ ). Смещения показаны для двух моментов времени, отличающихся на полпериода (на соответствующей частоте).



**Рис. 3.3.** Распределение амплитуд смещения зажатого в середине стержня для двух первых возбуждаемых резонансных частот ( $n=1, 3$ ) в разные моменты времени; здесь  $T$  – период колебаний на соответствующей резонансной частоте

Для стержня с малым затуханием, когда  $\omega E' < E$ , формула (3.18) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & \\ = & \frac{F_0 \exp(-i\omega t) \{ \cos[\omega(l-x)/c_{cr}] - i\delta \cdot (l-x) \sin[\omega(l-x)/c_{cr}] \}}{ik'(E - i\omega E') S [-i \sin(\omega l / c_{cr}) + \delta \cdot l \cos(\omega l / c_{cr})]} \quad (3.22) \end{aligned}$$

Из анализа (3.19) и (3.22) следует, что резонанс при малом затухании наступает практически на тех же частотах, что и для стержня без затухания. Существенное отличие колебаний реального стержня с малым затуханием от идеального заключается в характере поведения величины их амплитуды в области резонансных частот. В то время как амплитуда колебаний стержня без потерь при резонансе стремится к бесконечности, амплитуда колебаний реального стержня будет иметь большую, но конечную амплитуду. При

этом изменится и распределение амплитуды смещения вдоль оси стержня. Однако оно будет незначительно отличаться от косинусоидального распределения.

Возбуждая продольные колебания в стержне конечной длины, можно определить модуль Юнга и коэффициент вязкости  $E'$ . Действительно, изменяя частоту вынуждающей силы, по резкому возрастанию амплитуды можно найти ряд последовательных резонансных частот  $f_n$ , и зная длину стержня  $l$ , с помощью формулы (3.21) определить скорость распространения упругой волны  $c_{ст}$ .

Как следует из (3.5) и (3.14), для материала с малым затуханием фазовая скорость продольных волн близка к значению стержневой скорости  $c_{ст} = \sqrt{E/\rho}$ . Следовательно, зная плотность материала стержня  $\rho$ , можно определить модуль Юнга  $E$  по формуле

$$E = \rho c_{ст}^2. \quad (3.24)$$

Для определения коэффициента вязкости необходимо определить частоты  $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ , при которых квадрат амплитуды смещения  $\xi^2$  вдвое меньше квадрата амплитуды смещения при резонансе. Строго говоря, по резонансной кривой можно определить только общие потери в колебательной системе (вязкие потери, излучение, трение в зажимах и др.). Если потери за счет вязкости значительно больше всех остальных потерь (это относится к эбонитовым стержням), то коэффициент вязкости может быть измерен.

Величина  $2\Delta\omega$  называется шириной резонансной кривой (ее определяют, уходя от резонансной частоты в сторону больших или меньших частот). Зная  $\Delta\omega$  и  $\omega_0$ , можно вычислить коэффициент вязкости по формуле

$$E' = \frac{E \Delta \omega}{\omega_0^2} . \quad (3.25)$$

При этом предполагается, что  $\omega = \omega_0 \pm \Delta \omega \approx \omega_0$ . Это выполняется, когда потери в стержне малы.

### 3.4 Крутильные колебания тонких стержней конечной длины

Крутильные колебания стержней можно возбудить, создав в каком либо сечении стержня, перпендикулярном его геометрической оси, переменный момент сил  $M = M_0 \exp(-i\omega t)$ . Возникающие в этом случае колебания круглого стержня изображены на рис. 3.4, на котором показано положение одной из образующих цилиндра в разные моменты времени.

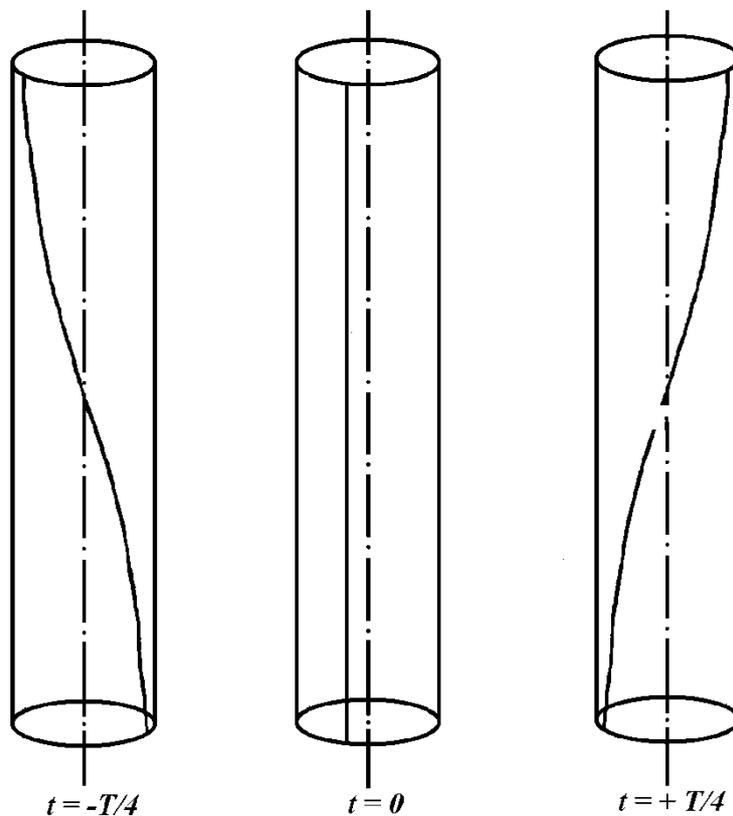


Рис. 3.4. Крутильные колебания стержня в разные моменты времени, соотнесённые с периодом волны  $T$

Теория крутильных колебаний тонкого стержня строится аналогично теории продольных колебаний стержня. Поэтому здесь приводятся только окончательные результаты. При возбуждении крутильных колебаний стержень претерпевает деформацию сдвига [19]. Вдоль оси стержня распространяется поперечная волна, дифференциальное уравнение для которой имеет вид [11, § 25]

$$\rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \mu' \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^2 \partial t} ; \quad (3.26)$$

здесь ось  $X$  направлена по оси стержня,  $\gamma$  – угол закручивания стержня в плоскости, перпендикулярной оси, под влиянием вынужденного момента,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\mu'$  – коэффициент сдвиговой вязкости.

Скорость распространения такой волны определяется комплексным *модулем сдвига*

$$\mu - i\omega\mu' \quad (3.27)$$

и совпадает, как уже отмечалось, со скоростью поперечных волн:

$$c_{\text{крут}} = c_{\text{поп}} = \sqrt{\frac{\mu - i\omega\mu'}{\rho}} . \quad (3.28)$$

Для материала с малой вязкостью скорость крутильных колебаний составляет

$$c_{\text{крут}} = c_{\text{поп}} = \sqrt{\mu / \rho} . \quad (3.29)$$

Увеличение амплитуды колебаний стержня наблюдается на резонансных частотах, соответствующих целому числу полуволн, укладывающихся на длине стержня. Для свободного стержня отношение резонансных частот будет 1:2:3:4 и т.д., т.е. спектр собственных частот

сдвиговых колебаний нулевой нормальной волны (моды) стержня, так же как и для продольных колебаний, является эквидистантным.

Скорость поперечной волны связана с резонансными частотами соотношением

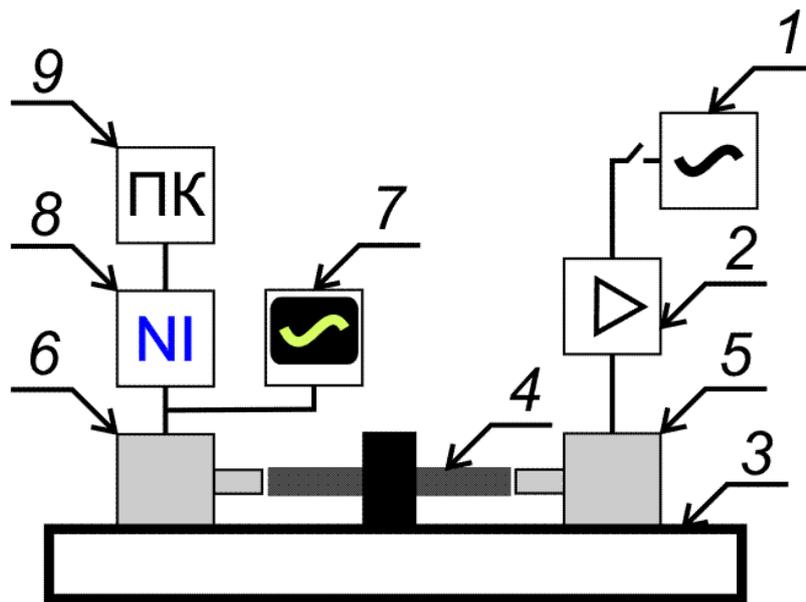
$$c_{\text{крут}} = c_{\text{поп}} = \frac{2l f_n}{n} . \quad (3.30)$$

Вязкость материала и другие виды потерь будут вносить затухание в колебания стержня, благодаря чему ширина резонансной кривой  $\Delta\omega_n$  будет конечной. Измерение резонансных частот стержня  $f_n$  позволяет по формулам (3.29), (3.30) определить скорость поперечной волны  $c_{\text{поп}}$  и модуль сдвига  $\mu$ .

### **3.5 Экспериментальная установка для исследования продольных колебаний в стержнях**

На рис. 3.5. изображена схема установки по исследованию продольных колебаний твердотельных стержней. Она является частью более общей установки по исследованию продольных и крутильных колебаний в стержнях (см. фотографию установки на рис. 3.6). Экспериментальная установка (рис. 3.5) включает в себя:

- 1) генератор 1 с диапазоном рабочих частот 20–20000 Гц;
- 2) усилитель мощности 2;
- 3) станину 3, на которой укреплены исследуемый стержень 4, возбудитель 5 и приемник колебаний 6;
- 4) осциллограф 7;
- 5) блок оцифровки сигнала National Instruments 8;
- 6) компьютер 9.



**Рис. 3.5.** Схема экспериментальной установки для исследования продольных колебаний стержней



**Рис. 3.6.** Фотография установки для исследования продольных и крутильных колебаний стержней

При проведении измерений исследуемые стержни 4 закрепляются строго в середине своей длины (в специальной стойке тремя винтами), а концы стержня остаются свободные. В результате такого закрепления в середине стержня принудительно создается узел. Это приводит к тому, что чётные резонансные колебания не должны возбуждаться.

Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 5 и 6. Преобразователь 5 соединяется со звуковым генератором 1. Протекающий по катушке этого преобразователя переменный ток  $I_{\sim}$  создает магнитное поле  $B_{\sim}$ , пропорциональное  $I_{\sim}$ , в котором находится один конец стержня. На этот конец стержня будет действовать переменная сила  $F_{\sim}$ , величина которой пропорциональна  $B_{\sim}^2$ . (В случае немагнитных стержней на их концы наклеиваются тонкие ферромагнитные диски). Для получения линейной связи между  $F_{\sim}$  и  $I_{\sim}$  в преобразователе имеется постоянный магнит, поле которого  $B_0$  значительно больше  $B_{\sim}$ . В этом случае действующая на стержень переменная сила равна

$$F_{\sim} \sim B^2 \sim (B_0 + B_{\sim})^2 = (B_0^2 + 2B_0 B_{\sim} + B_{\sim}^2) \sim 2B_0 B_{\sim} \sim 2B_0 I_{\sim},$$

$$\text{так как } 2B_0 B_{\sim} \gg B_{\sim}^2.$$

Линейная связь между током и действующей силой, позволяет определить частоту переменной силы по измерению частоты генератора. Рядом с другим концом стержня находится аналогичный преобразователь 6; магнитное поле, в котором он находится, изменяется при колебаниях стержня и вызывает ЭДС. Амплитуда этой ЭДС пропорциональна амплитуде колебаний стержня, а частота совпадает с частотой генератора. При настройке генератора на резонансную частоту стержня, амплитуда колебаний последнего резко возрастает. ЭДС, наводимая этими колебаниями в приемнике, измеряется с помощью блока оцифровки –

аналого-цифрового преобразователя (АЦП) фирмы National Instruments 8, подключенного к компьютеру 9.

Для эффективного возбуждения и приёма колебаний возбудитель и, особенно, приёмник необходимо с помощью микрометрической подачи приблизить как можно ближе к стержню, избегая при этом касания с ним. Это особенно важно для наблюдения высоких гармоник стержней со сравнительно большим затуханием (эбонит и др.), где амплитуды колебаний малы.

Известные трудности могут возникнуть в определении истинных значений резонансных частот продольных колебаний стержня. Это связано с тем, что увеличение амплитуды может произойти и за счёт резонанса возбуждающей и принимающей системы, а также за счёт резонанса, возникающего при изгибных колебаниях исследуемого стержня. Теория и наблюдения изгибных колебаний показывают, что их собственные частоты составляют негармонический ряд и лежат значительно ниже основной частоты продольных колебаний стержня. Уменьшить влияние этих побочных эффектов можно тщательной центровкой стержня относительно возбудителя. Однако полностью устранить эти помехи не всегда удается. Необходимо отметить, что при зажатии стержня в его центре могут наблюдаться четные резонансы, особенно для мягких стержней с относительно большей вязкостью, однако амплитуда колебаний при «чётных» резонансах будет значительно меньше, чем при «нечётных» резонансах.

Как отмечалось выше, коэффициент вязкости можно рассчитать по ширине резонансной кривой. Однако, для металлических стержней, где потери энергии в основном определяются не вязкостью, а, как отмечалось выше, другими факторами, ширина резонансной кривой дает возможность охарактеризовать только суммарные потери. В этом случае целесообразней пользоваться понятием добротности колебательной системы  $Q$ , которое

определяется как величина, в  $\pi$  раз превосходящая количество периодов свободных колебаний системы, по истечении которых амплитуда колебаний системы падает в  $e$  раз. Из теории колебаний известно, что добротность  $Q$  связана с  $\Delta\omega$  (или  $\alpha$ ) следующим соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2(\Delta\omega)} = \frac{\omega_0}{2\alpha} . \quad (3.31)$$

Для определения  $Q$  можно пользоваться двумя методами: измерять ширину резонансной кривой ( $2\Delta\omega$ ), или определить коэффициент затухания ( $\alpha$ ). При больших потерях пользуются первым способом (измеряют  $2\Delta\omega$ ), а при малых потерях, когда  $\Delta\omega$  настолько мало, что не может быть измерено, пользуются измерением  $\alpha$ . Для этого возбуждают стержень на первой резонансной частоте (при малых потерях резонансная частота близка к собственной частоте колебаний стержня) и записывают уменьшение амплитуды свободных колебаний как функцию времени с помощью компьютера. Блок оцифровки National Instruments-АЦП может регистрировать изменение амплитуды напряжения, подаваемого на его вход, в линейном или логарифмическом масштабах. Если измерения проводятся в логарифмическом масштабе в «дБ», то расчет добротности можно провести, используя формулы (3.15) и (3.31):

$$\Delta(\text{дБ}) = 8.68 \alpha \Delta t = 8.68 \frac{\omega_0}{2Q} \Delta t , \quad (3.32)$$

где  $\Delta$  (дБ) – изменение сигнала в дБ,  $\Delta t$  – время спадания амплитуды на  $\Delta$  (дБ),  $\omega_0$  – резонансная частота. При уменьшении амплитуды сигнал за время  $\Delta t = \Delta t^{(e)}$  имеем  $\Delta t^{(e)} = 1/\alpha$ , и тогда из (3.31) или (3.32) следует, что  $Q = \pi f_0 \Delta t^{(e)}$ , где  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ .

### 3.6 Экспериментальная установка для исследования крутильных колебаний в стержнях

Для возбуждения и приема крутильных колебаний в стержне используются пьезокерамические преобразователи. Каждый из концов стержня изготовлен таким образом, что образуются две параллельные плоские поверхности, как показано на рис. 3.7. На каждой из этих поверхностей закреплены по две пьезокерамические пластины. Electroдами служат сам стержень и внешние поверхности пьезокерамических пластин, которые объединены вместе перемычками.

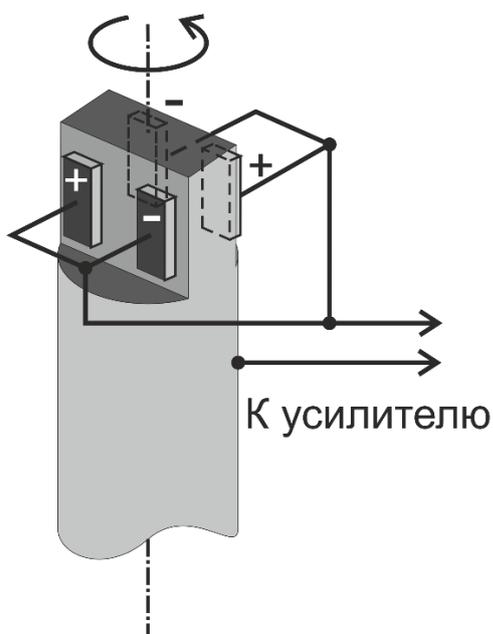


Рис. 3.7. Схема возбуждения и приема крутильных колебаний в стержне

Пластины, расположенные симметрично по отношению к оси стержня (ось изображена штрих-пунктиром на рис. 3.7), поляризованы одинаково, а прикрепленные к общей поверхности – противоположно. Когда на пластины подается напряжение, толщина двух из них уменьшается, а двух других – увеличивается. Благодаря этому создается крутящий момент, который вызывает колебания стержня. Аналогично работают и приёмные пластины, расположенные на

другом конце стержня: закручивание конца стержня вызывает деформацию сжатия или растяжения каждой пары пластин, что сопровождается появлением напряжения на электродах.

Напряжение звуковой частоты, создаваемое генератором, подается через усилитель на пластины, расположенные с одного из концов стержня. Вращающий момент возбуждает крутильные колебания в стержне.

Возбужденные в стержне колебания принимаются при помощи аналогичной системы пьезокерамических пластин на другом конце стержня. В этой системе, вследствие прямого пьезоэлектрического эффекта, создается электрическое напряжение, пропорциональное амплитуде колебаний, которое регистрируется осциллографом. Изменяя частоту генератора, можно определить резонансные частоты стержней по резкому возрастанию амплитуды колебаний и с их помощью рассчитать модуль сдвига  $\mu$ .

### 3.7 Обработка сигналов

Обозначения элементов управления, имеющих на экране компьютера, подчеркнуты в тексте волнистой линией. Например, кнопка «Измерение» в режиме «Самописец».

Приём сигналов осуществляется с помощью платы NI 6115 8 (рис. 3.5), расположенной внутри корпуса компьютера. Оцифрованный сигнал обрабатывается программой, написанной на языке LabView. Программа позволяет осуществлять обработку сигналов в двух режимах: в режиме «Спектральный анализ» и в режиме «Самописец». Виды интерфейса программы в этих режимах изображены на рис. 3.8 и рис. 3.9, соответственно. Их переключение осуществляется выбором на экране компьютера соответствующей вкладки.

#### 3.7.1 Режим «Спектральный анализ»

Вид интерфейса программы представлен на рис. 3.8. Слева вверху находится переключатель каналов, который позволяет анализировать сигналы, соответствующие продольным колебаниям или крутильным колебаниям. Ниже находятся три графика. Каждый из них снабжен переключателем вида вертикальной шкалы: можно использовать линейную

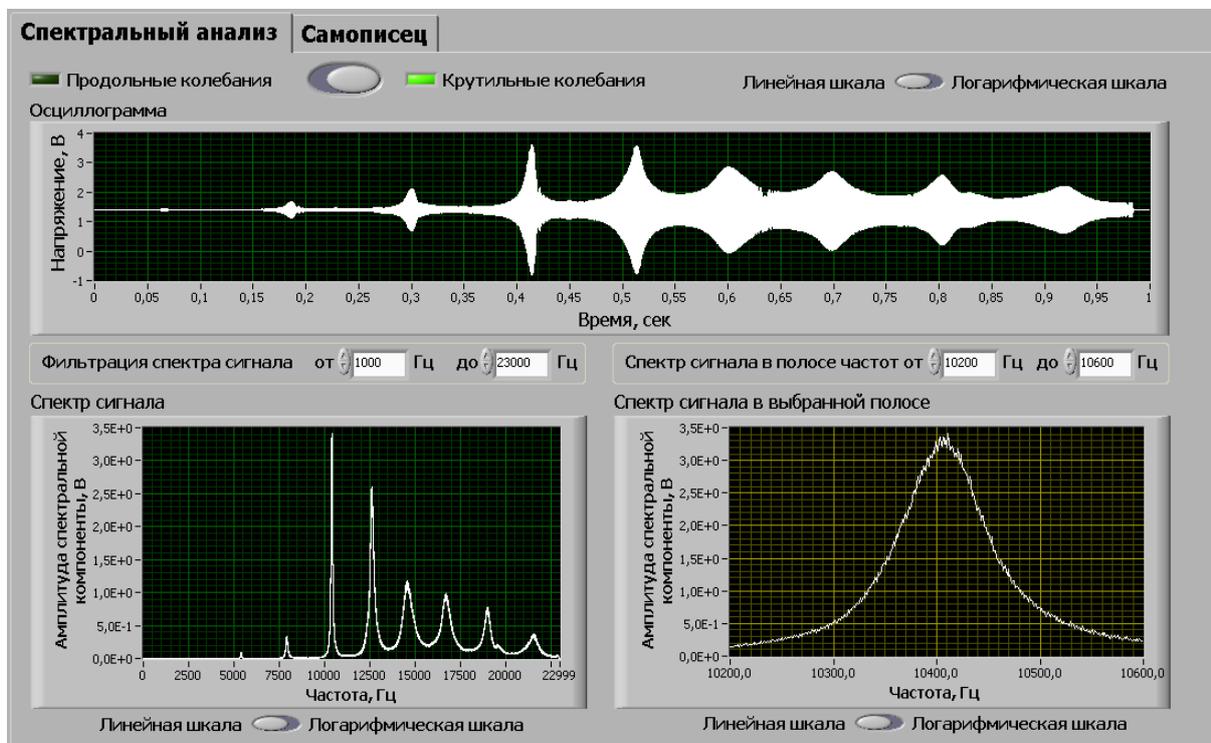
шкалу или логарифмическую шкалу (в зависимости от выполняемых упражнений, выбирается более удобный вид).

Сигнал принимается блоком оцифровки в течение 1 секунды. Частота дискретизации составляет при этом 46 кГц, за счёт чего, согласно теореме Котельникова-Шеннона, диапазон анализируемых частот ограничен сверху частотой 23 кГц. После того, как данные получены, выполняется их автоматическая обработка. На диаграмме, расположенной в верхней части экрана (рис. 3.8), отображается осциллограмма принятого сигнала. В данной работе используются два типа сигналов, которые может создавать генератор. Первый тип – это число гармонический сигнал с определённой частотой. Второй тип представляет собой сигнал «качающейся» частоты, т.е. частота сигнала изменяется со временем линейным образом в диапазоне, задаваемом на генераторе. Если такой сигнал, содержащий все частоты заданного диапазона, подавать на стержень, то на тех частотах, которые совпадают с резонансными частотами стержня, амплитуда колебаний стержня будет возрастать. Поэтому в принятом сигнале появятся периодические пики, соответствующие моментам времени, когда генератор создает резонансную частоту.

Сигнал содержит постоянную составляющую, а также большое количество паразитных наводок в области низких частот; поэтому необходимо произвести фильтрацию, которая осуществляется программно. Полоса пропускания фильтра может быть задана в пределах от 0 Гц до 23 кГц в окне «Фильтрация спектра сигнала». Установка нижней частоты около 1 кГц позволяет исключить постоянную составляющую и низкочастотные наводки. Поскольку спектр информативной части сигнала (частоты собственных колебаний стержня) лежит в полосе частот выше 1 кГц, такая фильтрация на нем не сказывается. Полученный после фильтрации спектр отображается на диаграмме слева внизу (график «Спектр сигнала»).

Для более точного определения резонансных частот спектра следует задать полосу просмотра, установив в окне «Спектр сигнала в полосе частот» нижнюю и верхнюю частоты. При этом участок спектра, соответствующий выбранному диапазону, отображается справа внизу на графике «Спектр сигнала в выбранной полосе».

Амплитуда спектральной компоненты, отложенная по вертикальной оси графиков «Спектр сигнала» и «Спектр сигнала в выбранной полосе», равна произведению плотности спектральной амплитуды (т.е. результата БПФ дискретизованного входного сигнала) на частоту дискретизации.



**Рис. 3.8.** Вид интерфейса программы в режиме «Спектральный анализ» крутильных колебаний. Везде выбрана линейная шкала

### 3.7.2 Режим «Самописец»

В этом режиме регистрируется зависимость амплитуды продольных или крутильных колебаний от времени. Если нажата кнопка «Измерение», осуществляется съём данных в виде последовательности пачек длительностью по 1 секунде. Поскольку внутренняя память блока оцифровки ограничена, после снятия каждой такой пачки данные поступают в компьютер. Поэтому между принятыми пачками возникают паузы, соответствующие времени передачи данных в компьютер. После регистрации каждой пачки происходит ее математическая обработка и обновление графика.

Если кнопка «Измерение» не нажата, можно провести обработку полученных данных. Для этого необходимо поместить присутствующие на графике курсоры (синяя и зелёная вертикальные линии) в начало и в конец участка сигнала, соответствующего убыванию амплитуды колебаний стержня после отключения генератора. В зависимости от типа вертикальной шкалы (линейная или логарифмическая), график будет иметь экспоненциальный (рис. 3.9, вверху) или линейный (рис. 3.9, внизу) вид. Значения амплитуд сигнала в дискретных временных точках, расположенных между курсорами, аппроксимируются с помощью метода наименьших квадратов (МНК), что дает возможность определить время затухания колебаний  $\Delta t^{(e)} = 1/\alpha$  (за которое их амплитуда убывает в  $e$  раз) и среднеквадратичное отклонение, обусловленное присутствием в сигнале паразитных шумов.

Зная собственную частоту  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , можно по формуле (3.32) найти величину добротности  $Q$ . Для этого рассчитать изменение сигнала в дБ, соответствующее убыванию амплитуды в  $e$  раз за найденное время затухания.

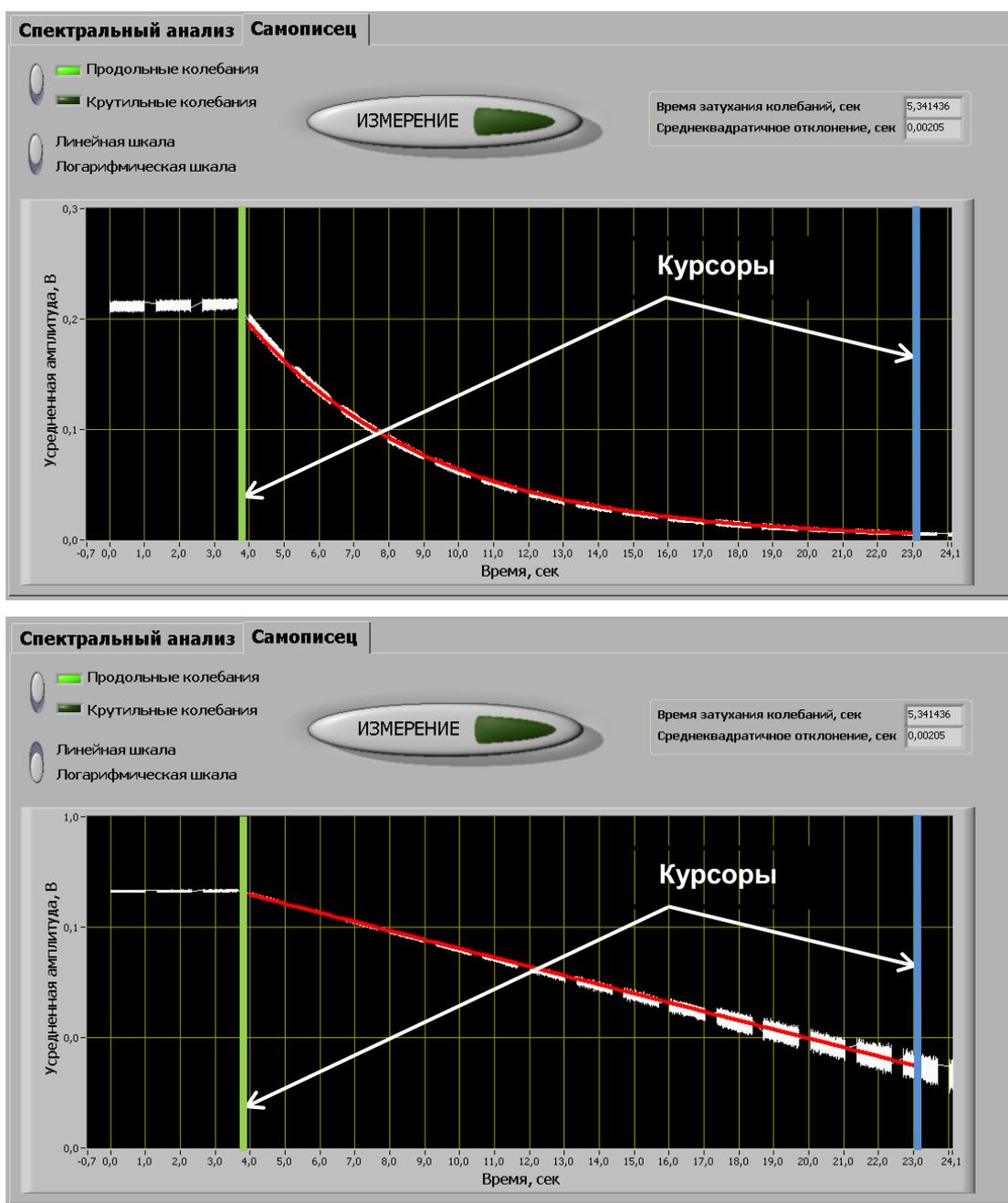


Рис. 3.9. Вид интерфейса программы в режиме «Самописец». Сверху показан случай линейной вертикальной шкалы, снизу – логарифмической шкалы

### 3.8 Задания

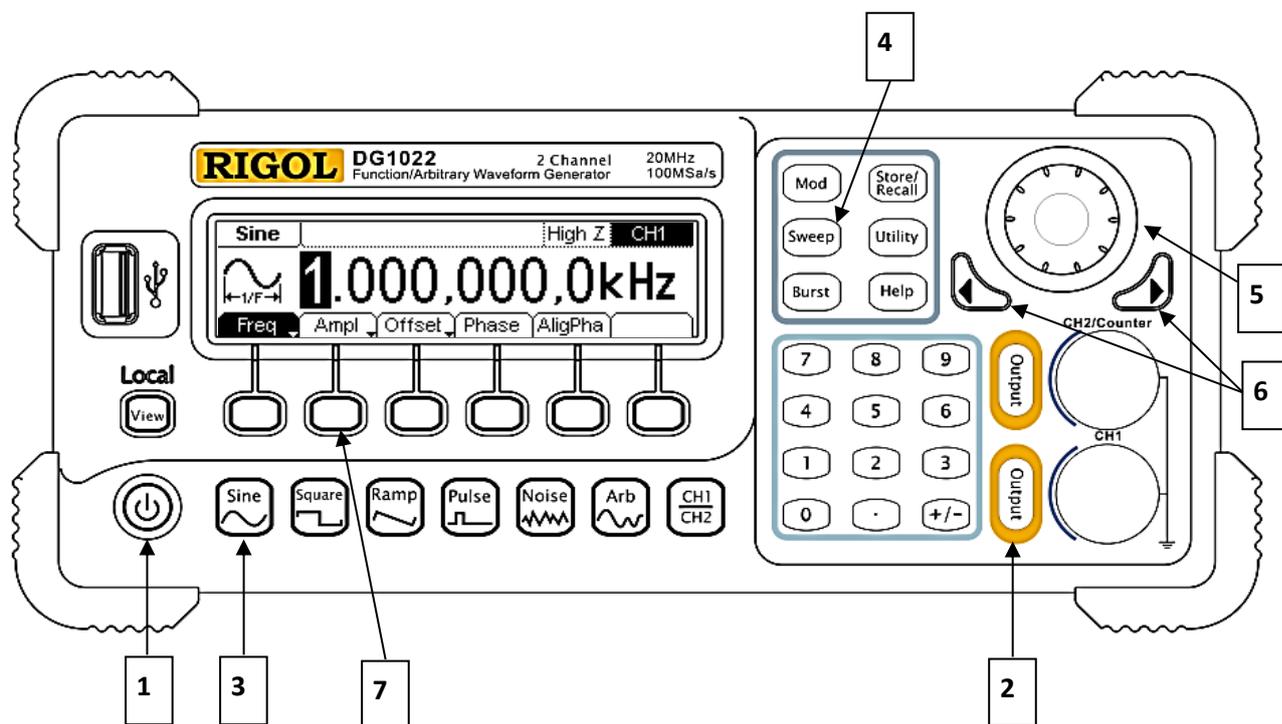


Рис. 3.10. Лицевая панель генератора

*Обозначения, используемые далее в описании:*

- Названия кнопок на панелях приборов даются в прозрачной рамке. Например, кнопкой **1** включается генератор.
- Названия экранных кнопок даются в серой рамке и соответствуют отображаемой на экране генератора надписи (например, **Freq**). Экранные кнопки серого цвета. На генераторе они расположены под экраном. Например, в случае, изображённом на рис. 3.10, надписи **Ampl** соответствует кнопка **7**.
- Колёсиком **5** и стрелками **6** можно плавно менять частоту или амплитуду.
- Обозначения элементов управления, имеющих на экране компьютера, подчеркнуты в тексте волнистой линией. Например, кнопка «Измерение» в режиме «Самописец».

1. Включить усилитель тумблером «Сеть». Усилитель будет прогреваться в течение 5 минут.
2. Тумблер типа колебаний на усилителе перевести в положение «Продольные колебания».
3. Включить компьютер и запустить программу «Задача 9». На экране должен появиться режим «Спектральный анализ» и опция «Продольные колебания».
4. Включить генератор DG1022 (см. рис. 3.10) кнопкой [1] и подать сигнал с его выхода на установку, нажав кнопку [2], – она будет подсвечиваться, что означает присутствие синусоидального (горит кнопка [3]) сигнала на выходе генератора. По умолчанию амплитуда сигнала на выходе генератора при его включении устанавливается равной 5В. При необходимости она может быть установлена после нажатия кнопки **Ampl** с помощью колесика [5] или стрелок [6].
5. Перевести генератор в режим свипирования; данный режим означает, что частота генератора плавно изменяется в определенных пределах. Для этого нажать кнопку [4] (она загорится). Выбирая кнопку **Start**, можно установить нижнюю частоту, а выбирая кнопку **Stop** – верхнюю частоту. Повторное нажатие кнопки **Start** переключает режим задания границ частотного диапазона на такой, при котором задается центральная частота (кнопка **Center**) и ширина полосы (кнопка **Span**). Хотя оба режима эквивалентны, задавать нижнюю и верхнюю частоту в данной задаче более удобно. Для возврата к режиму задания границ диапазона следует нажать кнопку **Center** раз. Установить диапазон частот 1кГц – 20кГц.
6. Кнопка **Time** задает период изменения частоты. Задать его равным 1 секунде.

7. Закрепить стержень в установке. При правильном его положении слышен мелодичный звон.

8. На экране компьютера будет отображен спектр сигнала. Он должен содержать линии, соответствующие резонансным частотам стержня. Чтобы видеть все спектральные линии, можно переключиться с линейной шкалы на логарифмическую или обратно. Чтобы отличить истинную резонансную частоту от паразитной наводки, следует временно отключить генератор, нажав на горящую кнопку  и подождя, пока прекратятся колебания стержня. При этом амплитуда полезного сигнала постепенно уменьшается.

9. Для более точного измерения резонансных частот задать частоту свипирования (п. 5) в коротких диапазонах 100 Гц – 2 кГц, 2 кГц – 4 кГц, 4 кГц – 6 кГц, ... 20 кГц – 22 кГц. При этом на графике «Спектр сигнала» слева внизу будут представлены частоты только в заданном диапазоне (хотя горизонтальная шкала всегда отображается от 1 кГц до 23 кГц). Одновременно в окне «Спектр сигнала в полосе частот» установить область просмотра, соответствующую диапазону свипирования (здесь удобно использовать линейную шкалу). Для точного определения частоты область просмотра можно постепенно сужать. Записать полученные частоты.

10. Перейти в режим «Самописец» и выбрать с помощью опции в левой части экрана режим «Продольные колебания». На генераторе выйти из режима свипирования, нажав кнопку . Задать частоту генератора (кнопка **Freq**), соответствующую частоте первого резонанса. Нажать на правую часть кнопки «Измерение». Изменяя частоту генератора в небольших пределах и последовательно уменьшая шаг от 10 Гц до 0.1 Гц, нужно добиться максимальной амплитуды сигнала. Изменять частоту нужно достаточно медленно, чтобы амплитуда сигнала успевала устанавливаться. Когда текущая частота генератора близка к резонансной частоте стержня, между этими частотами возникают биения. Чем ближе частота генератора к

резонансной, тем больше период биений. Когда амплитуда колебаний становится большой, возможны нелинейные эффекты, сопровождающиеся резким неприятным звуком. В этом случае следует немного отодвинуть датчики от торцов стержня микровинтом. Настроившись на резонансную частоту (это можно сделать с точностью до долей Гц), генератор выключают, нажав кнопку . При этом на компьютере регистрируются затухающие колебания. Примерно через 20 секунд после отключения генератора нужно остановить процесс измерения, повторно нажав кнопку «Измерение». С помощью курсоров указать участок сигнала, соответствующий затухающим колебаниям (в логарифмической шкале он соответствует линейному спаду) и записать рассчитанное для этого участка время затухания сигнала, указанное на экране в секундах.

11. Повторить пункты 4–10 (начиная п. 4 с нажатия кнопки ) для всех имеющихся металлических стержней.

12. Снять резонансную кривую на 1-й резонансной частоте для неметаллического стержня и зарисовать ее график. Для этого выбрать режим «Спектральный анализ» и повторить пункты 5–9, задавая диапазон свипирования 1 кГц – 5 кГц. Выбрав лучшую реализацию резонансной кривой, график можно зафиксировать, нажав слева вверху кнопку с красным кружком. Для возобновления работы нажать на белую стрелку слева от этого кружка.

13. Перевести тумблер типа колебаний на усилителе в положение «Крутильные колебания». На компьютере выбрать режим «Спектральный анализ» для крутильных колебаний. Убедиться, что генератор включен, при необходимости нажав кнопку . Задать свипирование в диапазоне 1 кГц – 23 кГц (см. пункты 5 и 6). Записать частоты максимумов спектра крутильных колебаний, получаемых на экране. Удобно использовать линейную шкалу.

14. По экспериментальным результатам рассчитать скорости продольных  $c_{\text{ст}}$  и поперечных  $c_{\text{поп}}$  волн в стержнях и определить модули упругости  $E$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $\lambda$ .
15. Используя рис. 3.1, оценить влияние геометрической дисперсии на точность определения  $c_{\text{ст}}$ .
16. Рассчитать для неметаллических стержней коэффициент вязкости  $E'$  и добротность  $Q$ .
17. Для металлических стержней рассчитать добротность системы  $Q$ .
18. Результаты экспериментальных измерений и проведенных расчетов привести в форме таблицы (см. ниже). Оценить величину погрешности определяемых величин и указать факторы, влияющие на нее.

### 3.9 Форма отчёта

Материал	Сталь	Латунь	Медь	Алюминий	Эбонит
Резонансные частоты продольных колебаний					
Резонансные частоты крутильных колебаний					
Стержневая скорость $c_{ст}$					
Скорость поперечных волн $c_{поп}$					
Модуль Юнга $E$ , ГПа					
Коэффициент Пуассона $\sigma$					
Модуль сдвига $\mu$ , ГПа					
Постоянная Ламе $\lambda$ , ГПа					
Коэффициент вязкости $E'$					
Добротность $Q$					

*Плотности материалов, используемых при измерениях:*

Материал	Сталь	Латунь	Медь	Алюминий	Эбонит
Плотность, $\rho$ , кг /м <sup>3</sup>	$7.3 \times 10^3$	$8.5 \times 10^3$	$8.9 \times 10^3$	$2.7 \times 10^3$	$1.5 \times 10^3$

*Диаметр всех стержней*  $1.4 \times 10^{-2}$  м.

*Длины металлических стержней для продольных колебаний* 0.7 м.

*Длина пластмассового стержня для продольных колебаний* 0.4 м.

*Эффективная длина металлических стержней для крутильных колебаний:* латунного 0.4 м, медного 0.5 м.

### **3.10 Контрольные вопросы**

1. Написать уравнение и граничные условия для продольных колебаний в стержне. Привести решение уравнения и выражение для резонансных частот; дать связь между длиной стержня и длиной волны возбуждаемых мод. Оценить первую резонансную частоту для дюралевого стержня при длине стержня 70 см и скорости продольных колебаний примерно 5000 м/с.

2. Нарисовать распределение амплитуды смещения частиц вдоль стержня для первых трёх мод продольных колебаний и выписать соотношение частот этих мод. Как факт закрепления стержня в центре влияет на амплитуду чётных и нечётных мод?

3. Описать метод измерения добротности в металлических стержнях по затуханию свободных колебаний, а также метод измерения добротности и коэффициента вязкости в неметаллических стержнях по ширине резонансной кривой. Выписать выражение для добротности

через полуширину резонансной кривой и через коэффициент затухания.

4. Описать метод возбуждения крутильных колебаний в стержне. Связь скорости сдвиговых волн с резонансными частотами крутильных колебаний.

5. Нарисовать распределение амплитуды смещения частиц вдоль стержня (теперь стержень в центре не закреплен) для первых трёх резонансных частот крутильных колебаний; выписать соотношение возбуждаемых резонансных частот.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973, 496 с.
2. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960, 336 с.
3. Красильников В.А. Введение в акустику: Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992, 152 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986, 736 с.
5. Крауфорд Ф. Волны. Пер. с англ. – М.: Наука, 1984, 512 с.
6. Физические величины. Справочник. Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990, 432 с.
8. Физическая акустика (под ред. У. Мезона). Пер. с англ. т. I, ч. А, гл. I. – М.: Мир, 1966.
9. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Под ред. И.П. Голяминой. – М.: Советская энциклопедия, 1979, 400 с.
10. Митин И.В., Русаков В.С.. Анализ и обработка экспериментальных данных. – М.: Физический факультет МГУ, 2006, 44 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости, 4 изд. – М.: Наука, 1987, гл. 3.
12. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. – М.: Наука, 1966, 168 с.
13. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984, 403 с.
14. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах, 2 изд. – М., 1973, гл. 1, § 6.
15. Акустика в задачах. Под ред. Гурбатова С.Н и Руденко О.В. – М.: Наука, 1996, глава 6, § 6.1 – 6.2, с. 176–188.
16. Кайно Г. Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990, 656 с.
17. Ермолов И.Н., Алёшин Н.П., Потапов А.И. Неразрушающий контроль. В 5 книгах. Книга 2: Акустические методы контроля: практическое пособие. Под ред. Сухорукова В.В. – М.: Высшая школа, 1991, 283 с.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977, гл. II, §§ 1, 2, 3.
19. Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, 1975, 560 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	1
<b>Часть 1. Измерение скорости звука в жидкостях</b> .....	3
1.1 Уравнения для описания акустических волн в газах и жидкостях .....	3
1.2 Скорость распространения волны .....	7
1.3 О связи скорости звука с параметрами среды .....	10
1.4 Методы измерения скорости звука в жидкостях .....	14
1.4.1 Импульсный метод .....	14
1.4.2 Фазовые методы. Способы измерения сдвига фаз. Метод фигур Лиссажу .....	15
1.5 Фазовый метод измерения скорости продольных волн в твёрдых телах при прохождении звука через тонкую пластину, помещённую в жидкость .....	20
1.6 Описание экспериментальной установки .....	23
1.7 Описание заданий .....	25
1.8 Контрольные вопросы.....	31
Приложение 1.1 Инструкция пользования осциллографом и генератором .....	32
Приложение 1.2 Обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов .....	36
<b>Часть 2. Ультразвуковые волны в твёрдых телах</b> .....	38
2.1 Вводные замечания .....	38
2.2 Объёмные волны .....	39
2.3 Поверхностные волны .....	44
2.4 Экспериментальная установка и методика измерений .....	48
2.4.1 Некоторые принципы ультразвуковых измерений .....	48
2.4.2 Особенности работы с ультразвуковым дефектоскопом УД2В-П45 .....	50
2.4.3 Методика измерения скорости продольных волн .....	52
2.4.4 Способ возбуждения и приёма поверхностных волн .....	54
2.5 Практическая часть .....	57

2.5.1	<i>Измерение скорости продольных волн эхо-импульсным методом (к упражнению 1)</i>	57
2.5.2	<i>Измерение скорости поверхностных волн (к упражнению 2)</i>	63
2.5.3	<i>Описание заданий</i>	69
2.6	Контрольные вопросы	73
	Приложение 2.1 Справочные данные об исследуемых образцах	74
<b>Часть 3. Резонансная акустическая спектроскопия твёрдых тел</b>		<b>75</b>
3.1	Введение	75
3.2	Упругие волны в стержнях	76
3.2.1	<i>Семейство нормальных продольных волн</i>	76
3.2.2	<i>Семейство нормальных крутильных волн</i>	79
3.2.3	<i>Семейство нормальных изгибных волн</i>	80
3.2.4	<i>Распространение продольных волн в тонких стержнях</i>	80
3.3	Распространение продольных волн в тонком стержне конечной длины	86
3.4	Крутильные колебания тонких стержней конечной длины	91
3.5	Экспериментальная установка для исследования продольных колебаний в стержнях	93
3.6	Экспериментальная установка для исследования крутильных колебаний в стержнях	98
3.7	Обработка сигналов	99
3.7.1	<i>Режим «Спектральный анализ»</i>	99
3.7.2	<i>Режим «Самописец»</i>	102
3.8	Задания	104
3.9	Форма отчёта	109
3.10	Контрольные вопросы	110
	<b>Литература</b>	<b>112</b>

## **Линейные ультразвуковые волны в жидких и твёрдых средах**

*Учебное пособие для физического практикума по акустике*

Ответственные редакторы А.И. Коробов, О.В. Руденко, О.А. Сапожников

---

Подписано в печать 21.05.2017. Формат А5

Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 7,25

Тираж 50 экз. Заказ № 90

---

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати физического факультета МГУ  
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2