МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.И. Коробов, О.А. Сапожников,
В.А. Хохлова, С.А. Цысарь

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ЖИДКОСТЯХ

Методическая разработка
специального физического практикума
кафедры акустики

Физический факультет МГУ
2010

§1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

1.1. Вывод волнового уравнения для акустических волн в жидкостях и газах

Если в каком-либо участке упругой среды создать деформацию (например, сжать или растянуть среду), то это возмущение не останется неизменным, а благодаря упругости и инерции среды будет передаваться соседним участкам и распространяться с определённой скоростью. Такие распространяющиеся возмущения называют *акустическими волнами* [1−3]. Настоящая задача посвящена измерению скорости акустических волн.

Акустические волны с частотами от 20 до 20000 Гц относятся к слышимым, т.е. звуковым волнам. Волны с частотой ниже 20 Гц называются *инфразвуком*, а возмущения с частотами от 20 кГц до 10^9 Гц – *ультразвуком*. Инфразвук и ультразвук не слышимы человеком. Однако в современном употреблении, особенно в физике, термин *звук* относят не только к явлениям в воздухе, связанным со слухом человека, а ко всем акустическим волнам, свойства которых основаны на одних и тех же физических принципах. Поэтому в широком смысле термины *звук* и *акустическая волна* часто не различаются, а скорость распространения акустических возмущений называется *скоростью звука*.

Рассмотрим более подробно уравнения, описывающие свойства акустических волн в жидкостях и газах. Для описания произвольных движений таких сред используются уравнения гидродинамики [4]. Если не учитывать диссипативные процессы (приближение идеальной жидкости), то для задания состояния среды достаточно знать скорость частиц среды $\mathbf{v}$, давление p и плотность среды ρ. Под частицей здесь понимается элемент среды, размер которого гораздо меньше характерных масштабов изменения давления и других характеристик, но в то же время намного превышает расстояние между молекулами среды. Каждая частица, тем самым, содержит огромное количество молекул, а её скорость является средней по скоростям всех молекул, т.е. является намного меньшей их среднеквадратичной скорости. Молекулярная природа среды при этом теряется, т.е. среда рассматривается как сплошная.

Акустические волны в жидкостях и газах представляют собой возмущения давления, распространяющиеся в среде с некоторой скоростью (скоростью звука). Изменение давления сопровождается деформацией среды и возникающими при этом изменениями плотности, температуры и других термодинамических параметров. В присутствии волны частицы среды колеблются относительно своего исходного положения со скоростью $\mathbf{v}$, которая называется *колебательной скоростью*. Важно не путать колебательную скорость (скорость движения *частиц* среды) со скоростью звука (скоростью распространения *изменений* колебательной скорости, давления и других параметров). Как отмечалось выше, колебательная скорость отличается также и от характерной скорости молекул среды. Для акустических возмущений величина колебательной скорости всегда гораздо меньше как скорости звука, так и среднеквадратичной скорости движения молекул.

Система уравнений гидродинамики в рамках приближения сплошной среды может быть записана в виде [4]:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\mathbf{v}\right)=0 \qquad (2)$$

$$p=p(\rho) \qquad (3)$$

Здесь оператор «набла» $\nabla=\left(\partial/\partial x\,,\,\partial/\partial y\,,\,\partial/\partial z\right)$ задаёт дифференцирование по пространственным переменным x, y, z.

Уравнение (1) – это второй закон Ньютона для элемента сплошной среды. Выражение в левой части уравнения (1) представляет собой произведение плотности (т.е. массы элемента единичного объёма) на ускорение – полную производную скорости частицы во времени $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, а выражение в правой части – сила, действующая на единичный объём среды. Уравнение (1) называется также *уравнением Эйлера*.

Уравнение (2) – это закон сохранения массы с учётом сплошности среды, т.е. отсутствия в ней пустот. Чтобы отразить это обстоятельство, оно называется *уравнением непрерывности* (или *уравнением неразрывности*).

Уравнение (3) – это уравнение состояния. Распространение звуковой волны вызывает в среде сжатия и разрежения, сопровождаемые локальными изменениями температуры. В большинстве случаев эти процессы происходят настолько быстро, что выравнивания температуры не происходит. Поэтому процессы сжатия и разрежения можно считать обратимыми и описывать адиабатическим уравнением состояния. Для идеального газа это уравнение имеет вид

$$p = p_0 \left(\rho/\rho_0\right)^{\gamma}, \tag{4}$$

где p_0 и ρ_0 - равновесные давление и плотность, $\gamma = c_p / c_v$ - отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме. В случае жидкостей вывести простое уравнение состояния из первых принципов не удаётся, поэтому вместо уравнения (4) обычно используют похожее на него модельное уравнение Тэта

$$p + P_* = \left(p_0 + P_*\right)\left(\rho/\rho_0\right)^{\Gamma} \tag{5}$$

Здесь p_0 и ρ_0, как и для газа, равновесные давление и плотность, постоянная Γ является эмпирической и в случае жидкостей уже не связана с теплоемкостями c_p и c_v. Константа P_* называется внутренним давлением жидкости. Как видно, формально при $p = -P_*$ плотность жидкости стремится к нулю, т.е. внутреннее давление имеет смысл характерного давления, удерживающего молекулы жидкости вместе. Для воды найденные из измерений значения констант составляют $\Gamma \approx 7$ и $P_* \approx 3 \cdot 10^8$ Па. Заметим, что при $P_* = 0$ уравнение (5) переходит в уравнение (4), т.е. модельное уравнение Тэта при нулевом внутреннем давлении совпадает с уравнением адиабаты идеального газа.

Для получения из системы (1) - (3) уравнения для акустических волн предположим, что исходное равновесное состояние с параметрами p_0, ρ_0 и $\mathbf{v}_0 = 0$ испытывает возмущение:

$$p = p_0 + p', \rho = \rho_0 + \rho', \mathbf{v} = \mathbf{v}' \tag{6}$$

Подставим выражения (6) в систему (1) – (3). Уравнения примут более громоздкий вид, но в них появятся в явном виде члены, линейные по возмущениям p', ρ' и $\mathbf{v}'$, слагаемые пропорциональные ρ'^2, $\mathbf{v}'^2$ и $\rho'\mathbf{v}'$ (т.е. квадратичные по возмущениям), а также нелинейные члены более высоких степеней.

Предположим, что возмущения p', ρ' и $\mathbf{v}'$ малы (оправданность такого допущения пояснена ниже). Тогда нелинейные по возмущениям члены имеют более высокий порядок малости по сравнению с линейными и поэтому в первом приближении могут быть отброшены. В результате такой процедуры, которая называется *линеаризацией*, исходная система уравнений принимает более простой вид:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' \tag{1-л}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' = 0 \tag{2-л}$$

$$p' = c^2 \rho' \tag{3-л}$$

При линеаризации уравнения состояния (3) введено обозначение:

$$c^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} \tag{7}$$

Как будет видно из дальнейшего, величина c, имеющая размерность скорости, есть скорость звука.

Анализ отброшенных при линеаризации нелинейных членов показывает, что использование предположение о малости p', ρ' и $\mathbf{v}'$ фактически означает $|p'| << \rho_0 c^2$, $|\rho'| << \rho_0$ и $|\mathbf{v}'| << c$. Эти условия на практике выполняются с запасом даже для очень интенсивных акустических волн, что и оправдывает проведённую линеаризацию.

Для сведения системы (1-л) – (3-л) к одному уравнению удобно учесть (3-л) и исключить переменную ρ'. Тогда вместо (1-л) и (2-л) получаются следующие соотношения:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = 0 \ , \tag{8}$$

$$\rho_0 \nabla \mathbf{v}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = 0 . \tag{9}$$

Если подействовать на (8) оператором пространственного дифференцирования набла ∇ (т.е. вычислить дивергенцию), соотношение (9) продифференцировать по времени, а затем вычесть результаты друг из друга, то придём к следующему уравнению для возмущения давления:

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

Здесь $\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ - оператор Лапласа. Как будет пояснено в следующем параграфе, получившееся уравнение имеет своим решением акустические волны.

1.2. Скорость распространения волны

Одной из важных характеристик любых волн является скорость – расстояние, проходимое ими за единицу времени. Численные значения скоростей волн разной природы могут сильно отличаться. Например, скорость волн метровой длины на поверхности воды составляет около 1 м/с, скорость акустических волн в жидкостях имеет порядок 10^3 м/с, а скорость света в вакууме равна $3 \cdot 10^8$ м/с. Величина скорости волны определяется конкретным физическим механизмом поддержания волнового движения и поэтому служит важным диагностическим параметром при исследовании сред.

Из того факта, что волна распространяется с постоянной скоростью, может быть выведено уравнение для описания пространственно-временной эволюции волны. Покажем это. Пусть u – параметр, характеризующий волновой процесс. Для простоты рассмотрим одномерные (плоские) волны, для которых функция u зависит только от одной пространственной координаты x и времени t: $u = u(x,t)$. Если волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x со скоростью c, имеет в начальный момент $t = 0$ профиль $u = u(x,0) = U_+(x)$, то в другие моменты времени профиль сдвинется вдоль оси x на расстояние ct, т.е. примет вид

$$u(x,t) = U_+(x - ct) \tag{11}$$

Указанная запись отражает тот простой факт, что для наблюдателя, движущегося со скоростью волны, профиль волны неизменен. Точно так же можно показать, что при распространении волны в противоположном направлении (т.е. со скоростью $-c$) профиль волны имеет вид $u(x,t) = U_-(x + ct)$. Поэтому в общем случае, когда допускаются волны обоих направлений, $u(x,t) = U_+(x - ct) + U_-(x + ct)$. Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что независимо от вида функций $U_{\pm}(x)$ это общее выражение для профиля волны u удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

Уравнение (12) называется *классическим волновым уравнением для недиспергирующих волн* или просто *классическим волновым уравнением* [5]. Можно показать, что решение в виде волн $u(x,t) = U_{+}(x - ct) + U_{-}(x + ct)$ является общим решением этого уравнения. Поэтому если теоретический анализ какого-либо физического процесса приводит к уравнению вида (12), то сразу можно заключить, что решение имеет вид волн, сохраняющих свою форму по мере распространения. Коэффициент c, входящий в это уравнение, является не чем иным, как скоростью этих волн.

Выведенное в п. 1.1 уравнение для акустического давления (10) имеет вид классического волнового уравнения, обобщенного на 3-мерный случай. Если рассматривать одномерные движения, то $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$, т.е. приходим к уравнению (12), где в качестве функции $u(x,t)$ выступает акустическое давление: $u = p'$. Таким образом, введённая в (7) величина c действительно есть скорость распространения волны, т.е. скорость звука.

Важным частным случаем волновых возмущений являются гармонические волны, т.е. волны с синусоидальным профилем. Зная поведение таких волн, можно рассчитать характеристики волны произвольной формы, поскольку любая ограниченная функция представима в виде суперпозиции гармонических функций (теорема Фурье). Решение для бегущей волны (11) в случае гармонического пространственного профиля $U_{+}(x) = A\cos(kx - \varphi_0)$ принимает вид:

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{13}$$

Постоянная величина $A > 0$, характеризующая диапазон изменения волновой функции u (от $-A$ до $+A$), называется *амплитудой волны*, аргумент тригонометрической функции

$$\varphi(x,t) = \omega t - kx + \varphi_0 \tag{14}$$

называется *фазой волны*, а φ_0 - начальной фазой. Фаза является безразмерной величиной и обычно измеряется в радианах. Величина ω называется *циклической частотой*, а её пространственный аналог k - *волновым числом*. Смысл указанных величин становится ясным, если записать выражение для профиля волны (13) в виде $u(x,t) = A\cos(2\pi\, t/T - 2\pi\, x/\lambda + \varphi_0)$. Как видно, $u(x,t+T) = u(x,t)$, $u(x+\lambda,t) = u(x,t)$, т.е. T - период волны во времени, или просто *период волны*, а λ - период волны в пространстве, или *длина волны*. Таким образом, циклическая частота определяется периодом волны или её частотой $f = 1/T$: $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, а волновое число выражается через длину волны: $k = 2\pi/\lambda$.

Из сравнения выражений (11) и (13) следует связь скорости гармонической волны с циклической частотой и волновым числом:

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{15}$$

§2. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА В ЖИДКОСТЯХ

Существует несколько методов определения скорости распространения звуковых волн в жидкостях [6]. Методы можно подразделить на резонансные методы, метод интерферометра, импульсные методы, оптические методы (с использованием явления дифракции света на ультразвуке) и некоторые другие [7]. Наибольшую точность можно получить, используя импульсно-фазовые методы. Оптические методы позволяют измерить скорость волн на гиперзвуковых частотах, вплоть до 10^{11} - 10^{12} Гц. Точность измерения скорости звука зависит от того, надо ли получить её абсолютные значения, или же можно ограничиться относительными измерениями скорости звука при изменении каких-либо внешних параметров, например, в зависимости от температуры или же в зависимости от наличия примесей. Точность $\Delta c/c$ абсолютных измерений на лучшей аппаратуре составляет около 10^{-5}, тогда как точность относительных изменений гораздо выше, она достигает величины порядка 10^{-7}.

Рассмотрим два возможных подхода к измерению скорости звука.

2.1. Импульсный метод

Метод основан на выражении (11) для плоской бегущей волны произвольной формы. Его можно переписать в виде:

$$u(x,t) = F(t - t_{\text{зад}}), \tag{16}$$

где введено время задержки, т.е. время, которое волна затрачивает на прохождение расстояния x:

$$t_{\text{зад}} = \frac{x}{c} \tag{17}$$

Таким образом, скорость звука может быть найдена на основе измеренной задержки, в чем и состоит суть метода.

Задержка не всегда может быть измерена однозначно. Например, если волна является гармонической, то задержка может быть определена лишь тогда, когда она не превышает одного периода волны (см. рис. 1). В противном случае возникает неопределённость, т.к. внесение задержки в целое число периодов не меняет вида синусоидального сигнала. Когда волновое возмущение длится бесконечно долго, без пропусков, его принято называть *непрерывной волной* (в английской литературе используется термин *continuous wave,* сокращённо *cw*). Примером такой волны является синусоидальная волна. Альтернативой непрерывной волне является импульсное возбуждение, когда волна имеет чёткую локализацию во времени (и, как следствие, в пространстве). Для реализации метода измерения скорости звука по задержке используется именно импульсный режим, при котором неопределённость во времени запаздывания отсутствует.

2.2. Фазовые методы

Скорость гармонической волны может быть найдена на основе измерения фазы волны. Как отмечалось ранее, фаза плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, имеет вид (14): $\varphi(x,t) = \omega t - kx + \varphi_0$. Фаза волны на источнике (при x=0) равна $\varphi(0,t) = \omega t + \varphi_0$. Как видно, разность фаз Ф между сигналами источника и приёмника не зависит от времени и является весьма простой функцией расстояния и частоты:

$$\Phi(x,f) = \varphi(0,t) - \varphi(x,t) = kx = \frac{2\pi}{c} \cdot f \cdot x \qquad (18)$$

Из формулы (18) видно, что разность фаз Ф линейно зависит и от расстояния x, и от частоты f, причём скорость роста фазы обратно пропорциональна скорости волны c. Отсюда следуют две возможности нахождения скорости:

1) При фиксированной известной частоте измеряется зависимость сдвига фаз Ф от расстояния x и из наклона получившейся прямой ($\partial\Phi/\partial x = 2\pi\, f/c$) находится скорость c.

2) На известном расстоянии x между источником и приёмником измеряется зависимость сдвига фаз Φ от частоты f и из наклона получившейся прямой ($\partial\Phi/\partial f = 2\pi\, x/c$) находится скорость c.

2.3. Способы измерения сдвига фаз. Метод фигур Лиссажу

Для измерения разности фаз между двумя синусоидальными колебаниями (например, сигналами источника и приёмника) можно использовать различные способы. Рассмотрим самые простые из них, основанные на анализе изображений сигналов на экране осциллографа. Пусть имеется два сигнала:

$$U_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \tag{19}$$

$$U_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \tag{20}$$

Указанные зависимости изображены на рис. 1. Поскольку указанные гармонические сигналы имеют разные амплитуды, то нельзя считать, что они отличаются друг от друга просто сдвигом по времени. Однако точки одинаковой фазы, например, нули указанных функций, отличаются друг от друга лишь сдвигом по времени Δt. Если выражение для второго сигнала записать в виде $U_2 = A_2 \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_1]$, то из сравнения с выражением (20) можно заключить, что фазовый сдвиг напрямую связан с временным сдвигом: $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega\,\Delta t$. С учётом того, что период волны составляет $T = 2\pi/\omega$, фаза может быть найдена чисто графическим способом по отношению временных интервалов на осциллограмме (рис. 1): $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \Delta t/T$.

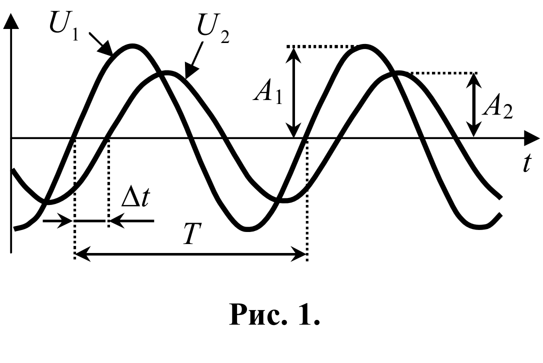

Рис. 1.

Другой графический способ основан на сравнении двух сигналов путём рассмотрения замкнутой траектории, прочерчиваемой изображающей точкой на плоскости, когда абсцисса точки равна $X = U_1(t)$, а ордината $Y = U_2(t)$. Впервые такие траектории были изучены французским математиком Ж. Лиссажу (Jules Antoine Lissajous, 1822-1880), который показал, что вид фигур зависит от соотношения между частотами, фазами и амплитудами сигналов. В интересующем нас простейшем случае одинаковых частот фигура Лиссажу представляет собой эллипс. Это нетрудно показать из выражений (19) и (20), если путём тригонометрических преобразований исключить время:

$$\left(\frac{U_1}{A_1}\right)^2 - 2\frac{U_1}{A_1}\frac{U_2}{A_2}\cos\Delta\varphi + \left(\frac{U_2}{A_2}\right)^2 = \sin^2\Delta\varphi$$

Получившаяся кривая на плоскости $(X, Y) = (U_1, U_2)$ является наклонённым эллипсом. По его характерным точкам находятся амплитуды колебаний и сдвиг фаз между ними (рис. 2).

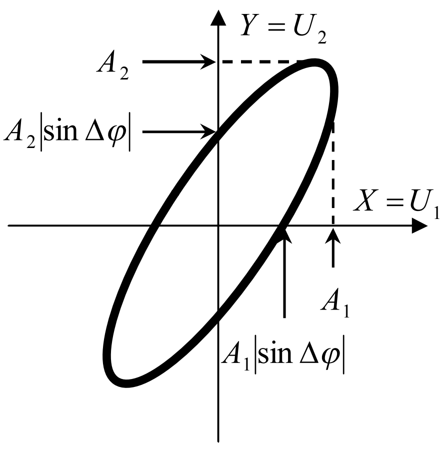

Рис. 2. Фигура Лиссажу в случае одинаковых частот сравниваемых гармонических сигналов $U_1(t)$ и $U_2(t)$

Метод измерения сдвига фаз $\Delta\varphi$ по виду фигуры Лиссажу становится особенно простым, если при проведении измерений величина $\Delta\varphi$ изменяется в широком диапазоне и достаточно фиксировать изменение $\Delta\varphi$ на целое число π. Действительно, если разность фаз равна $\Delta\varphi = \pi n$ (n - целое число), то эллипс независимо от значения амплитуд сигналов вырождается в отрезок прямой линии (рис. 2). Если фаза изменяется на величину 2π, то фигура Лиссажу делает полный оборот, т.е. если в исходном положении приёмника установить фигуру Лиссажу в виде

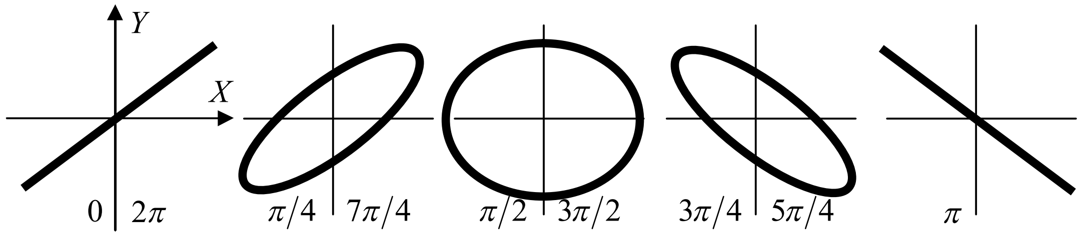

Рис. 3. Фигуры Лиссажу при различном сдвиге фаз $\Delta\varphi$ (указан под фигурами).

отрезка, то при изменении фазы сигнала на 2π она вновь примет вид того же отрезка (рис. 3).

Рассмотрим особенности применения метода фигур Лиссажу для измерения скорости звука упомянутыми выше двумя возможными способами, основанными на анализе сдвига фаз Ф между сигналами источника и приёмника. Количество полных оборотов фигур Лиссажу составит $N = \Phi/(2\pi)$.

В первом способе используется перемещение приёмника при фиксированной частоте волны. Если при перемещении приёмника из одной точки в другую эллипс совершает N оборотов, то согласно формуле (18) величина пространственного сдвига приёмника Δx связана с N следующим образом:

$$\Delta x = c \cdot N/f \ , \tag{21}$$

Таким образом, если изменять расстояние между источником и приёмником и регистрировать соответствующие сдвиги Δx в точках полного оборота фигуры Лиссажу, то из наклона получившейся линейной зависимости $\Delta x(N)$ найдётся скорость звука. Отметим, что формула (21) может быть записана в виде $\Delta x = \lambda \cdot N$, где $\lambda = c/f$ - длина волны, т.е. полный оборот фигуры Лиссажу происходит при сдвиге на одну длину волны, как и должно быть, поскольку длина волны является пространственным периодом волны.

Второй способ основан на изменении частоты при фиксированном расстоянии. Если проводить измерение фазы методом фигур Лиссажу, то следует использовать вытекающую из (18) формулу, связывающую число полных оборотов фигуры Лиссажу с частотой:

$$f = c \cdot N/x \ , \tag{22}$$

В эксперименте следует регистрировать значения частот, при достижении которых фигура Лиссажу делает целое число полных оборотов. Из наклона получившейся линейной зависимости $f(N)$ с учётом известного расстояния x между источником и приёмником найдётся скорость звука. На практике могут возникнуть мешающие факторы, не учтённые в нашем упрощённом рассмотрении. Дело в том, что измеряемыми сигналами являются не непосредственно параметры акустической волны в среде, а электрические сигналы на источнике и приёмнике. В силу разных факторов, одним из которых является резонансный характер электроакустического преобразования в пьезопластинках, между электрическими и акустическими сигналами может возникнуть частотно-зависимый фазовый сдвиг. Поэтому для повышения точности измерений следует работать в диапазоне частот, не слишком близких к резонансным частотам источника и приёмника.

§3. ФАЗОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ТОНКУЮ ПЛАСТИНКУ, ПОМЕЩЁННУЮ В ЖИДКОСТЬ

Акустические волны, распространяющиеся в жидкости, могут быть использованы для измерения скорости звука в помещённых в неё объектах. Пусть, например, на пути распространения гармонической волны между источником и приёмником находится плоскопараллельная пластинка толщины L, ориентированная перпендикулярно направлению распространения волны. После прохождения пластины волна приобретает дополнительный набег фаз по сравнению со случаем отсутствия пластины. Указанный фазовый сдвиг зависит от скорости звука в пластине и, следовательно, может быть использован для нахождения указанной скорости.

Чтобы получить выражение для фазового сдвига, рассмотрим волны в жидкости и упругом слое (рис. 4). При нормальном падении на слой возникает отражённая волна. Из-за отражения от границ пластины внутри неё возникает две продольные волны противоположного направления. Справа от жидкости имеется лишь одна (прошедшая) волна.

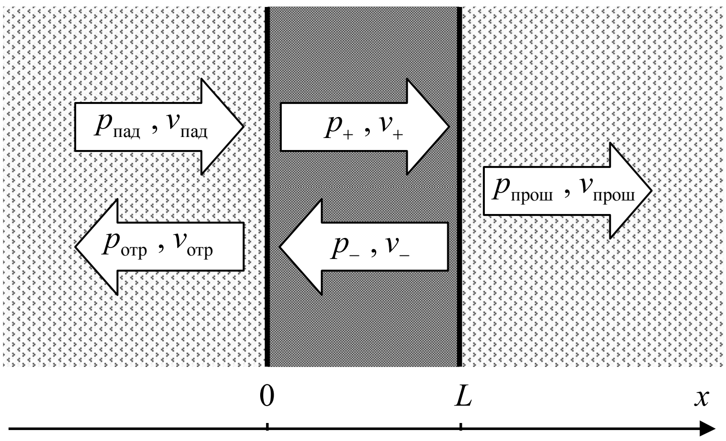

Рис. 4. Волны, распространяющиеся в жидкости и пластине

Из уравнений (8) и (9) можно получить, что в плоской бегущей волне акустическое давление p' и колебательная скорость v' связаны соотношением $p'/v' = \pm\rho c$, где ρ и c - плотность и скорость звука в среде, знаки «+» и «-» соответствует волнам, распространяющимся вправо и влево, соответственно. Произведение $z = \rho c$ называется акустическим импедансом среды. Если для описания гармонической волны использовать комплексное представление $\sim \exp(-i\omega t + ikx)$, то акустическое давление и колебательная скорость для пяти волн, показанных на рис. 4, запишутся в виде:

$$
\begin{aligned}
&p_{\text{пад}} = P_{\text{пад}} \exp(-i\omega t + ikx), \quad v_{\text{пад}} = \frac{P_{\text{пад}}}{z} \exp(-i\omega t + ikx), \\
&p_{\text{отр}} = P_{\text{отр}} \exp(-i\omega t - ikx), \quad v_{\text{отр}} = -\frac{P_{\text{отр}}}{z} \exp(-i\omega t - ikx), \\
&p_{+} = P_{+} \exp(-i\omega t + ik_{*}x), \quad v_{+} = \frac{P_{+}}{z_{*}} \exp(-i\omega t + ik_{*}x), \\
&p_{-} = P_{-} \exp(-i\omega t - ik_{*}x), \quad v_{-} = -\frac{P_{-}}{z_{*}} \exp(-i\omega t - ik_{*}x), \\
&p_{\text{прош}} = P_{\text{прош}} \exp(-i\omega t + ikx), \quad v_{\text{прош}} = \frac{P_{\text{прош}}}{z} \exp(-i\omega t + ikx).
\end{aligned}
$$

Индекс «*» помечает параметры материала пластины: $k_{*} = \omega / c_{*}$, $z_{*} = \rho_{*} c_{*}$, ρ_{*} и c_{*} - плотность и скорость звука в пластине. Граничными условиями на сторонах пластины $x = 0$ и $x = L$ является равенство скоростей и давлений. В результате приходим к системе 4-х линейных уравнений для нахождения 4-х неизвестных комплексных амплитуд $P_{\text{отр}}$, P_{+}, P_{-} и $P_{\text{прош}}$:

$$
\begin{cases}
P_{\text{пад}} + P_{\text{отр}} = P_{+} + P_{-} \ ; \quad \dfrac{P_{\text{пад}} - P_{\text{отр}}}{z} = \dfrac{P_{+} - P_{-}}{z_{*}} \\
P_{+} \exp(ik_{*}L) + P_{-} \exp(-ik_{*}L) = P_{\text{прош}} \exp(ikL) \\
\dfrac{P_{+} \exp(ik_{*}L) - P_{-} \exp(-ik_{*}L)}{z_{*}} = \dfrac{P_{\text{прош}}}{z} \exp(ikL)
\end{cases}
\tag{23}
$$

Отсюда для амплитуды прошедшей волны $P_{\text{прош}} = T_{p} \cdot P_{\text{пад}}$ получим следующий коэффициент прохождения по давлению:

$$T_p = \frac{4 \cdot \exp(-ikL)}{(1 + z/z_*)^2 \cdot \exp(-ik_* L) - (1 - z/z_*)^2 \cdot \exp(ik_* L)}. \qquad (24)$$

Коэффициент прохождения является комплексной величиной $T_p = |T_p| \cdot \exp(-i\Phi)$, где Φ - дополнительный набег фазы волны, обусловленный присутствием слоя. Из выражения (24) следует: $\mathrm{tg}(kL - \Phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_*} + \frac{z_*}{z}\right)\mathrm{tg}(k_* L)$. Учитывая используемые обозначения, получившееся выражение можно переписать в виде трансцендентного уравнения, позволяющего выразить искомую скорость продольных волн в материале слоя c_* через возникший из-за наличия слоя фазовый сдвиг Φ в предположении, что параметры жидкости ρ и c, толщина пластины L, плотность твёрдого тела ρ_* и частота волны f - известные величины:

$$F(c_*) \equiv \left(\frac{\rho c}{\rho_* c_*} + \frac{\rho_* c_*}{\rho c}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi f}{c_*} L\right) - 2\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi f}{c} L - \Phi\right) = 0 \qquad (25)$$

Отметим, что поскольку $\mathrm{tg}(2\pi f L/c_*)$ является периодической функцией, то функция $F(c_*)$ имеет, вообще говоря, бесконечное количество нулей. Указанная многозначность пропадает, если выполняется условие $2\pi f L/c_* < \pi$, т.е. толщина исследуемого слоя не превышает $\lambda_*/2$, где $\lambda_* = c_*/f$ - длина продольной упругой волны в материале пластинки.

§4. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Схема установки приведена на рис. 5. Установка представляет собой ванну (В), наполненную водой, в торцевую стенку которой встроен источник ультразвука (И). Источником является круглая пьезокерамическая пластина диаметром 30 мм, к противоположным сторонам которой от генератора (Г) прикладывается электрическое напряжение с частотой в диапазоне 0.7 -1.3 МГц. За счёт обратного пьезоэффекта под действием меняющегося напряжения пластина испытывает колебание по толщине и, как следствие, сжимает и растягивает граничащие с ней слои жидкости, вызывая появление квазиплоских ультразвуковых волн. На некотором расстоянии от источника расположен приёмник (П). Он представляет собой круглую пьезокерамическую пластину диаметром 18 мм. Приёмник ориентирован вдоль волнового фронта падающей на него волны, т.е. параллельно излучающей пластине. Под действием переменного давления приходящей ультразвуковой волны приёмная пластина испытывает сжатия и растяжения, и в результате прямого пьезоэффекта между обкладками возникает электрическое напряжение, пропорциональное акустическому давлению падающей на приёмник волны. Электрический сигнал приёмника поступает на осциллограф (О).

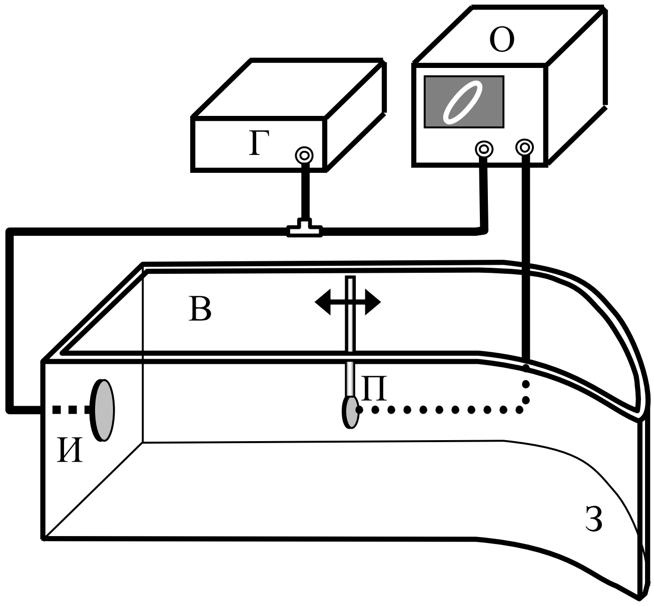

Рис. 5. Схема экспериментальной установки

Отметим, что ультразвуковые волны довольно слабо поглощаются в воде. На частоте 1 МГц амплитуда волны заметно затухает лишь на расстоянии нескольких десятков метров. Если не принять специальных мер, то в ванне небольших размеров возникнет реверберация (многократные переотражения волны от стенок ванны), т.е. волновое поле будет представлять суперпозицию волн разных направлений, и измерение скорости волны станет затруднительным. Чтобы избежать реверберации, противоположный от источника торец ванны изготовлен в виде закручивающегося и сужающегося канала, стенки которого покрыты поглощающей ультразвук резиной (3). Такой канал играет роль акустической заглушки, т.к. попадающая в него волна претерпевает многократные отражения от резиновых стенок и поэтому быстро затухает.

Приёмник опускается в воду через прорезь в крышке ванны и зажимается держателем. С помощью микрометрического винта вместе с держателем он может перемещаться вдоль направления звукового пучка. Скорость звука в воде зависит от температуры. Поскольку температура воды может отличаться от комнатной, для ее измерения предусмотрен термометр.

Описание режимов работы и подключения генератора и осциллографа приведено в Приложении 1. Перед включением приборов рекомендуется ознакомиться с расположением органов управления на передней панели осциллографа (рис. 6) и генераторе (рис. 7)

§5. ОПИСАНИЕ ЗАДАНИЙ

Упражнение 1. Определение скорости звука в воде фазовым методом с помощью перемещения приёмника. Измерения проводятся последовательно для пяти частот звуковой волны: 0.8, 0.9, 1.0, 1.1 и 1.2 МГц.

1. Включить аппаратуру (см. Приложение 1)
2. Установить рабочую частоту генератора 0.8 МГц.
3. Установить приёмник в нулевое положение шкалы микрометра. Далее переместить приёмник в направлении от излучателя до установления прямолинейной фигуры Лиссажу (см. описание процедуры в Приложении 1). Записать показания микрометра x_0 .
4. Продолжить перемещение приёмника в том же направлении (этим исключается люфт микрометра) до тех пор, пока фигура Лиссажу не совершит полный оборот и примет прежний прямолинейный вид. При этом разность фаз изменится на 2π, т.е. приёмник сместится на одну длину волны. Записать показания микрометра x_1 . Вновь продолжить перемещение приёмника и провести аналогичные измерения x_N ($N = 2, 3, ...$) вплоть до $N = 10$ оборотов фигуры Лиссажу.
5. Выполнить аналогичные измерения для частот 0.9, 1.0, 1.1 и 1.2 МГц. Результаты представить в таблице:

Номер измерения N	Показания микрометра (мм)	Частота f (МГц)				
		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
0	x_0,					
1	x_1					
…	…					
10	x_{10}					

6. Для каждой из частот оценить скорость звука исходя из данных измерений на минимальном и максимальном расстоянии между излучателем и приёмником (т.е. на основе x_0 и x_{10}:). Использовать формулу (21): $c = \Delta x \cdot f / N$ при $\Delta x = x_{10} - x_0$ и N=10.

7. Для каждой из частот построить график $\Delta x(N)$, где $\Delta x = x_N - x_0$ сдвиг приёмника относительно исходного положения, $N = 0, 1, \ldots 10$ – соответствующее число оборотов фигуры Лиссажу. Используя метод наименьших квадратов (см. Приложение 2), провести прямую, рассчитать среднее значение, стандартное отклонение и относительную ошибку измерений скорости звука.

8. Измерить с помощью термометра температуру воды.

Упражнение 2. Определение скорости звука в воде фазовым методом с помощью изменения частоты. Измерения проводятся для трёх расстояний между излучателем и приёмником, соответствующих положению 0, 10 мм и 20 мм по шкале микрометра, в диапазоне изменения частот 1150 - 1250 кГц. В общем случае при этом получается некоторое среднее значение c в рабочем диапазоне частот, но в отсутствие дисперсии мы приходим к обычному значению скорости звука. Убедиться в отсутствии дисперсии на основании полученных в 1-м упражнении оценок скорости звука для нескольких частот.

1. Установить приёмник в нулевое положение шкалы микрометра, предварительно выбрав люфт в направлении от излучателя. Это положение соответствует расстоянию x = 368 мм между излучателем и приёмником.

2. Установить рабочую частоту генератора 1.15 МГц, затем плавно (см. Приложение 1) увеличивать частоту до установления прямолинейной фигуры Лиссажу; записать полученную частоту f_0.

3. Увеличивать частоту до прохождения $N = 10$ полных оборотов фигуры Лиссажу, записывать показания частоты после каждого оборота.

4. Повторить измерения для положения приемника 10 мм и 20 мм по шкале микрометра (т.е. для расстояний между источником и приёмником, равных $x = 378$ и 388 мм). Устанавливать положение приёмника, перемещая его в направлении от излучателя (для компенсации люфта). Результаты представить в таблице:

Номер измерения N	Частота (МГц)	Положение приёмника по шкале микрометра		
		0	10 мм	20 мм
0	f_0,			
1	f_1			
…	…			
10	f_{10}			

5. Оценить скорость звука для каждого из расстояний x по данным измерений на минимальной f_0 и максимальной частотах f_{10}, используя формулу (22): $c = \Delta f \cdot x/N$, $\Delta f = f_{10} - f_0$, где $N = 10$ – число оборотов.

6. Для каждого из расстояний x построить график $\Delta f(N)$, где $\Delta f = f_N - f_0$ сдвиг частоты относительно начального значения, $N = 0, 1, \ldots 10$ – соответствующее число оборотов фигуры Лиссажу. Используя метод наименьших квадратов, провести прямую, рассчитать среднее значение, стандартное отклонение и относительную ошибку измерений скорости звука.

Упражнение 3. Определение скорости звука в твёрдых телах способом компенсации. Измерения проводятся для трёх тонких пластин из различных материалов: плексиглас, гетинакс и целлулоид. Нижняя часть каждой пластинки имеет форму клина, поэтому, вынимая пластинку, можно проследить, в каком направлении происходит поворот фигуры Лиссажу. Физические параметры пластин, необходимые для расчётов, приведены в таблице. Плотность воды считать равной ρ =1 г/см^3, а для скорости звука c использовать значение, полученное в упражнении 1.

	оргстекло	гетинакс	целлулоид
плотность ρ_*	1.3 г/см^3	1.25 г/см^3	1.4 г/см^3
толщина L	2 мм	1.45 мм	0.52 мм

1. Выбрать рабочую частоту генератора 0.8 МГц. Опустить пластинку исследуемого материала в воду через специальную прорезь в крышке ванны. После этого необходимо выждать некоторое время для уравнивания температур воды и пластинки.
2. Установить приёмник в максимальное положение шкалы микрометра, предварительно выбрав люфт в направлении к излучателю. Перемещением приёмника установить фигуру Лиссажу в виде прямой линии, после чего пластинку вынуть. Убедиться, что угол поворота фигуры не превосходит π. Перемещая приёмник, скомпенсировать возникший сдвиг фазы путём восстановления исходной Лиссажу. Компенсирующее перемещение Δx отсчитывается по микрометру и должно быть направлено так, чтобы эллипс на экране кратчайшим путем снова перешёл в прямолинейный отрезок с исходным наклоном. Убедиться, что это направление соответствует перемещению приемника к излучателю.
3. Провести последовательно 10 измерений компенсирующего перемещения Δx, повторяя следующую последовательность действий: опустить пластинку, установить фигуру Лиссажу в виде прямой линии,

перемещая приемник к излучателю, вынуть пластину, провести измерение Δx. В присутствии пластины использовать фигуры Лиссажу в виде прямых как с положительным (правосторонним), так и отрицательным (левосторонним) наклоном. При измерениях перемещать приемник только к излучателю. Результаты измерений представить в таблице:

Материал	Показания микрометра, мм						
		1	**2**	**…**	**9**	**10**	
оргстекло	начальное						
	конечное						
	$\boldsymbol{\Delta x}$						$\langle \Delta x \rangle =$
гетинакс	начальное						
	конечное						
	$\boldsymbol{\Delta x}$						$\langle \Delta x \rangle =$
целлулоид	начальное						
	конечное						
	$\boldsymbol{\Delta x}$						$\langle \Delta x \rangle =$

3. По результатам измерений определить для средние значения компенсирующего перемещения $\langle \Delta x \rangle$ определить скорость звука c_* в каждой из пластин, решая трансцендентное уравнение:

$$F(c_*) \equiv \left(\frac{\rho c}{\rho_* c_*} + \frac{\rho_* c_*}{\rho c} \right) \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi f}{c_*} L \right) - 2\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi f}{c} \left(L - \langle \Delta x \rangle \right) \right) = 0 .$$

Это уравнение является записью уравнения (25) при использовании выражения $\Phi = \frac{2\pi f}{c} \langle \Delta x \rangle$ для оценки дополнительного набега фазы при прохождении волны в пластинке. Рассчитать стандартное отклонение и относительную ошибку для перемещения $\langle \Delta x \rangle$ и скорости c_*.

Уравнение $F(c_*) = 0$ решается путём построения графика функции $F(c_*)$ при изменении аргумента c_* в диапазоне 1500 м/с $\le c_* \le 3500$ м/с. Соответствующие графики приложить к отчёту.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Инструкция пользования осциллографом и генератором

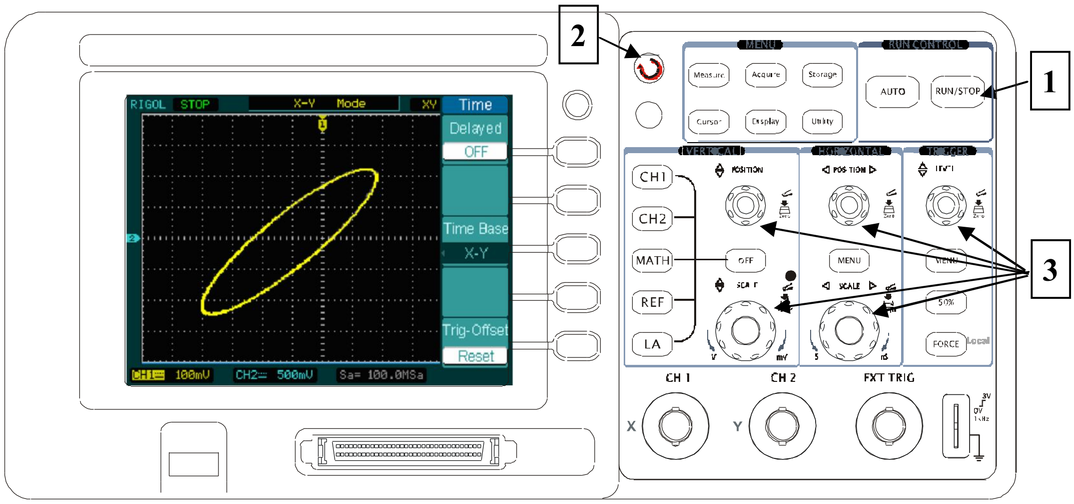

Рис. 6. Лицевая панель осциллографа.

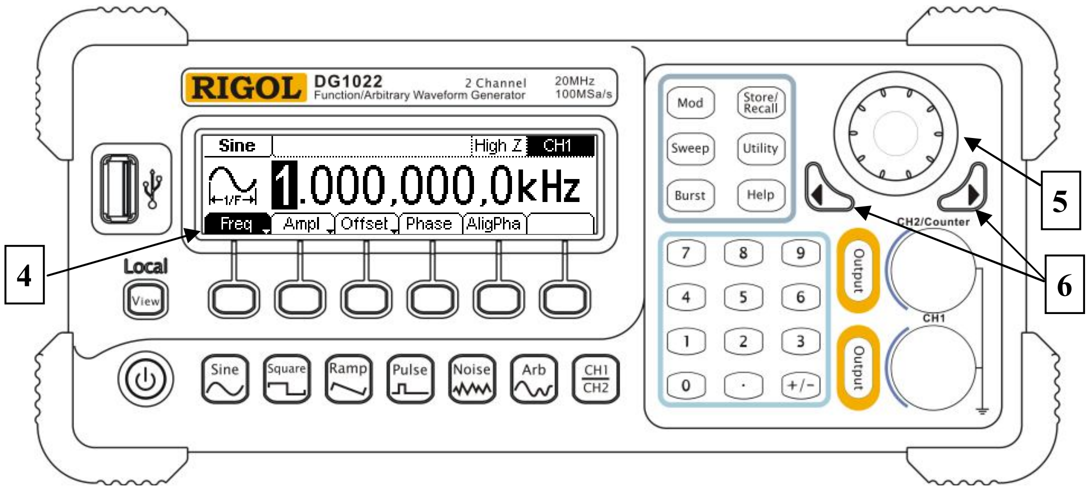

Рис. 7. Лицевая панель генератора.

Обозначения, используемые далее в описании:

- Название кнопки даётся в рамке, например RUN/STOP обозначает правую верхнюю кнопку осциллографа 1;
- - многофункциональная поворотно-нажимная ручка управления осциллографом 2;
- SCALE, POSITION, LEVEL обозначают соответствующие ручки панели управления осциллографом 3;
- Time Base обозначает кнопки экранного меню и соответствуют отображаемой на экране надписи. На осциллографе они расположены справа от экрана, на генераторе - под экраном: например, в случае, изображенном на рисунке 7, Freq соответствует первая кнопка 4.
- Плавное изменение частоты производится вращением ручки 5 генератора, разряд частоты увеличивается или уменьшается нажатием кнопок 6.

Подготовка приборов к работе

1. <u>Не включая генератор</u>, включить осциллограф (кнопка сверху слева на крышке);
2. Проверить, что для обоих каналов X и Y установлена минимальная чувствительность на осциллографе (надпись слева внизу экрана CH1 ~ 5.00V и CH2 ~ 5.00V). Если установки отличаются, установить минимальную чувствительность. Для этого:
   - установить горизонтальную развертку в режим наблюдения фигуры Лиссажу, нажав MENU раздела HORIZONTAL, в появившемся меню выбрать значение «**X-Y**», нажатием соответствующей кнопки Time Base, далее поворотом до попадания курсора на «**X-Y**», затем нажатием на ;
   - нажать CH1, крутить ручку <u>SCALE</u> раздела VERTICAL против часовой стрелки до чувствительности 5.0 В/дел;
   - нажать CH2, крутить ручку <u>SCALE</u> раздела VERTICAL против часовой стрелки до чувствительности 5.0 В/дел;
3. Проверить правильность подключения приборов (рис. 5).
4. Включить генератор, подать на выход №1 (CH1) сигнал частотой 0.8 МГц. Для этого:
   - проверить, что выбран первый канал (надпись в правом верхнем углу экрана CH1 или CH2). Если горит CH2, то выбрать CH1 нажатием кнопки $\boxed{\frac{\text{CH1}}{\text{CH2}}}$;
   - если включён импульсный режим (в левом верхнем углу экрана видна надпись BURST), выключить его нажатием кнопки BURST ;
   - нажать SINE, выбрав тем самым гармонический профиль сигнала;

- установить частоту 0.8 МГц, выбрав Freq (кнопка 4 на рис. 7), затем нажав последовательно 0 . 8 и экранную кнопку MHz. При этом на экране появится надпись 800.000,00 kHz. Плавное изменение частоты (упр. 2) производить вращением ручки 5, выбирая разряд изменения частоты с помощью кнопок 6;
- установить максимальную амплитуду выходного сигнала. Для этого нажать экранную кнопку Ampl, установить вращением ручки по часовой стрелке максимальное значение 20 Vpp;
- включить выход CH1, нажав кнопку OUTPUT рядом с гнездом первого канала. Кнопка OUTPUT должна загореться зелёным цветом;

5. Установить на экране осциллографа фигуру Лиссажу. Для этого:
   - переключая направление масштабирования попеременным нажатием кнопок CH1 и CH2 и вращая ручку SCALE раздела VERTICAL, добиться полного попадания эллипса в пределы экрана. При выборе канала появляется сответствующая надпись CH1 либо CH2 в верхнем правом углу экрана;
   - нажать кнопку MENU OFF (круглая кнопка справа сверху от экрана) для очистки экрана от меню;
   - вращая ручку SCALE раздела HORIZONTAL по часовой стрелке, увеличить частоту обновления экрана осциллографа в этом режиме.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.
Обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов

Пусть результатом эксперимента является совокупность прямых независимых измерений $\{X_i, Y_i\}$, связанных линейным соотношением

$$Y = a \cdot X + b\,, \tag{П2.1}$$

причем величины X_i известны точно, а величины Y_i измерены с некоторой одинаковой ошибкой. Тогда средние значения $\overline{a}$ и $\overline{b}$ параметров прямой и их дисперсии σ_a^2 и σ_b^2 можно определить, используя следующие соотношения:

$$\varDelta = k\sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2, \tag{П2.2}$$

$$\Delta_a = k\sum_{i=1}^{k} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{k} X_i \cdot \sum_{i=1}^{k} Y_i\,, \quad \Delta_b = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} Y_i - \sum_{i=1}^{k} X_i \cdot \sum_{i=1}^{k} X_i Y_i \tag{П2.3}$$

$$\overline{a} = \Delta_a / \Delta\,,\ \overline{b} = \Delta_b / \Delta\,, \tag{П2.4}$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_0^2 k / \Delta\,,\ \sigma_b^2 = \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^{k} X_i^2}{\varDelta}\,,\ \text{где } \sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(Y_i - aX_i - b\right)^2}{k-2}\,. \tag{П2.5}$$

Наглядно, идею метода легко понять следующим образом. На график $Y(X)$ наносятся экспериментальные точки, через которые нужно провести прямую таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений каждой из экспериментальных точек от этой прямой была минимальна. Параметры прямой и будут средними значениями a и b. Описанный метод называется *методом наименьших квадратов* (МНК). Более подробно метод изложен в разработке [8]. Для обработки данных методом наименьших квадратов можно также использовать функцию LINEST(...) в программе Excel; в русифицированной версии Excel эта функция имеет название ЛИНЕЙН(…).

При измерениях скорости звука методом изменения расстояния линейная зависимость связывает измеряемое по шкале микрометра расстояние x и количество оборотов фигуры Лиссажу N:

$$x = x_0 + c \cdot N / f\,. \tag{П2.6}$$

Здесь x_0 - минимальное показание микрометра при начальном установлении фигуры Лиссажу в виде прямой линии (N = 0), N – число оборотов фигуры Лиссажу. Т.е. в формулах (П2.1) $X = N$, а $Y = x$. Параметр $a = c/f$ в этом случае, с точностью до известного множителя $1/f$, совпадает с величиной скорости звука. Рассчитанные методом наименьших квадратов среднее значение и стандартное отклонение параметра a дадут необходимые величины для скорости звука.

Аналогично, при измерениях скорости звука методом изменения частоты линейная зависимость связывает измеряемую частоту f и количество оборотов N:

$$f = f_0 + c \cdot N/x\,, \tag{П2.7}$$

т.е. $X = N$, $Y = f$, $a = c/x$, где x – известное расстояние между излучателем и приёмником, на котором проводились измерения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
О связи скорости звука с параметрами среды

Тот факт, что скорость акустических волн оказалась напрямую связанной с уравнением состояния $p(\rho)$ формулой (7), позволяет использовать измерение скорости звука для изучения термодинамических свойств среды. С учётом того, что изменение объёма среды происходит без теплообмена, т.е. при постоянной энтропии, выражение для скорости звука правильнее писать с использованием обозначений, принятых в термодинамике:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S, \tag{П3.1}$$

где нижний индекс указывает на постоянство энтропии. Предполагается также, что производная (П3.1) вычисляется при равновесных значениях термодинамических параметров, т.е. при $\rho = \rho_0$.

Наиболее просто связать скорость звука с термодинамическими параметрами вещества в случае газов. Действительно, если исходить из модели идеального газа, то из адиабатического уравнения состояния (4) получается следующее выражение для квадрата скорости звука (7):

$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \tag{П3.2}$$

Измерив скорость звука и зная равновесные значения плотности и давления, отсюда можно найти отношение теплоёмкостей $\gamma = c_p / c_v$ данного газа.

Из уравнения состояния газа $\frac{p}{\rho} = \frac{k_Б T}{m}$ ($k_Б$ - постоянная Больцмана, m - масса молекулы) следует, что скорость звука в идеальном газе зависит лишь от его абсолютной температуры: $c = \sqrt{\dfrac{\gamma\, k_{\text{Б}}}{m} T} \sim \sqrt{T}$, а не от давления или плотности как таковых. Как видно, при нагреве газа скорость звука возрастает. Интересно также сравнить значение скорости звука с характерными значениями скорости движения молекул газа. Как известно из молекулярно-кинетической теории, среднеквадратичное значение скоростей молекул идеального газа составляет $V_{\text{с.кв.}} = \sqrt{\dfrac{3 k_{\text{Б}}}{m} T}$, что с точностью до константы порядка единицы совпадает со скоростью звука: $V_{\text{ñ.êâ.}} = \tilde{n}\sqrt{3/\gamma} \sim c$. Такое совпадение не является случайным. Оно отражает тот факт, что именно посредством хаотически движущихся и соударяющихся молекул происходит передача импульса и энергии в среде − процесс, который на макроскопическом уровне имеет вид распространяющихся со скоростью звука акустических возмущений.

Для описания микроскопического строения жидкостей не существует простой модели типа модели идеального газа. Жидкость отличается от газов тем, что она является конденсированной средой, взаимодействие молекул которой очень существенно. В то же время, в отличие от твёрдых тел, в жидкости отсутствует дальний порядок. Поэтому многие свойства жидкости не удаётся объяснить из первых принципов, и приходится зачастую руководствоваться эмпирическими моделями типа упомянутого выше уравнения Тэта. Анализ свойств воды (в известном смысле самой важной жидкости) провести ещё сложнее, т.к. многие её свойства отличаются от свойств других жидкостей. Тем не менее измерение скорости звука как функции температуры и давления находит применение и при проверке моделей строения жидкостей. Такая проверка основана на общих термодинамических соотношениях, выполняющихся независимо от конкретного вида среды.

Если исходить из уравнения Тэта (5), то выражение для скорости звука примет вид: $c^2 = \Gamma\left(p_0 + P_*\right)/\rho_0 \approx \Gamma P_*/\rho_0$, т.е. при известной плотности находится величина $\Gamma P_* = \rho_0 c^2$. Если параметр Γ найден из независимых измерений, например, на основе анализа нелинейных акустических эффектов, то измерение скорости звука тем самым позволяет определить величину внутреннего давления P_*, т.е. получить представление о том, как велико притяжение молекул жидкости друг к другу.

Выражение (П3.1) на самом деле не зависит от конкретной модели жидкости или газа, т.е. может быть использовано для экспериментальной проверки следствий различных моделей. Раздел акустики, в котором на основе измерения акустических параметров – скорости распространения и коэффициента поглощения звука – исследуются особенности молекулярной и атомной структуры вещества, называется *молекулярной акустикой*. При исследованиях, как правило, используются акустические волны ультразвукового диапазона. Вычисляя скорость звука на основе той или иной модели и сравнивая результаты расчёта с опытными данными, в ряде случаев можно оценить правдоподобность используемой модели и определить энергию взаимодействия молекул. На скорость звука влияют особенности молекулярной структуры, силы межмолекулярного взаимодействия и плотность упаковки молекул. Так, например, увеличение плотности упаковки молекул, появление водородных связей, полимеризация приводят к увеличению скорости звука, а введение в молекулу тяжёлых атомов – к её уменьшению. Отметим, что скорость звука может быть определена экспериментально как функция температуры и давления. Кроме того, может быть измерено поведение скорости звука в зависимости от других параметров среды, например, от относительного содержания компонент в смесях различных жидкостей, концентрации растворённых веществ и т.д. Дополнительную информацию дают измерения дисперсии - зависимости скорости звука от частоты. Результаты таких измерений для многих веществ можно найти в справочниках [9].

Наряду с использованием скорости звука для измерения структурных особенностей вещества, чувствительность скорости звука к параметрам среды может быть использована для измерения указанных параметров. Например, с использованием известной температурной зависимости скорости звука осуществляется мониторинг средней температуры различных участков Мирового океана, при этом удаётся регистрировать изменения температуры менее десятых долей градуса.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.
Скорость волны при наличии дисперсии

При теоретическом рассмотрении акустических волн в идеальной сплошной среде было показано, что скорость синусоидальных волн не зависит от частоты и равна c (см. §1). В общем случае волны разных частот могут распространяться с неодинаковыми скоростями. При этом говорят, что волна испытывает *дисперсию.* Дисперсия акустических волн может появиться в том случае, когда в среде имеются характерные временные или пространственные параметры, вызванные, например, микровключениями, резонансами, релаксационными процессами, присутствием направляющих границ и т.п. В однородной жидкости эти факторы несущественны, что и объясняет малость дисперсии. Для других типов волн, например для поверхностных волн на воде и электромагнитных волн в веществе дисперсия может быть весьма сильной.

Понятие скорости волны при наличии дисперсии требует более внимательного рассмотрения. При появлении дисперсии немонохроматические волны перестают описываться классическим волновым уравнением (12), поскольку они уже не удовлетворяют условию (11) неизменности формы. Действительно, если различные спектральные составляющие волны имеют неодинаковые скорости, по мере распространения сдвиг фаз между ними изменяется, и в результате их суперпозиция оказывается на каждом расстоянии разной, т.е. форма волны трансформируется.

Чтобы понятие скорости какого-либо объекта (в нашем случае, волны) имело смысл, объект должен быть стабильным, т.е. сохраняться на рассматриваемом интервале времени. Поскольку гармоническая волна в линейной среде обладает свойством неизменности формы, для неё можно ввести скорость $V_{\text{ф}}(\omega)$. В §1 было показано, что

$$V_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} \qquad (\text{П4.1})$$

(см. формулу (15)). Полученная величина называется *фазовой скоростью*, т.к. с этой скоростью распространяются участки равной фазы. Действительно, согласно выражению (14), приращение фазы $\Delta\varphi$, вызванное изменением времени Δt и координаты Δx, составляет $\Delta\varphi = \omega\Delta t - k\Delta x$. Фаза не меняется ($\Delta\varphi = 0$) при $\Delta x/\Delta t = \omega/k$, т.е. при движении с фазовой скоростью.

В диспергирующей среде связь между частотой и волновым числом уже не удовлетворяет условию $V_ф(\omega)=\omega/k=\text{const}$, а является более общей: $k=k(\omega)$. Взаимосвязь k и ω (П4.1) называется *законом дисперсии* среды или *дисперсионным соотношением*.

Несинусоидальная волна в среде с дисперсией не является стабильной, поэтому она не обладает какой-то определённой скоростью. Существует важный класс волн, называемых *волновыми пакетами*, для которых понятие скорости (точнее, скоростей) можно ввести, несмотря на непостоянство формы. Волновой пакет – это квазимонохроматическая волна. Спектр такой волны локализован (т.е. как бы упакован – отсюда и название) вблизи некоторой центральной частоты. Для иллюстрации рассмотрим пример волнового пакета, представляющего собой сумму двух гармонических волн одинаковых амплитуд и близких частот ω_1 и ω_2, с соответствующими волновыми векторами $k_{1,2}=k(\omega_{1,2})$, определяемыми законом дисперсии $k=k(\omega)$:

$$u(x,t)=A\cos(\omega_1 t-k_1 x+\varphi_{01})+A\cos(\omega_2 t-k_2 x+\varphi_{02})$$

Перепишем указанное выражение с использованием тригонометрических тождеств:

$$u(x,t)=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x+\frac{\varphi_{01}-\varphi_{02}}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}x+\frac{\varphi_{01}+\varphi_{02}}{2}\right)$$

Введём обозначения: $\Omega=(\omega_1-\omega_2)/2$, $K=(k_1-k_2)/2$, $\Psi=(\varphi_{01}-\varphi_{02})/2$, $\overline{\omega}=(\omega_1+\omega_2)/2$, $\overline{k}=(k_1+k_2)/2$, $\overline{\varphi}=(\varphi_{01}+\varphi_{02})/2$. Как видно, форма волны представляет собой произведение низкочастотной «огибающей»

$$\widetilde{A}(x,t)=2A\cos(\Omega t-Kx+\Psi) \qquad (П4.2)$$

на высокочастотное «заполнение» на средней частоте $\overline{\omega}$:

$$u(x,t)=\widetilde{A}(x,t)\cos(\overline{\omega}t-\overline{k}x+\overline{\varphi}) \qquad (П4.3)$$

Из (П4.2) и (П4.3) следует, что хотя волна в целом при распространении не сохраняет форму и поэтому ей не может быть приписана какая-то скорость, заполнение и огибающая по отдельности имеют неизменный вид и перемещаются с вполне конкретными значениями скоростей. Нетрудно видеть, что высокочастотное заполнение распространяется с фазовой скоростью $\overline{\omega}/\overline{k}$. Точно так же, анализ фазы огибающей (П4.3) даёт значение её скорости $\Omega/K=(\omega_1-\omega_2)/(k_1-k_2)$. Поскольку частоты предполагаются близкими, то входящие в это выражение разности величин могут быть заменены их дифференциалами. Таким образом, скорость огибающей выражается из закона дисперсии (П4.2) следующим образом:

$$V_{\text{г}} = \frac{d\omega}{dk} \tag{П4.4}$$

Полученная скорость $V_{\text{г}}$ называется *групповой скоростью*. С учётом (П4.1) групповую скорость нетрудно выразить через фазовую:

$$V_{\text{г}} = \frac{V_{\text{ф}}}{1 - \dfrac{\omega}{V_{\text{ф}}} \dfrac{dV_{\text{ф}}}{d\omega}}, \tag{П4.5}$$

откуда видно, что в отсутствие дисперсии эти скорости совпадают, а при наличии дисперсии, вообще говоря, отличаются. Понятие групповой скорости не ограничивается рассмотренным выше частным случаем волн двух близких частот. Можно показать [10], что скорость огибающей определяется выражением (П4.5) для любого узкополосного сигнала, например для радиоимпульса – локализованного во времени импульса с высокочастотным заполнением. В случае уединённого импульса становится ясным, что локализованная в пределах его огибающей энергия волны переносится с групповой скоростью. Этим и объясняется название скорости $V_{\text{г}}$ – это скорость распространения энергии *группы волн* близких частот. Более подробный анализ показывает, что в диспергирующей среде огибающая сигналов не остаётся неизменной, волновые пакеты испытывают расплывание и изменяют свой вид [10].

Наряду с фазовой и групповой скоростью интерес может представить *скорость сигнала* $V_{\text{с}}$, т.е. скорость распространения самой быстрой регистрируемой части волны. В среде с дисперсией эта скорость отличается и от средней фазовой скорости, и от средней групповой скорости исходной волны. Анализ показывает, что самые быстрые участки волны, называемые предвестниками, имеют, вообще говоря, очень малую амплитуду [10]. Поэтому скорость сигнала определяется чувствительностью приёмного устройства, т.е. его способностью регистрировать сигнал на фоне помех. По этой причине простое выражение для $V_{\text{с}}$ не может быть дано.

Если в среде нет дисперсии, то все три скорости $V_{\text{ф}}$, $V_{\text{г}}$ и $V_{\text{с}}$ совпадают и можно говорить просто о скорости волны c, а форму волны считать неизменной, как это делалось в начале параграфа – см. выражение (11). Именно так обстоит дело в случае исследуемых в настоящей работе акустических волн.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Нарисовать схему экспериментальной установки. Как измерить скорость звука фазовым методом по смещению приёмника? В каком диапазоне частот проводятся измерения? Рассчитать длину волны в воде для частоты 0.8 МГц, приближённо считая скорость звука равной 1500 м/с. Привести основную формулу для определения скорости звука по данным измерений. Что можно сказать о зависимости скорости звука в воде от частоты?

2. Как измерить скорость звука фазовым методом по изменению частоты? Привести основную расчётную формулу. В каком диапазоне частот проводятся измерения?

3. Как измерить скорость звука в тонкой пластинке, помещённой в воду? Вывести приближённую формулу для определения скорости звука в пластинке в приближении однократного прохождения волны, т.е. без учёта переотражений в пластинке. Каковы требования на толщину пластинки и материал, из которого она изготавливается? В какую сторону нужно перемещать приёмник для компенсации разности фаз, возникающей после извлечения пластинки из воды? Считать известным, что скорость звука в пластинке больше, чем в воде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973, 496 с.
2. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. М.: изд. Моск. ун–та, 1960, 336 с.
3. Красильников В.А. Введение в акустику. М.: МГУ, 1992, 152с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т.VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986, 736 с.
5. Крауфорд Ф. Волны. Пер. с англ. – М.: Наука, 1984, 512 с.
6. Физическая акустика (под ред. У. Мезона). Пер. с англ. т. I, ч. A, гл. I. – М.: Мир, 1966.
7. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Под ред. И.П. Голяминой. – М.: Советская энциклопедия, 1979, 400 с.
8 Митин И.В., Русаков В.С.. Анализ и обработка экспериментальных данных. – М.: Физический факультет МГУ, 2006, 44 с.
9. Физические величины. Справочник. Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.
10. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990, 432 с.