МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.И. Коробов, В.А. Буров, К.В. Дмитриев, О.Д. Румянцева

РЕЗОНАНСНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Методическая разработка специального практикума кафедры акустики



Физический факультет МГУ 2012

УДК 537.

Рецензенты:

доцент, кандидат физ.-мат. наук П.Н. Кравчун; доцент, кандидат физ.-мат. наук В.Г. Андреев.

Печатается по решению методической комиссии кафедры акустики.

А.И. Коробов, В.А. Буров, К.В. Дмитриев, О.Д. Румянцева. Резонансная акустическая спектроскопия твердых тел. Методическая разработка спецпрактикума кафедры акустики. — М.: Физический факультет МГУ, 2012. 30 с.

Задача посвящена экспериментальному исследованию упругих свойств твердых тел в динамическом режиме методом резонансной акустической спектроскопии. Ориентирована на студентов старших курсов физического факультета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.Введение	4
2.Упругие волны в стержнях	5
3.Распространение продольных волн в тонких стержнях	7
4.Распространение продольных волн в тонком стержне конечной	
длины	11
5.Крутильные колебания тонких стержней конечной длины	14
6.Экспериментальная установка для исследования продольных	
колебаний в стержнях	16
7. Экспериментальная установка для исследования крутильных	
колебаний в стержнях	19
8.Обработка сигналов	20
9.Задание	2 4
10.Форма отчета	27
Литература	28

1. Введение

Механические свойства упругих изотропных твердых тел могут быть описаны следующими параметрами: двумя упругими модулями, двумя коэффициентами вязкости и плотностью. Обычно используют модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ или постоянные Ламе λ и μ . Величину μ также называют модулем сдвига. Между этими параметрами существует однозначная связь:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \quad \sigma = \frac{E - 2\mu}{2\mu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad \lambda = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}.$$
 (1)

Зная эти параметры, можно составить дифференциальные уравнения, описывающие колебания однородных изотропных тел, и, проинтегрировав их, решить задачи о колебаниях стержней, пластин, шара и даже некоторых технических конструкций.

Для исследования упругих свойств твердых тел в динамическом режиме широкое распространение получила резонансная акустическая спектроскопия (*PAC*). Метод *PAC* основан на анализе спектра резонансных частот образца, изготовленного из исследуемого материала. Наиболее просто анализировать экспериментальные результаты, если образец имеет форму цилиндра, длина которого существенно больше его радиуса. Образцы такой формы принято называть стержнями. Положения максимумов амплитуды вынужденных колебаний стержня определяют резонансные частоты, а ширина резонансной кривой дает возможность определить его добротность.

Несмотря на то, что экспериментальная установка для реализации метод РАС проста и не требует дорогостоящего оборудования, метод РАС обеспечивает высокую точность измерений. Это вызвало его широкое применение при исследовании различных физических явлений, таких, например, как изучение внутреннего трения и фазовых переходов, измерение упругих констант второго и третьего порядков. Наиболее просто с помощью этого метода измеряются модуль Юнга E и модуль сдвига μ . В стержне, изготовленном из исследуемого материала, возбуждаются продольные или крутильные колебания. Измеряя спектр колебаний (резонансные частоты) стержня при этих колебаниях, добротность Q, вычисляют модули E и μ , а также коэффициенты вязкости.

2. Упругие волны в стержнях

Акустические волны, распространяющиеся в металлических стержнях, существенно отличаются от волн распространяющихся в неограниченной среде. При этом речь идет о волнах, длина которых велика или сравнима с радиусом \mathbfilde{R} стержня. Строгий анализ распространения таких волн связан с довольно громоздкими и трудными математическими расчетами. Наличие размерного параметра \mathbfilde{R} , сравнимого с длиной акустической волны $\mathbfilde{\lambda}$ (не путать с постоянной Ламе $\mathbfilde{\lambda}$!) приводит к тому, что в металлических стержнях могут распространяться три семейства нормальных волн, которые обладают значительной геометрической дисперсией.

1. Семейство нормальных продольных волн

Семейство нормальных продольных волн в стержнях в общем случае характеризуется двумя компонентами смещения: по радиусу стержня и его длине. Каждая из этих компонент обладает симметрией относительно оси стержня. В высокочастотном пределе, когда частота $\omega = 2\pi f \to \infty$, скорость акустических волн в стержне стремится к скорости продольных волн в неограниченной среде:

$$C_{np.} = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}},$$

где E - модуль Юнга, σ - коэффициент Пуассона, ρ - плотность материала. Наибольший интерес для наших исследований представляет самая низкая мода нормальной продольной волны. Она существует вплоть до нулевой частоты, тогда как все высшие нормальные моды продольной волны имеют критические частоты. (С частотами ниже критических высшие моды в стержне не могут распространяться.) В низкочастотном пределе при стремлении частоты $\omega = 2\pi f \rightarrow 0$ скорость этой волны стремится к величине

$$C_{cm.} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (2)$$

называемой стержневой скоростью. В случае, когда отношение радиуса стержня \mathbf{R} к длине волны $\lambda = C_{cm} / f$ мало, дисперсия этой моды незначительна (рис. 1). В дальнейшем в наших исследованиях будет использоваться эта мода.

2. Семейство нормальных крутильных волн

Одной из характерных особенностей волнового движения в нормальных крутильных волнах является наличие только одной компоненты смещения, которая в цилиндрической системе координат описывается углом

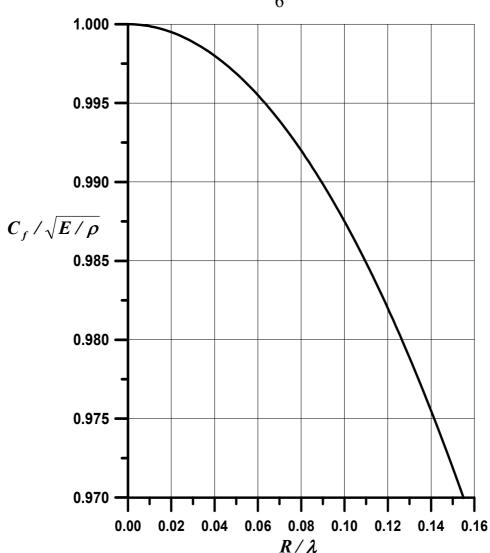


Рис. 1. Зависимость нормированной фазовой скорости первой продольной моды C_f от отношения радиуса R стержня κ длине волны λ

поворота $\delta \gamma$. Решение волнового уравнения в цилиндрических координатах для случая смещения частиц только в направлении γ дает семейство нормальных волн, обладающих дисперсией. Для таких волн фазовая скорость монотонно уменьшается с увеличением частоты и на очень высоких частотах приближается к скорости поперечной акустической волны C_{non} в неограниченной среде.

Кроме упомянутых выше нормальных волн, характеризующихся наличием дисперсии, существует еще нулевая нормальная крутильная мода, не обладающая дисперсией, для которой фазовая скорость равна скорости поперечной (сдвиговой) акустической волны C_{non} в неограниченной среде

$$C_{\kappa p.} = C_{non.} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

В отличие от первой продольной нормальной моды, для которой дисперсия в области низких частот хотя и мала, но все же существует, для нулевой

нормальной крутильной моды дисперсия отсутствует полностью. Поэтому она удобна для исследования упругих свойств различных материалов.

3. Семейство нормальных изгибных волн

В отличие от продольных и крутильных нормальных волн, в которых распределение смещений обладает полной симметрией относительно оси цилиндра и не зависит от угловой координаты γ , в случае изгибных колебаний зависимость смещений от координаты γ существует и, кроме того, существует зависимость от $n\gamma$, где n-целое число. Каждому значению n соответствует бесконечное множество нормальных изгибных мод, которые обладают значительной дисперсией. Анализ распространения таких волн связан со значительными трудностями и, как правило, для исследования упругих свойств материалов они не используются.

3. Распространение продольных волн в тонких стержнях

Рассмотрим распространение продольной волны вдоль оси тонкого стержня постоянного сечения площадью S. Стержень считается тонким в том случае, когда радиус стержня R мал по сравнению с длиной волны λ . Направим ось X вдоль геометрической оси стержня (рис. 2).

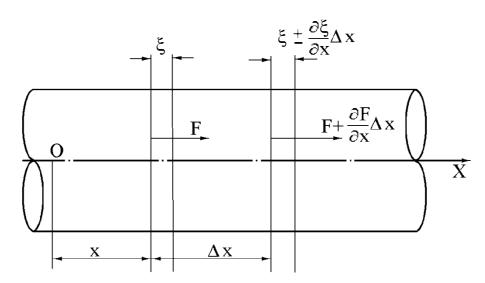


Рис. 2. Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

Под действием продольной силы F элементарный отрезок стержня ΔX , ограниченный плоскостями X и $X + \Delta X$, растянется или сожмется на величину $\Delta \xi$. Относительное удлинение, т.е. деформация элемента стержня, будет равна $\partial \xi / \partial X$. Напряжение σ^* , т.е. сила, приходящаяся на единицу поперечного сечения стержня, согласно закону Гука, будет равна:

$$\sigma^* = \frac{F}{S} = E \frac{\partial \xi}{\partial X}.$$

Коэффициент пропорциональности E носит название модуля Юнга и имеет размерность H/m^2 .

В результате переменной деформации вдоль оси стержня будет распространяться продольная волна. Действительно, в сечениях X и $X + \Delta X$ напряжения будут различными, а их разность можно записать следующим образом:

$$\sigma^{*}(X + \Delta X) - \sigma^{*}(X) = \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial X} \Delta X = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{F}{S}\right) \Delta X = \frac{\partial \sigma^{*}}{\partial X} \Delta X.$$
 (3)

Эта разность напряжений вызовет движение элемента стержня массой $m = S \rho \Delta X$ вдоль оси X. Уравнение движения этого элемента можно записать в виде:

$$\widetilde{S\rho\Delta X}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} \cdot \Delta X, \qquad (4)$$

где ρ - плотность материала стержня. Обозначив E/ρ через $(C_{cm.})^2$ выражение (4) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(C_{cm.}\right)^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} \,. \tag{5}$$

Это уравнение описывает распространение продольных волн в стержне и носит название «волнового уравнения». Известно, что решение волнового уравнения можно представить в форме двух бегущих волн, распространяющихся в обе стороны вдоль оси X со скоростью C_{cm} . Отметим, что скорость продольных волн в стержнях C_{cm} меньше скорости продольных волн C_{np} в сплошной среде (разница составляет 10-15%). Как известно, решением волнового уравнения (5) в общем случае является функция вида:

$$\xi(x,t) = f(C_{cm.} t - x) + F(C_{cm.} t + x),$$

где f u F- произвольные функции. В случае гармонического возбуждения колебаний решение (5) можно записать следующим образом:

$$\xi(x,t) = \xi_{01} \exp(i\omega t - ikx) + \xi_{02} \exp(i\omega t + ikx). \tag{6}$$

Здесь ξ_{01} и ξ_{02} - амплитуды смещения частиц стержня в продольных волнах, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях, ω - частота, $k = \omega / C_{cm}$ - волновое число.

При выводе волнового уравнения мы не учитывали сил, связанных с поперечными деформациями, считали деформации, а, следовательно, и связанные с ними напряжения малыми, не учитывали потерь энергии, т.е. считали k и C_{cm} действительными числами. Для учета затухания распространяющейся волны в уравнение движения вводят силы вязкости. Затухание волн в реальных стержнях будет происходить не только за счет наличия вязкости, но и за счет излучения звука в окружающую среду, за счет потерь в местах крепления и т.д. Однако здесь мы будем учитывать только потери, связанные с наличием вязких сил. Обычно считают, и это

подтверждается экспериментом, что силы вязкости пропорциональны градиенту скорости деформации $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)$, т.е.:

$$f' = E' \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right),$$

где $E'(H\cdot c/m^2)$ -коэффициент вязкости.

Уравнение движения с учетом сил вязкости запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + \frac{E'}{\rho} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial X^2}.$$
 (7)

Решение будем искать в виде (при гармонической вынуждающей силе)

$$\xi(X,t) = \xi(X) \exp(i\omega t), \tag{8}$$

где $\omega = 2\pi f$ -частота вынуждающей силы. Подставим $\xi(X,t)$ в (7), получим уравнение для определения амплитуды колебания $\xi(X)$:

$$\frac{\partial^2 \xi(X)}{\partial X^2} + (k')^2 \xi(X) = 0 \tag{9}$$

Волновое число k' становится теперь комплексным и равным

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{E + i\omega E'}{\rho}}}.$$

Величину $E + i\omega E'$ называют <u>комплексным модулем упругости</u>. Решение уравнения (9) описывается функцией:

$$\xi(X) = \xi_1 \exp(-ik'x) + \xi_2 \exp(ik'x). \tag{10}$$

Сначала ограничимся только одной волной; бегущей в положительном направлении. Подставив выражение (10) в уравнение (8), получим окончательное решение уравнения (7):

$$\xi(X,t) = \xi_o \exp(i\omega t - ik'x). \tag{11}$$

Т.к. для большинства твердых тел $\underline{E'\omega << E}$, то выражения для величин k'и C' могут быть записаны следующим образом:

$$k' = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{E + i\omega E'}{\rho}}} \approx \omega \left(1 - \frac{i\omega E'}{2E}\right) / \sqrt{\frac{E}{\rho}} = k - i\delta, \qquad (12)$$

$$C' = \frac{\omega}{k'} = C_{cm} \left(1 + i \frac{\omega E'}{2E} \right) = C_{cm} \left(1 + i \frac{\delta}{k} \right). \tag{13}$$

В этом случае решение (11) уравнения (7) можно записать в виде:

$$\xi(X,t) = \xi_o \exp(-\delta x) \exp(i\omega t - ikx). \tag{14}$$

Поскольку мнимая часть скорости относительно мала, то фазовая скорость акустической волны в стержне с затуханием близка к скорости в стержне без потерь. Из выражения (14) видно, что в стержне будет распространяться продольная бегущая волна с амплитудой, экспоненциально убывающей с расстоянием (или временем).

Уменьшение амплитуды волны с расстоянием, вызванное вязкостью, характеризуется так называемым коэффициентом пространственного затухания:

$$\delta = \frac{\omega^2 E'}{2C_{cm}E}.$$

Выражение для временного коэффициента затухания α можно получить, заменив в (14) δx на $\delta C_{cm} t \equiv \alpha t$:

$$\alpha = \frac{\omega^2 E'}{2E}.$$

Для характеристики затухания часто пользуются логарифмической единицей — децибел (дБ). Указывают, на сколько децибел затухает волновой процесс на длине ΔX или за время Δt . Амплитуда колебаний на расстоянии X_i от начала координат (или через промежуток времени t_i от начала колебаний) определяется выражением

$$\xi_{\theta I} = \xi_{\theta} \exp(-\delta x_{I}) = \xi_{\theta} \exp(-\alpha t_{I})$$

и на расстоянии $\boldsymbol{X}_{\scriptscriptstyle 2}$ (соответственно через промежуток времени $\boldsymbol{t}_{\scriptscriptstyle 2}$):

$$\xi_{02} = \xi_0 \exp(-\delta x_2) = \xi_0 \exp(-\alpha t_2)$$

Изменение амплитуды в точке \boldsymbol{X}_2 относительно точки \boldsymbol{X}_1 в ∂E будет равно:

$$\Delta(\partial E) = 20 \lg \left(\frac{\xi_{02}}{\xi_{01}}\right) = -8.68 \cdot \delta \cdot (X_2 - X_1).$$

Для временной характеристики аналогично получим:

$$\Delta(\partial E) = 20 \lg \left(\frac{\xi_{\theta 2}}{\xi_{\theta 1}}\right) = -8.68 \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1). \tag{15}$$

Положив, например, $X_2 - X_1 = 1$ м, получим затухание

$$\Delta_{I} = 8.68 \cdot \delta \left[\frac{\partial E}{M} \right]$$

или, положив $\Delta t = 1c$

$$\Delta_2 = 8.68\alpha \left[\frac{\partial E}{c} \right]$$
.

4. Распространение продольных волн в тонком стержне конечной длины

Для стержня конечной длины уравнение колебаний (7), выражения для волнового числа (12) и фазовой скорости (13), а также решения (11, 14) уравнения (7) остаются справедливыми. Однако, теперь в решении уравнения (10) нельзя отбрасывать второе слагаемое, соответствующее отраженной волне, и необходимо учитывать оба члена. Кроме того, для решения задачи о колебаниях стержня конечной длины, необходимо учесть граничные условия на его обоих концах.

В соответствии с особенностями описанной ниже экспериментальной установки будем считать, что на одном конце стержня при X = 0 в направлении его оси действует вынуждающая периодическая сила:

$$F = F_{\theta} \exp(i\omega t)$$
.

Разместим на этом же конце начало координат X = 0. Второй конец стержня при X = l будем считать свободным. К нему никаких внешних сил не приложено, и он может свободно колебаться вдоль оси. В этом случае граничные условия будут иметь вид:

В сечении при X = 0, где приложена сила, возникающее в материале в результате деформации напряжение, равно напряжению, создаваемому внешней силой (F/S):

$$(E + i\omega E') \frac{\partial \xi(X)}{\partial X} \Big|_{X=\theta} = \frac{F}{S}. \tag{16}$$

Второй конец стержня при X=I свободен, и поэтому можно записать:

$$(E + i\omega E') \frac{\partial \xi(X)}{\partial X} \Big|_{X=I} = \theta.$$
 (17)

Решение уравнения (7) с учетом граничных условий (16) и (17), имеет вид:
$$\xi(X_1 t) = \frac{-F_0 \exp(i\omega t) ch[ik'(l-X)]}{ik'S(E+i\omega E') sh(ik'l)}.$$
 (18)

Решение (18) для стержня без затухания ($E' = \theta$) принимает вид:

$$\xi(X,t) = \frac{F_0 \exp(i\omega t) \cos\left[\left(\frac{\omega}{C_{cm.}}\right) \cdot (l-X)\right]}{k \cdot E \cdot S \cdot \sin\left(\frac{\omega l}{C_{cm.}}\right)}.$$
 (19)

Из выражения (19) следует, что в стержне без затухания устанавливается чисто стоячая волна, причем амплитуда смещения по длине стержня распределена точно по косинусоиде. Присутствие в знаменателе величины $sin^{\omega l}$ указывает на сильную зависимость амплитуды от частоты. При частотах ω_n вынуждающей силы

$$\sin\frac{\omega_n l}{C_{cm}} = 0, \qquad (20)$$

амплитуда стержня стремится к бесконечности. Эти частоты называются резонансными. На этих частотах амплитуда колебаний стержня резко возрастает, и он начинает громко звучать. Из условия (20) можно получить значения резонансных частот:

$$\frac{\omega_n l}{C_{cm}} = n\pi$$
 или $\omega_n = 2\pi f = \frac{n\pi}{l}C_{cm}$, откуда $f_n = \frac{n}{2l} \cdot C_{cm}$, (21)

где n=1,2,3,....

Таким образом, стержень представляет собой распределенную колебательную систему, где могут существовать различные собственные колебания (моды), каждое из которых имеет свою собственную частоту ω_n , определяемую выражением (21). Спектр собственных частот продольных колебаний тонкого стержня является эквидистантным.

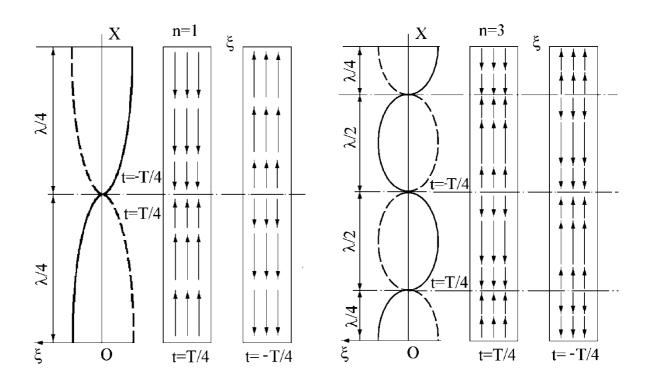


Рис. 3. Распределение амплитуд смещения зажатого в середине стержня для двух первых резонансных частот в разные моменты времени

При первом резонансе (n=1) на длине стержня укладывается полволны, при втором (n=2) - целая волна, при третьем (n=3) - 3/2 волны и т.д. Резонансным частотам нечетного порядка соответствуют колебания с одним, тремя и т.д. узлами, причем один из них попадает на середину стержня. Резонансным частотам четного порядка соответствуют колебания с четным числом узлов, причем на середине стержня в этом случае всегда находится максимум амплитуды смещения. Если середина стержня закреплена, то колебания при резонансных частотах четного порядка будут заглушены и стержень эффективно возбуждается только на нечетных

гармониках. На рис. 3. показано распределение амплитуд смещения по длине зажатого в середине стержня для двух первых резонансных частот в моменты времени, отличающиеся на полпериода.

Для стержня с малым затуханием, когда $\omega E' < E$, формула (18) для X = l может быть переписана в виде:

$$\xi(l,t) = -\frac{F_{\theta} \exp(i\omega t) \left\{ \cos \left[\frac{\omega}{C_{cm.}} (l-x) \right] + i\delta(l-x) \sin \left[\frac{\omega}{C_{cm.}} (l-x) \right] \right\}}{i \cdot k' (E + i\omega E') S \left[i \cdot \sin \left(\frac{\omega l}{C_{cm.}} \right) + \delta \cdot l \cdot \cos \left(\frac{\omega l}{C_{cm.}} \right) \right]}. \tag{22}$$

Из анализа (19) и (22) следует, что резонанс при малом затухании наступает практически на тех же частотах, что и для стержня без затухания. Существенное отличие колебаний реального стержня с малым затуханием от идеального заключается в характере поведения величины их амплитуды в области резонансных частот. В то время как амплитуда колебаний стержня без потерь при резонансе стремится к бесконечности, амплитуда колебаний реального стержня будет иметь большую, но конечную амплитуду. При этом изменится и распределение амплитуды смещения вдоль оси стержня. Однако оно будет незначительно отличаться от косинусоидального распределения.

Возбуждая продольные колебания в стержне конечной длины, можно определить модуль Юнга и коэффициент вязкости E'. Действительно, изменяя частоту вынуждающей силы, по резкому возрастанию амплитуды можно найти ряд последовательных резонансных частот f_n , и зная длину стержня l, с помощью формулы (21) определить скорость распространения упругой волны C_{cm} .

Как следует из (5) и (14), для материала с малым затуханием фазовая скорость продольных волн близка к значению стержневой скорости $C_{cm.} = \sqrt{E/\rho}$. Следовательно, зная плотность материала стержня ρ , можно определить модуль Юнга E по формуле:

$$E = \rho C_{cm}^2. \tag{24}$$

Для определения коэффициента вязкости необходимо определить частоты $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \pm \Delta \boldsymbol{\omega}$, при которых квадрат амплитуды смещения $(\boldsymbol{\xi})^2$ вдвое меньше квадрата амплитуды смещения при резонансе. Строго говоря, по резонансной кривой можно определить только общие потери в колебательной системе (вязкие потери, излучение, трение в зажимах и др.). Если потери за счет вязкости значительно больше всех остальных потерь (это относится к эбонитовым стержням), то коэффициент вязкости может быть измерен.

Величина $2\Delta\omega$ называется шириной резонансной кривой (ее определяют, уходя от резонансной частоты в сторону больших или меньших частот). Зная $\Delta\omega$ и ω_{θ} можно вычислить коэффициент вязкости по формуле:

$$E' = \frac{E\Delta\omega}{(\omega_{\theta})^2}.$$
 (25)

При этом предполагается, что $\omega = \omega_{\theta} \pm \Delta \omega \approx \omega_{\theta}$. Это выполняется, когда потери в стержне малы.

5. Крутильные колебания тонких стержней конечной длины

Крутильные колебания стержней можно возбудить, создав в каком либо сечении стержня, перпендикулярном его геометрической оси, переменный момент сил $M = M_{\theta} \exp(i\omega t)$. Возникающие в этом случае колебания круглого стержня изображены на рис. 4, на котором показано положение одной из образующих цилиндра в разные моменты времени.

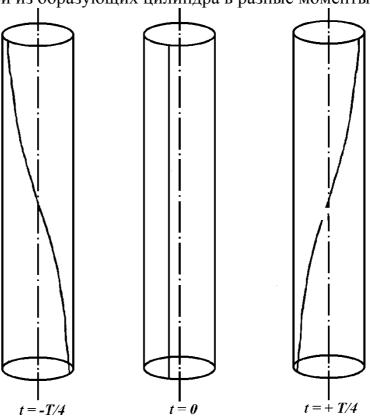


Рис. 4. Крутильные колебания стержня в разные моменты времени

Теория крутильных колебаний тонкого стержня строится аналогично теории продольных колебаний стержня. Поэтому здесь приводятся только окончательные результаты. При возбуждении крутильных колебаний стержень претерпевает деформацию сдвига. Вдоль оси стержня распространяется поперечная волна, дифференциальное уравнение для которой имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \mu' \frac{\partial^3 \gamma}{\partial x^2 \partial t}, \qquad (26)$$

здесь ось X направлена по оси стержня, γ -угол закручивания стержня в плоскости, перпендикулярной оси, под влиянием вынужденного момента, μ - модуль сдвига, μ' - коэффициент сдвиговой вязкости.

Скорость распространения такой волны определяется комплексным <u>модулем</u> сдвига:

$$\mu + i\omega \mu' \tag{27}$$

и равна

$$C_{\kappa pym.} = C_{non.} = \sqrt{\frac{\mu + i\omega \mu'}{\rho}}.$$
 (28)

Для материала с малой вязкостью скорость крутильных колебаний будет:

$$C_{\kappa p \nu m.} = C_{non.} = \sqrt{\mu / \rho} . \tag{29}$$

Увеличение амплитуды колебаний стержня наблюдается на резонансных частотах, соответствующих целому числу полуволн, укладывающихся на длине стержня. Для свободного стержня отношение резонансных частот будет 1:2:3:4 и т.д., то есть спектр собственных частот сдвиговых колебаний нулевой нормальной волны (моды) стержня, так же как и для продольных колебаний, является эквидистантным.

Скорость поперечной волны связана с резонансными частотами соотношением:

$$C_{\kappa pym.} = C_{non.} = \frac{2l \cdot f_n}{n} \tag{30}$$

Вязкость материала и другие виды потерь будут вносить затухание в колебания стержня, благодаря чему ширина резонансной кривой $\Delta \omega_n$ будет конечной. Измерение резонансных частот стержня f_n позволяет по формулам (29, 30) определить скорость поперечной волны C_{non} и модуль сдвига μ .

6. Экспериментальная установка для исследования продольных колебаний в стержнях

Экспериментальная установка (рис. 5) состоит из:

- 1) Генератора 1 с диапазоном рабочих частот 20–20000 Гц
- 2) Усилителя мощности 2
- 3) Станины 3, на которой укреплены исследуемый стержень 4, возбудитель 5 и приемник колебаний 6
- 4) Осциллографа 7
- 5) Блока оцифровки сигнала National Instruments 8
- 6) Компьютера 9.

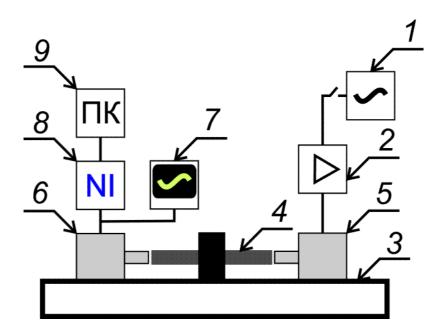


Рис. 5. Схема экспериментальной установки для исследования продольных колебаний стержней

При проведении измерений исследуемые стержни *4* закрепляются строго в середине своей длины (в специальной стойке тремя винтами), а концы стержня остаются свободные. В результате такого закрепления в середине стержня принудительно создается узел. Это приводит к тому, что четные резонансные колебания не должны возбуждаться.

Возбуждение прием колебаний В стержне осуществляются преобразователями 5 и **6**. Преобразователь электромагнитными соединяется со звуковым генератором 1. Протекающий по катушке этого преобразователя переменный ток I_{\sim} создает магнитное поле B_{\sim} , пропорциональное I_{\sim} , в котором находится один конец стержня. На этот конец стержня будет действовать переменная сила F_{\sim} , величина которой пропорциональна B^2 (В случае немагнитных стержней на их концы наклеиваются тонкие ферромагнитные диски). Для получения линейной связи между F_{\sim} и I_{\sim} в преобразователе имеется постоянный магнит, поле которого B_{θ} значительно больше B_{\sim} . В этом случае действующая на стержень переменная сила равна

$$F_{\sim} \sim B^2 \sim (B_0 + B_{\sim})^2 = (B_0^2 + 2B_0^2 B_{\sim} + B_{\sim}^2) \sim 2B_0^2 B_{\sim} \sim 2B_0 I_{\sim}$$
, T.K. $2B_0^2 B_{\sim} >> B_{\sim}^2$.

Линейная связь между током и действующей силой, позволяет определить частоту переменной силы по измерению частоты генератора. Рядом с другим концом стержня находится аналогичный преобразователь 6; магнитное поле, в котором он находится, изменяется при колебаниях стержня и вызывает ЭДС. Амплитуда этой ЭДС пропорциональна амплитуде колебаний стержня, а частота совпадает с частотой генератора. При настройке генератора на резонансную частоту стержня, амплитуда колебаний последнего резко возрастает. ЭДС, наводимая этими колебаниями в приемнике, измеряется с помощью блока оцифровки — аналого-цифрового преобразователя (АЦП) фирмы National Instruments 8, подключенного к компьютеру 9.

Для эффективного возбуждения и приема колебаний возбудитель и, особенно, приемник необходимо с помощью микрометрической подачи приблизить как можно ближе к стержню, избегая при этом касания с ним. Это особенно важно для наблюдения высоких гармоник стержней со сравнительно большим затуханием (эбонит и др.), где амплитуды колебаний малы.

Известные трудности могут возникнуть в определении истинных значений резонансных частот продольных колебаний стержня. Это связано с тем, что увеличение амплитуды может произойти и за счет резонанса возбуждающей и принимающей системы, а также за счет резонанса, возникающего при изгибных колебаниях исследуемого стержня. Теория и наблюдения изгибных колебаний показывают, что их собственные частоты составляют негармонический ряд и лежат значительно ниже основной частоты продольных колебаний стержня. Уменьшить влияние этих побочных эффектов можно тщательной центровкой стержня относительно возбудителя. Однако полностью устранить эти помехи не всегда удается. Необходимо отметить, что при зажатии стержня в его центре могут наблюдаться четные резонансы, особенно для мягких стержней с относительно большей вязкостью, однако амплитуда колебаний при «четных» резонансах будет значительно меньше, чем при «нечетных» резонансах.

Как отмечалось выше, коэффициент вязкости можно рассчитать по ширине резонансной кривой. Однако, для металлических стержней, где потери энергии в основном определяются не вязкостью, а, как отмечалось выше, другими факторами, ширина резонансной кривой дает возможность охарактеризовать только суммарные потери. В этом случае целесообразней пользоваться понятием добротности колебательной системы Q, которое определяется как величина, в π раз превосходящая количество периодов свободных колебаний системы, по истечении которых амплитуда колебаний

системы подает в e раз. Из теории колебаний известно, что добротность Q связана с $\Delta \omega$ (или α) следующим соотношением:

$$Q = \frac{\omega_{\theta}}{2(\Delta\omega)} = \frac{\omega_{\theta}}{2\alpha} \ . \tag{31}$$

Для определения Q можно пользоваться двумя методами: измерять ширину резонансной кривой $(2\Delta\omega)$, или определить коэффициент затухания (α) . При больших потерях пользуются первым способом (измеряют $2\Delta\omega$), а при малых потерях, когда $\Delta\omega$ настолько мало, что не может быть измерено, пользуются измерением α . Для этого возбуждают стержень на первой резонансной частоте (при малых потерях $f_{pes} \approx f_{co\delta}$) и записывают уменьшение амплитуды свободных колебаний как функцию времени с помощью компьютера. Блок оцифровки National Instruments-АЦП может регистрировать изменение амплитуды напряжения, подаваемого на его вход, в линейном или логарифмическом масштабах. Если измерения проводятся в логарифмическом масштабе в «дБ», то расчет добротности можно провести, используя формулы (15) и (31):

$$\Delta(\partial E) = 8,68\alpha\Delta t = 8,68\frac{\omega_0}{2Q}\Delta t, \qquad (32)$$

где $\Delta(\partial E)$ – изменение сигнала в дБ, Δt – время спадания амплитуды на $\Delta(\partial E)$, ω_0 – резонансная частота. При уменьшении амплитуды сигнал за время $\Delta t = \Delta t^{(e)}$ имеем $\Delta t^{(e)} = 1/\alpha$, и тогда из (31) или (32) следует, что $Q = \pi f_0 \Delta t^{(e)}$, где $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.

7. Экспериментальная установка для исследования крутильных колебаний в стержнях

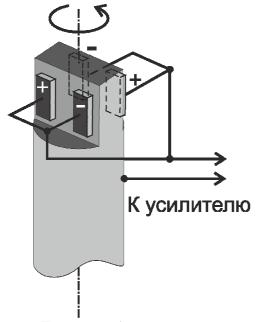


Рис. 6. Схема возбуждения и приема крутильных колебаний в стержне

Для возбуждения и приема крутильных колебаний в стержне используются пьезокерамические преобразователи. Каждый из концов стержня изготовлен таким образом, что образуются две параллельные плоские поверхности, как показано на рис. 6. На каждой из поверхностей закреплены по две пьезокерамические пластины. Электродами служат сам стержень и внешние поверхности пьезокерамических пластин, которые объединены вместе перемычками. Пластины, расположенные симметрично по отношению к оси стержня (ось изображена штрихпунктиром на рис. 6), поляризованы одинаково, а прикрепленные к общей поверхности – противоположно. Когда на пластины подается напряжение, толщина двух из них уменьшается, а двух других – увеличивается. Благодаря этому, создается крутящий момент, который вызывает колебания стержня. Аналогично работают и приемные пластины, расположенные на другом конце стержня: закручивание конца стержня вызывает деформацию сжатия или растяжения каждой пары пластин, что сопровождается появлением напряжения на электродах.

Напряжение звуковой частоты, создаваемое генератором, подается через усилитель на пластины, расположенные с одного из концов стержня.

Вращающий момент возбуждает крутильные колебания в стержне. Возбужденные в стержне колебания принимаются при помощи аналогичной системы пьезокерамических пластин на другом конце стержня. В этой системе, вследствие прямого пьезоэлектрического эффекта, создается электрическое напряжение, пропорциональное амплитуде колебаний, которое регистрируется осциллографом. Изменяя частоту генератора, можно определить резонансные частоты стержней по резкому возрастанию амплитуды колебаний и с их помощью рассчитать модуль сдвига μ .

8. Обработка сигналов

Обозначения элементов управления, имеющихся на экране компьютера, <u>подчеркнуты в тексте волнистой линией</u>. Например, кнопка «<u>Измерение</u>» в режиме «Самописец».

Прием сигналов осуществляется с помощью платы NI 6115 **8** (рис. 5), расположенной внутри корпуса компьютера. Оцифрованный сигнал обрабатывается программой, написанной на языке LabView. Программа позволяет осуществлять обработку сигналов в двух режимах: в режиме «Спектральный анализ» и в режиме «Самописец». Виды интерфейса программы в этих режимах изображены на рис. 7 и рис. 8, соответственно. Их переключение осуществляется выбором на экране компьютера соответствующей вкладки.

Режим «Спектральный анализ»

Вид интерфейса программы представлен на рис. 7. Слева вверху находится переключатель каналов, который позволяет анализировать сигналы, соответствующие продольным колебаниям или крутильным колебаниям. Ниже находятся три графика. Каждый из них снабжен переключателем вида вертикальной шкалы: можно использовать линейную шкалу или логарифмическую шкалу (в зависимости от выполняемых упражнений, выбирается более удобный вид).

Сигнал принимается блоком оцифровки в течение 1 секунды. Частота дискретизации составляет при этом 46 кГц, за счет чего, согласно теореме Котельникова-Шеннона, диапазон анализируемых частот ограничен сверху частотой 23 кГц. После того, как данные получены, выполняется их автоматическая обработка. На диаграмме, расположенной в верхней части экрана (рис. 7), отображается осциллограмма принятого сигнала. В данной работе используются два типа сигналов, которые может создавать генератор. Первый тип – это число гармонический сигнал с определенной частотой. Второй тип представляет собой сигнал «качающейся» частоты, т.е. частота сигнала изменяется со временем линейным образом в диапазоне, задаваемом на генераторе. Если такой сигнал, содержащий все частоты заданного диапазона, подавать на стержень, то на тех частотах, которые совпадают с резонансными частотами стержня, амплитуда колебаний стержня будет возрастать. Поэтому в принятом сигнале появятся периодические пики, соответствующие моментам времени, когда генератор создает резонансную частоту.

Сигнал содержит постоянную составляющую, а также большое количество паразитных наводок в области низких частот; поэтому необходимо произвести фильтрацию, которая осуществляется программно. Полоса пропускания фильтра может быть задана в пределах от 0 Гц до 23 кГц в окне «Фильтрация спектра сигнала». Установка нижней частоты около

1 кГц позволяет исключить постоянную составляющую и низкочастотные наводки. Поскольку спектр информативной части сигнала (частоты собственных колебаний стержня) лежит в полосе частот выше 1 кГц, такая фильтрация на нем не сказывается. Полученный после фильтрации спектр отображается на диаграмме слева внизу (график «Спектр сигнала»).

Для более точного определения резонансных частот спектра следует задать полосу просмотра, установив в окне «Спектр сигнала в полосе частот» нижнюю и верхнюю частоты. При этом участок спектра, соответствующий выбранному диапазону, отображается справа внизу на графике «Спектр сигнала в выбранной полосе».

Амплитуда спектральной компоненты, отложенная по вертикальной оси графиков «Спектр сигнала» и «Спектр сигнала в выбранной полосе», равна произведению плотности спектральной амплитуды (т.е. результата БПФ дискретизованного входного сигнала) на частоту дискретизации.

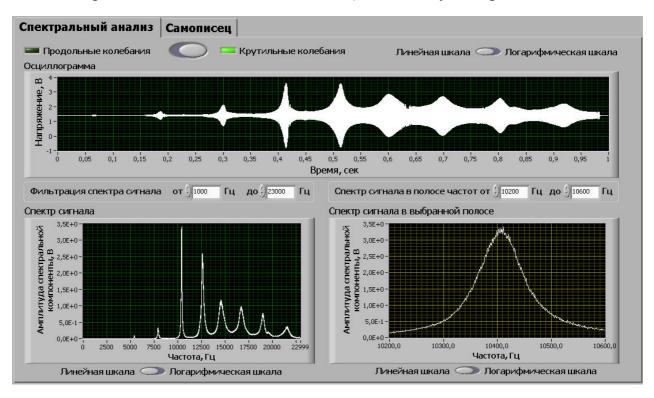


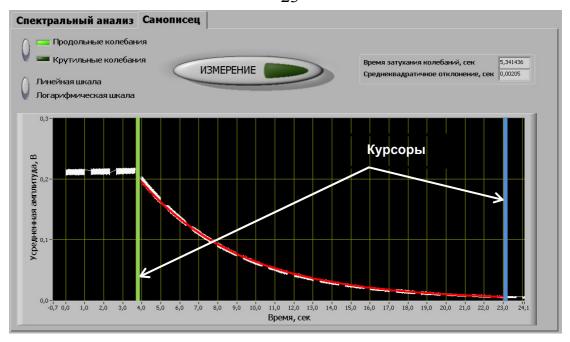
Рис. 7. Вид интерфейса программы в режиме <u>«Спектральный анализ»</u> крутильных колебаний. Везде выбрана линейная шкала.

Режим «Самописеи»

В этом режиме регистрируется зависимость амплитуды продольных или крутильных колебаний от времени. Если нажата кнопка «Измерение», осуществляется съем данных В виде последовательности длительностью по 1 сек. Поскольку внутренняя память блока оцифровки ограничена, после снятия каждой такой пачки данные поступают в компьютер. Поэтому между принятыми пачками возникают соответствующие времени передачи данных в компьютер. После регистрации каждой пачки происходит ее математическая обработка и обновление графика.

Если кнопка «Измерение» не нажата, можно провести обработку полученных данных. Для этого необходимо поместить присутствующие на графике курсоры (синяя и зеленая вертикальные линии) в начало и в конец участка сигнала, соответствующего убыванию амплитуды колебаний стержня после отключения генератора. В зависимости от типа вертикальной логарифмическая), (линейная ИЛИ график будет экспоненциальный (рис. 8, вверху) или линейный (рис. 8, внизу) вид. Значения амплитуд сигнала в дискретных временных точках, расположенных между курсорами, аппроксимируются с помощью метода наименьших квадратов (МНК), что дает возможность определить время затухания колебаний $\Delta t^{(e)} = 1/\alpha$ (за которое их амплитуда убывает в e раз) и среднеквадратичное отклонение, обусловленное присутствием в сигнале паразитных шумов.

Зная собственную частоту $\boldsymbol{\omega}_{\theta} = 2\pi f_{\theta}$, можно по формуле (32) найти величину добротности \boldsymbol{Q} . Для этого рассчитать изменение сигнала в Дб, соответствующее убыванию амплитуды в \boldsymbol{e} раз за найденное время затухания.



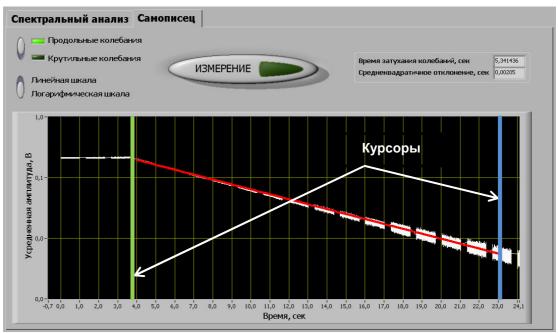


Рис. 8. Вид интерфейса программы в режиме «Самописец»

9. Задание

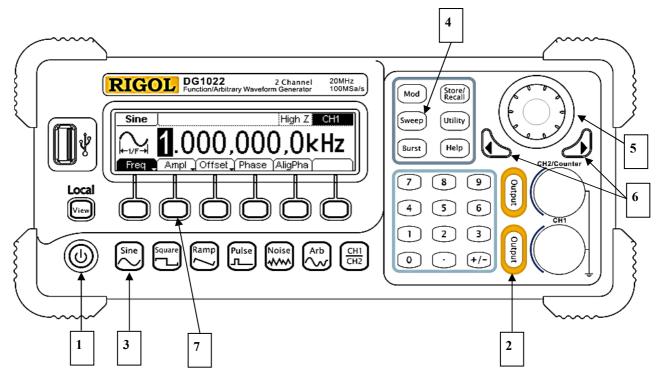


Рис. 9. Лицевая панель генератора

Обозначения, используемые далее в описании:

- Названия кнопок на панелях приборов даются в прозрачной рамке. Например, кнопкой [1] включается генератор.
- Названия экранных кнопок даются в серой рамке и соответствуют отображаемой на экране генератора надписи (например, Freq). Экранные кнопки серого цвета. На генераторе они расположены под экраном. Например, в случае, изображённом на рис. 9, надписи Ampl соответствует кнопка 7.
- Колёсиком 5 и стрелками 6 можно плавно менять частоту или амплитуду.
- Обозначения элементов управления, имеющихся на экране компьютера, подчеркнуты в тексте волнистой линией. Например, кнопка «Измерение» в режиме «Самописец».
- 1. Включить усилитель тумблером «Сеть». Усилитель будет прогреваться в течение 5 минут.
- 2. Тумблер типа колебаний на усилителе перевести в положение «Продольные колебания».

- 3. Включить компьютер и запустить программу «Задача 9». На экране должен появиться режим «Спектральный анализ» и опция «Продольные колебания».
- 4. Включить генератор DG1022 (см. рис. 9) кнопкой и подать сигнал с его выхода на установку, нажав кнопку , она будет подсвечиваться, что означает присутствие синусоидального (горит кнопка) сигнала на выходе генератора. По умолчанию амплитуда сигнала на выходе генераторе при его включении устанавливается равной 5В. При необходимости она может быть установлена после нажатия кнопки Ampl с помощью колесика или стрелок 6.
- 5. Перевести генератор в режим свипирования; данный режим означает, что частота генератора плавно изменяется в определенных пределах. Для этого нажать кнопку ф (она загорится). Выбирая кнопку Start, можно установить нижнюю частоту, а выбирая кнопку Stop верхнюю частоту. Повторное нажатие кнопки Start переключает режим задания границ частотного диапазона на такой, при котором задается центральная частота (кнопка Center) и ширина полосы (кнопка Span). Хотя оба режима эквивалентны, задавать нижнюю и верхнюю частоту в данной задаче более удобно. Для возврата к режиму задания границ диапазона следует нажать кнопку Center раз. Установить диапазон частот 1кГц–20кГц.
- 6. Кнопка Time задает период изменения частоты. Задать его равным 1 секунде.
- 7. Закрепить стержень в установке. При правильном его положении слышен мелодичный звон.
- 8. На экране компьютера будет отображен спектр сигнала. Он должен содержать линии, соответствующие резонансным частотам стержня. Чтобы видеть все спектральные линии, можно переключиться с линейной шкалы на логарифмическую или обратно. Чтобы отличить истинную резонансную частоту от паразитной наводки, следует временно отключить генератор, нажав на горящую кнопку 2 и подождав, пока прекратятся колебания стержня. При этом амплитуда полезного сигнала постепенно уменьшается.
- 9. Для более точного измерения резонансных частот задать частоту свипирования (п. 5) в коротких диапазонах 100Гц–2кГц, 2кГц–4кГц, 4кГц–6кГц, ... 20кГц–22кГц. При этом на графике «Спектр сигнала» слева внизу будут представлены частоты только в заданном диапазоне (хотя горизонтальная шкала всегда отображается от 1кГц до 23кГц). Одновременно в окне «Спектр сигнала в полосе частот» установить область просмотра, соответствующую диапазону свипирования (здесь удобно использовать линейную шкалу). Для точного определения частоты область просмотра можно постепенно сужать. Записать полученные частоты.

- 10. Перейти в режим «Самописец» и выбрать с помощью опции в левой части экрана режим «Продольные колебания». На генераторе выйти из режима свипирования, нажав кнопку 4. Задать частоту генератора (кнопка Freq), соответствующую частоте первого резонанса. Нажать на правую часть кнопки «Измерение». Изменяя частоту генератора в небольших пределах и последовательно уменьшая шаг от 10Гц до 0.1Гц, нужно добиться максимальной амплитуды сигнала. Изменять частоту нужно достаточно медленно, чтобы амплитуда сигнала успевала устанавливаться. Когда текущая частота генератора близка к резонансной частоте стержня, между этими частотами возникают биения. Чем ближе частота генератора к резонансной, тем больше период биений. Когда амплитуда колебаний становится большой, возможны нелинейные эффекты, сопровождающиеся резким неприятным звуком. В этом случае следует немного отодвинуть датчики от торцов стержня микровинтом. Настроившись на резонансную частоту (это можно сделать с точностью до долей Гц), генератор выключают, нажав кнопку 2. При этом на компьютере регистрируются затухающие колебания. Примерно через 20 секунд после отключения генератора нужно остановить процесс измерения, повторно нажав кнопку «Измерение». С помощью курсоров указать участок сигнала, соответствующий затухающим колебаниям (в логарифмической шкале он соответствует линейному спаду) и записать рассчитанное для этого участка время затухания сигнала, указанное на экране в секундах.
- 11. Повторить пункты 4–10 (начиная п.4 с нажатия кнопки 2) для всех имеющихся металлических стержней.
- 12. Снять резонансную кривую на 1-ой резонансной частоте для неметаллического стержня и зарисовать ее график. Для этого выбрать режим «Спектральный анализ» и повторить пункты 5–9, задавая диапазон свипирования 1кГц–5кГц. Выбрав лучшую реализацию резонансной кривой, график можно зафиксировать, нажав слева вверху кнопку с красным кружком. Для возобновления работы нажать на белую стрелку слева от этого кружка.
- 13. Перевести тумблер типа колебаний на усилителе в положение «Крутильные колебания». На компьютере выбрать режим «Спектральный анализ» для крутильных колебаний. Убедиться, что генератор включен, при необходимости нажав кнопку 2. Задать свипирование в диапазоне 1кГц—23кГц (см. пункты 5 и 6). Записать частоты максимумов спектра крутильных колебаний, получаемых на экране. Удобно использовать линейную шкалу.

- 14. По экспериментальным результатам рассчитать скорости продольных C_{cm} и поперечных C_{non} волн в стержнях и определить модули упругости E, μ , σ и λ .
- 15. Используя рис. 1, оценить влияние геометрической дисперсии на точность определения C_{cm} .
- 16. Рассчитать для неметаллических стержней коэффициент вязкости E' и добротность Q.
- 17. Для металлических стержней рассчитать добротность системы Q.
- 18. Результаты экспериментальных измерений и проведенных расчетов привести в форме таблицы (см. ниже). Оценить величину погрешности определяемых величин и указать факторы, влияющие на нее.

10. Форма отчета

	.	
Студента (Ф.И.О.)	кафедра	группа

Материал	Сталь	Латунь	Медь	Алюминий	Эбонит
Резонансные частоты продольных колебаний					
Резонансные частоты крутильных колебаний					
Стержневая скорость C_{cm} .					
Скорость поперечных волн $\emph{C}_{\it non.}$					
Модуль Юнга <i>Е</i> , ГПа					
Коэффициент Пуассона σ					
Модуль сдвига μ , ГПа					
Постоянная Ламе д, ГПа					
Коэффициент вязкости ${m E'}$					
Добротность $\boldsymbol{\mathit{Q}}$					

Плотности материалов, используемых при измерениях:

Материал	Сталь	Латунь	Медь	Алюминий	Эбонит
Плотность,					
р, кг /м³	$7,3 \bullet 10^3$	$8,5 \bullet 10^3$	$8,9 \bullet 10^3$	$2,7 \bullet 10^3$	$1,5 \bullet 10^3$

Диаметр всех стержней 1,4•10⁻² м.

Длины металлических стержней для продольных колебаний 0,7 м. Длина пластмассового стержня для продольных колебаний 0,4 м. Длина латунного металлического стержня для крутильных колебаний 0,385 м.

Контрольные вопросы

- 1. Написать уравнение и граничные условия для продольных колебаний в стержне. Привести решение уравнения и выражение для резонансных частот; дать связь между длиной стержня и длиной волны возбуждаемых мод. Оценить первую резонансную частоту для дюралевого стержня при длине стержня 70 см и скорости продольных колебаний примерно 5000 м/с.
- 2. Нарисовать распределение амплитуды смещения частиц вдоль стержня для первых трех мод продольных колебаний и выписать соотношение частот этих мод. Как факт закрепления стержня в центре влияет на амплитуду четных и нечетных мод?
- 3. Описать метод измерения добротности в металлических стержнях по затуханию свободных колебаний, а также метод измерения добротности и коэффициента вязкости в неметаллических стержнях по ширине резонансной кривой. Выписать выражение для добротности через полуширину резонансной кривой и через коэффициент затухания.
- 4. Описать метод возбуждения крутильных колебаний в стержне. Связь скорости сдвиговых волн с резонансными частотами крутильных колебаний.
- 5. Нарисовать распределение амплитуды смещения частиц вдоль стержня (теперь стержень в центре не закреплен) для первых трех резонансных частот крутильных колебаний; выписать соотношение возбуждаемых резонансных частот.

Литература

- 1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. Гл. II, §1,2,3.
- 2. В.А. Красильников. Введение в акустику. Гл. 5. МГУ.1992.
- 3. С.П. Стрелков. Механика М. 1975.
- 4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория упругости. М.1975г.

А.И. Коробов, В.А. Буров, К.В. Дмитриев, О.Д. Румянцева. Резонансная акустическая спектроскопия твердых тел. Методическая разработка спецпрактикума кафедры акустики. — М.: Физический факультет МГУ, 2012. 30 с.

Пособие подготовлено в Центре коллективного пользования по нелинейной акустической диагностике и неразрушающему контролю физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2631.2012.2.

Подписано в печать 28.04.2012 г. Формат А5. Объем 1,5 п.л. Тираж 20 экз. Заказ № 86

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы

Отпечатано в отделе оперативной печати физического факультета