

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи  
УДК 534.2

КРИТ Тимофей Борисович

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В РЕЗОНАТОРЕ  
С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Специальность: 01.04.06 – акустика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2011

Работа выполнена на кафедре акустики физического факультета  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,  
доцент Андреев Валерий Георгиевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
Балакший Владимир Иванович

кандидат физико-математических наук,  
Дёмин Игорь Юрьевич

Ведущая организация: Акустический институт  
имени академика Н.Н. Андреева

Защита диссертации состоится “ 12 ” мая 2011 года в 16.00 на заседании  
Диссертационного Совета Д 501.001.67 при Московском государственном  
университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва,  
Ленинские горы, МГУ, физический факультет, физическая аудитория имени  
академика Р.В.Хохлова.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке физического  
факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан “ 08 ” апреля 2011 года.

Учёный секретарь

Диссертационного Совета Д 501.001.67

кандидат физико-математических наук,

А.Ф. Королёв

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Возросший в последнее время интерес к волновым процессам в кубично нелинейных средах обусловлен возможностями применения нелинейных эффектов для целей медицинской диагностики мягких тканей. Упругость ткани в поражённой области существенно изменяется, что позволяет выявлять патологию по измерению локальной скорости и затухания сдвиговых волн. Предложенные в различных работах методы неинвазивного возбуждения и детектирования сдвиговых волн продемонстрировали возможность локализации и определения неоднородностей сдвигового модуля с миллиметровым разрешением как на фантомах биологических тканей, так и в клинических условиях. Нелинейность сдвигового модуля также является информативным параметром, позволяющим уточнить диагностическую информацию, получаемую в линейных измерениях. Нелинейный параметр среды может быть получен как из статических измерений, так и при измерениях параметров нелинейных волновых процессов. Особенностью сред с центром инверсии, к которым с хорошим приближением можно отнести и мягкие биоткани, является отсутствие квадратичной нелинейности при сдвиговых деформациях. В таких средах основной вклад в развитие нелинейных процессов вносит кубичная нелинейность.

Бегущие волны конечной амплитуды в средах с кубичной нелинейностью рассмотрены достаточно детально. Показано, что в кубично нелинейной среде профиль гармонической на входе волны по мере распространения искажается симметрично, приобретая на некотором расстоянии трапециевидную форму с крутыми фронтами. Проведено экспериментальное наблюдение динамики нелинейной трансформации профиля гармонической волны в гелеобразной среде. Приведены как профили волн на различных расстояниях от источника сдвиговых волн, так и их гармонический состав. Для измерения нелинейных модулей упругости гелеобразных сред с малым значением модуля сдвига в настоящее время используется метод, который основан на акусто-упругом эффекте, т.е. зависимости скорости упругих волн от статической деформации среды. Существует ряд работ, посвящённых теоретическим основам определения ограниченного числа нелинейных констант в несжимаемых средах. Имеются работы, в которых приведены результаты измерений нелинейных констант в образцах, изготовленных из желатино-агаровой композиции.

Стоячие волны в кубично нелинейных средах в настоящее время проанализированы менее детально, хотя они представляют не меньший интерес и как объект фундаментального исследования, и с точки зрения практического применения. Существует лишь несколько работ, в которых проведён теоретический анализ поведения стоячих волн в кубично нелинейной среде. В настоящее время в такой среде получены решения для волн, содержащих ударные фронты.

Для возбуждения стоячих волн конечной амплитуды удобно использовать резонатор в виде плоскопараллельного слоя резиноподобного материала с жёсткой пластиной, закреплённой на его верхней границе. Толщина резонатора подбирается так, чтобы на ней укладывалось около четверти длины волны. В таком резонаторе возникают стоячие волны с амплитудами, на порядок и более превышающими амплитуду смещений, приложенных к нижней границе резонатора, даже в случае использования материала с большой сдвиговой вязкостью. Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию стоячих сдвиговых волн, возбуждаемых в резонаторе, заполненном средой с кубичной нелинейностью. Анализируются волны умеренной амплитуды, когда ударные фронты ещё не образуются. При этом применяется подход, основанный на модели одномерного резонатора В качестве среды с кубичной нелинейностью используется полимерный материал пластисол (производитель – компания M-F Manufacturing, USA), нелинейный параметр в котором определялся из статической зависимости сдвиговой деформации от напряжения.

### **Цели и задачи диссертационной работы**

Основной целью настоящей работы стало исследование сдвиговых волн конечной амплитуды в резонаторах с кубичной нелинейностью, а также развитие методик, позволяющих определять вязкоупругие и нелинейные параметры резиноподобных сред по измеренным резонансным кривым. Объектом исследования являются как однородные по структуре резонаторы, так и резонаторы с локальными включениями, отличными по своим упругим свойствам от материала остального резонатора. В рамках указанной цели решались следующие конкретные задачи:

1. Разработка численного алгоритма, позволяющего моделировать сдвиговые волны в резонаторах с учётом кубичной нелинейности и релаксации среды. Расчёт резонансных линий как в линейном, так и нелинейном режимах

колебаний, а также профилей волн и их гармоник в стационарном режиме и в процессе их установления.

2. Разработка метода расчёта стоячих волн в резонаторе с неоднородностями произвольной формы и размера. При этом сдвиговая упругость неоднородностей могла значительно превышать упругость материала резонатора (твёрдые включения), быть ниже (мягкие включения) или равняться нулю (жидкие включения и полости).

3. Создание установки и проведение экспериментальных исследований стоячих волн в резонаторе в виде слоя резиноподобной среды, нагруженного пластиной конечной массы. Развитие методик определения вязкоупругих и нелинейных параметров резиноподобной среды по измеренным резонансным кривым. Сравнение результатов измерений с численными расчётами.

4. Разработка качественного метода локализации неоднородностей в резонаторе по виду резонансных кривых. Решение обратной задачи определения сдвигового модуля одного из слоёв двухслойного резонатора.

### **Научная новизна работы**

1. Впервые проведено численное моделирование поведения стоячих сдвиговых волн в резонаторе, заполненном однородной резиноподобной средой с учётом кубичной нелинейности и релаксации. Показано, что при увеличении амплитуды колебаний в резонаторе форма резонансных кривых становится асимметричной и происходит сдвиг резонансной частоты. При определённой амплитуде возбуждения, зависящей от добротности резонатора, возникает область бистабильности. Время установления колебаний на частотах в области бистабильности увеличивается более чем на порядок.

2. Впервые экспериментально зарегистрирован эффект увеличения резонансной частоты с ростом амплитуды колебаний в резонаторе в виде слоя полимерного резиноподобного материала, нагруженного пластиной конечной массы. По измеренной зависимости был определён коэффициент нелинейности материала. Показано, что уровень третьей гармоники в резонаторе зависит от амплитуды первой гармоники по степенному закону, при этом показатель степени изменяется от трёх до двух по мере роста колебаний в резонаторе.

3. Предложенный метод определения вязкоупругих параметров резиноподобных материалов в низкочастотном диапазоне колебаний (10 – 400 Гц), основанный на сравнении измеренных и рассчитанных

резонансных кривых, полученных при различных массах верхней границы резонатора, является оригинальным.

4. Впервые показана возможность увеличения эффективного нелинейного параметра среды и управления эффективностью нелинейных процессов путём изменения пространственной структуры среды. Указанный эффект экспериментально продемонстрирован на примере резонатора с полостями, расположенными в области максимальных сдвиговых деформаций.

**Достоверность** полученных в работе результатов подтверждается сравнением данных экспериментов, проведённых в ходе выполнения работы с данными, полученными в других работах, в том числе, с использованием общеизвестных методов измерения. Кроме того, надёжность результатов подтверждается их соответствием теоретическим оценкам на основе самостоятельно разработанных и классических моделей, а также соответствием результатов данным численных расчётов, полученным в работах других авторов.

### **Практическая ценность**

1. В работе создан новый метод измерения вязкоупругих модулей резиноподобных материалов. Метод основан на сравнении измеренных и рассчитанных резонансных кривых в диапазоне частот 10 – 400 Гц. При этом для увеличения точности и достоверности получаемых параметров предложено изменять массу пластины, расположенной на верхней границе резонатора. Изменение массы пластины приводит к плавному изменению резонансных частот, что обеспечивает увеличение точности измерений.
2. Предложен новый метод определения динамического нелинейного параметра резиноподобных материалов, основанный на измерении зависимости сдвига резонансной частоты от амплитуды колебаний. Этот метод позволяет измерить зависимость нелинейного параметра от частоты.
3. По результатам измерений в многослойной структуре предложен новый метод создания структур с заданными вязкоупругими свойствами из композиции полимера и жёсткого наполнителя. Упругие свойства композиционных структур определяются полимером, а инерционные свойства – жёсткой фракцией. Деформации сдвига в полимере могут достигать более 100%, что позволит моделировать экстремальные перегрузки резиноподобного материала. При этом нелинейные

характеристики оказываются явно выраженными. Разработанные методы измерения модулей упругости позволяют определять значения этих модулей в структуре и управлять свойствами всей структуры.

4. Влияние положения неоднородностей на резонансные свойства позволяет использовать разработанную методику для решения задач по локализации дефектов в материалах. С другой стороны, введение искусственных неоднородностей с известными параметрами и расположением даёт возможность проводить новые независимые измерения с целью получения дополнительных сведений об исследуемом материале.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Форма резонансной кривой в резонаторе в виде слоя полимерного резиноподобного материала, нагруженного пластиной конечной массы, искажается с ростом амплитуды колебаний. Форма резонансной кривой становится несимметричной, а резонансная частота увеличивается. При определённой амплитуде колебаний возникает область бистабильности, ширина которой растёт с увеличением амплитуды колебаний. Время установления колебаний на частотах в области бистабильности увеличивается более чем на порядок.
2. Динамический нелинейный модуль сдвига, измеренный по зависимости сдвига резонансной частоты от амплитуды волны, вдвое меньше, чем измеренный статическим методом.
3. Нелинейное искажение профиля стоячей волны сопровождается генерацией нечётных гармоник. Амплитуда третьей гармоники растёт с уменьшением коэффициента сдвиговой вязкости. Амплитуда третьей гармоники в резонаторе зависит от амплитуды первой гармоники по степенному закону, при этом показатель степени изменяется от трёх до двух по мере роста колебаний в резонаторе.
4. Вязкоупругие параметры резиноподобного материала в области низких частот могут быть определены из сравнения измеренных резонансных кривых с рассчитанными. Точность измерений может быть увеличена путём изменения массы пластины на верхней границе резонатора. По результатам измерений можно сделать вывод, что используемый в работе резиноподобный полимер пластисол описывается моделью вязкоупругой среды с одним временем релаксации, значение которого составляет около одной миллисекунды и зависит от композиции и способа приготовления полимера.

5. Резонансные кривые при наличии неоднородностей сдвигового модуля произвольного вида в резонаторе могут быть вычислены с помощью метода конечных элементов, модифицированного с учётом эффекта объёмной блокировки. Наличие неоднородностей в виде полостей приводит как к росту, так и уменьшению резонансной частоты по сравнению с однородным резонатором в зависимости от положения полостей относительно нижней границы резонатора.
6. Расчёт однородного резонатора конечных размеров следует проводить численно с помощью метода конечных элементов при условии, что отношение его длины к толщине менее четырёх, а ширина меньше или равна толщине. В противном случае для расчёта резонансных характеристик можно пользоваться одномерной моделью.
7. Наличие в резонаторе неоднородностей в виде полостей влияет на его нелинейные свойства. Нелинейные свойства выражены сильнее, если полости находятся в области с большой деформацией.
8. Изменение положения неоднородностей влияет на измеряемые характеристики резонатора, что может быть использовано для управления резонансными свойствами.
9. Использование слоистой структуры, в которой слои из резиноподобного материала чередуются со слоями из твёрдого материала, позволяет создавать локально большие деформации в резиноподобных слоях при сравнительно небольших деформациях всей структуры в целом. Это позволяет использовать слоистые структуры для усиления нелинейных эффектов.
10. Предложенный в работе метод интерферометра позволяет решать обратную задачу по измерению сдвигового модуля одного из слоёв в двухслойной структуре. Для этого используются измеренные значения резонансных частот двухслойной структуры, а сдвиговый модуль второго слоя считается известным.

### **Апробация работы**

Вошедшие в диссертацию результаты докладывались на основных профильных российских и международных конференциях последних лет. Среди них доклады на XIX и XXII сессиях Российского акустического общества, X, XI и XII Всероссийских школах-семинарах «Волновые явления в неоднородных средах», Международных молодёжных научных конференциях «ЛОМОНОСОВ» в 2007-2010 гг.

Также результаты были доложены на научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные аспекты инновационных проектов Физического факультета МГУ». 18-19 ноября 2009, на международной Школе по терапевтическому ультразвуку в г. Каржез (Франция).

### **Публикации**

По результатам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 18 научных работ, список которых приведён в конце автореферата, в том числе 3 статьи в реферируемых журналах.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, в первой из которых представлены особенности нелинейных эффектов в резонаторах с кубичной нелинейностью, а следующие четыре являются оригинальными, заключения и списка литературы. Общий объём работы 139 страниц текста, включающего 38 рисунков и список цитируемой литературы из 123 наименований.

### **Личный вклад автора**

Все изложенные в диссертационной работе оригинальные результаты получены автором лично, либо при его непосредственном участии.

## **СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Во **Введении** обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цели работы, описано краткое содержание работы по главам.

**В первой главе** представлен обзор литературы по современным методам измерения линейных и нелинейных вязкоупругих параметров резиноподобных сред. Отмечены важные этапы развития, основные экспериментальные результаты и теоретические идеи, сформировавшие фундамент данной области.

**Вторая глава** посвящена стоячим сдвиговым волнам в однородном резонаторе. Проводится теоретический анализ нелинейного резонатора в виде слоя резиноподобного полимерного материала пластисола. Приводятся результаты измерения амплитудно-частотной характеристики такого резонатора. По сравнению измеренных резонансных характеристик с рассчитанными определяются упругие модули исследуемого материала и его вязкость. Эти параметры в дальнейшем могут быть использованы для построения реологических моделей среды, образующей резонатор. При значениях амплитуд, соответствующих нелинейному режиму, проводится

исследование профиля ускорения верхней границы резонатора и гармонического состава этого профиля.

В § 2.1 обсуждается возросший в последнее время интерес к волновым процессам в кубично нелинейных средах. Описываются существующие в настоящее время подходы к исследованию таких сред. Обсуждаются основные проблемы, которые возникают при использовании основных современных методов диагностики и возможные пути их решения.

В § 2.2 изложены основные особенности расчёта стоячих волн в одномерном резонаторе с кубичной нелинейностью. Рассмотрен резонатор в виде слоя резиноподобного материала толщиной  $L$ , имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с верхней гранью площадью  $S$ . Считается, что толщина резонатора  $L$  значительно меньше его поперечных размеров. Указанное допущение позволяет считать движение частиц зависящим лишь от продольной координаты, т.е. пользоваться одномерным приближением. Используется модель среды, в которой механическое напряжение складывается из релаксационного напряжения и упругого напряжения, пропорционального деформации. Механическая модель среды изображается параллельным соединением упругого элемента с нелинейным модулем  $\mu_0 = \mu_{00}(1 + \beta\varepsilon^2)$  и максвелловского вязкоупругого элемента с вязкостью  $\eta_1$  и сдвиговым модулем  $\mu_1 = \eta_1/\tau$ , где  $\tau$  - характерное время релаксации напряжения.

При деформации всей системы на величину  $\varepsilon$  в ней возникает механическое напряжение

$$\sigma = \sigma_\infty + \sigma' . \quad (1)$$

Это напряжение складывается из напряжения пружинки

$$\sigma_\infty = \mu_0 \varepsilon = \mu_{00} (1 + \beta \varepsilon^2) \varepsilon \quad (2)$$

и напряжения максвелловской схемы  $\sigma'$ , для которого можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\sigma'}{\tau} = \frac{\eta_1}{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} . \quad (3)$$

Уравнение движения частиц среды имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y} . \quad (4)$$

Уравнения (2) – (4) должны быть дополнены граничными условиями. Первое условие – заданное значение ускорения нижней пластины резонатора, второе условие определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{y=0} = W_0 \cos \omega t, \quad (5)$$

$$\left( M \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma S \right) \Big|_{y=L} = 0. \quad (6)$$

Получившаяся система соотношений (1), (4) – (6) моделировалась методом конечных разностей на смещённых сетках. Работоспособность написанной численной схемы проверялась путём сравнения результатов расчётов с аналитическим решением для линейного резонатора ( $\beta = 0$ ).

Особенности численного моделирования стоячих волн конечной амплитуды в резонаторе с кубичной нелинейностью методом конечных разностей на смещённых сетках изложены в § 2.3.

В § 2.4 подробно рассмотрен частный случай линейного одномерного резонатора без релаксации. Получено точное аналитическое решение для стоячих волн в таком резонаторе. Точное решение проанализировано для случая малой вязкости. Выведены соотношения, позволяющие представить резонансные частоты в виде ряда в предельных случаях бесконечно малой и бесконечно большой массы.

В § 2.5 описывается экспериментальная установка и методика измерений. Схема установки приведена на рис. 1. Измерения проводились с двумя резонаторами в виде прямоугольных параллелепипедов, изготовленных из полимерного материала пластисола. На верхней грани параллелепипедов закреплялась жёсткая пластина массы  $M$ . Толщина резонаторов была одинаковой и составляла 15 мм. Длина и ширина составляли 67мм и 40 мм (резонатор I), 70мм и 40 мм (резонатор II). Масса верхней пластины была

примерно одинакова: 12 г (резонатор I), 11.55 г (резонатор II).

Время релаксации и сдвиговая вязкость материала резонаторов определялись из зависимости ускорения верхней пластины от частоты, измеренной в линейном режиме в диапазоне 10 – 400 Гц.



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки.

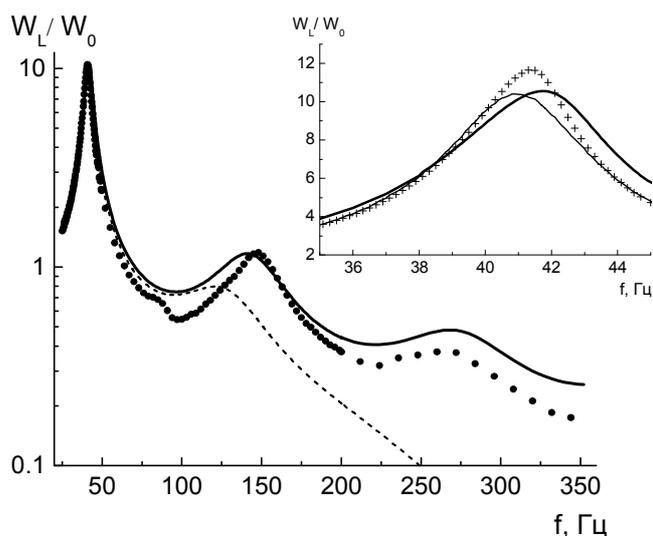
Колебания нижней пластины резонатора возбуждались вибратором Brüel&Kjær 4810. Электрический сигнал на вибратор поступал с генератора сигналов Tektronix 3021B через усилитель мощности MF LV 103. Ускорения нижней и верхней пластин резонатора измерялись миниатюрными одноосными акселерометрами Brüel&Kjær 4374. Масса акселерометров была 1 г, т.е. их влиянием на процесс колебаний резонатора можно было пренебречь. Сигналы акселерометров регистрировались цифровым осциллографом Tektronix 3032B и передавались через GPIB интерфейс в компьютер. Управление экспериментальной установкой и сбор данных осуществлялись с помощью программы, написанной в среде LabView В процессе измерения резонансных кривых ускорение нижней пластины резонатора при каждом значении частоты было одинаковым и составляло  $1 \text{ м/с}^2$ , что соответствовало линейному режиму измерений. Измерения проводились с шагом по частоте 0.1 Гц, что обеспечивало достаточную точность определения вязкоупругих параметров пластисола. Для обеспечения постоянства амплитуды ускорения нижней пластины в указанном частотном диапазоне был использован следующий алгоритм. При заданной частоте на выходе генератора устанавливалось напряжение, при котором амплитуда ускорения нижней пластины была немного меньше необходимого значения. Это напряжение увеличивалось до тех пор, пока амплитуда ускорения не достигала необходимого значения с погрешностью, не превышающей 2%. В течение 2-3 секунд в резонаторе устанавливались стационарные колебания, после чего производилось измерение и запись ускорения верхней пластины резонатора. Затем задавалось следующее значение частоты и измерения повторялись в соответствии с описанным алгоритмом. Описанный алгоритм измерений имеет принципиальное значение при изучении резонансных характеристик в нелинейном режиме, когда требуется обеспечить постоянство внешнего воздействия на резонатор. Однако в нелинейном режиме профиль ускорения нижней пластины искажается за счёт генерации в резонаторе высших гармоник. Поэтому в нелинейном режиме поддерживалась постоянная амплитуда ускорения на основной частоте, что потребовало модификации описанного выше алгоритма измерения резонансных характеристик. Для каждого заданного значения частоты записывалась реализация, содержащая около 50 периодов колебаний ускорения нижней пластины, и производилось вычисление амплитуды основной гармоники методом БПФ. Затем регулировкой выходного напряжения задающего генератора подбирались такие

ускорение нижней пластины, при котором достигался заданный уровень амплитуды на основной частоте с погрешностью, не превышающей 3%.

В § 2.6 приведены результаты экспериментальных исследований резонатора в линейном режиме. Показана возможность измерения модуля сдвига материала в резонаторе путём измерения первой резонансной частоты при различных массах верхней пластины. Теоретически показано, что с увеличением массы верхней пластины частота первого резонанса медленно уменьшается, частоты второго и третьего резонансов стремятся соответственно к удвоенной и учетверённой частотам первого резонанса.

В § 2.7 описан метод определения времени релаксации и вязкости из сравнения измеренных резонансных кривых с расчётными на нескольких резонансных частотах. Приведены результаты измерения времени релаксации.

Результаты измерений в резонаторе с кубической нелинейностью при конечных амплитудах приведены в § 2.8. На рис. 2 показаны резонансные

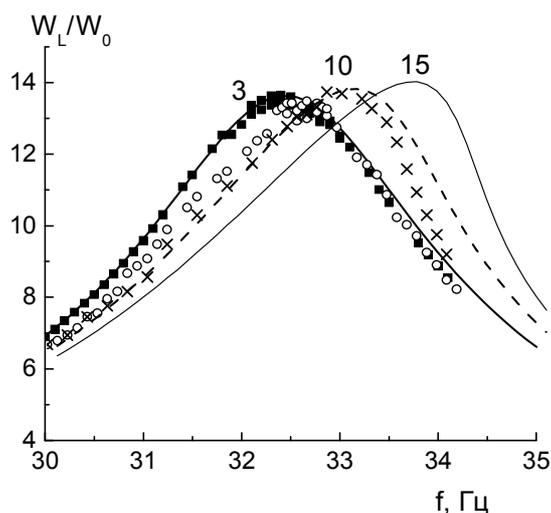


**Рис. 2.** Резонансные кривые, полученные для резонатора I.

области первого резонанса при амплитуде ускорения нижней границы резонатора  $W_0=15 \text{ м/с}^2$ . Символы соответствуют измеренным значениям, результаты расчёта показаны сплошной жирной линией. Тонкой линией показан расчёт для линейных колебаний ( $W_0=1 \text{ м/с}^2$ ).

На рис. 3 показаны резонансные кривые вблизи первой резонансной частоты, полученные для резонатора II при разных значениях амплитуды ускорения нижней пластины  $W_0$ . Результаты измерений показаны символами (■ –  $W_0=3 \text{ м/с}^2$ , ○ –  $W_0=10 \text{ м/с}^2$ , х –  $W_0=15 \text{ м/с}^2$ ), расчетные зависимости –

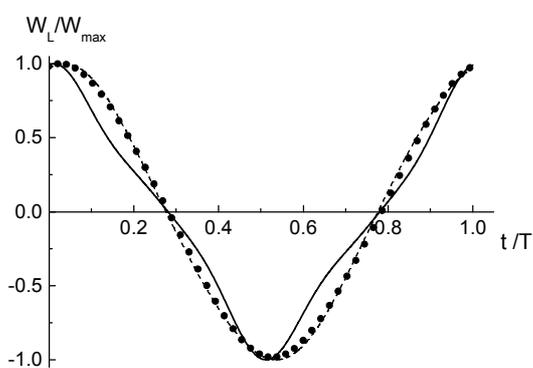
линиями. Числа у кривых соответствуют амплитуде  $W_0$  в  $\text{м/с}^2$ . В области бистабильности время установления стационарного режима колебаний может



**Рис. 3.** Резонансные кривые, полученные для резонатора II.

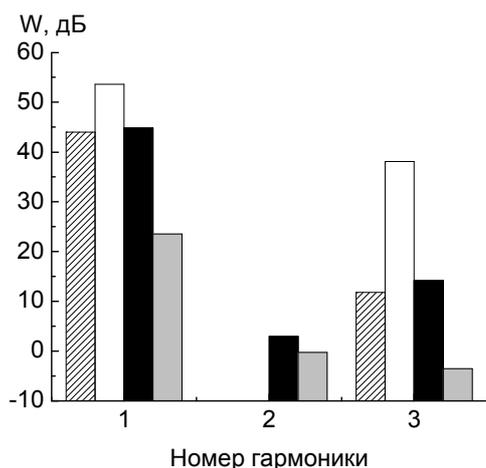
колебаний не зависит от амплитуды и составляет около десяти периодов на частотах вблизи резонанса (32 – 34 Гц). При амплитудах  $20 \text{ м/с}^2$  и  $25 \text{ м/с}^2$  время установления стационарного режима увеличивается, при этом его значение зависит от частоты. На резонансной частоте при амплитуде ускорения нижней пластины  $W_0=25 \text{ м/с}^2$  стационарный режим устанавливается за 15 периодов. В области бистабильности на установления стационарного режима при указанной амплитуде  $W_0$  затрачивается больше времени. Дольше всего (120 периодов) стационарный режим устанавливается на частоте 35.5 Гц, соответствующей середине области бистабильности. На частоте 35.7 Гц время установления стационарного режима уже в три раза меньше и составляет около 1 с (40 периодов).

значительно превосходить характерные времена в режиме линейных колебаний. Были рассчитаны профили ускорения вблизи резонансной частоты в течение 30 с после включения постоянного по амплитуде ускорения на нижней пластине резонатора II. Расчёт проводился при различных амплитудах ускорения нижней пластины. При амплитудах ускорения менее  $15 \text{ м/с}^2$  время установления



**Рис. 4.** Профиль ускорения верхней пластины резонатора.

Временной профиль ускорения верхней пластины резонатора I на резонансной частоте при  $W_0=15 \text{ м/с}^2$  приведён на рис. 4. Измеренный и рассчитанный профили показаны точками и штриховой линией соответственно. Сплошной линией показан рассчитанный профиль для резонатора с коэффициентом сдвиговой вязкости  $\eta=1.6 \text{ Па}\cdot\text{с}$ .



**Рис. 5.** Спектр ускорения верхней пластины резонатора.

коэффициентами сдвиговой вязкости  $\eta=4.7$  Па·с и  $\eta=1.6$  Па·с соответственно. В § 2.9 обсуждаются основные результаты, а в § 2.10 представлены выводы Главы 2.

**Третья глава** посвящена исследованию стоячих сдвиговых волн в неоднородном резонаторе. При проведении измерений мы всегда имеем дело с резонаторами конечных размеров, поэтому было важно определить область применимости одномерной модели. Вычисления стоячих волн в резонаторе конечных размеров выполнялись с использованием метода конечных элементов (МКЭ), который был модифицирован для случая несжимаемых сред. Модификация заключалась в снятии ограничения на сохранение объёма отдельно взятого конечного элемента при его деформации. Эффективность модифицированного метода конечных элементов продемонстрирована на примере расчёта резонансных кривых резонатора неправильной формы.

В § 3.1 представлен обзор литературы по проблеме исследования реальных объектов, которая подразумевает учёт конечных размеров этих объектов и наличия в них локальных структурных неоднородностей. Отмечено, что для решения этой проблемы применяется метод конечных элементов (МКЭ), модифицированный в данной работе для несжимаемых резиноподобных сред.

В § 3.2 приведена модель резонатора, основанная на МКЭ и изложены основные особенности применения МКЭ для описания несжимаемой резиноподобной среды. Пусть  $x_i$  обозначает координаты частиц резонатора до деформации,  $u_i$  – смещение частиц в результате деформации. В линейном приближении деформации описываются тензором  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ , где  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,

На рис. 5 приведены первые три гармоники ускорения верхней пластины резонатора I при амплитуде ускорения нижней пластины  $15 \text{ м/с}^2$  на резонансной частоте. Чёрным и серым цветом показаны гармоники измеренных ускорений верхней ( $W_L$ ) и нижней ( $W_0$ ) пластин резонатора, Заштрихованный столбец и столбец белого цвета соответствуют гармоникам ускорения  $W_L$ , рассчитанным для резонаторов с

$i, j=1, 2, 3$ . Внутренние напряжения, возникающие при деформации, описываются тензором  $\sigma_{ij}$ . Уравнение движения запишется в виде:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + b_i, \quad (7)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $b_i$  – внешняя объёмная сила. Связь между напряжением и деформацией зададим в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (8)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $\eta$  – коэффициент сдвиговой вязкости. Разобьём границу параллелепипеда  $\Gamma$  на два непересекающихся участка  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_t$ . Участок  $\Gamma_u$  соответствует нижней границе, которая закреплена на пластине, а участок  $\Gamma_t$  – остальной границе. Пусть на участке  $\Gamma_u$  заданы смещения точек  $\hat{u}_i$ , а на участке  $\Gamma_t$  задано внешнее поверхностное напряжение  $\hat{t}_i$ . Тогда граничные условия будут иметь вид:

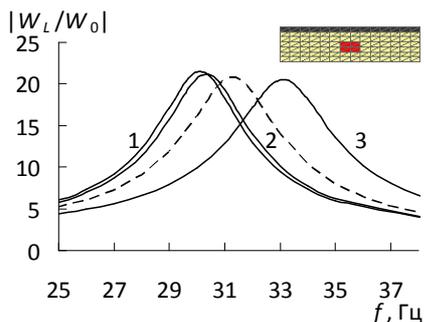
$$u_i|_{\Gamma_u} = \hat{u}_i = A \sin 2\pi f t, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} n_j|_{\Gamma_t} = \hat{t}_i = 0, \quad (10)$$

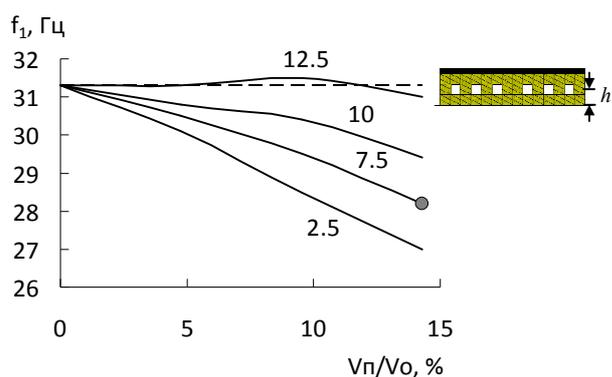
где  $f$  – частота колебаний. Модификация стандартного МКЭ заключалась в снятии ограничения на сохранение объёма отдельно взятого конечного элемента при его деформации. Вместо этого требовалось, чтобы объём сохранялся у группы конечных элементов. Это позволило обойти проблему объёмной блокировки. Тестирование реализованного алгоритма вычислений производилось по соответствию результатов, полученных МКЭ с аналитическими результатами для резонатора в виде слоя и экспериментальными данными.

В § 3.3 было показано, что если толщина однородного резонатора в четыре и более раз меньше его длины, то его резонансная частота отличается не более чем на 4% от значения, рассчитанного с использованием одномерной модели, что можно условно считать границей применимости одномерной модели.

В § 3.4 изложен алгоритм определения размера и положения неоднородностей по модулю сдвига по измерению сдвига резонансной частоты. На рис. 6 показаны рассчитанные МКЭ резонансные кривые для резонатора с неоднородным включением (сплошные линии) и однородного резонатора (пунктирная линия). 1 – полость, заполненная жидкостью, 2 – пустая полость, 3



**Рис. 6.** Резонансные кривые для резонатора с неоднородным включением.

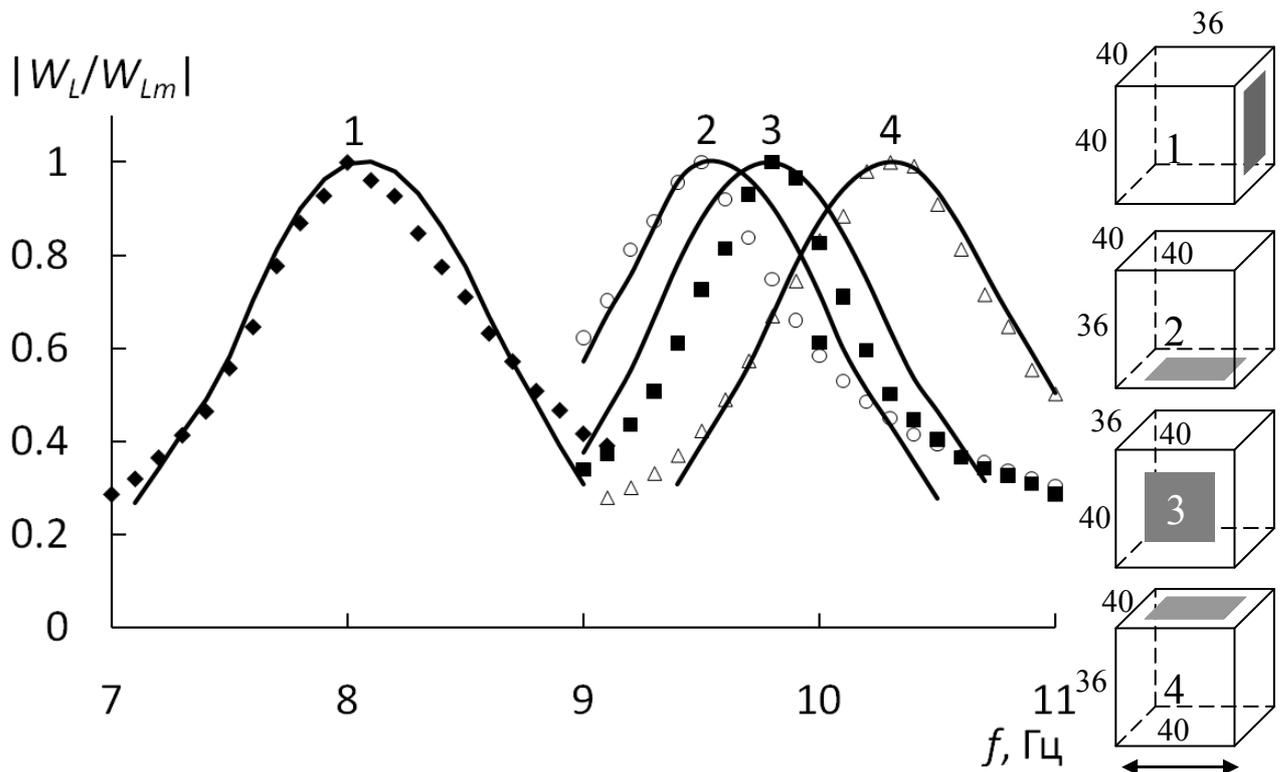


**Рис. 7.** Резонансные кривые для резонатора с горизонтальным рядом пустых полостей.

– жёсткое включение с модулем сдвига, в 10 раз превышающим модуль сдвига тела резонатора. Рассчитанные зависимости первой резонансной частоты в резонаторе с неоднородностями в виде горизонтального ряда пустых полостей от их относительного объёма показаны на рис. 7. Цифры у кривых соответствуют высоте положения центров полостей  $h$  в мм. Пунктиром показана первая резонансная частота в однородном резонаторе (31.3 Гц), кружком – измеренная частота в резонаторе с шестью полостями ( $V_n/V_o=14.28\%$ ), расположенными на высоте  $h=7.5$  мм. Оказалось, что жёсткие включения повышают, а полости, заполненные жидкостью,

снижают резонансные частоты. Пустые полости могут как снижать, так и повышать резонансную частоту в зависимости от их положения и относительного объёма. Если полость находится в области больших сдвиговых деформаций, то её присутствие снижает резонансную частоту, поскольку снижается эффективная упругость резонатора. В области малых деформаций снижение упругости уже несущественно, и больше влияет снижение погонной массы в области расположения неоднородности, что приводит к росту резонансной частоты.

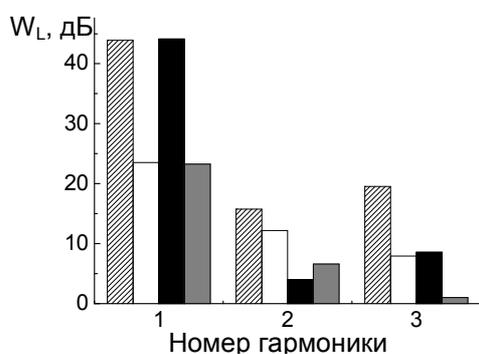
В § 3.5 проводится исследование резонатора неправильной формы. Рассмотрен резонатор в форме параллелепипеда с впадиной примерно конической формы на одной из его граней. Профиль впадины был измерен в нескольких сечениях. При расчётах всем конечным элементам в области впадины приписывались нулевые значения модуля сдвига и плотности. По объёму (7.1%) впадина, использованная при расчётах, примерно соответствовала реальной впадине.



**Рис. 8.** Резонансные кривые для резонатора с впадиной на одной из граней.

Резонансные кривые, полученные для резонатора в виде прямоугольного параллелепипеда с впадиной на одной из граней, показаны на рис. 8. Цифры у кривых соответствуют различной ориентации грани с впадиной, отмеченной серым цветом, по отношению к направлению колебаний, показанному стрелками. Результаты расчёта показаны сплошными линиями, экспериментальные данные – символами. Числами у рёбер указаны их длины в мм.

В § 3.6 отмечено, что наличие полостей в области больших деформаций приводит к локальному возрастанию деформаций резиноподобного материала в промежутках между полостями. Это, в свою очередь, может привести к росту



**Рис. 9.** Спектры ускорения границ резонатора.

нелинейных эффектов в таком резонаторе при достаточно больших колебаниях. Первые три гармоники в измеренных профилях ускорения верхней и нижней границ резонатора показаны на рис. 9. Заштрихованными столбиками показан гармонический состав профиля верхней границы, прозрачными – нижней границы резонатора с отверстиями внизу. Чёрными столбиками показан гармонический состав

профиля верхней границы, серыми – нижней границы резонатора с отверстиями вверху. Видно, что уровень 3-й гармоники выше в резонаторе с отверстиями внизу. Наличие в спектре других гармоник (прежде всего, 2-й) связано с тем, что при проведении измерений возбуждение производится маломощным вибратором и становится нелинейным при больших амплитудах ускорения нижней пластины. В § 3.7 обсуждаются основные результаты, в § 3.8 сделаны выводы по Главе 3.

**В четвёртой главе** рассмотрен частный случай неоднородной среды, важный для диагностики – слоистая структура. Рассматривается общий случай структуры, состоящей из  $N$  плоскопараллельных слоёв. Предложенная модель такой структуры применяется для расчёта резонаторов с непрерывным распределением упругого параметра вдоль одного направления. Показано, что модель линейной слоистой структуры может быть использована также для моделирования некоторых нелинейных эффектов в резонаторе. Кроме того, в данной главе для двухслойной структуры решается обратная задача нахождения сдвигового модуля упругости одного из слоёв.

В § 4.1 приведён обзор литературы по существующим моделям мягких биологических тканей с упругими неоднородностями. Отмечается, что слоистые среды с плоскими границами раздела, в которых модуль сдвига изменяется скачком при переходе из слоя в слой, являются простыми моделями мягких биологических тканей, где волновые процессы описываются одномерными уравнениями. Например, среда с непрерывным распределением модуля сдвига может быть представлена набором слоёв, где модуль меняется дискретно с достаточно малым шагом, чтобы обеспечить необходимую точность расчётов волновых процессов.

В § 4.2 излагается модель, с помощью которой описаны стоячие сдвиговые волны в резонаторе с  $N$ -слойной структурой. В линейном приближении и без учёта релаксации упругие процессы в каждом слое описываются уравнением движения и законом Гука:

$$\rho_n \frac{\partial^2 u_x^{(n)}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}^{(n)}}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\sigma_{xy}^{(n)} = \mu_n \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial y} + \eta_n \frac{\partial^2 u_x^{(n)}}{\partial y \partial t}. \quad (12)$$

Здесь  $u_x^{(n)}$  – смещение частицы вдоль оси  $x$ ,  $\sigma_{xy}^{(n)} = F_x^{(n)} / S$  – компонента тензора напряжений,  $F_x^{(n)}$  – компонента силы вдоль оси  $x$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  – номер слоя.

На границах соседних слоёв с координатами  $y_n = \sum_{j=1}^n L_j$  ( $n = 1, 2, \dots, N-1$ ) должны быть выполнены условия неразрывности среды и равенства механических напряжений:

$$u_x^{(n)}(y_n, t) = u_x^{(n+1)}(y_n, t), \quad (13)$$

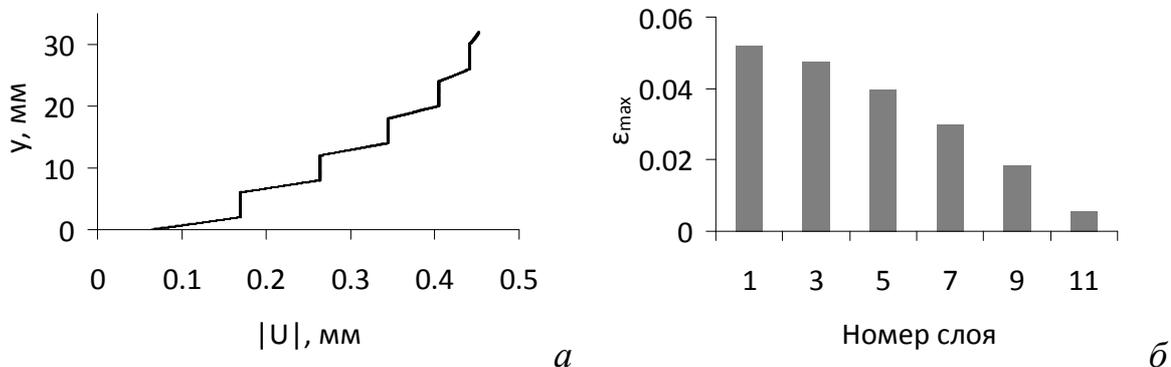
$$\mu_n \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial y}(y_n, t) + \eta_n \frac{\partial^2 u_x^{(n)}}{\partial y \partial t}(y_n, t) = \mu_{n+1} \frac{\partial u_x^{(n+1)}}{\partial y}(y_n, t) + \eta_{n+1} \frac{\partial^2 u_x^{(n+1)}}{\partial y \partial t}(y_n, t). \quad (14)$$

Кроме того, на верхней и нижней границах резонатора должны выполняться два дополнительных условия. Первое условие – заданное значение ускорения нижней пластины, второе условие определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left. \frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial t^2} \right|_{y=0} = w_x|_{y=0}, \quad (15)$$

$$M \left. \frac{\partial^2 u_x^{(N)}}{\partial t^2} \right|_{y=L} = -\sigma_{xy}^{(N)}|_{y=L} \cdot S. \quad (16)$$

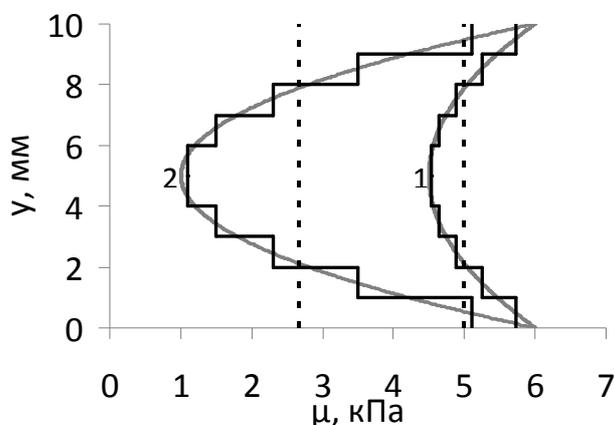
В § 4.3 в качестве примера слоистых структур с локально большими деформациями рассмотрена структура, в которой чередуются мягкие и твёрдые слои. Слои с нечётными номерами выполнены из резиноподобного материала, сдвиговой модуль которого на несколько порядков меньше модуля объёмного сжатия. Слои с чётными номерами выполнены из обычного твёрдого материала, в котором величины сдвиговой и объёмной упругости одного порядка. Для определения сдвиговых деформаций в различных слоях пластисола был рассчитан профиль амплитуды поперечного смещения частиц в стоячей волне  $U(y)$  на первой резонансной частоте. На рис. 9,а показан профиль



**Рис. 9.** Профиль смещения частиц (а) и распределение деформации по слоям (б).

амплитуды смещения частиц в стоячей волне на первой резонансной частоте 44.5 Гц при амплитуде ускорения нижней пластины  $W_0 = 5 \text{ м/с}^2$  в момент времени, соответствующий максимальному смещению верхней границы резонатора. Наклонные участки профиля соответствуют смещениям частиц в мягких слоях пластисола. Дюралюминиевые пластины смещаются целиком, без деформации, что показано вертикальными отрезками прямых на волновом профиле. Распределение относительной деформации по слоям пластисола приведено на рис. 9,б. Деформация максимальна в нижних слоях и уменьшается при приближении к верхней границе. Значение деформации в нижнем слое пластисола ( $n=1$ ) составляет 0.052, что более чем в 4 раза превышает деформацию, усреднённую по всей толщине структуры.

В § 4.4 модель слоистой среды используется для расчёта резонаторов, в которых сдвиговый модуль меняется известным образом вдоль одной координаты. Рассмотрены два резонатора толщиной 10 мм, в которых модуль сдвига зависит от глубины по квадратичному закону и имеет минимум на половине толщины (рис. 10). Модуль сдвига на поверхности обоих резонаторов одинаковый и равен 6 кПа, минимальные значения в первом и втором резонаторах равны соответственно 4.5 и 1.0 кПа. Для расчёта резонансных



**Рис. 10.** Распределения модуля сдвига по толщине резонаторов.

кривых резонаторов с указанными образцами они разбивались на 10 слоёв одинаковой толщины 1 мм с постоянным значением модуля сдвига в каждом слое. Значение сдвигового модуля в слое определялось из исходного распределения в середине этого слоя. Полученные распределения показаны на рис. 10 сплошными линиями чёрного цвета. В двух центральных слоях около вершин парабол были заданы одинаковые значения модуля сдвига.

**Таблица 1.** Значения первой резонансной частоты для резонаторов 1 и 2.

Образец	$f_{10}$ , Гц	$f_{1L}$ , Гц	$f_{\text{eff}}$ , Гц
1	43.6	43.6	43.8
2	26.8	27.3	32

Значения первой резонансной частоты для резонаторов 1 и 2 приведены в таблице 1. Частота  $f_{10}$  соответствует точному решению,  $f_{1L}$  рассчитана для 10

слоёв,  $f_{1\text{eff}}$  соответствует однородным образцам с эффективным сдвиговым

$$\text{модулем } \mu_{\text{eff}} = \frac{\int_0^L \mu(y) dy}{L}.$$

В § 4.5 модель слоистой среды используется для расчёта зависимости резонансной частоты от амплитуды ускорения нижней пластины однородного резонатора. Амплитуда смещения частиц в резонаторе зависит от координаты  $y$  нелинейным образом, что приводит к нелинейной зависимости механической деформации  $\varepsilon(y) = \frac{dU(y)}{dy}$ . Больше всего деформируется часть резонатора от его середины до нижнего основания, в то время как вблизи верхнего и нижнего оснований резонатор оказывается практически недеформированным. В областях, где деформации велики, происходит эффективное «ужесточение», что должно приводить к увеличению резонансной частоты. Для расчёта этого эффекта производилось разбиение резонатора на слои, при этом их толщина зависела от величины градиента сдвигового модуля на данной глубине.

В § 4.6 изложен метод измерения сдвигового модуля одного из слоёв в двухслойной структуре. Расчёты проводились для резонатора со структурой, в которой сдвиговой модуль более жёсткого слоя был известен и составлял 6.0 кПа. Сдвиговой модуль второго слоя был примерно в 2 раза меньше первого, однако его точное значение считалось неизвестным. Коэффициент сдвиговой вязкости был одинаков в обоих слоях и составлял 3.5 Па·с. Для обозначения параметров слоёв с известным и неизвестным сдвиговыми модулями будем использовать индексы «0» и «x» соответственно. Двухслойная структура имела форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами 39 и 70 мм и толщиной 26 мм. При расчётах резонансных кривых предполагалось, что на верхней границе структуры находится твёрдая пластина массой 3 г, что соответствовало экспериментальным условиям. По измеренному значению первой резонансной частоты можно определить значение неизвестного сдвигового модуля. Для данной структуры значение составило 3.5 кПа, что совпало с величиной, полученной по измерениям статическим методом. В § 4.7 обсуждаются полученные результаты. В § 4.8 содержатся выводы Главы 4.

В **Заключении** сформулированы основные результаты и выводы работы:

1. Теоретически и экспериментально показано, что форма резонансной кривой в резонаторе в виде слоя однородного резиноподобного материала, нагруженного пластиной конечной массы, искажается с ростом амплитуды колебаний. Форма резонансной кривой становится несимметричной, а

- резонансная частота увеличивается. При определённой амплитуде колебаний возникает область бистабильности, ширина которой растёт с увеличением амплитуды колебаний. Время установления колебаний на частотах в области бистабильности увеличивается более чем на порядок.
2. Предложен новый метод определения динамического нелинейного параметра резиноподобных материалов в области низких частот, основанный на измерении зависимости сдвига резонансной частоты от амплитуды колебаний. Показано, что динамический нелинейный параметр почти вдвое меньше, чем измеренный статическим методом.
  3. Нелинейное искажение профиля стоячей волны сопровождается генерацией нечётных гармоник. Амплитуда третьей гармоники растёт с уменьшением коэффициента сдвиговой вязкости. Экспериментально показано, что амплитуда третьей гармоники в резонаторе зависит от амплитуды первой гармоники по степенному закону, при этом показатель степени уменьшается от трёх до двух по мере роста колебаний в резонаторе.
  4. Предложен новый метод измерения вязкоупругих модулей резиноподобных материалов. Метод основан на сравнении измеренных и рассчитанных резонансных кривых в диапазоне частот 10 – 400 Гц. При этом для увеличения точности и достоверности получаемых значений варьируется масса пластины, расположенной на верхней границе резонатора. Изменение массы пластины приводит к плавному изменению резонансных частот, что обеспечивает увеличение точности измерений. Показано, что используемый в работе резиноподобный полимер пластисол описывается моделью вязкоупругой среды с одним временем релаксации, значение которого составляет около одной миллисекунды и зависит от композиции и способа приготовления полимера.
  5. Теоретически и экспериментально продемонстрировано, что наличие в резонаторе неоднородностей в виде полостей влияет на его нелинейные свойства. Нелинейные свойства выражены сильнее, если полости находятся в области с большой деформацией.
  6. Показано, что жёсткие включения повышают, а полости, заполненные жидкостью, снижают резонансные частоты. Пустые полости могут как снижать, так и повышать резонансную частоту в зависимости от их положения и относительного объёма. Теоретически и экспериментально показано, что наличие полостей в области больших сдвиговых деформаций снижает резонансную частоту, поскольку снижается эффективная упругость резонатора, а при наличии полостей в области малых деформаций снижение

упругости несущественно, и больше влияет снижение погонной массы в области расположения неоднородности, что приводит к росту резонансной частоты.

7. Показано, что использование структуры, в которой чередуются твёрдые дюралюминиевые пластины и тонкие слои пластисола, позволяет создать в отдельных слоях полимера локальные сдвиговые деформации, в несколько раз превышающие значения, усреднённые по структуре. В таких слоях возможно проявление нелинейных свойств резиноподобного материала уже при относительно небольших амплитудах колебаний всей структуры. Подбором слоёв с различной сдвиговой упругостью можно управлять резонансными частотами получаемой слоистой структуры.
8. В двухслойной структуре решена задача однозначного определения сдвигового модуля одного из слоёв по измеренным значениям первой резонансной частоты. При этом предполагается, что упругость второго слоя известна.

#### **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**

1. *Андреев В.Г., Крит Т.Б., Костиков В.В., Шанин А.В., Шиндерук С.И.* Стоячие сдвиговые волны в резонаторе с неоднородной резиноподобной средой // Акуст. журн. 2011. Т.57. №1. С. 3-12.
2. *Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А.* Стоячие сдвиговые волны в слоистых резиноподобных средах // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 5. С. 579-586.
3. *Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А.* Стоячие волны в упругом слое, нагруженном конечной массой // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 190-196.
4. *Андреев В.Г., Крит Т.Б., Сапожников О.А.* Сдвиговые волны в резонаторе с кубичной нелинейностью // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. В печати.
5. *Крит Т.Б., Андреев В.Г., Шанин А.В., Шиндерук С.И.* Стоячие сдвиговые волны в резонаторе с неоднородной резиноподобной средой // Тезисы докладов XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» 24-29 мая 2010, Звенигород. Секция 1. Акустические волны. С. 33-37. CD.
6. *Крит Т.Б., Сапожников О.А., Андреев В.Г.* Стоячие сдвиговые волны в слое кубично нелинейной среды, нагруженном конечной массой // Сборник трудов XXII сессии Российского акустического общества. Т.1. – М.: ГЕОС, 2010. С. 167-171.
7. *Крит Т.Б., Аверина А.С., Сапожников О.А., Андреев В.Г.* Сдвиговые колебания слоя резиноподобного полимера, нагруженного пластиной конечной

массы // Сборник трудов XIX сессии Российского акустического общества. Т. I. – М.: ГЕОС, 2007. С. 239-242.

8. *Крит Т.Б.* Создание нового материала с уникальными упругими характеристиками // Тезисы докладов XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» 24-29 мая 2010, Звенигород. Секция 1. Акустические волны. С. 31-32. CD.

9. *Костиков В.В., Крит Т.Б.* Экспериментальное исследование сдвиговых волн в резонаторе со слоистой структурой // Материалы Международного молодёжного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2010» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылёв, А.И. Андреев, А.В. Андриянов. — М.: МАКС Пресс, 2010. Секция «Физика». Т. 1. С. 218-220.

10. *Крит Т.Б.* Моделирование стоячих сдвиговых волн в резиноподобной среде с неоднородностями методом конечных элементов // Материалы Международного молодёжного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2010» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылёв, А.И. Андреев, А.В. Андриянов. — М.: МАКС Пресс, 2010. Секция «Физика». Т. 1. С. 221-223.

11. *Крит Т.Б., Костиков В.В., Андреев В.Г.* Измерение сдвиговой упругости мягких тканей интерференционным методом // Сборник тезисов научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные аспекты инновационных проектов Физического факультета МГУ». 18-19 ноября 2009 г. С. 75-76.

12. *Крит Т.Б., Костиков В.В., Андреев В.Г.* Измерение сдвиговой упругости мягких тканей интерференционным методом // Сборник докладов молодёжного форума «Фундаментальные и прикладные аспекты инновационных проектов Физического факультета МГУ». 18 ноября 2009 г. С. 89-98.

13. *Крит Т.Б.* Определение модуля сдвига резиноподобного полимера методом составного интерферометра // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылёв, А.И. Андреев. [Электронный ресурс] — М.: Издательство МГУ, 2009. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. - Систем. требования: ПК с процессором 486 +; Windows 95; дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader. [Адрес ресурса в сети интернет: <http://www.lomonosov-msu.ru/2009/>]. Секция «Физика». Подсекция «Медицинская физика». С. 3.

14. *Крит Т.Б., Андреев В.Г.* Измерение нелинейного сдвигового модуля резиноподобной среды методом деформации слоя фиксированной толщины // Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» 26-31 мая 2008, Звенигород. Часть 1. С.27.

15. *Аверина А.С., Крит Т.Б., Андреев В.Г.* Измерение нелинейного сдвигового модуля резиноподобного полимера методом статической нагрузки // Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылёв. [Электронный ресурс] — М.: Издательский центр Факультета журналистики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. - Систем. требования: ПК с процессором 486 +; Windows 95; дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader. Секция «Химия».
16. *Крит Т.Б., Цысарь С.А., Андреев В.Г.* Измерение сдвигового модуля упругости резиноподобного полимера методом крутильных колебаний // Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» 22-27 мая 2006, Звенигород. Секция 7. С.49.
17. *Цысарь С.А., Бобкова С.М., Крит Т.Б., Хохлова В.А., Андреев В.Г.* Измерение распределения температуры в фокальной области ультразвукового излучателя в фантомах биологической ткани // Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» 22-27 мая 2006, Звенигород. Секция 7. С.66.
18. *Бобкова С.М., Крит Т.Б., Цысарь С.А., Андреев В.Г.* Дистанционное измерение температуры в фокальной области ультразвукового терапевтического излучателя // Двенадцатая Междунар. Науч.-техн. Конф. студентов и аспирантов: Тез. Докл. В 3-х т. — М.: МЭИ, 2006. Т. 1. С.318-319.