

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет

На правах рукописи
УДК 534.26; 517.958

Валяев Валерий Юрьевич

**Экспериментальное и теоретическое
исследование дифракции акустических волн на
конусах специального вида и препятствиях
типа полосы**

Специальность: 01.04.06 – акустика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА – 2012

Работа выполнена на кафедре акустики физического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент Шанин Андрей Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Бобровницкий Юрий Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор Делицын Андрей Леонидович

Ведущая организация: Институт проблем машиноведения РАН

Защита состоится «16» февраля в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.67 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, физический факультет, физическая аудитория имени академика Р.В. Хохлова.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан « » января 2012 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета Д 501.001.67
кандидат физико-математических наук

А.Ф. Королев

Общая характеристика работы

Цели и задачи работы. В данной работе рассмотрены некоторые скалярные (акустические) задачи дифракции, а именно двумерные задачи о дифракции плоской волны на одной полосе, на двух полосах и на полубесконечном экране со щелью, а также трехмерные задачи дифракции на четверти плоскости и на трехгранном конусе, представляющем собой угол куба (рис. 1).

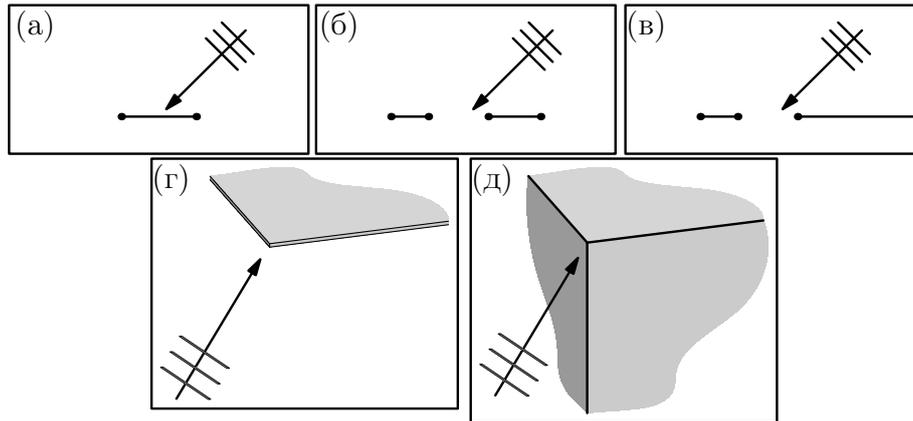


Рис. 1. Рассмотренные задачи дифракции: (а) на полосе, (б) на двух полосах, (в) на полубесконечном экране со щелью, (г) на четверти плоскости, (д) на трехгранном конусе.

В недавних работах [1, 2] были получены новые аналитические соотношения для волновых полей в рассматриваемых задачах. Эти результаты, помимо фундаментального значения, представляют интерес тем, что потенциально могут быть положены в основу эффективных численных методов. Однако связь между новыми соотношениями и численными методами оказывается нетривиальной. Данная работа ставит одной из своих целей отчасти заполнить этот пробел.

Основным результатом работы [1] и ее обобщений для некоторых двумерных задач дифракции является метод спектрального уравнения. Этот метод заключается в том, что после ряда упрощений исходная дифракционная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (спектральному уравнению) для диаграмм направленности волновых полей. Процедуры численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений весьма эффективны. Сложность состоит в том, что коэффициенты спектрального уравнения содержат нескольких параметров, значения которых неизвестны. Эти параметры находятся численно с помощью физически обусловленных ограничений, накладываемых на поведение решений уравнения в особых точках. Целью данной работы является разработка численных алгоритмов поиска коэффициентов спектрального уравнения и вычисления диаграмм направленности волновых полей.

Задачи дифракции на конусах в настоящее время являются активно развивающейся областью теории дифракции. Основная цель при решении конической задачи — отыскание дифракционного коэффициента (амплитуды рассеяния), т.е. зависимости амплитуды сферической волны, рассеянной вершиной конуса, от направлений падения и рассеяния. Современный общий подход к решению конических задач был развит в работе [3]. Этот подход основан на разделении переменных в конической области на радиальную и угловую составляющие. Радиальная составляющая решения удовлетворяет уравнению Бесселя, а угловая составляющая удовлетворяет уравнению Гельмгольца на части единичной сферы, высекаемой дополнением конуса-рассеивателя с вершиной в центре сферы до всего трехмерного пространства (рис. 2).

В результате дифракционный коэффициент выражается в виде интеграла по параметру разделения переменных. Подынтегральное выражение включает в себя сферическую функцию Грина уравнения Гельмгольца, которая вычисляется как решение граничного интегрального уравнения.

Данный подход является универсальным, однако он обладает существенным недостатком. Дифракционный коэффициент зависит от пары направлений: направления падения и направления рассеяния. Среди таких пар направлений можно выделить область, традиционно называемую «оазисом», такую, что в соответствующем направлении рассеяния в рассеянном поле присутствует только сферическая волна. В направлениях рассеяния, не принадлежащих оазису, могут присутствовать также плоская отраженная волна и цилиндрические волны, рассеянные ребрами. В пределах оазиса интегральное представление, полученное в [3], обладает экспоненциальной сходимостью. Вне оазиса интеграл расходится. Расходящийся интеграл может быть регуляризован и вычислен с помощью предельной процедуры [4], однако соответствующие вычисления весьма громоздки.

В работе [2] была предложена модификация этого метода для задачи о дифракции на четверти плоскости. В рамках этой модификации были получены новые интегральные представления дифракционного коэффициента двух типов. Представления первого типа, названные трехмерными формулами расщепления, выражают дифракционный коэффициент в виде интегралов по ребрам рассеивателя от комбинации диаграмм направленности трехмерных краевых функций Грина — функций Грина, соответствующих источнику, расположенному в некоторой точке на ребре рассеивателя. С помощью трехмерных формул расщепления были обоснованы интегральные представ-

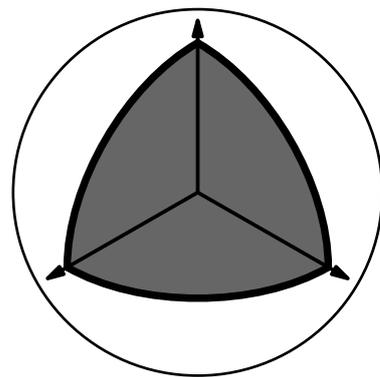


Рис. 2. Геометрия сферической задачи, соответствующей дифракции на трехгранном конусе. Уравнение Гельмгольца решается на части сферы, показанной белым.

ления того же типа, что и представление из работы [3]. При этом удалось существенно расширить область экспоненциальной сходимости интегрального представления дифракционного коэффициента путем исключения плоской отраженной волны и цилиндрических волн, образующихся при дифракции падающей волны на ребрах рассеивателя.

Одной из целей данной диссертационной работы является дальнейшее развитие методов вычисления дифракционных коэффициентов при дифракции на конусах. Развитие происходило в следующих направлениях.

Были исследованы важные свойства модифицированного преобразования Конторовича–Лебедева. Данное преобразование представляет собой форму, в которой дифракционный коэффициент представляется, например, в [3]. От обычного преобразования Конторовича–Лебедева модифицированное преобразование отличается контуром интегрирования. Для модифицированного преобразования построены аналоги формулы Планшереля и теоремы о свертке. Полученные свойства позволяют искать дифракционный коэффициент в конической области в виде однократного контурного интеграла.

Были найдены важные свойства различных решений уравнения Гельмгольца на единичной сфере. А именно, были получены важные тождества, связывающие между собой собственные функции сферической задачи, двумерные сферические краевые функции Грина и сферическую функцию Грина. Эти тождества были названы сферическими формулами расщепления. Двумерной сферической краевой функцией Грина называется сферическая функция Грина с источником, находящимся в вершине рассеивателя. Рассеивателем в данном случае является разрез (для дифракции на четверти плоскости) или недостающая треугольная часть сферы (для дифракции на угле куба). Полученные соотношения позволяют непосредственно осуществлять преобразования интегральной формулы из [3].

Были построены новые интегральные представления дифракционного коэффициента для задачи о дифракции на трехгранном конусе, занимающем $1/8$ пространства (на угле куба).

В работе [2] было указано, что расходящиеся интегралы в трехмерных формулах расщепления (представлениях дифракционного коэффициента через диаграммы направленности трехмерных краевых функций Грина) требуют регуляризации. При этом способ регуляризации построен не был. В настоящей работе строится физически обоснованный способ регуляризации данных интегральных представлений.

При решении сложных задач достоверность теоретического исследования часто подтверждается экспериментальными измерениями. Экспериментальные исследования задач дифракции на конусах в акустическом случае сопряжены с рядом трудностей. Амплитуда рассеянной вершиной конуса сферической волны мала по сравнению с амплитудой падающей волны. Из-за

этого для измерения дифракционного коэффициента необходима методика, обеспечивающая хорошее отношение сигнал/шум. Для этого можно использовать метод М-последовательностей (MLS). Он давно и успешно применяется к изучению акустики помещений, однако его использование для исследования дифракционных задач представлено в литературе крайне слабо. Этот метод позволяет измерять импульсные отклики линейных стационарных систем. В случае акустических измерений система включает в себя неидеальные излучающий и приемный тракты, влияние которых требуется учитывать. Одной из целей данной работы является усовершенствование метода М-последовательностей, позволяющее выделять часть импульсного отклика, связанного только с дифракционным процессом, а также измерение дифракционного коэффициента трехгранного конуса.

Кратко сформулируем основные цели работы:

1. Разработать численные алгоритмы решения двумерных задач дифракции акустических волн на полосе, двух полосах и полубесконечном экране со целью методом спектрального уравнения. Проанализировать их точность и эффективность.
2. Построить технику конструктивного преобразования трехмерных формул расщепления в однократные контурные интегралы по параметру разделения переменных.
3. Найти связь между новыми выражениями дифракционного коэффициента четверти плоскости в виде контурных интегралов и общей формулой для конических задач дифракции акустических волн.
4. Применить построенные методы к задаче дифракции акустических волн на трехгранном конусе.
5. Для конических задач дифракции акустических волн построить физически обоснованную процедуру регуляризации расходящихся интегралов, входящих в трехмерные формулы расщепления.
6. Провести акустический эксперимент по измерению дифракционного коэффициента трехгранного конуса.

Актуальность работы. Работа преследует цели развития новых численных методов отыскания волновых полей на основе недавно полученных аналитических свойств этих полей (для двумерных задач дифракции), а также вывода новых интегральных представлений дифракционного коэффициента (для задач дифракции на конусах). Такие исследования стали возможны благодаря последним достижениям в теории дифракции. Некоторые ключевые идеи, относящиеся к задаче о дифракции на полосе (формулы расщепления, спектральное уравнение, эволюционные уравнения) были сформулированы в работе [5], однако свое развитие они получили лишь в последнее десятилетие в работах Н. Биггса, Д. Портера, Д. Стирлинга, Р. Крастера,

Н. Горенфло, К. Линтона.

Метод исследования дифракции на конических препятствиях, положенный в основу третьей главы диссертации, был развит в работах В.П. Смышляева, В.М. Бабича и др. в 1990–2000 гг. При этом многие аспекты дифракции на конусах остаются не исследованными до конца. В частности, до сих пор представляет интерес построение асимптотик волновых полей в различных областях вне «оазиса», а также дифракция на импедансном и прозрачном конусах. Наконец, существующая процедура вычисления дифракционного коэффициента, предложенная в [3], весьма трудоемка и требует большого времени счета при табуляции. Это заставляет искать возможности усовершенствования данной процедуры.

Все сказанное свидетельствует об актуальности работы.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Применение теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода для модификации методики дифракционного акустического эксперимента, использующей в качестве входного сигнала М-последовательность и включающей в себя процедуру восстановления дифракционной части импульсного отклика методом двух микрофонов, позволяет измерить дифракционный коэффициент конического препятствия с точностью 10%.
2. Построенные алгоритмы численного решения двумерных акустических задач дифракции на препятствиях типа полосы методом спектрального уравнения позволяют достичь любой наперед заданной точности решения. Для задачи о полосе эффективность алгоритма превосходит эффективность метода граничных интегральных уравнений, если требуемая относительная точность вычисления дифракционного коэффициента превышает 10^{-4} или если произведение волнового числа на полуширину полосы больше единицы.
3. Для акустических задач дифракции на четверти плоскости и на трехгранном конусе справедливы регуляризованные трехмерные формулы расщепления, выражающие дифракционный коэффициент через диаграммы направленности источников специального вида, помещенных вблизи ребер рассеивателей.
4. Для модифицированного преобразования Конторовича–Лебедева, выражающего акустические поля в трехмерном пространстве через контурные интегралы по параметру разделения переменных, справедливы интегральные соотношения, представляющие собой аналоги формул Планшереля и свертки для преобразования Фурье.
5. Для дифракционного коэффициента трехгранного конуса справедливо выражение в виде интеграла по параметру разделения переменных от комбинации двумерных сферических краевых функций Грина.

6. Справедливы сферические формулы расщепления, выражающие нетривиальные связи между собственными функциями, сферической функцией Грина и сферическими краевыми функциями Грина для уравнения Гельмгольца на единичной сфере с разрезом.

Научная новизна. Новым является проведенный эксперимент по измерению дифракционного коэффициента трехгранного конуса в акустическом случае. Также новым в контексте MLS-эксперимента является использование теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода для обработки экспериментальных данных.

Соотношения метода спектрального уравнения (формула расщепления, спектральное уравнение, задача об отыскании коэффициентов) для задачи о двух полосах были получены в работе [1]. В данной работе эти соотношения были переформулированы для задач дифракции на одной полосе и на полубесконечном экране со щелью. Новым является численный алгоритм отыскания коэффициентов спектрального уравнения по известным оценкам роста решений.

Выражения для дифракционного коэффициента четверти плоскости, в виде контурных интегралов от сферических краевых функций Грина были получены в работе [2]. Однако одно из них было обосновано с помощью трехмерной формулы расщепления, содержащей расходящиеся интегралы. Кроме того все эти выражения были сначала угаданы, а затем обоснованы. В данной работе они получаются конструктивным образом с помощью модифицированного преобразования Конторовича–Лебедева, а для расходящихся интегралов предлагается физически обоснованная процедура регуляризации.

Указанное преобразование является новым и отличается от классического выбором цилиндрической функции в ядре и контуром интегрирования. В результате удастся избежать проблем со сходимостью интегралов, однако функции, участвующие в преобразовании, перестают быть ортогональными. Тем не менее, для введенного преобразования удастся доказать справедливость формул Планшереля и свертки без использования ортогональности.

Сферические формулы расщепления являются новыми и позволяют установить связь между общим выражением для дифракционных коэффициентов конических препятствий и новыми выражениями для дифракционного коэффициента четверти плоскости.

Трехмерная формула расщепления и выражение дифракционного коэффициента трехгранного конуса в виде контурного интеграла от комбинации сферических краевых функций Грина являются новыми.

Достоверность экспериментальных результатов обеспечивается тестированием методики на простых случаях (распространение в пустом полупространстве, дифракция на торце цилиндра), при котором полученные резуль-

таты сравнивались с точным решением и результатами численного моделирования. Кроме того, измеренные значения дифракционного коэффициента сравниваются с вычисленными по общей формуле для дифракционного коэффициента конических препятствий.

Достоверность результатов, относящихся к двумерным задачам дифракции обеспечивается сравнением с решениями соответствующих интегральных уравнений для задач об одной и о двух полосах и проверкой выполнения граничных условий для восстановленного поля в случае полубесконечного экрана со щелью.

Достоверность аналитических результатов, относящихся к коническим задачам, обеспечивается корректным использованием математического аппарата при их обосновании.

Практическая значимость. Методика эксперимента, описанная в первой главе диссертации, может быть использована для исследования дифракции на препятствиях сложной формы, а также для экспериментального определения дифракционного коэффициента различных конических рассеивателей.

Построенные алгоритмы численного решения плоских задач дифракции могут быть использованы для эффективного вычисления полей, рассеянных конечными многоэлементными дифракционными решетками. Основным интерес представляет тот факт, что исследование полубесконечного экрана со щелью производится с помощью той же процедуры, что и исследование дифракции на одной и двух полосах. С точки зрения граничного интегрального уравнения (а это основной метод для практических вычислений в данном случае) задача о нескольких полосах существенно отличается от задачи о полубесконечном экране. Последняя задача предполагает интегрирование по полубесконечному интервалу, что существенно усложняет «традиционные» вычисления.

Задачи рассеяния на конических препятствиях представляют существенный практический интерес как канонические задачи теории дифракции. В рамках геометрической теории дифракции Келлера (а также идеологически близких к ней теорий П.Я. Уфимцева и В.А. Боровикова) постулируется принцип локальности, т.е. дифракционное поле представляется набором лучей, рассеянных (возможно, многократно) небольшими участками препятствий. В качестве таких участков могут выступать конические элементы–углы, превращающие падающий луч в веер дифрагированных лучей. Таким образом, отыскание дифракционного коэффициента для конических препятствий открывает перспективу приближенного решения задач рассеяния на сложных препятствиях, в частности, для практически важных задач радио- и гидролокации и для моделирования распространения волн в городских условиях (дифракция на углах зданий).

Заметим, что для задач дифракции на полосе и четверти плоскости существуют точные решения, получаемые при помощи метода разделения переменных. Однако эти решения не являются привлекательными с точки зрения практических вычислений, поскольку расчеты на их основе включают табулирование функций Матье или Ламэ. Кроме того, эти решения не выявляют асимптотических свойств волновых полей. Из-за этого, несмотря на наличие точных решений, задачи о полосе и четверти плоскости постоянно привлекают внимание исследователей.

Все сказанное позволяет сделать вывод о практической значимости полученных в работе результатов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Дни дифракции'09, 26–29 мая 2009, Санкт-Петербург;
2. XII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» («Волны 2010»), 24–29 мая 2010, Звенигород, Московская область, пансионат «Университетский»;
3. Дни дифракции'10, 8–11 июня 2010, Санкт-Петербург;
4. XXII Сессия Российского акустического общества, 15–17 июня 2010, Москва;
5. Дни дифракции'11, 30 мая–3 июня 2011, Санкт-Петербург,

а также на семинарах Санкт-Петербургского отделения математического института им. Стеклова РАН (руководитель В.М. Бабич) и Восточно-Европейской ассоциации акустиков (институт проблем машиноведения РАН, руководитель Д.П. Коузов).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, 3 статьи в сборниках трудов конференций и 2 в тезисах докладов.

Личный вклад автора Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения, приложения и библиографии. Общий объем диссертации 160 страниц, включающих 61 рисунок и 2 таблицы. Библиография включает 195 наименований на 15 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

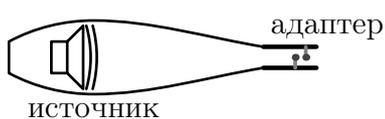
В обзоре литературы рассмотрены основные существующие подходы к решению рассмотренных в диссертации задач, а также некоторые работы, посвященные применению М-последовательностей.

В первой главе подробно описывается применение М-последовательностей к акустическому дифракционному эксперименту. Также в ней предлагается метод восстановления импульсного отклика, относящегося к дифракционному процессу и не связанного со структурой источника. Метод использует измерение объемной скорости источника с помощью двух микрофонов. Построенная методика применяется для измерения дифракционного коэффициента трехгранного конуса (угла куба).

В §1.1 описывается методика эксперимента. Общая схема такова. На вход системы подается М-последовательность $\{S_k^{in}\}$. Этот сигнал через ЦАП и усилитель подается на источник акустических волн. Микрофон располагается вблизи рассеивателя или на его поверхности. Сигнал с микрофона усиливается и преобразуется в цифровой вид. После этого вычисляется взаимнокорреляционная функция $\{H_k\}$ выходного и входного сигналов. В силу свойств М-последовательности сигнал $\{H_k\}$ близок к импульсному отклику всей системы. Он включает в себя, помимо чисто волновой части, еще и отклики источника и электрических трактов. Вопрос выделения из него полезной части рассматривается ниже.

Для такой постановки эксперимента не требуется использовать безэховые помещения, так как полезный сигнал от рассеивателя появляется в импульсном отклике раньше помех, приходящих от акустического окружения.

В данной работе в качестве входного сигнала использовалась М-последовательность порядка $M = 17$. Частота дискретизации ЦАП и АЦП составляла $F_s = 32768$ Гц. Источником служил Bruel&Kjaer 4295 OmniSource с



адаптером, позволяющим измерять объемную скорость (4299 Volume Velocity Adaptor). Схема источника с адаптером приведена на рис. 3.

Рис. 3. Схема источника с адаптером для измерения объемной скорости.

Источник представляет собой электродинамическую головку, помещенную в продолговатый пластиковый корпус с узким отверстием ($\varnothing 3,75$ см). Такая конструкция позволяет создавать акустическое поле, близкое к полю точечного монополярного источника. Адаптер представляет собой пластиковую ци-

линдрическую трубку, плотно пригнанную к выходному отверстию источника. Внутри трубки помещены два микрофона, сигналы с которых используются для восстановления объемной скорости источника. Для регистрации сигнала в точке наблюдения использовался Bruel&Kjaer 4957 1/4 inch Array Microphone, характеристики которого близки к характеристикам микрофонов в адаптере.

Сигнал $\{H_k\}$ необходимо очистить, выделив импульсный отклик дифракционного процесса. Основные помехи вносятся источником из-за многочисленных переотражений в его корпусе. Так как используемый источник близок к монополюсному, давление в точке наблюдения $p(t)$ связано с объемной скоростью источника соотношением

$$p(t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) H^{prop}(t - \tau) d\tau, \quad (1)$$

где $W(t)$ — производная объемной скорости источника по времени, а H^{prop} и есть интересующая нас часть импульсного отклика.

Если измерить объемную скорость источника, то H^{prop} можно будет найти с помощью перехода в частотную область:

$$H_{\omega}^{prop} = H_{\omega}/W_{\omega}. \quad (2)$$

Здесь предполагаются идеальными электрические тракты и микрофоны, что с хорошей точностью выполняется в рассматриваемом диапазоне частот (до 5 кГц).

Предложенная процедура выделения части импульсного отклика, связанной только с дифракционным процессом, никак не использует преимуществ метода М-последовательностей. Действительно, и W_{ω} и H_{ω} пропорциональны спектру входного сигнала, а значит, при любом достаточно широкополосном входном сигнале формула (2) дает возможность восстановить функцию $H^{prop}(t)$. Тем не менее, использование М-последовательностей позволяет повысить качество восстановления.

Длительность используемого в эксперименте сигнала (4 с) соответствует более чем 1 км пути, проходимого волной. При этом нас интересуют только первые несколько метров импульсного отклика, а вся остальная его часть является помехой. Чтобы ослабить влияние этой помехи, используем для вычисления Фурье-образов только начальную часть сигналов $H(t)$ и $W(t)$. Длительность этой части следует взять такой, чтобы в нее попала вся существенно ненулевая часть сигнала $W(t)$. В проведенных экспериментах использовались первые 50 м сигналов $H(t)$ и $W(t)$, что соответствует примерно 100 переотражениям в корпусе источника.

Для измерения объемной скорости источника применялся адаптер с двумя микрофонами. Предположив, что внутри адаптера распространяются только поршневые моды (элементарный анализ показывает, что для частот ниже 5 кГц моды высших порядков можно не рассматривать), и воспользовавшись теорией Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода, можно получить следующее выражение для производной объемной скорости:

$$W_\omega = i\omega \frac{2\pi r^2}{\rho_0 c} \frac{p_{2\omega} e^{ika} - p_{1\omega} e^{ikb}}{e^{2ika} - e^{2ikb}}, \quad (3)$$

где r — радиус трубки адаптера, a и b — расстояния от микрофонов до открытого конца трубки адаптера.

В §1.2 описываются эксперименты, проведенные для отработки и проверки методики, а именно измерение импульсного отклика пустого полупространства и изучение дифракции на торце цилиндра. В первом случае результаты измерений сравнивались с точным решением, во втором — с результатами численного моделирования. Найдено хорошее согласие результатов. Также демонстрируется необходимость использования теории Вайнштейна.

В §1.3 построенная методика была использована для измерения дифракционного коэффициента жесткого трехгранного конуса (угла куба). Схема измерений показана на рис. 4. Куб со стороной 1 м был собран из фанеры толщиной 10 мм. Источник помещался в фиксированную точку на биссектрисе верхней грани куба. Микрофон помещался в различные положения, задаваемые углами α и θ .

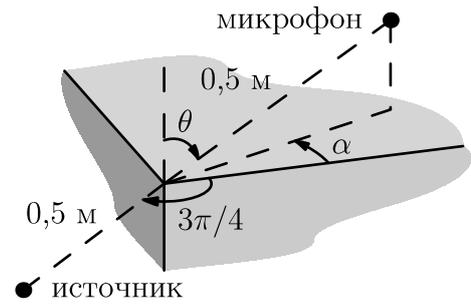


Рис. 4. Схема эксперимента по изучению дифракции на угле куба.

Из-за того, что сигнал, рассеянный вершиной куба, оказывается очень слабым, применялся следующий подход. В первом измерении записывался импульсный отклик при наличии куба, а затем куб убирался и производилось второе измерение, при этом положения источника и микрофона оставались неизменными. Разность двух сигналов позволяет наблюдать сигнал, рассеянный вершиной куба. Типичный вид получаемых сигналов показан на рис. 5.

Показано, что в случае достаточной удаленности источника и точки наблюдения от вершины куба рассеянный сигнал должен иметь вид

$$u^{sc} = \frac{2\pi c}{rr_0} \operatorname{Im} f(\omega, \omega_0) \int_{-\infty}^{t-(r+r_0)/c} F(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $F(t)$ — временной профиль волны, излучаемой источником, $f(\omega, \omega_0)$ — дифракционный коэффициент, r и r_0 — расстояния от вершины куба до точки наблюдения и до источника соответственно.

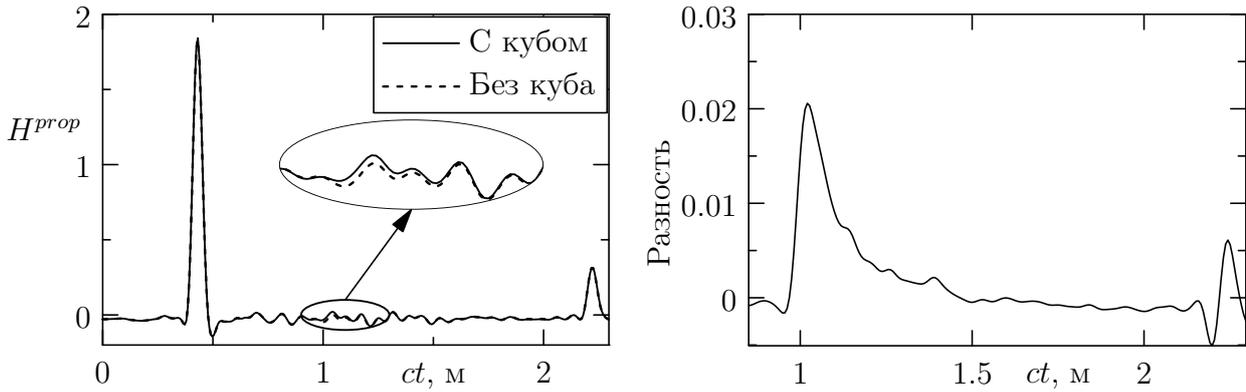


Рис. 5. Типичные наблюдаемые сигналы. Слева показаны импульсные отклики при наличии и в отсутствии куба. Справа — их разность, то есть сигнал, рассеянный вершиной куба.

Чтобы сделать полученный результат применимым, требуется удалить из рассеянного сигнала низкие частоты, для которых неверны предположения о достаточной удаленности источника и микрофона от вершины. На экспериментальный сигнал накладывается окно, выделяющее часть сигнала, формируемую рассеянием на вершине куба. Полученный сигнал пропускается через фильтр верхних частот. Указанная процедура приводит к хорошему совпадению форм экспериментального и теоретического сигналов. Подбирая амплитуду теоретического сигнала, можно определить дифракционный коэффициент с помощью формулы (4).

На рис. 6 показаны измеренные значения дифракционного коэффициента в сравнении с теоретическими значениями, вычисленными по общей формуле для конических дифракционных коэффициентов (16). Видно согласие теории с экспериментом с точностью порядка 10%.

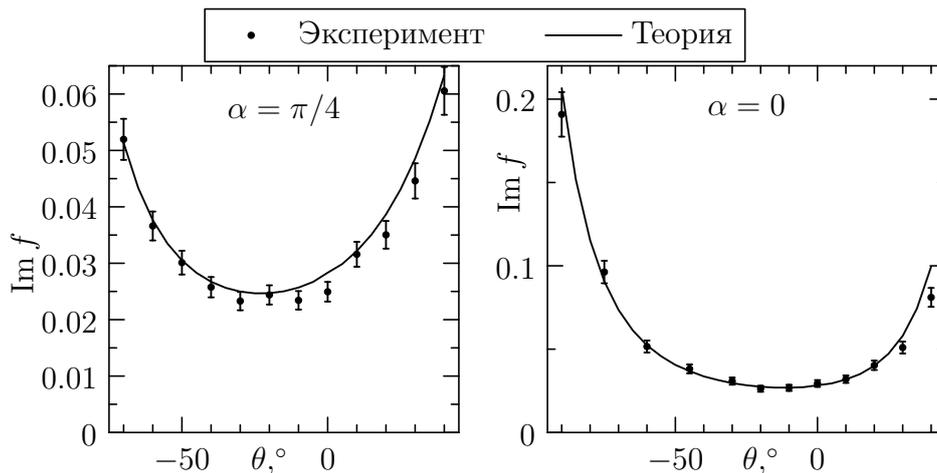


Рис. 6. Экспериментальная оценка дифракционного коэффициента в сравнении с теоретическими значениями. Координаты θ и α показаны на рис. 4.

В §1.4 Кратко сформулированы основные результаты главы. Результаты первой главы частично опубликованы в работах [3, 7].

Во второй главе описывается применение метода спектрального уравнения к задачам дифракции на одной и на двух полосах, а также к задаче дифракции на полубесконечном экране со щелью. Все построения подробно описываются на примере простейшей из рассмотренных задач — задачи о дифракции на одиночной полосе.

Решается двумерная стационарная акустическая задача дифракции плоской волны u^{in} на отрезке $(-a, a)$ оси x (рис. 7), на котором заданы граничные условия Дирихле: $\Delta u + k_0^2 u = 0$; $u = u^{in} + u^{sc}$; $u(x, 0) = 0$ при $|x| < a$. Основной искомой величиной является дифракционный коэффициент $S(\theta, \theta^{in})$, то есть зависящая от направлений падения и рассеяния амплитуда цилиндрической волны, являющейся главной компонентой рассеянного поля вдали от рассеивателя:

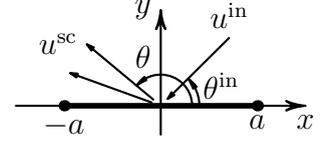


Рис. 7. Геометрия задачи о полосе.

$$u^{sc}(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} S(\theta, \theta^{in}) + O(r^{-3/2} e^{ik_0 r}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Метод спектрального уравнения заключается в следующем.

На первом шаге вводятся краевые функции Грина: рассматриваются поля $\hat{u}^{1,2}$, создаваемые источниками, расположенными на расстоянии ε от вершин отрезка (рис. 8) и имеющих силу $\sqrt{\pi/\varepsilon}$. Краевыми функциями Грина $u^{1,2}$ называются пределы полей $\hat{u}^{1,2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для них по аналогии с (5) вводятся диаграммы направленности $S^{1,2}(\theta)$.

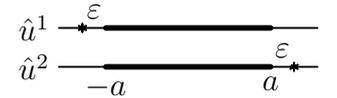


Рис. 8. К определению краевых функций Грина.

Затем доказывается справедливость формулы расщепления, выражающей дифракционный коэффициент через диаграммы направленности краевых функций Грина:

$$S(\theta, \theta^{in}) = \frac{S^2(\theta)S^2(\theta^{in}) - S^1(\theta)S^1(\theta^{in})}{k_0(\cos \theta + \cos \theta^{in})}. \quad (6)$$

Эта формула является точной, т.е. при ее выводе не делается никаких предположений о соотношении длины волны и размера рассеивателя. Ее преимущества очевидны: функция двух переменных простым образом выражается через две функции одной переменной.

Следующий шаг — вывод уравнения, которому удовлетворяют диаграммы направленности краевых функций Грина:

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} = \left[\text{ctg } \theta + ik_0 a \sin \theta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{K}_- \text{ctg } \frac{\theta}{2} - \mathbf{K}_+ \text{tg } \frac{\theta}{2} \right] \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение и называется спектральным уравнением. Его коэффициент содержит две априори неизвестных постоянных матрицы \mathbf{K}_\pm . Начальные условия также неизвестны. Основной задачей,

решаемой в данной работе, является построение алгоритмов вычисления этих данных.

В §2.1 описывается общая схема метода спектрального уравнения и обсуждаются его преимущества перед традиционными методами. Главным из них является то, что дифракционная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (в противоположность уравнению в частных производных или интегральному уравнению). Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения может быть осуществлено за $\sim O(N)$ операций, где N — число точек на контуре интегрирования.

Задача отыскания коэффициентов спектрального уравнения решается следующим образом. Из физической постановки задачи (условия излучения, требование конечности энергии) выводится ряд ограничений, которым должно удовлетворять решение спектрального уравнения. Эти ограничения во-первых позволяют утверждать, что матрицы \mathbf{K}_{\pm} зависят от набора неизвестных параметров ξ_j , $j = 1 \dots N$ ($N = 2$ для случая одной полосы, $N = 8$ для двух полос, $N = 4$ для полубесконечного экрана со щелью), а во-вторых позволяют сформулировать систему N уравнений, которым должны удовлетворять эти параметры. Система формулируется в неявном виде: $\eta_i(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0$, $i = 1 \dots N$, где функции η_i выражаются через решения спектрального уравнения вдоль некоторых контуров. Для решения этой системы используется метод секущих. В результате решения системы также находятся и начальные данные для спектрального уравнения.

Предлагаемый алгоритм поиска коэффициентов оказывается весьма эффективным. Его общие затраты составляют порядка 10–20 актов решения обыкновенного дифференциального уравнения. Таким образом, метод имеет высокий потенциал к сокращению машинного времени, требуемого для численного решения рассматриваемых двумерных задач дифракции.

В §2.2 подробно описывается постановка задачи о дифракции на полосе. К упомянутым выше условиям добавляется требование конечности энергии в любой конечной области, а на рассеянное поле накладываются условия излучения Зоммерфельда.

В §2.3 описываются математические факты, лежащие в основе метода спектрального уравнения (вводятся краевые функции Грина, выводятся формула расщепления и спектральное уравнение). Результаты данного параграфа, в основном, являются переложением результатов работы [1] со случая двух полос на случай одной полосы.

Для удобства анализа спектральное уравнение переформулируется для спектральных функций, представляющих собой Фурье-образы краевых функций Грина и их нормальных производных, взятых на различных частях оси

x . Говоря точнее, вводятся функции $U_n^m(k)$, $m = 1, 2$, $n = 0, 1, 2$:

$$U_0^m(k) = \int_{-\infty}^{-a} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, \quad U_2^m(k) = \int_a^{\infty} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, \quad (8)$$

$$U_1^m(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{-a}^a \partial_y u^m(x, +0) e^{ikx} dx. \quad (9)$$

Введенные функции обладают рядом важных свойств. Во-первых, они непосредственно связаны с диаграммами направленности S^m :

$$S^m(\theta) = \sqrt{k_0^2 - k^2(\theta)} U_1^m(k(\theta)), \quad k(\theta) = -k_0 \cos \theta. \quad (10)$$

Во-вторых, справедливы следующие уравнения:

$$U_0^m(k) + U_1^m(k) + U_2^m(k) \equiv 0, \quad m = 1, 2. \quad (11)$$

В-третьих, эти функции имеют следующие асимптотики в точках $\pm k_0$ и ∞ :

	$+k_0$	$-k_0$	$\infty, \text{Im } k > 0$	$\infty, \text{Im } k < 0$
U_0^m		регулярны		$\sim e^{-iak} k^{-1/2}$
U_1^m	$\sim \sqrt{k - k_0}$	$\sim \sqrt{k + k_0}$	$\sim e^{-iak} k^{-1/2}$	$\sim e^{iak} k^{-1/2}$
U_2^m	регулярны		$\sim e^{iak} k^{-1/2}$	

Доказывается, что задача отыскания краевых функций Грина эквивалентна задаче отыскания функций $U_n^m(k)$, удовлетворяющих функциональным уравнениям (11) и имеющих указанные асимптотики.

Доказывается, что матрица \mathbf{U} , составленная из спектральных функций ($[\mathbf{U}]_{m,n} = U_n^m$), удовлетворяет спектральному уравнению

$$\frac{d}{dk} \mathbf{U} = \left[ia \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}_+}{k - k_0} + \frac{\mathbf{K}_-}{k + k_0} \right] \mathbf{U}. \quad (12)$$

В §2.4 обсуждаются свойства спектрального уравнения.

Из геометрической симметрии $x \rightarrow -x$ следует, что матрицы \mathbf{K}_{\pm} связаны соотношениями $(\mathbf{K}_-)_{m,n} = (\mathbf{K}_+)_{3-m,3-n}$, поэтому нужно найти только \mathbf{K}_+ .

Из самой структуры уравнения (12) следует, что у него есть решения с нужными асимптотиками на бесконечности. Для существования решений с нужными асимптотиками в точках $\pm k_0$ необходимо и достаточно, чтобы матрица \mathbf{K}_+ имела собственные значения 0 и 1/2 и приводилась диагональному виду. Легко видеть, что данное требование фиксирует эту матрицу с точностью до 2-х скалярных комплексных параметров $\xi_{1,2}$.

Более сложной задачей является обеспечение нужных связей между решениями с рассматриваемыми асимптотиками в особых точках. Например, в случае произвольно заданных параметров $\xi_{1,2}$ решение, имеющее в точке k_0 корневую асимптотику, может оказаться регулярным в точке $-k_0$ и т.п. Доказывается, что ограничения, накладываемые на связи между асимптотиками, позволяют однозначно определить параметры $\xi_{1,2}$.

Эти ограничения формализуются следующим образом. Рассмотрим три базиса пространства решений спектрального уравнения:

1. пара столбцов $\mathbf{Z}_{1,2}$, ведущих себя в точке k_0 , как столбцы $\mathbf{U}_{1,2}$;
2. пара столбцов $\mathbf{W}_{0,2}$, ведущих себя на бесконечности, как столбцы $\mathbf{U}_{0,2}$;
3. пара столбцов $\mathbf{E}_{1,2}$ таких, что $(\mathbf{E}_1(0), \mathbf{E}_2(0))_{m,n} = \delta_{m,n}$.

Обозначим через \mathbf{Z} , \mathbf{W} и \mathbf{E} матрицы составленные из указанных столбцов. Введем матрицы связи \mathbf{M}^+ , \mathbf{M}^∞ и $\mathbf{M}^{+\infty}$ такие, что $\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{M}^+ = \mathbf{W}\mathbf{M}^\infty$, $\mathbf{Z} = \mathbf{W}\mathbf{M}^{+\infty}$. Эти матрицы зависят от параметров $\xi_{1,2}$, и $\mathbf{M}^{+\infty} = \mathbf{M}^\infty(\mathbf{M}^+)^{-1}$. Доказывается, что если выполнены равенства

$$\eta_1(\xi_1, \xi_2) := M_{1,2}^{+\infty} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_2(\xi_1, \xi_2) := M_{2,1}^+ + M_{2,2}^+ = 0, \quad (13)$$

то среди решений уравнения (12) существуют столбцы $\mathbf{U}_n(k)$, удовлетворяющие сформулированной выше функциональной задаче.

В §2.5 описывается численный алгоритм поиска параметров $\xi_{1,2}$. Эти параметры ищутся как решение системы (13). Система решается численно с помощью метода секущих (итерационного градиентного алгоритма). Ядром процедуры является алгоритм вычисления матриц связи.

Матрица \mathbf{M}^∞ вычисляется следующим образом. Спектральное уравнение с начальными условиями, соответствующими базису $\mathbf{E}_{1,2}$, численно решается вдоль контура Γ_∞ , показанного на рис. 9. В результате получается матрица $\mathbf{E}(k_f)$, где $k_f = L + i \cdot 0$. Затем строятся стандартные асимптотические ряды, представляющие решения $\mathbf{W}_{0,2}$ в окрестности точки $+\infty + i \cdot 0$:

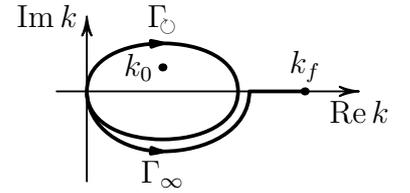


Рис. 9. Пути решения спектрального уравнения для вычисления матриц связи.

$$\mathbf{W}_0(k) = e^{-iak} k^{-1/2} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{f}_0^{(s)} k^{-s+1}, \quad \mathbf{W}_2(k) = e^{+iak} k^{-1/2} \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{f}_2^{(s)} k^{-s+1}. \quad (14)$$

Коэффициенты $\mathbf{f}_{0,2}^{(s)}$ определяются из рекуррентных соотношений, возникающих при подстановке этих рядов в спектральное уравнение. Сумма первых нескольких членов этих рядов дает приближенное значение матрицы $\mathbf{W}(k_f)$. По определению, $\mathbf{M}^\infty = \mathbf{W}^{-1}(k_f)\mathbf{E}(k_f)$. Указанный выбор точки k_f делает матрицу $\mathbf{W}(k_f)$ хорошо обусловленной.

Матрица \mathbf{M}^+ может быть вычислена аналогично, однако при этом невозможно выбрать точку в окрестности k_0 так, чтобы соответствующая матрица была хорошо обусловленной. Поэтому используется альтернативный подход. Спектральное уравнение решается вдоль контура Γ_{\circ} , показанного на рис. 9. После такого обхода решение \mathbf{Z}_1 меняет знак, а решение \mathbf{Z}_2 не меняется. Пусть решения $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ принимают после обхода значения $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2)$. Тогда столбцы матрицы $(\mathbf{M}^+)^{-1}$ являются собственными векторами матрицы $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2)$.

В §2.6 приводятся результаты моделирования и анализируются точность и эффективность построенного алгоритма. Точность оценивается по отклонениям от решения соответствующего интегрального уравнения. На рис. 10 приведены типичные зависимости относительной ошибки ε от параметров алгоритма R и h . Здесь

$$\varepsilon = \max_{\theta} \left| \frac{S(\theta, \theta_0) - S_0(\theta, \theta_0)}{S_0(\theta, \theta_0)} \right|, \quad R = L/k_0, \\ h = \Delta k/k_0,$$

Δk — шаг дискретизации, $S_0(\theta, \theta_0)$ — опорное решение, а $S(\theta, \theta_0)$ — решение, ошибка которого оценивается.

Эффективность оценивается сравнением машинного времени, требуемого для вычисления дифракционного коэффициента с заданной точностью методом граничных интегральных уравнений (T_I) и методом спектрального уравнения (T_S). На рис. 11 показана зависимость отношения T_S/T_I от параметра k_0a для различных значений заданной относительной ошибки ε . Как видно, метод спектрального уравнения является более эффективным, если требуется достижение высокой точности, а также при $k_0a \gtrsim 1$.

В §2.7 и §2.8 метод спектрального уравнения применяется к задачам дифракции на двух полосах и на полубесконечном экране со щелью.

В §2.9 Кратко сформулированы основные результаты главы. Результаты второй главы частично опубликованы в работах [2, 8, 9].

В третьей главе рассматриваются задачи дифракции плоской волны на четверти плоскости и на трехгранном конусе. Основной задачей является вычисление дифракционного коэффициента — зависящей от направлений

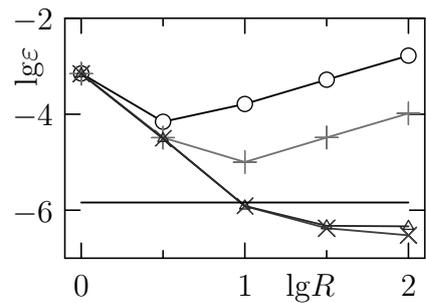


Рис. 10. Зависимость ошибки от параметров алгоритма. (o) : $h = 0,1$; (+) : $h = 0,05$; (x) : $h = 0,01$; (Δ) : $h = 0,001$. Без маркеров: интегральное уравнение. Здесь $k_0a = 1$.

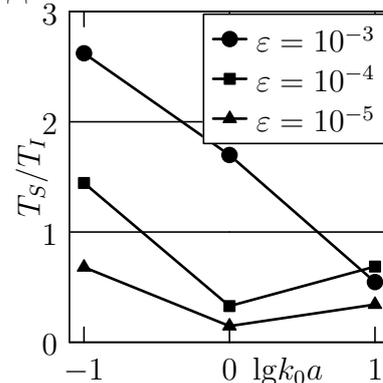


Рис. 11. Зависимость отношения T_S/T_I при заданной относительной ошибке ε от параметра k_0a .

падения и рассеяния амплитуды сферической волны, рассеянной вершиной конуса. Большая часть главы посвящена задаче о четверти плоскости.

Решается стационарная акустическая задача дифракции падающей с направления ω_0 плоской волны u^{in} на четверти плоскости (рис. 12) с граничными условиями Дирихле: $\Delta u + k_0^2 u = 0$, $u = u^{in} + u^{sc}$, $u|_{x \geq 0, y \geq 0, z=0} = 0$. Рассеянное поле u^{sc} формируется плоской отраженной волной, цилиндрическими волнами, рассеянными ребрами, а также сферической волной, рассеянной вершиной. В той области направлений рассеяния, куда при данном направлении падения попадает только сферическая волна, вдали от вершины рассеянное поле имеет вид

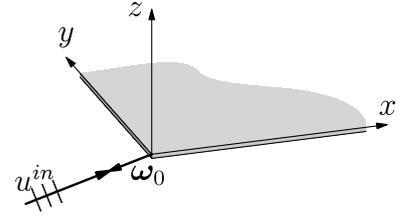


Рис. 12. Геометрия задачи.

$$u^{sc}(r, \omega) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f(\omega, \omega_0) + O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Амплитуду сферической волны $f(\omega, \omega_0)$, зависящую от направления падения ω_0 и направления рассеяния ω , называют дифракционным коэффициентом. Он является основной искомой величиной.

К данной задаче применим общий метод вычисления дифракционных коэффициентов конических препятствий, развитый в работе [3].

В §3.1 кратко описывается этот общий метод, а также обсуждается его модификация для задачи дифракции на четверти плоскости, предложенная в работе [2].

Общий метод основан на отделении радиальной переменной, и изучении возникающих при этом задач на единичной сфере с вырезанной конусом-рассеивателем частью. В случае дифракции на четверти плоскости эта часть представляет собой сферу с разрезом S_q в виде четверти экватора (рис. 13). Направления падения и рассеяния отождествляются с точками на сфере. Общее выражение дифракционного коэффициента содержит сферическую функцию Грина $g(\omega, \omega_0, \nu)$, то есть решение уравнения $(\Delta_{\theta\varphi} + \nu^2 - 1/4)g = \delta(\omega - \omega_0)$, обращающееся в нуль на разрезе. Здесь $\Delta_{\theta\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах, ν — параметр разделения переменных.

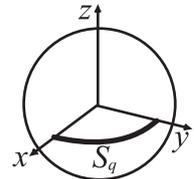


Рис. 13. Сфера с разрезом.

Через сферическую функцию Грина дифракционный коэффициент выражается следующим образом:

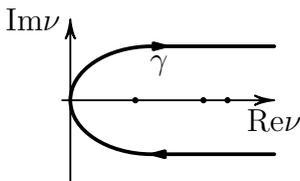


Рис. 14. Контур γ .

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i}{\pi} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu. \quad (16)$$

Контур γ показан на рис. 14. В области направлений, в которой присутствует только сферическая рассеянная волна, рассматривае-

мый интеграл можно преобразовать в экспоненциально сходящийся. В тех областях направлений, в которых распространяются рассеянные ребрами цилиндрические волны, интеграл приходится вычислять путем громоздкой предельной процедуры [4].

Предложенная в работе [2] модификация общего метода для случая задачи о четверти плоскости основывается на введении трехмерных краевых функций Грина $G_{x,y}$ и двумерных сферических краевых функций Грина $v^{1,2}$. Эти функции вводятся аналогично

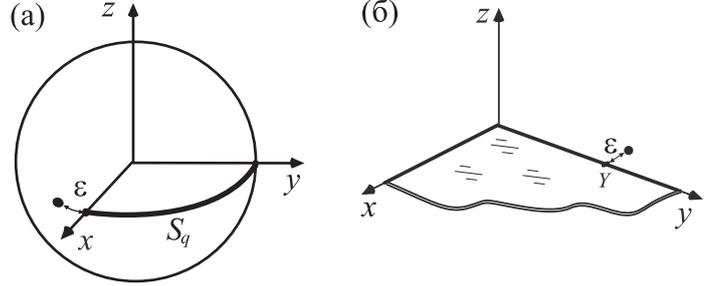


Рис. 15. К определению краевых функций Грина: (а) двумерных сферических (v^1), (б) трехмерных (G_y).

описанному выше случаю задачи о полосе. Рассматриваются поля источников силы $\sqrt{\pi/\varepsilon}$, лежащих на расстоянии ε от ребра четверти плоскости или вершины разреза сферы (рис. 15). Пределы этих полей и называются краевыми функциями Грина. Для трехмерных функций Грина вводятся диаграммы направленности $f_{x,y}$ по аналогии с (15).

Основным результатом работы [2] является следующее выражение для дифракционного коэффициента четверти плоскости:

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i/8\pi}{(\omega_x + \omega_{0x})(\omega_y + \omega_{0y})} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} C_2^1(\mu) [\phi^1(\omega, \mu)\phi^2(\omega_0, \mu) - \phi^1(\omega_0, \mu)\phi^2(\omega, \mu)] \mu d\mu. \quad (17)$$

Здесь $\phi^k(\omega, \mu) = [v^k(\omega, \mu - 1) - v^k(\omega, \mu + 1)]/\mu$; контур Γ (рис. 16) состоит из двух петель, охватывающих точки $\pm(1 - \nu_1)$, а ν_1 — первое собственное значение угловой части оператора Лапласа на сфере с разрезом; C_2^1 — коэффициент в краевой асимптотике функции v^1 в окрестности y -вершины разреза (и v^2 у x -вершины); $\omega_{x,y}$ и $\omega_{0x,y}$ — проекции векторов ω и ω_0 на оси x и y соответственно.

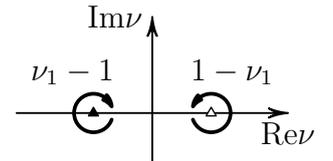


Рис. 16. Контур Γ .

Интеграл в этом представлении может быть преобразован в экспоненциально сходящийся в более широкой области направлений, чем интеграл в общей формуле (16): это становится возможно сделать для тех направлений, в которые не попадают вторичные цилиндрические волны (рис. 17). Такие волны существуют даже не при всех направлениях падения. Таким образом, формула (17) удобнее для вычислений, чем общая формула (16).

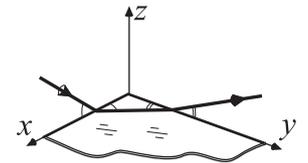


Рис. 17. Вторичная волна.

Тем не менее, в работе [2] остался незаполненным ряд пробелов: требова-

лась регуляризация расходящихся интегралов в промежуточных формулах, не было предложено конструктивного способа вывода формул такого типа и осталась невыявленной связь между общим и модифицированным выражениями для дифракционного коэффициента). В настоящей работе эти пробелы заполняются, и построенные методы применяются к задаче дифракции на трехгранном конусе, представляющем собой угол куба.

В §3.2 подробно описывается постановка задачи о дифракции на четверти плоскости и вводятся трехмерные и двумерные сферические краевые функции Грина.

В §3.3 решается вопрос о регуляризации расходящихся интегралов, входящих в трехмерную формулу расщепления. Эта формула выражает дифракционный коэффициент в виде интегралов по ребрам четверти плоскости от комбинации диаграмм направленности трехмерных краевых функций Грина и является основой для вывода формулы (17).

Вводится определение регуляризованного значения интеграла. Пусть некоторая функция $w(x)$ интегрируема на любом отрезке $[\varepsilon, a]$ при $0 < \varepsilon < a$, и имеет следующую асимптотику при $x \rightarrow 0$: $w(x) = \sum_{n=1}^N a_n x^{\beta_n} + o(x^{-1})$, где $\beta_n < -1$. Тогда предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{n=1}^N a_n \frac{\varepsilon^{\beta_n+1}}{\beta_n + 1} + \int_{\varepsilon}^a w(x) dx \right] =: \underset{0}{\int} w(x) dx \quad (18)$$

будем называть регуляризованным значением интеграла $\int_0^a w(x) dx$.

Доказывается справедливость регуляризованной трехмерной формулы расщепления:

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2/k_0^3}{(\omega_y + \omega_{0y})(\omega_x + \omega_{0x})} \underset{0}{\int}^{\infty} [f_x(\boldsymbol{\omega}; \xi) I_y(\xi) + f_y(\boldsymbol{\omega}; \xi) I_x(\xi)] d\xi. \quad (19)$$

Здесь $I_{x,y}(\xi) = \int_0^{\infty} C_G(\xi, \eta) f_{x,y}(\boldsymbol{\omega}_0; \eta) d\eta$, а C_G — коэффициент в краевой асимптотике функции G_x в окрестности ребра y и G_y у ребра x .

В §3.4 решается вопрос о конструктивном способе вывода формул класса (17) из формул класса (19). Для этого вводится модифицированное представление Конторовича–Лебедева. Пусть функции $h(r)$ и $g(r, r')$, $r, r' \geq 0$, могут быть представлены в виде

$$h(r) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(k_0 r) \phi(\nu) \nu d\nu, \quad (20)$$

$$g(r, r') = \frac{1}{2} \int_{\gamma} J_{\nu}(k_0 r_{<}) H_{\nu}^{(1)}(k_0 r_{>}) \psi(\nu) \nu d\nu. \quad (21)$$

Здесь $r_< = \min(r, r')$ и $r_> = \max(r, r')$; контур γ показан на рис. 14.

Представления функций $h(r)$ и $g(r, r')$ в виде (20) и (21) называются модифицированным представлением Конторовича–Лебедева для функций одной и двух переменных соответственно. Функции $\phi(\nu)$ и $\psi(\nu)$ называются *трансформантами* функций $h(r)$ и $g(r, r')$ соответственно. В отношении трансформант предполагается, что они являются четными функциями ν , имеют сингулярности только в виде простых действительных полюсов, регулярны при $\nu = 0$ и экспоненциально убывают при $|\operatorname{Im} \nu| \rightarrow \infty$.

Доказываются два важных свойства этого представления.

Формула свертки: пусть функции $h(r)$ и $g(r, r')$ имеют представления (20) и (21) с трансформантами ϕ и ψ соответственно. Тогда

$$\int_0^\infty g(r, r') h(r') \frac{dr'}{r'} = \frac{1}{2} \int_\gamma e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(k_0 r) \phi(\nu) \psi(\nu) \nu d\nu. \quad (22)$$

Формула Планшереля: пусть функции $h_1(r)$ и $h_2(r)$ имеют представления (20) с трансформантами ϕ_1 и ϕ_2 соответственно. Тогда

$$\int_0^\infty h_1(r) h_2(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{4} \int_\gamma e^{-i\pi\nu} \phi_1(\nu) \phi_2(\nu) \nu d\nu. \quad (23)$$

Показывается, что функции $f_{x,y}$ и C_G , входящие в трехмерные формулы расщепления, имеют представления, схожие с (20) и (21). Отличие заключается в наличии дополнительных степенных множителей перед интегралами, но оно оказывается непринципиальным. С помощью построенной техники преобразования интегралов из регуляризованной трехмерной формулы расщепления (19) конструктивным образом выводится формула (17). Эта формула была предложена в работе [2], однако там она была обоснована с помощью трехмерной формулы расщепления, содержащей расходящиеся интегралы. Кроме того она была сначала угадана, а затем обоснована.

В §3.5 выводятся сферические формулы расщепления, выражающие нетривиальные связи между собственными функциями, сферической функцией Грина и сферическими краевыми функциями Грина. Приведем пример такой формулы:

$$2\nu\omega_x v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) + v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)] + C_2^1(\nu)[v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) - v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)]. \quad (24)$$

Она справедлива, если ν и $\nu \pm 1$ не принадлежат спектру. Схожие формулы получаются для собственных функций сферической задачи и сферической функции Грина. С их помощью формула (17) напрямую выводится из (16).

В §3.6 приводится пример вычисления дифракционного коэффициента четверти плоскости по одной из новых формул.

В §3.7 построенные методы применяются к задаче дифракции на трехгранном конусе $P = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Постановка задачи аналогична постановке задачи о четверти плоскости. Вводятся шесть трехмерных краевых функций Грина $G_{x,y,z}^1$ и $G_{x,y,z}^2$, соответствующих монопольным и дипольным источникам, помещенным на ребра рассеивателя. По аналогии с (15) для них вводятся диаграммы направленности $f_{x,y,z}^{1,2}$. Также вводятся шесть сферических краевых функций Грина $v_{x,y,z}^{1,2}(\omega, \nu)$.

Доказывается справедливость трехмерной формулы расщепления

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{8\pi^3/3k_0^3}{\omega_{0x}^2 - \omega_x^2} \left[\int_0^\infty f_z^2(\omega_0, z) f_z^1(\omega, z) dz - \int_0^\infty f_z^2(\omega, z) f_z^1(\omega_0, z) dz - \int_0^\infty f_y^2(\omega_0, y) f_y^1(\omega, y) dy + \int_0^\infty f_y^2(\omega, y) f_y^1(\omega_0, y) dy \right] \quad (25)$$

и формулы:

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i/12}{\omega_{0x}^2 - \omega_x^2} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [B(\omega, \omega_0, \nu) - B(\omega_0, \omega, \nu)] \nu d\nu, \quad (26)$$

где $B(\omega, \omega_0, \nu) = \phi_z^2(\omega_0, \nu) \phi_z^1(\omega, \nu) - \phi_y^2(\omega_0, \nu) \phi_y^1(\omega, \nu)$, а $\phi_{y,z}^{1,2}(\omega, \nu) = [v_{y,z}^{1,2}(\omega, \nu - 1) - v_{y,z}^{1,2}(\omega, \nu + 1)]/\nu$.

В §3.8 Кратко сформулированы основные результаты главы. Результаты третьей главы частично опубликованы в работах [1, 4–6, 10].

В Приложение вынесены технически сложные и громоздкие обоснования соотношений для конических задач.

В Заключение сформулированы основные результаты работы:

1. Предложена модификация экспериментальной методики исследования акустических дифракционных задач, использующей в качестве входного сигнала М-последовательность. Составной частью методики является процедура восстановления объемной скорости источника акустических волн с помощью метода двух микрофонов. Основу модификации составляет использование теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода. На основании предложенной методики впервые

был измерен дифракционный коэффициент жесткого трехгранного конуса. Результаты измерений согласуются с теоретически вычисленными значениями с точностью 10%.

2. Построен численный алгоритм решения скалярных (акустических) задач о дифракции плоской волны на препятствиях типа полосы методом спектрального уравнения. Основу алгоритма составляет процедура отыскания коэффициентов уравнения по известному из физической постановки задаче поведению решений в особых точках. Показано, что для задачи о полосе метод спектрального уравнения более эффективен по сравнению с традиционным методом граничного интегрального уравнения в том случае, если требуется высокая точность решения а также в случае среднего и большого волнового размера полосы.
3. Предложены новые методы построения аналитических решений для задач дифракции на многогранных конусах. Предложенные методы позволили строго обосновать точные выражения для дифракционного коэффициента четверти плоскости и получить новое выражение для дифракционного коэффициента трехгранного конуса.

Цитированная литература

1. Shanin A. V. Diffraction of a plane wave by two ideal strips // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 2003. Vol. 56. Pp. 187–215.
2. Shanin A. V. Modified Smyshlyaev's formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane // Wave motion. 2005. Vol. 41. Pp. 79–93.
3. Smyshlyaev V. P. Diffraction by conical surfaces at high frequencies // Wave motion. 1990. Vol. 12. Pp. 329–339.
4. Babich V. M., Smyshlyaev V. P., Dement'ev D. B., Samokish B. A. Numerical calculation of the diffraction coefficients for an arbitrary shaped perfectly conducting cone // IEEE transactions on antennas and propagation. 1996. Vol. 44. Pp. 740–747.
5. Williams M. Diffraction by a finite strip // Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math. 1982. Vol. 35. Pp. 103–124.

Список публикаций

- A1. Skelton E. A., Craster R. V., Shanin A. V., Valyaev V. Yu. Embedding formulae for scattering by three-dimensional structures // Wave motion. 2010. Vol. 47. Pp. 299–317.
- A2. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Numerical procedure for solving the strip problem by the spectral equation // Journal of computational acoustics. 2011. Vol. 19. Pp. 269–290.
- A3. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Метод последовательностей максимальной длины в дифракционном эксперименте // Акуст. Журн. 2011. Т. 57. С. 420–425.
- A4. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Модифицированное преобразование Конторовича–Лебедева и его применение к решению канонических конических задач дифракции // Акуст. Журн. 2011. Т. 57. С. 755–762.
- A5. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Embedding formulae for Laplace–Beltrami problems on the sphere with a cut // Wave Motion. 2012. Vol. 49. Pp. 83–92.
- A6. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Derivation of modified Smyshlyaev’s formulae using integral transform of Kontorovich–Lebedev type // Proceedings of the international conference «Days on diffraction»2010 / Ed. by I. V. Andronov, A. P. Kiselev, M. V. Perel, A. S. Kirpichnikova. St. Petersburg: 2010. — June. Pp. 174–180.
- A7. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Экспериментальное изучение дифракции акустической волны на жестком цилиндре MLS-методом // Сборник трудов участников XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» («Волны-2010»). Звенигород: 2010. — Май. С. 53–54.
- A8. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Численный алгоритм решения задачи дифракции плоской волны на двух полосах // Сборник трудов XXII сессии Российского акустического общества и Сессии Научного совета РАН по акустике. Т. 1. Москва: ГЕОС, 2010. — Июнь. С. 257–260.
- A9. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Spectral equation for a strip/slit diffraction problem: numerical algorithm // Days on diffraction’2009, Abstracts. St. Petersburg: 2009. — May. P. 92.
- A10. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Embedding formulae for Laplace–Beltrami problems on the sphere with a cut // Days on diffraction’2011, Abstracts. St. Petersburg: 2011. — May/June. P. 96.