

УДК 534.222

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНТЕНСИВНОЙ ВОЛНЫ ЗА ДВУМЕРНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

© 2006 г. В. А. Гусев, О. В. Руденко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
119992 Москва, Ленинские горы

Тел.: (095) 939-2936

E-mail: vgusev@nm.ru

Поступила в редакцию 24.05.05 г.

Проведен анализ параметров нелинейных волн, проходящих через слой случайно-неоднородной среды. Моделью слоя служит двумерный фазовый экран. Пересекая плоскость экрана, волна приобретает случайный сдвиг фазы. Фронт искривляется, формируются случайно расположенные области схождения и расхождения лучей, в которых нелинейная эволюция волны существенно изменяется. Задача решена в приближении нелинейной геометрической акустики. Построена картина лучей для прошедшей сквозь регулярный экран плоской волны. Получено решение, описывающее пространственную структуру поля и эволюцию произвольного временного профиля волны за экраном. Рассчитаны статистические характеристики амплитуды разрывов на различных расстояниях от экрана. Показано, что случайная модуляция приводит к более быстрому, чем в однородной среде, нелинейному затуханию волны и сглаживанию ударного профиля. Происходит расширение функций распределения параметров волнового поля, вызванное эффектами случайных фокусировок.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи распространения широкополосных сигналов в неоднородных и турбулентных средах, в том числе нелинейных волн, содержащих разрывы [1, 2], привлекают к себе внимание специалистов из различных областей прикладной физики. Это связано, в частности, с применением мощного ультразвука в медицине и развитием сверхзвуковой авиации [3, 4]. Следует отметить также задачи дальнего распространения взрывных импульсов в океане и атмосфере [5] и проблемы неразрушающего контроля и диагностики материалов [6]. Распространение волн с ударными фронтами через неоднородную среду может приводить к появлению больших выбросов давления и градиентов давления, неблагоприятно влияющих на состояние окружающей среды, живых существ и наземных сооружений.

Для описания волн в случайно-неоднородной среде предложены различные модели. Во многих случаях можно считать, что неоднородности сосредоточены в тонком слое. Известно, например, что наиболее сильные флуктуации параметров атмосферы происходят около земли в пограничном слое на высотах порядка сотен метров. Эти расстояния малы по сравнению с обычными высотами полетов. Модель неоднородности в виде одномерного фазового экрана использовалась в задачах о звуковом ударе [3, 4, 7] и в медицинских

приложениях при анализе проникновения ультразвука в мозг через кости черепа [8].

Упрощенные уравнения нелинейной акустики неоднородных сред получены в работе [9]. В ней выведены уравнения нелинейной геометрической акустики; их удалось проинтегрировать в общем виде вдоль произвольного криволинейного луча. Кроме того, в работе [9] выведено эволюционное нелинейное уравнение, учитывающее дифракцию в квазиоптическом приближении; поле в окрестности оси (произвольно выбранного луча) описано в специальных криволинейных координатах.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе используется более простая модель, но зато находятся и детально анализируются решения конкретных нелинейных задач. Для наглядности мы будем исходить не из общих уравнений работы [9], а непосредственно из уравнений динамики сплошной среды.

Как известно, уравнения акустического поля в неоднородной среде (при учете только физической нелинейности) имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\varepsilon - 1}{\rho c^2} \frac{\partial p^2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \quad (1)$$

где p – акустическое давление, \mathbf{v} – колебательная скорость в волне, ρ и c – плотность среды и ско-

рость звука в ней. Исключая из системы (1) скорость v , получим:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla p = -\frac{\varepsilon - 1}{c^4 \rho} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Уравнение (2) без нелинейного члена приведено, например, в книге [10]. Учет других нелинейных членов в уравнениях движения и непрерывности эквивалентен той же модели (2), только вместо коэффициента $\varepsilon - 1$ появится нелинейный параметр ε [1], который и будет использован ниже.

Упростим уравнение (2), предположив, что профиль волны давления поперек пучка изменяется медленнее, чем в продольном направлении. Пусть

$$p = p\left(\tau = t - \frac{z}{c_0}, \mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y\right), \quad (3)$$

а также

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} [1 + \mu 2\zeta(\mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y)], \quad (4)$$

$$\rho = \rho(\mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y).$$

Здесь $\mu \ll 1$ – малый параметр, функция ζ описывает отклонение скорости звука от своего значения c_0 в однородной среде. Подставляя выражения (4) в уравнение (2) и сохраняя слагаемые порядка μ , получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} p \right) = \\ = \frac{c_0}{2} \left(\Delta_{\perp} p + \frac{\nabla_{\perp} \rho}{\rho} \nabla_{\perp} p \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В правой части уравнения (5) операторы “набла” ∇_{\perp} и Лапласа Δ_{\perp} берутся по координатам x, y в плоскости, перпендикулярной к оси пучка.

Все члены уравнения (5) имеют один и тот же порядок малости μ ; это согласуется с техникой вывода эволюционных уравнений методом медленно изменяющегося профиля [1, 11]. В предположениях (3), (4) о скоростях изменения параметров волны и среды в продольном и поперечном направлениях в уравнение (5) включены малые по величине (порядка μ) и “медленные” неоднородности скорости ζ . Напротив, неоднородности плотности ρ предполагаются только медленными, но не малыми. Это обстоятельство позволяет использовать уравнение (5) для расчета нелинейных волн на трассах с большим перепадом высот.

Уравнение (5) описывает волны со сложной структурой их профилей и спектров, в частности, пилообразные волны, учитывая при этом дифракционные эффекты. Оно также применимо для описания фокальных областей и каустик. По-

добное уравнение при учете неоднородностей $\zeta \neq 0$, $\rho = \rho_0$ было использовано в работе [12] для численного анализа похожей задачи.

С целью перехода к приближению нелинейной геометрической акустики [11] решение уравнения (5) ищем в виде:

$$p = p\left(T = \tau - \frac{1}{c_0} \psi(x, y, z); x, y, z\right). \quad (6)$$

Здесь ψ – “квазиэйконал”, описывающий искажение фронта волны. Подставим (6) в (5) и используем приближение высоких частот, в котором производная $\partial/\partial \tau$ соответствует умножению на некоторый большой параметр μ^{-1} . В этом приближении в выражении, получившемся после подстановки (6) в (5), следует отбросить старшие пространственные производные, имеющие порядок μ^0 . Тогда оставшиеся члены преобразуются в систему уравнений геометрической акустики [11]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \psi)^2 = \zeta(z, x, y), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{p}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_{\perp} \rho \nabla_{\perp} \psi \right) + \\ + \nabla_{\perp} p \nabla_{\perp} \psi + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) можно упростить, вводя функцию P , $p = \sqrt{\rho/\rho_0} P$:

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\rho_0} \rho c_0^3} P \frac{\partial P}{\partial T} + \nabla_{\perp} P \nabla_{\perp} \psi + \frac{P}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0. \quad (9)$$

Таким образом, неоднородности плотности в уравнении (9) для функции P приводят только к изменению коэффициента при нелинейном члене.

Уравнение эйконала (7) описывает искажение формы исходного волнового фронта, а уравнение переноса (8), (9) – изменение профиля волны, обусловленное как искажением фронта, так и нелинейностью среды. Отметим, что (7) совпадает по форме с соответствующим уравнением линейной акустики.

Напомним, что (7) следует из обычного уравнения эйконала:

$$(\nabla \Psi)^2 = n^2, \quad (10)$$

где n – показатель преломления. Пусть $n \approx 1$; тогда эйконал можно представить в виде $\Psi = z + \psi(\mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y)$, где первое слагаемое соответствует однородной среде, а второе описывает сла-

бые искажения фронта за счет неоднородности. Для функции ψ из (10) получаем уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = \frac{n^2 - 1}{2} = \zeta,$$

совпадающее с (7); для однородной среды его правая часть равна нулю.

Рассмотрим флуктуации скорости звука, сосредоточенные в бесконечно тонком слое $z = 0$. Вариациями плотности среды будем пренебрегать. В этом случае в уравнении (5) надо положить функцию ζ пропорциональной δ -функции от переменной z . Очевидно, что за экраном (в области $z > 0$) можно решать однородное уравнение (7), но с граничным условием

$$\psi|_{z=0} = \int_{0-\mu}^{0+\mu} \zeta(z, x, y) dz \equiv \Psi_0(x, y). \quad (11)$$

ОБЩИЙ ПОДХОД И ПРИМЕР: ПЕРИОДИЧЕСКАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ

Пусть плоская регулярная волна с произвольными временным профилем и поперечной структурой $p_0(x, y; T)$ распространяется в направлении оси z и падает на экран, расположенный при $z = 0$, приобретая дополнительный фазовый сдвиг $\Psi_0(x, y)$.

Дифференцируя уравнение (7) по поперечным координатам, сведем его к системе двух уравнений типа римановых волн для косинусов углов наклона лучей $\alpha = \partial \Psi / \partial x$ и $\beta = \partial \Psi / \partial y$ к осям x и y соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) имеет точное решение, определяемое парой связанных неявных выражений

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z) &= A(x - \alpha z, y - \beta z), \\ \beta(x, y, z) &= B(x - \alpha z, y - \beta z), \end{aligned} \quad (13)$$

где функции $A(x, y) = \alpha(x, y, z = 0)$, $B(x, y) = \beta(x, y, z = 0)$ задают углы наклона лучей на экране $z = 0$. Заметим, что решение (13) удобно использовать в параметрической форме

$$x = \xi + zA(\xi, \eta), \quad y = \eta + zB(\xi, \eta). \quad (14)$$

Аргументы функций в решении (13), (14) обозначены посредством

$$\xi = x - \alpha z, \quad \eta = y - \beta z. \quad (15)$$

Поскольку наклоны лучей α и β определяются производными от эйконала Ψ , функции A и B связаны между собой:

$$A(x, y) = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}, \quad B(x, y) = \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Решение (13) остается справедливым вплоть до области пересечения лучей, после чего оно становится неоднозначным. Первому пересечению лучей соответствует расстояние, на котором производные от α , β впервые обращаются в бесконечность. Вычисляя эти производные согласно решению (13), получим:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{S} \left[\frac{\partial A}{\partial \xi} + z \left(\frac{\partial A \partial B}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial A \partial B}{\partial \eta \partial \xi} \right) \right],$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{S} \left[\frac{\partial B}{\partial \eta} + z \left(\frac{\partial A \partial B}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial A \partial B}{\partial \eta \partial \xi} \right) \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{S} \frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{1}{S} \frac{\partial B}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta}{\partial x},$$

где

$$S = 1 + z \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) + z^2 \left(\frac{\partial A \partial B}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial A \partial B}{\partial \eta \partial \xi} \right). \quad (17)$$

Видно, что производные обращаются в бесконечность при условии $S = 0$. Первому пересечению лучей соответствует минимум z как функции ξ , η . В частности, для регулярного распределения фазы на экране $\Psi_0 = \phi \sin kx \sin ky$ первое пересечение лучей происходит на расстоянии $z = (k^2 \phi)^{-1}$ от экрана.

Решение (13) удается разложить в спектр по пространственным гармоникам. Особенно простое выражение получается в одномерном случае. Вычисляя спектр неявной функции

$$\alpha = A = -k\phi \sin k\xi, \quad x = \xi + Az = \xi - k\phi z \sin k\xi$$

способом, использованным при расчете разложения типа Бесселя-Фубини (см., например, [1, 11]) получим:

$$\alpha = -k\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nk^2\phi z)}{nk^2\phi z} \sin n k x, \quad (18)$$

где J_n – функция Бесселя.

Представление (18) – явное; интегрируя (18), получим решение для эйконала. На рис. 1а показаны рассчитанные по формуле (18) кривые 1–3 для наклона луча на расстояниях $Z = k^2\phi z = 0; 0.5; 1$ от экрана. На рис. 1б представлен эйконал на тех же расстояниях. На рис. 1в показано направление лучей. Увеличение крутизны функций наклона и появление неоднозначности свидетельствуют об образовании областей сгущения лучей и появлении их пересечений.

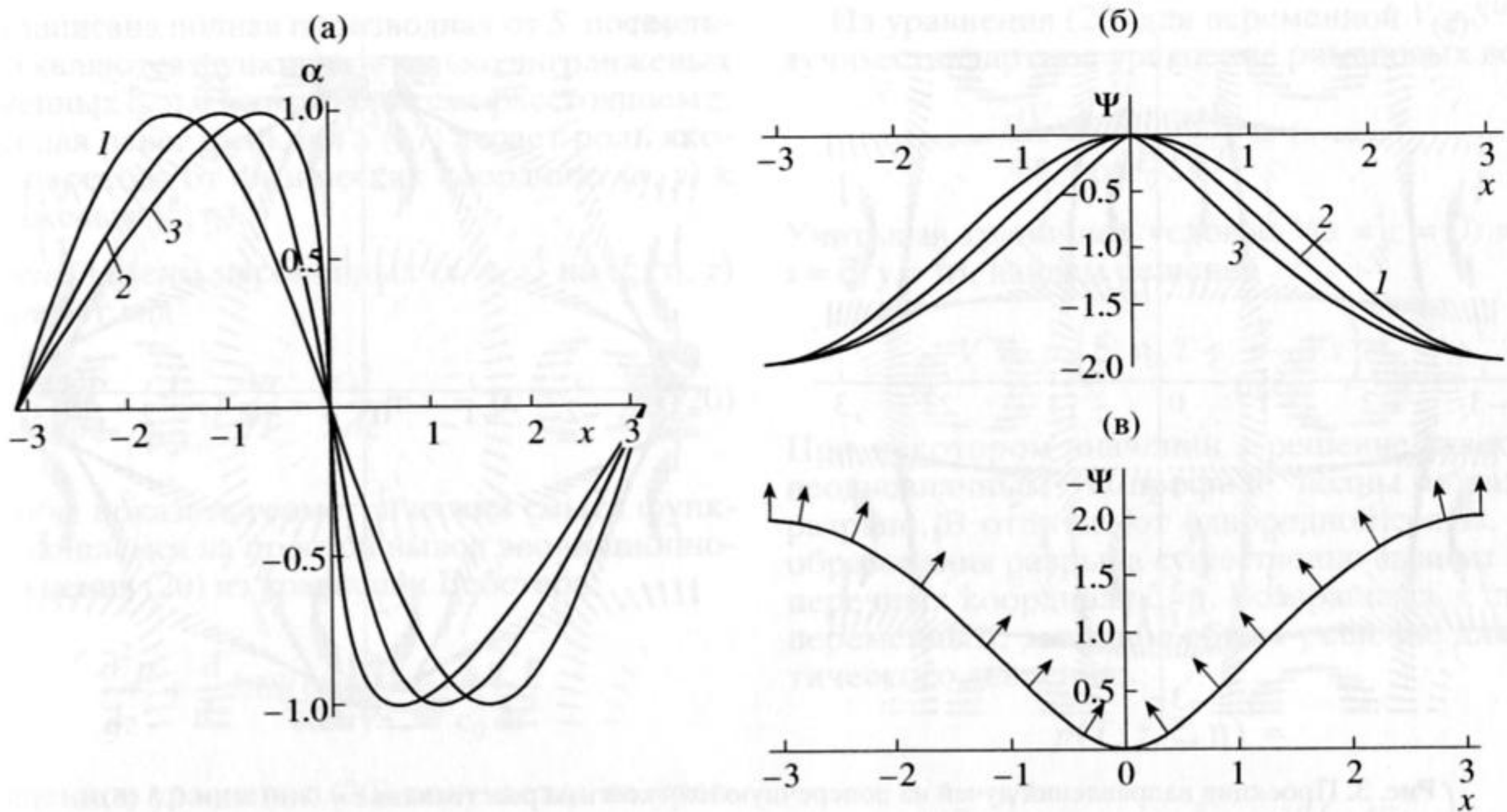


Рис. 1. Поперечное распределение наклона луча на различных расстояниях от экрана (а), эйконал на тех же расстояниях (б), направления лучей (в).

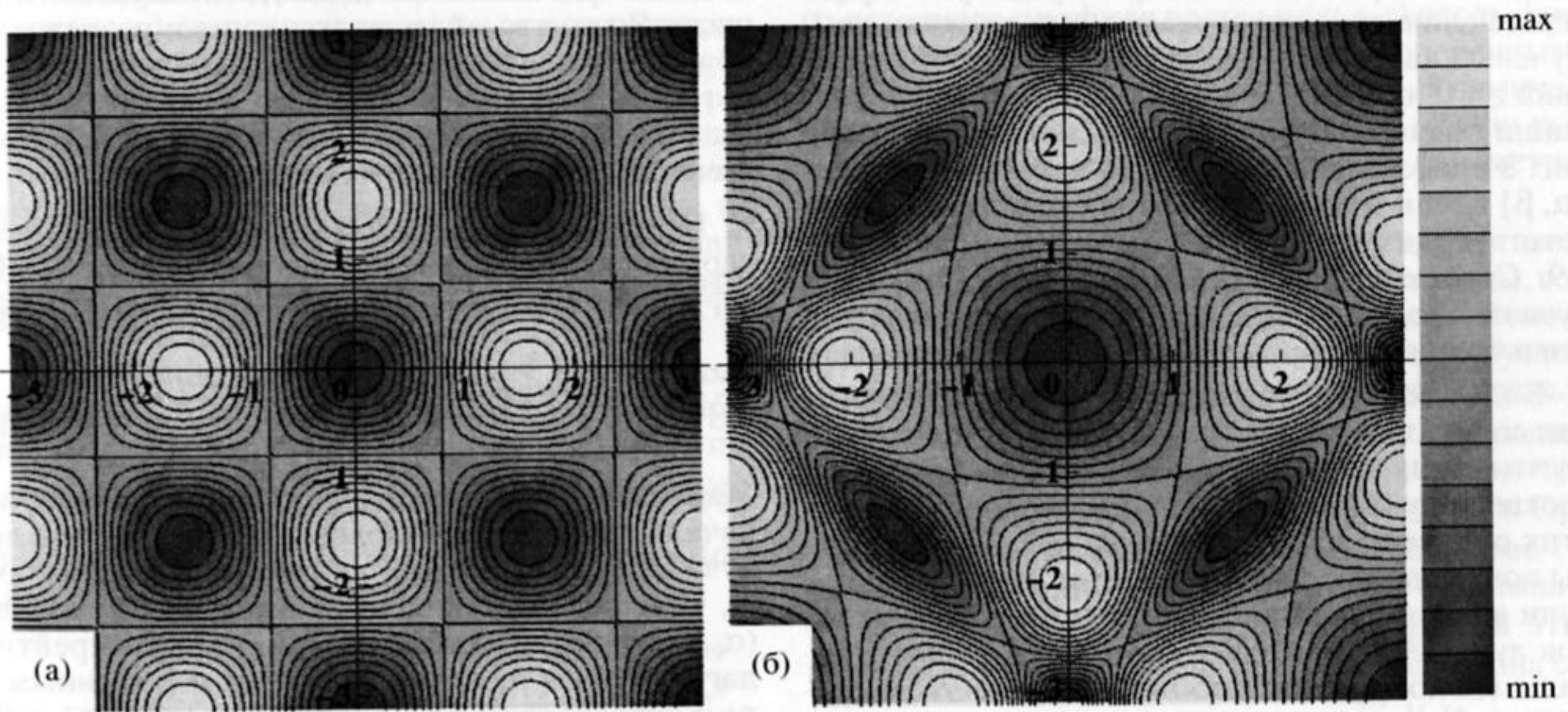


Рис. 2. Линии равного наклона лучей на расстояниях $z = 0$ (а) и $z = 0.5$ (б).

Представляет интерес картина лучей, рассчитанная по формулам (13) для двумерного фазового сдвига на экране. Расчет проведен для периодически искривленного фронта $\Psi_0 = \varphi \sin kx \sin ky$. Соответствующее распределение наклонов лучей на экране имеет вид

$$A(x, y) = k\varphi \cos kx \sin ky, \quad B(x, y) = k\varphi \sin kx \cos ky.$$

Линии равных углов скольжения лучей к плоскости $z = z_0$ определяются уравнением

$$\frac{\partial \Psi(x, y, z_0)}{\partial z} = \text{const},$$

$$\alpha^2(x, y, z_0) + \beta^2(x, y, z_0) = C^2 = \text{const}.$$

Здесь предполагается, что значения угла скольжения лежат в интервале от 0 до $\pi/2$.

Рис. 2 и 3, дополняя друг друга, показывают изменение поперечной структуры лучевой картины с расстоянием от экрана. На всех рисунках приведен один период лучевой картины, далее в попе-

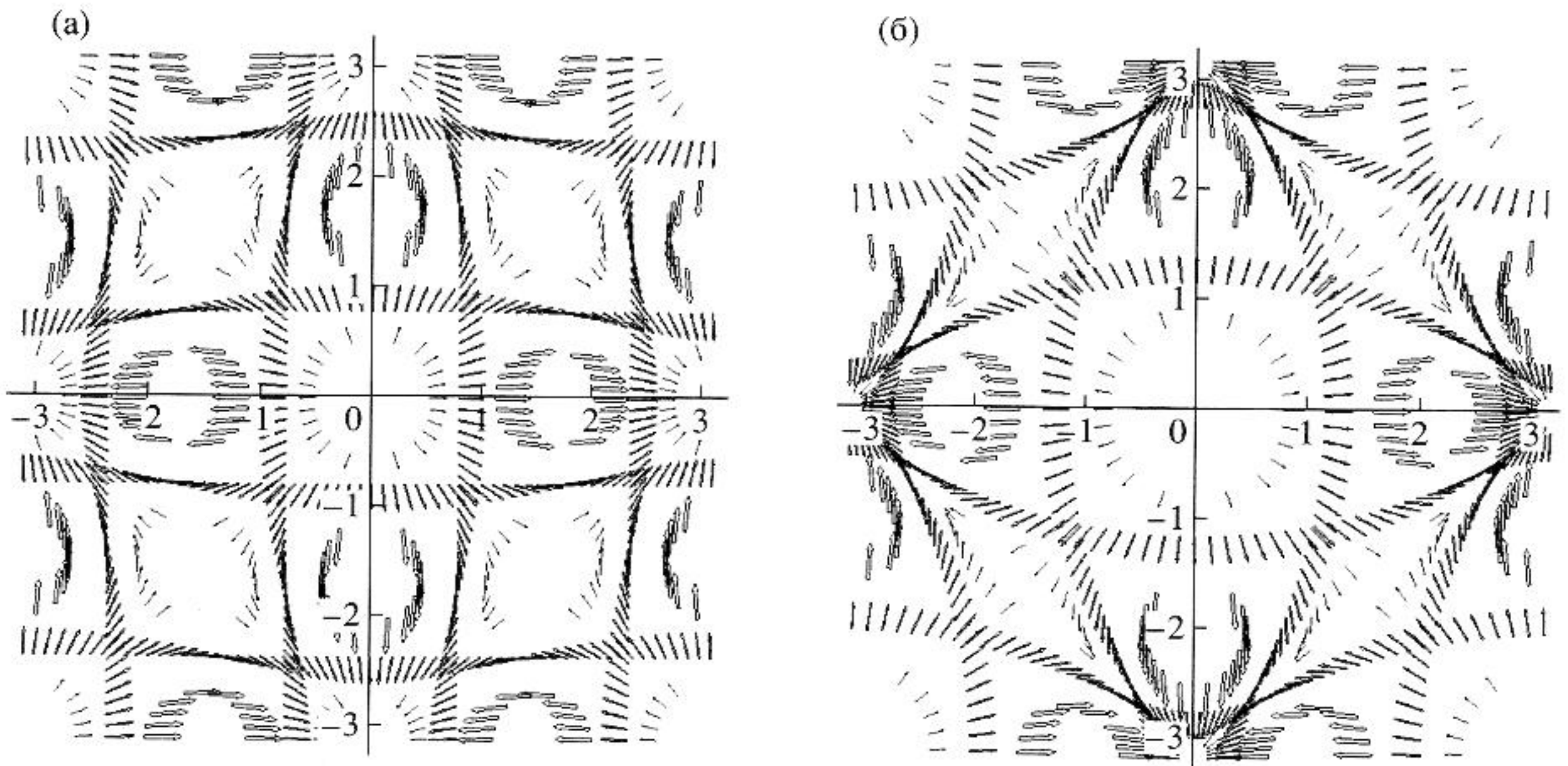


Рис. 3. Проекция направлений лучей на поперечную плоскость на расстояниях $z = 0$ (а) и $z = 0.5$ (б).

речном сечении ее вид периодически повторяется; рисунки построены при значениях параметров $\varphi = 1$, $k = 1$. При таком выборе параметров первое пересечение лучей происходит на расстоянии $z = 1$. Лучевые картины представлены для двух расстояний $z = 0$ и $z = 0.5$ от экрана. Рис. 2 представляет линии равных косинусов угла скольжения S . На рис. 3 представлены проекции лучевых векторов $\{\alpha, \beta\}$ вдоль трех уровней угла скольжения, соответствующих значениям константы $C = 0.5; 0.7; 0.9$. Стрелки указывают направление проекции луча на плоскость (x, y) , а их длина (для наглядности и толщины) пропорциональна углу наклона.

Более темные участки на рис. 2б в соответствии со шкалой (справа на рисунке) выделяют области малых значений косинуса угла скольжения, соответствующих углам, близким к $\pi/2$; лучи в этих областях, как показано на рис. 3, направлены почти вдоль оси z . Как следует из формул (14), лучи вблизи областей минимума функций наклонов лучей A и B слабо отклоняются от своих начальных координат. Наоборот, в области максимумов функций наклонов лучей, т.е. больших уровней S , или малых значений угла скольжения, лучи находятся почти в поперечной плоскости, и сильно сдвигаются от своих начальных координат. Следить за изменением лучевой картины можно так: лучи, соответствующие самым темным участкам, не сдвигаются, а лучи, соответствующие самым светлым участкам, сдвигаются наиболее далеко. Таким образом, изначально равные области малых и больших значений угла скольжения (например, для рассматриваемого случая линии уровня 0.5 образуют квадраты) искажаются, образуя области сгущения и разрежения лучей. Области сгущения лучей легко опреде-

лить по сближению светлых областей; в меньшей площади между ними размещается столько же лучей, сколько было в исходной, до искажения, площади. Ясно, что области сгущения и разрежения образуются вокруг "неподвижных" лучей, соответствующих максимальным и минимальным значениям набега фазы, из которых приходят почти параллельные пучки лучей.

Перейдем теперь к рассмотрению амплитудных характеристик волны. Уравнение переноса (8), (9) в функциях наклона луча при $\rho = \rho_0$ запишется так:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2} p \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) можно точно решить для любого начального профиля волны. Поскольку наклон луча (α, β) , попадающего в точку с координатами (x, y) , определяется однозначно и равен наклону (α_0, β_0) этого же луча при $z = 0$, удобно перейти к лагранжевым пространственным переменным ξ, η – координатам выхода луча из плоскости $z = 0$ и решать уравнение (19) на фиксированном луче. Выразим производные функций наклона луча в новых переменных. Учитывая выражения для производных (16), получим:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{S} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + 2z \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right) \right].$$

Последнему выражению с учетом (17) удастся придать простой вид

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dz}.$$

Здесь записана полная производная от S , поскольку α, β являются функциями только лагранжевых переменных ξ, η и не изменяются с расстоянием z . Введенная ранее функция S (17) играет роль якобиана перехода от физических координат (x, y) к лагранжевым (ξ, η) .

После замены переменных (x, y, z) на (ξ, η, z) (19) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{p}{2} \frac{d}{dz} \ln S = 0. \quad (20)$$

Чтобы показать геометрический смысл функции S , сошлемся на простой вывод эволюционного уравнения (20) из уравнения Вебстера:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{d}{dz} \ln S(\mu z) \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Упрощенное уравнение (20) получается из уравнения Вебстера в предположении медленности изменения профиля волны (3) в трубке с медленно изменяющимся поперечным сечением $S(\mu z)$. С другой стороны, элемент поперечного сечения лучевой трубки, вышедшей из малой окрестности точки (x_0, y_0) , не должен измениться при переходе к лагранжевым координатам; он равен $dxdy = S(z)d\xi d\eta$, где $S(z) = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$ – якобиан перехода. Таким образом, якобиан S имеет смысл поперечного сечения лучевой трубки (нормированного на начальную площадь лучевой трубки на экране) на расстоянии z от экрана, сформированной близкими лучами, вышедшими из окрестности точки $(\xi, \eta, z = 0)$.

В уравнении (20) переменные ξ и η играют роль параметров, поэтому (20) легко интегрируется в характеристиках. Удобно ввести новую переменную $s = \int_0^z S^{-1/2} dz$, так что $\partial/\partial z = S^{-1/2} \partial/\partial s$. Учитывая выражение (17) для функции $S = 1 + z(a + b) + z^2(ab - c^2)$, получим:

$$s = \frac{1}{\sqrt{ab - c^2}} \ln \left[\frac{dS/dz + 2\sqrt{ab - c^2} \sqrt{S}}{a + b + 2\sqrt{ab - c^2}} \right], \quad ab > c^2,$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{c^2 - ab}} \left(\arcsin \left[\frac{-dS/dz}{\sqrt{4c^2 + (a - b)^2}} \right] + \arcsin \left[\frac{a + b}{\sqrt{4c^2 + (a - b)^2}} \right] \right), \quad ab < c^2. \quad (21)$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = a, \quad \frac{\partial B}{\partial \eta} = b, \quad \frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{\partial B}{\partial \xi} = c.$$

Из уравнения (20) для переменной $V = S^{1/2} p$ получим стандартное уравнение римановых волн:

$$\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} V \frac{\partial V}{\partial T} = 0. \quad (22)$$

Учитывая граничное условие $V(s = z = 0) = p_0(T; x = \xi, y = \eta)$, найдем решение

$$V = p_0 \left(\xi, \eta, T + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} V s \right). \quad (23)$$

При некотором значении s решение становится неоднозначным (в профиле волны образуется разрыв). В отличие от однородной среды, длина образования разрыва существенно зависит от поперечных координат ξ, η . Возвращаясь к старым переменным, запишем общее решение для акустического давления:

$$p(T; z, \xi, \eta) = S^{-1/2} p_0 \left(\xi, \eta, T + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p S^{1/2} \int_0^z S^{-1/2} dz' \right). \quad (24)$$

Точное неявное решение (23), (24) уравнения переноса (19) описывает эволюцию произвольного исходного профиля волны $p_0(\tau; x, y)$ вдоль фиксированного луча с начальными поперечными координатами $x(z = 0) = \xi, y(z = 0) = \eta$. В физических координатах (14) выражение (24) можно рассматривать как решение, заданное в параметрической форме.

Таким образом, решение (24) описывает нелинейные искажения временного профиля волны, в то время как преобразование (14) определяет сложную пространственную структуру поля, обусловленную рефракцией лучей в неоднородной среде.

Рассмотрим пример. Пусть на экран падает плоская одиночная N -волна: $p_0 = -a_0 \tau / \tau_0$ при $-\tau_0 < \tau < \tau_0$ и $p_0 = 0$ для любых других значений τ . При распространении одиночной волны ее форма сохраняется, но длительность импульса τ_p и амплитуда разрыва a_N изменяются. Зависимости этих параметров от расстояния находятся из закона сохранения количества движения $\int_{-\infty}^{\infty} V d\tau = \text{const}$

(или $\tau_p(z) a_N(z) \sqrt{S(z)} = \tau_0 a_0$) для функции $V = p \sqrt{S}$ (23), которая удовлетворяет уравнению простых волн (22). Используя эту связь в решении (24), получим:

$$\frac{a_N}{a_0} = 2 z_{sh} \frac{d}{dz} \sqrt{1 + \frac{s(z)}{z_{sh}}}, \quad z_{sh} = \frac{\tau_0 \rho_0 c_0^3}{\varepsilon a_0}, \quad (25)$$

где $s(z)$ дается формулой (21).

На рис. 4 представлено поперечное распределение амплитуды разрыва для одиночного N -импульса в лучевых координатах (ξ, η) . Расчет про-

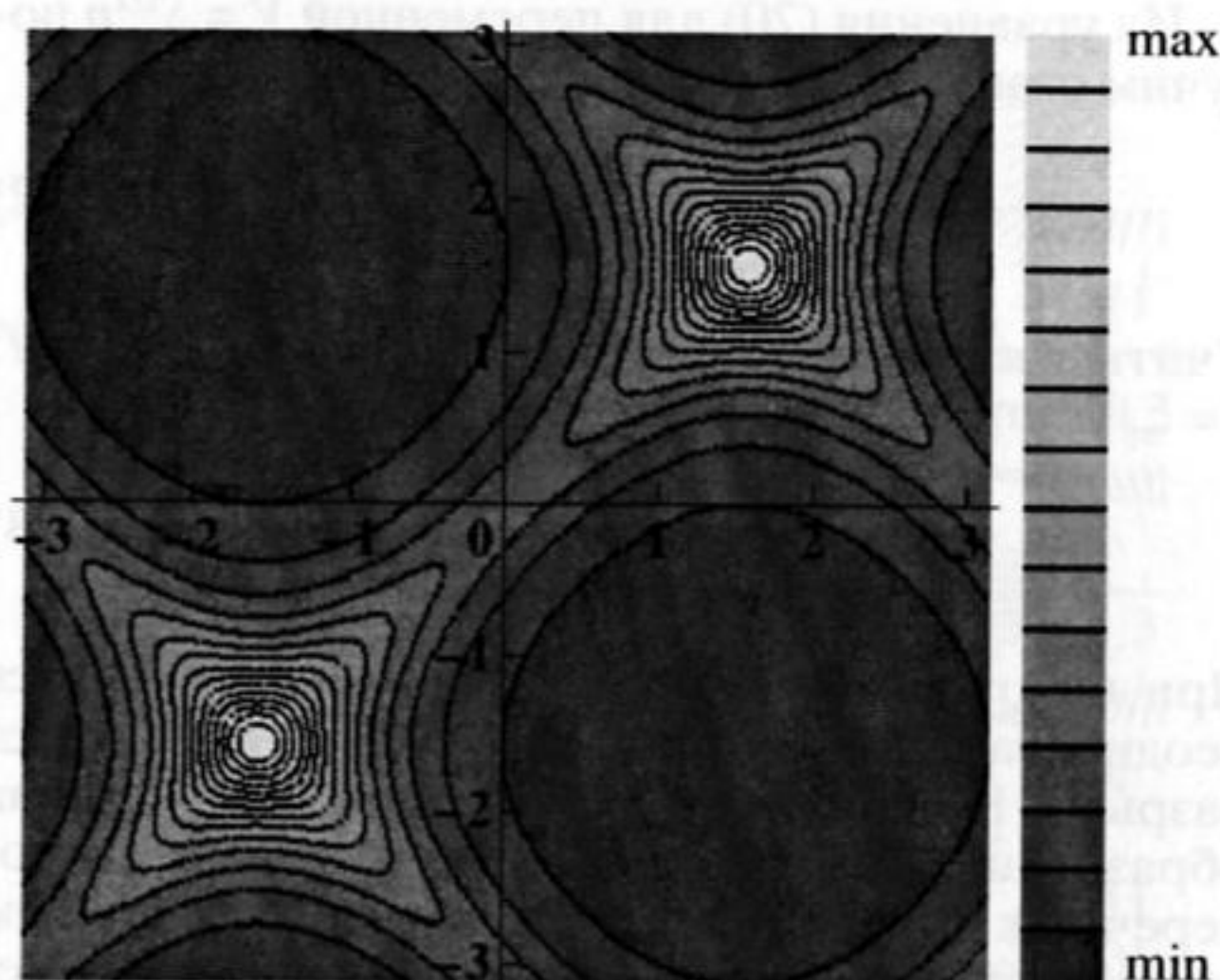


Рис. 4. Поперечное распределение амплитуды разрыва $a_N(\xi, \eta, Z = 0.9)$.

веден для исходного волнового фронта, периодически искривленного по закону, принятому при построении рис. 2 и 3. Видно, что в областях сгущения лучей происходит образование разрывов с большой величиной “скачка” давления. Перед областью пересечения лучей амплитуда разрывов резко возрастает; здесь необходимо учитывать дифракционные члены в уравнении (5). Итак, в областях сгущения лучей происходит фокусировка, нарастание амплитуды и нелинейные эффекты проявляются быстрее; в областях разрежения имеет место расфокусировка, и процессы идут медленнее.

На рис. 5 изображены одномерные распределения амплитуды разрыва при одной фиксированной поперечной координате $y = 0$ на различных расстояниях от экрана. На рис. 6 приведены двумерные поперечные распределения амплитуды разрыва уже в физических координатах для расстояний $Z = 0.5$ и $Z = 0.9$. На рис. 4–6 расстояния указываются в нелинейных длинах $Z = z/z_{sh}$. На рис. 6а, 6б отчетливо видны нелинейные искажения, вносимые рефракцией. В областях сгущения лучей скачки давления сильно нарастают и в распределении образуются острые “пики”; в областях разрежения распределение амплитуды разрывов выравнивается, причем минимальные значения оказываются меньшими, чем в однородной среде. Отметим, что аналогично может быть рассмотрена эволюция волны с периодическим во времени пилообразным профилем. Также интересно проследить эволюцию одного периода начального возмущения, например, соответствующего координатам ξ, η в квадрате от $-\pi$ до π . Вследствие рефракции форма исходного квадрата искажается, как показано на рис. 6в, 6г, иллюстрируя нелинейное преобразование от лучевых

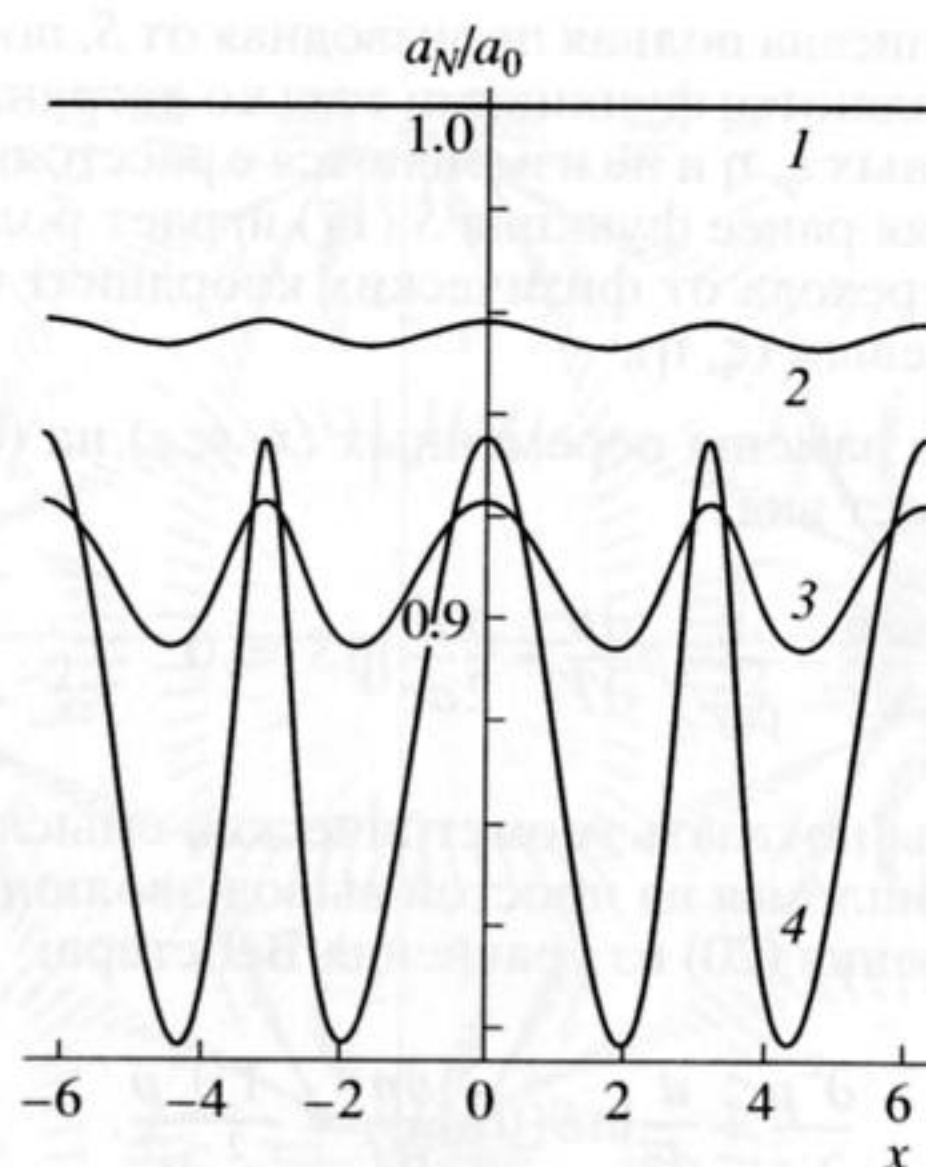


Рис. 5. Поперечное распределение амплитуды разрыва на расстояниях 1 – $Z = 0$; 2 – $Z = 0.1$; 3 – $Z = 0.25$; 4 – $Z = 0.5$.

координат к физическим. Хорошо видны области сгущения лучей, в которых лучи занимают все меньшую площадь, и разрежения, занимающих все большую площадь по мере распространения, а также образование узких и резких выбросов большой амплитуды разрыва.

Из неявного решения (24) нетрудно получить выражение для координаты образования разрыва в профиле волны [1, 11]. Обращение производной dp/dT в бесконечность для первоначально гармонической происходит на расстоянии z , таком, что $s(z) = z_{sh}$ (25). Поскольку s определяется сходимостями и зависит от поперечных координат, то разрывы будут образовываться на различных расстояниях вдоль разных лучей. На рис. 7 представлены зависимости длины образования разрыва от поперечной координаты η для лучей с координатами выхода $\xi = 0; \pi/4; \pi/3; 1.5$ (кривые 1–4) для рассмотренного выше периодического искривленного фронта. Поведение кривых на рис. 7 зависит от того, в какую область – сгущения или разрежения – попадает данный луч.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим теперь статистические характеристики волны, которая пересекает экран, сообщаящий волне случайный (в плоскости (x, y)) сдвиг фазы. Согласно решению (24), статистика волны в среде определяется статистикой производных от наклонов a, b, c , которые имеют смысл сходимости лучей при $z = 0$. Эти производные

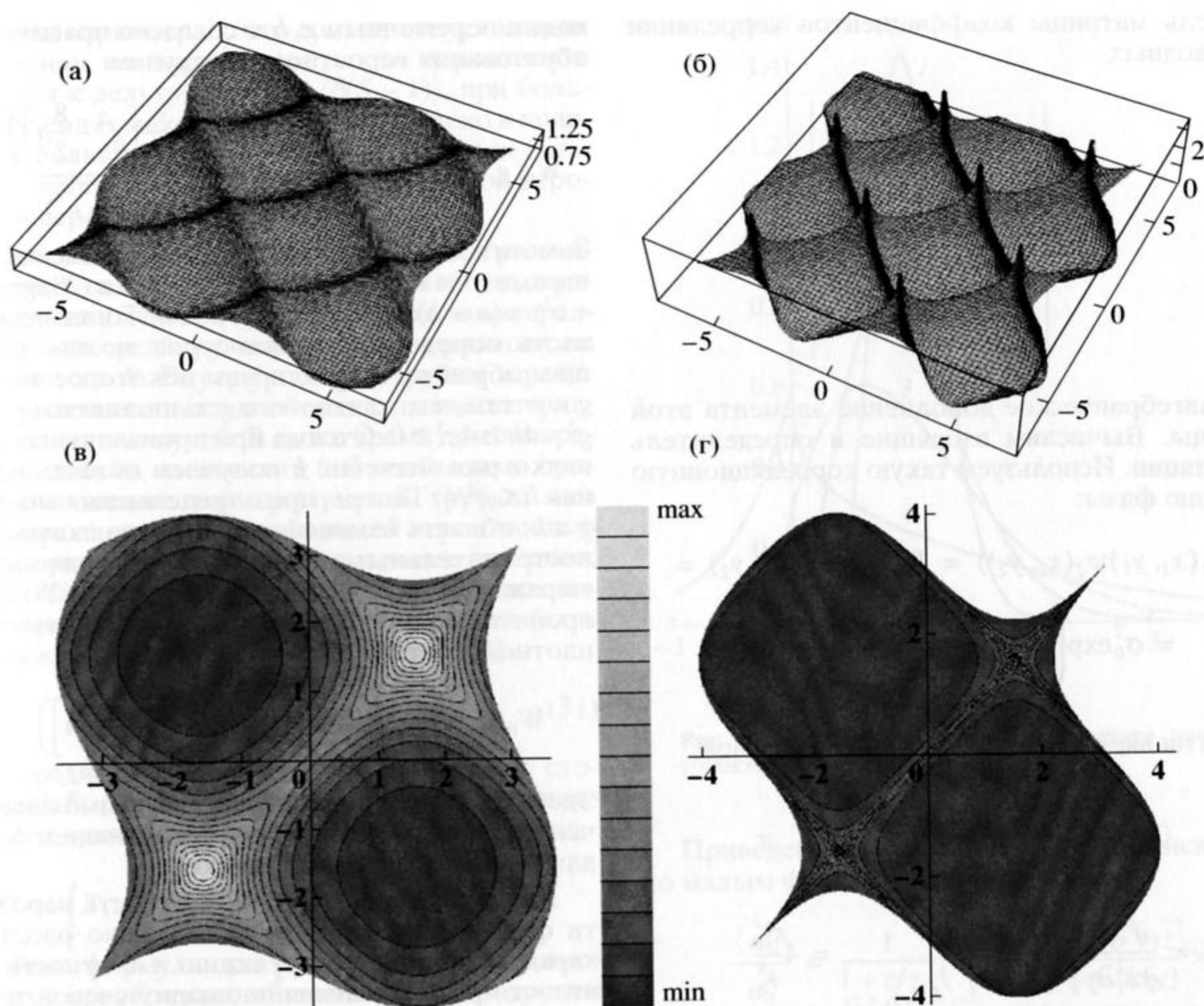


Рис. 6. Поперечные распределения амплитуды в физических координатах на расстоянии $Z = 0.5$ (а, в) и $Z = 0.9$ (б, г).

можно выразить через сходимости на произвольном расстоянии $z > 0$ от экрана.

Пусть задано распределение сходимостей на экране при $z = 0$:

$$W_0\left(a = \frac{\partial\alpha}{\partial x}, b = \frac{\partial\beta}{\partial y}, c = \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right).$$

Поскольку a, b, c , как вторые производные эйконала, являются зависимыми величинами, их совместное распределение W_0 вычисляется следующим образом. Зададим на экране случайную фазу, распределенную по нормальному закону. Совместное распределение производных также будет иметь нормальный вид:

$$W_0(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_a^2 \sigma_b^2 \sigma_c^2 (2\pi)^3 D}} \times \exp\left(-\frac{1}{2D} \sum_i \sum_k D_{ik} \frac{x_i x_k}{\sigma_i \sigma_k}\right). \quad (26)$$

Здесь учтено, что средние значения производных равны нулю. При суммировании величина x_i пробегает значения a, b, c . В выражении (26) σ_i^2 – дисперсия соответствующей производной, D – опре-

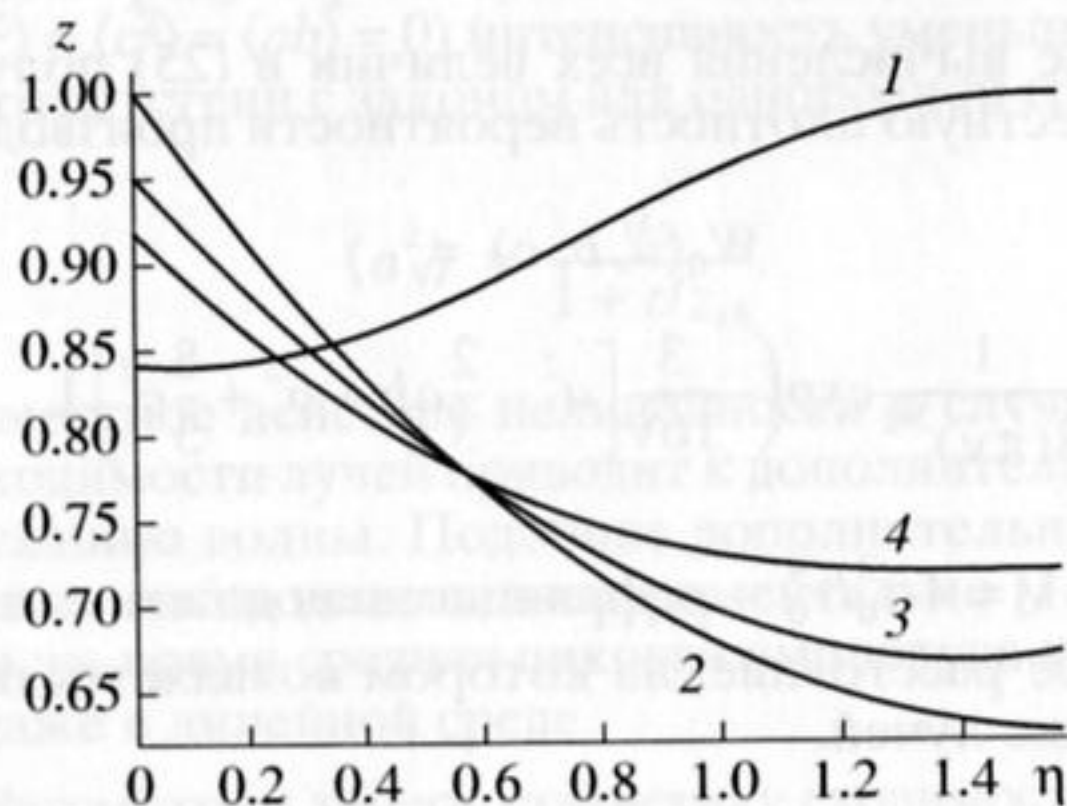


Рис. 7. Зависимость длины образования разрыва от поперечной координаты.

делитель матрицы коэффициентов корреляции производных

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\langle ab \rangle}{\sigma_a \sigma_b} & \frac{\langle ac \rangle}{\sigma_a \sigma_c} \\ \frac{\langle ba \rangle}{\sigma_a \sigma_b} & 1 & \frac{\langle bc \rangle}{\sigma_b \sigma_c} \\ \frac{\langle ca \rangle}{\sigma_a \sigma_c} & \frac{\langle cb \rangle}{\sigma_c \sigma_b} & 1 \end{vmatrix},$$

D_{ik} – алгебраическое дополнение элемента этой матрицы. Вычислим входящие в определитель корреляции. Используем такую корреляционную функцию фазы:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1(x_1, y_1) \psi_2(x_2, y_2) \rangle &= K(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \\ &= \sigma_0^2 \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{r_0^2}\right). \end{aligned}$$

Моменты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle ab \rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y_2^2} \right\rangle \Bigg|_{x_1=x_2, y_1=y_2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \langle \psi_1 \psi_2 \rangle \Bigg|_{x_1=x_2, y_1=y_2} = 4 \frac{\sigma_0^2}{r_0^4}. \end{aligned}$$

Аналогично находим остальные коэффициенты корреляции в (26):

$$\begin{aligned} \langle ac \rangle = \langle bc \rangle &= 0, \quad \langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = 12 \frac{\sigma_0^2}{r_0^4}, \\ \langle c^2 \rangle &= 4 \frac{\sigma_0^2}{r_0^4}. \end{aligned}$$

После вычисления всех величин в (25) получим совместную плотность вероятности производных

$$\begin{aligned} W_0(a, b, c) &= \\ &= \frac{1}{8(\pi v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{3}{16v} \left[a^2 - \frac{2}{3} ab + b^2 + \frac{8}{3} c^2 \right]\right), \end{aligned} \quad (27)$$

здесь $v = 4\sigma_0^2/r_0^4$ – рефракционная длина – характерное расстояние, на котором появляется пересечение лучей.

Распределение (27) можно упростить, заметив, что сечение лучевой трубки и решение (24) зависят от двух параметров $g = a + b$, $h = ab - c^2$. Пере-

ходя к переменным g, h, c согласно правилам преобразования вероятности, получим:

$$W_0(g, h, c) = \frac{1}{4(\pi v)^{3/2}} \frac{\exp\left(-\frac{3}{16v} \left[g^2 - \frac{8}{3} h \right]\right)}{\sqrt{g^2 - 4(h + c^2)}}. \quad (28)$$

Заметим, что для любых допустимых значений параметров выражение под корнем в (28) $g^2 - 4(h + c^2) = (a + b)^2 - 4ab - 4c^2 = (a - b)^2 - 4c^2 \geq 0$. Тогда задать область определения параметров можно следующим образом. Зафиксируем некоторое значение g и учтем, что для любого g выполняется условие $g^2 - 4h \geq 4c^2 \geq 0$. Отсюда при произвольных значениях c для значений h получаем область изменения $h \leq g^2/4$. Теперь, при определенных значениях g и h , область изменения параметра c ограничена неотрицательными значениями подкоренного выражения в (28): $c^2 \leq g^2/4 - h$. Тогда (28) можно проинтегрировать по c и получить двумерную плотность вероятности:

$$W_0(g, h) = \frac{1}{4\sqrt{\pi v^3}} \exp\left(-\frac{3}{16v} \left[g^2 - \frac{8}{3} h \right]\right). \quad (29)$$

Здесь параметр g принимает все возможные значения, а параметр h ограничен условием $h \leq g^2/4$ для каждого фиксированного g .

Используя полученную плотность вероятности функций сходимости (27), можно рассчитать характеристическую функцию и плотность вероятности распределения площади лучевой трубки. Производя соответствующее усреднение, получим для характеристической функции

$$\begin{aligned} \Theta(k) &= \langle \exp(iqS) \rangle = \\ &= \frac{16}{\sqrt{4 - iql^2} (8 + iql^2)} \exp\left(iq - \frac{q^2 l^2}{4 - iql^2}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

где $l = 4\sqrt{v}z$. Отсюда дифференцированием по безразмерному параметру q можно получить выражения для среднего значения площади лучевой трубки и ее старших моментов. Приведем, в частности, средние значения

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= 1, \quad \langle S^2 \rangle = 1 + 8vz^2 + 12v^4z^4, \\ \langle S^3 \rangle &= 1 + 24vz^2 + 132v^2z^4 + 48v^3z^6. \end{aligned}$$

Таким образом, площадь лучевой трубки в среднем при распространении не изменяется, в то же время дисперсия с ростом расстояния возрастает, что говорит о повышении вероятности пересечения лучевых трубок и появления каустик.

Плотность вероятности может быть рассчитана как преобразование Фурье от характеристической функции. Рассчитанные для значений параметра $l = 0.4; 0.7; 1; 2$ (кривые 1–4) плотности вероятности представлены на рис. 8. При малых

значениях параметра l , что соответствует малым расстояниям от экрана, плотность вероятности стремится к дельта-функции ($\delta(S - 1)$), при больших значениях максимум сдвигается влево и появляются большие хвосты в области отрицательных значений, что говорит о значительной вероятности пересечения лучевых трубок.

Плотность вероятности (27) позволяет рассчитать среднее значение любой функции от сходимостей в сечении лучевой трубки. Однако такое среднее не равно среднему значению, измеряемому на плоскости $z > 0$. Внутри лучевой трубки вероятность акустического давления определяется только сходимостями лучей. В то же время при измерении давления на плоскости $z > 0$ необходимо принять во внимание размер лучевой трубки; чем больше ее площадь, тем с большей вероятностью при измерении будет получено значение давления, соответствующее данной трубке. С учетом сказанного, плотность вероятности (27) должна быть умножена на площадь лучевой трубки S [4]:

$$W(a, b, c) = SW_0(a, b, c). \quad (31)$$

Тогда среднее от произвольной функции от сходимостей $F(a, b, c)$, в частности, давления и интенсивности, можно найти по следующей формуле:

$$\langle F \rangle = \int F(a, b, c) S(a, b, c) W_0(a, b, c) da db dc.$$

Подобные формулы для распределения сходимостей и их преобразований при переходе к другим координатам приведены в работах [4, 7, 13].

Плотность вероятности (31) с начальным распределением (27) или выраженная через параметры g, h

$$W(g, h) = SW_0(g, h) = (1 + gz + hz^2) W_0(g, h)$$

позволяет рассчитать статистические характеристики волны, прошедшей через случайный фазовый экран. Рассчитанная по распределению (31) средняя амплитуда волны после экрана в сравнении с амплитудой в однородной среде представлена на рис. 9а (кривая 1 – амплитуда в однородной среде, 2 – усредненная случайная волна). В среднем флуктуации приводят к уменьшению амплитуды по сравнению с амплитудой в однородной среде. На рис. 9б представлены разность средней интенсивности случайной волны и интенсивности волны в однородной среде (кривая 1), а также дисперсия случайной волны (кривая 2). Видно, что случайно модулированная волна поглощается в среде быстрее.

На рисунках 9в, г приведены те же зависимости при усреднении в фиксированной лучевой трубке с распределением (27). Видно, что различные способы усреднения приводят к принципиально различному поведению средних величин.

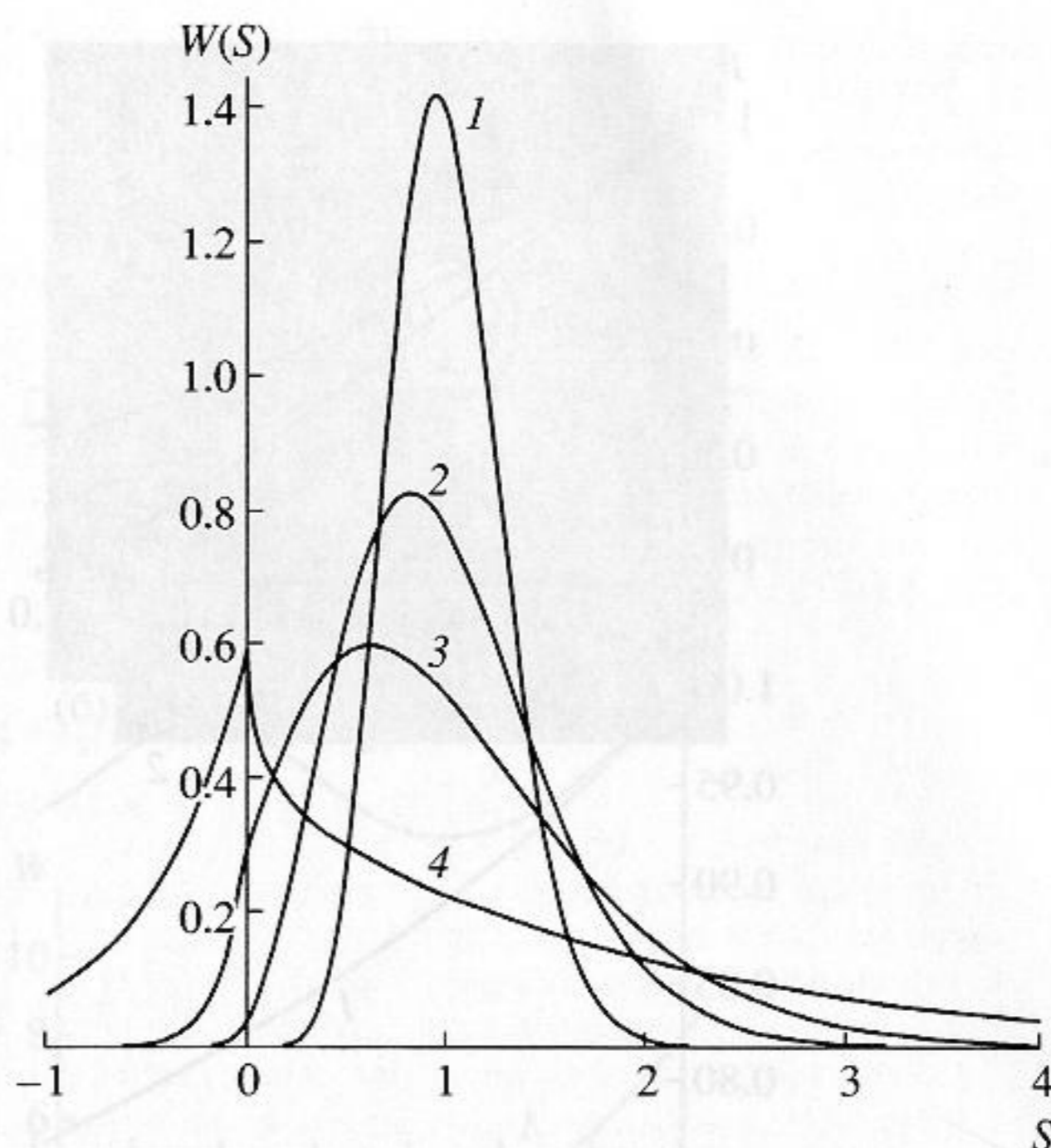


Рис. 8. Плотности вероятности площади лучевой трубки.

Приведем разложение средней интенсивности по малым флуктуациям сходимостей:

$$\begin{aligned} \frac{\langle a_N^2 \rangle}{a_0^2} &= \frac{1}{1 + z/z_{sh}} \left(1 - \frac{(\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle) z^3}{8z_{sh}(1 + z/z_{sh})} \times \right. \\ &\times \left(1 - \frac{z}{2z_{sh}(1 + z/z_{sh})} \right) - \frac{\langle ab \rangle z^3}{8z_{sh}(1 + z/z_{sh})} \times \\ &\times \left. \left(\frac{2}{3} - \frac{z}{z_{sh}(1 + z/z_{sh})} \right) - \frac{z^3 \langle c^2 \rangle}{6z_{sh}(1 + z/z_{sh})} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что согласно решению (25), средняя интенсивность при отсутствии нелинейности ($\epsilon = 0$, $z_{sh} \rightarrow \infty$) сохраняется и равна интенсивности на входе в среду. При отсутствии флуктуаций ($\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \langle c^2 \rangle = \langle ab \rangle = 0$) интенсивность уменьшается в соответствии с законом для однородной среды

$$\langle a_N^2 \rangle = \frac{a_0^2}{1 + z/z_{sh}}.$$

Совместное действие нелинейности и случайной расходимости лучей приводит к дополнительному затуханию волны. Подобное дополнительное затухание наблюдалось экспериментально [14, 15]. В то же время средняя пиковая амплитуда убывает даже в линейной среде.

Рассмотрим теперь статистику сходимостей лучей $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = a'$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = c'$, $\frac{\partial \beta}{\partial y} = b'$ в физических координатах

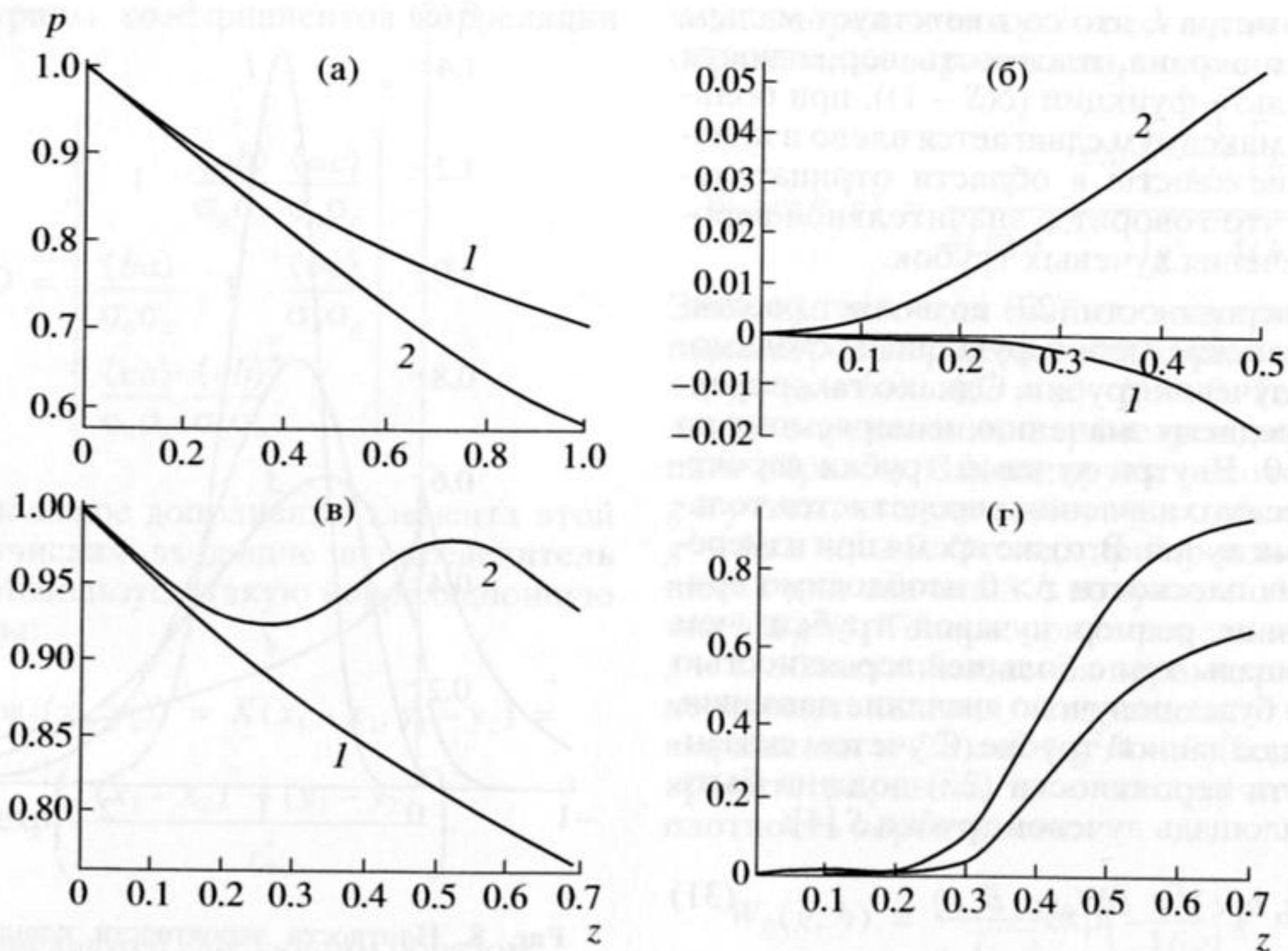


Рис. 9. а, в) Амплитуда плоской волны в однородной среде (1) и усредненная амплитуда случайно модулированной волны (2); б, г) Разность интенсивностей случайно модулированной и плоской волн $\langle p^2 \rangle - 1/(1+Z)$ (1), дисперсия $\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$ (2).

натах. Плотность вероятности сходимостей a', b', c' можно найти из распределения сходимостей в лучевых координатах (31) согласно правилам преобразования вероятности. Для этого нужно выразить величины a, b, c через a', b', c' и найти якобиан перехода. Из решения (13) аналогично (16) мы можем записать следующие соотношения для производных:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \left(1 - z \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial A}{\partial \eta} \left(-z \frac{\partial \beta}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \left(1 - z \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \frac{\partial A}{\partial \eta} \left(-z \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial \xi} \left(1 - z \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial B}{\partial \eta} \left(-z \frac{\partial \beta}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial \xi} \left(1 - z \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \frac{\partial B}{\partial \eta} \left(-z \frac{\partial \beta}{\partial y} \right).$$

Отсюда можно получить как решения (16) для производных в физических координатах, так и обратные выражения для производных в лучевых координатах:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{1}{S'} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \alpha \partial \beta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \alpha \partial \beta}{\partial y \partial x} \right) \right), \quad \frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{1}{S'} \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} = \frac{1}{S'} \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial \eta} = \frac{1}{S'} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} - z \left(\frac{\partial \alpha \partial \beta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \alpha \partial \beta}{\partial y \partial x} \right) \right)$$

$$S' = 1 - z \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \alpha \partial \beta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \alpha \partial \beta}{\partial y \partial x} \right).$$

Или, в принятых обозначениях:

$$a = \frac{a' - z(a'b' - c'^2)}{S'}, \quad b = \frac{b' - z(a'b' - c'^2)}{S'}, \quad (32)$$

$$c = \frac{c'}{S'}, \quad S' = 1 - z(a' + b') + z^2(a'b' - c'^2).$$

Можно показать, что якобиан преобразования плотности вероятности равен $(S')^{-3}$, а также, что $S = (S')^{-1}$. Тогда окончательно получаем:

$$W(a', b', c') = (S')^{-4} W_0(a, b, c). \quad (33)$$

где a, b, c, S' определяются формулами (32).

Для анализа (33) рассмотрим сечения этой функции при различных расстояниях от экрана для случая $c' = 0$, приведенные на рисунках 10а–в для значений $Z = 0; 0.25; 0.5$. Изначально симметричное гауссовское распределение искажается, теряет симметрию, становится более узким, и максимум распределения сдвигается в сторону положительных значений сходимостей, что соответствует увеличению вероятности наблюдения расходящихся лучей. Также на рисунке 10г пред-

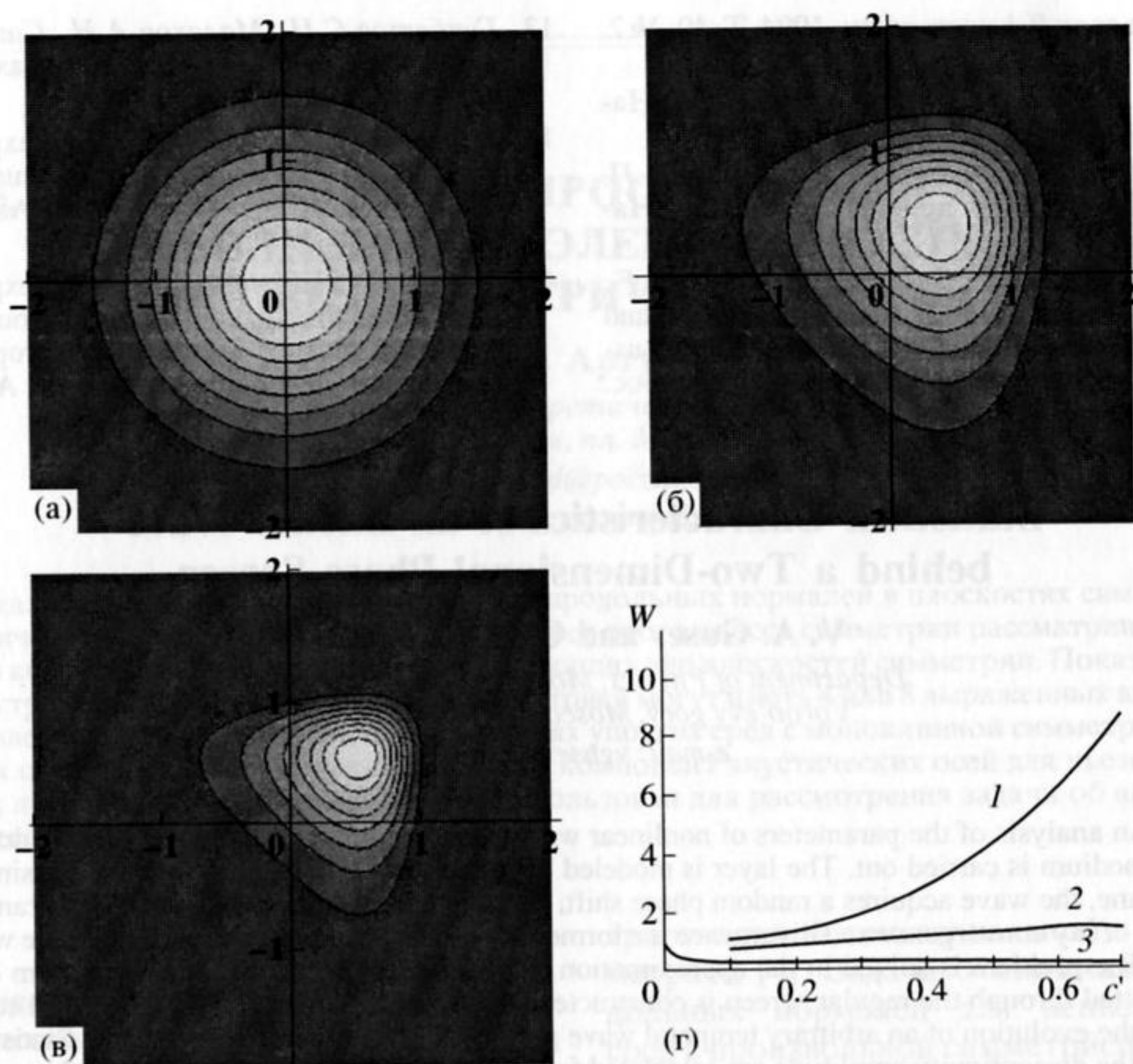


Рис. 10. Эволюция функции распределения сходимости лучей (расстояния $Z = 0$ (а); 0.25 (б); 0.5 (в)) и зависимость ее максимума от параметра c' (г).

ставлена зависимость максимального значения сечения функции распределения для трех параметров $c' = 0; 0.5; 1$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием аналитического подхода получены точные решения динамических и статистических задач о прохождении интенсивных акустических волн через фазовый экран, моделирующий такие среды, как турбулентная атмосфера и океан, биологические ткани. Эти решения позволяют проанализировать более широкий класс задач и рассчитать разнообразные статистические характеристики нелинейных акустических полей, формируемых импульсными и периодическими возмущениями; представленные здесь графики лишь иллюстрируют основные явления в наиболее простых случаях.

Работа поддержана грантами РФФИ и Ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
2. Руденко О.В. Взаимодействие интенсивных шумовых волн // УФН. 1986. Т. 149. В. 3. С. 413–447.
3. Pierce A.D. Spikes on sonic boom pressure wave forms // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. P. 1052–1061.
4. Rudenko O.V., Enflo B.O. Nonlinear N-wave Propagation through a One-dimensional Phase Screen // Acustica. 2000. V. 86. P. 229–238.
5. Куличков С.Н. Дальнее распространение звука в атмосфере (обзор) // Известия Академии наук. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28. № 4. С. 339–361.
6. Руденко О.В. Нелинейные методы в акустической диагностике (Обзор) // Дефектоскопия. 1993. С. 24–32.
7. Дубровский А.Н., Руденко О.В., Хохлова В.А. Флуктуационные характеристики волны звукового удара после прохождения случайно-неоднородного слоя // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 623–628.
8. Thomas J.L., Fink M.A. Ultrasonic beam focusing through tissue inhomogeneities with a time reversal mirror: application through transscull therapy // IEEE Trans. Ultrasonics Ferroelectr. Freq. Control. 1996. V. 43. № 6. P. 1122–1129.
9. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Уравнения высокочастотной нелинейной акустики

- неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 290–294.
10. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
 11. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн (2-е издание, перераб. и доп.). М.: Наука, 1990. 432 с.
 12. Blanc-Benon P., Lipkens B., Dallois L., Hamilton M.F., Blackstock D.T. Propagation of finite-amplitude sound through turbulence: Modeling with geometrical acoustics and the parabolic approximation // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 111. № 1. Pt 2. P. 487–498.
 13. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
 14. Lipkens B., Blackstock D.T. Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. Part 1: General results // J. Acoust. Soc. Am, 1998. V. 104. P. 148–158.
 15. Lipkens B., Blackstock D.T. Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. Part 2: Effect of turbulence intensity and propagation distance through turbulence // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. P. 1301–1309.

Statistical Characteristics of an Intense Wave behind a Two-Dimensional Phase Screen

V. A. Gusev and O. V. Rudenko

*Department of Physics, Moscow State University,
Vorob'evy gory, Moscow, 119992 Russia
e-mail: vgusev@nm.ru*

Abstract—An analysis of the parameters of nonlinear waves transmitted through a layer of a randomly inhomogeneous medium is carried out. The layer is modeled by a two-dimensional phase screen. Passing through the screen plane, the wave acquires a random phase shift. The wave front becomes distorted, and randomly located regions of ray convergence and divergence are formed, in which the nonlinear evolution of the wave alters profoundly. The problem is solved in the approximation of geometrical acoustics. The ray pattern of a plane wave transmitted through the regular screen is constructed. The solution that describes the spatial structure of the field and the evolution of an arbitrary temporal wave profile behind the screen is obtained. Statistical characteristics of the discontinuity amplitude are calculated for different distances from the screen. A random modulation is shown to result in a faster (in comparison with the case of a homogeneous medium) nonlinear attenuation of the wave and in the smoothing of a shock profile. The distribution function of the wave field parameters becomes broader because of the random focusing effects.