

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГЕОСФЕРАХ, ПРЕДШЕСТВУЮЩИЕ СИЛЬНЫМ СЕЙСМИЧЕСКИМ СОБЫТИЯМ

¹ Учреждение Российской академии наук Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

² Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

ВВЕДЕНИЕ

С начала 1970-х годов в научной литературе периодически появляются сообщения о наблюдении аномальных явлений в атмосфере, ионосфере и в системе теллурических токов в виде ультранизкочастотных вариаций электромагнитного поля перед сильными сейсмическими событиями [Гульельми, 2007; Гохберг, Шалимов, 2008]. Отмеченные явления, однако, до сих пор не получили всестороннего объяснения. В то же время следует отметить, что определенные достижения в данной области выглядят весьма обнадеживающе и тем самым стимулируют дальнейшие исследования взаимосвязи литосферных, атмосферных и ионосферных процессов [Копытенко, Исмагилов и др., 2000; Kamogawa, 2006; Гульельми, 2007].

Известны работы по изучению методами активного зондирования ионосферных аномалий (в том числе вариаций количества свободных электронов) и их связи с последующими сильными землетрясениями (с магнитудой более 6) в районе о. Тайвань [Liu et al., 2000]. Также отмечались аномалии в нижней ионосфере перед сейсмическими событиями по наблюдениям распространения КНЧ электромагнитных волн (10–20 кГц) от радиопередатчика по волноводу, сформированному проводящей поверхностью Земли и ионосферным слоем D (50–90 км). При этом интенсивность и фаза КНЧ электромагнитных волн на принимающей стороне связывались с изменениями свойств волновода между источником и приемником [Gufeld et al., 1992]. В диапазонах частот от нескольких Гц до 3 кГц и от 30 до 300 кГц были исследованы аномалии распространения радиоволн во время восхода и захода Солнца перед землетрясениями с $M > 6$ [Molchanov, Hayakawa, 1998]. На этой же экспериментальной базе было отмечено аномальное распространение КНЧ сигналов за несколько дней

до землетрясений с магнитудой более 5 [Shvets et al., 2004].

В настоящее время существует достаточное количество экспериментальных наблюдений аномальных ионосферных явлений в связи с подготовкой крупных сейсмических событий, которые позволяют составить первое представление о процессах, определяющих механизмы трансформации и передачи энергии из литосферы в атмосферу-ионосферу (рис. 1) [Kamogawa, 2006]. Одним из таких механизмов может быть возникновение электрического поля вблизи поверхности Земли в связи с эманациями радона и его последующим распадом. Гипотеза образования и миграции из зоны готовящегося очага землетрясения к поверхности Земли микротрещин, несущих положительный заряд (аналог диффузии «дырок» в полупроводниках) подтверждена лабораторными экспериментами [Freund, 2000]. Однако отмеченные механизмы формирования ионосферных аномалий перед землетрясениями до сих пор в натуральных экспериментах не наблюдались [Kamogawa, 2006].

В качестве альтернативного подхода было выдвинуто предположение, что атмосферные гравитационные волны распространяются до ионосферы и возбуждают ее перед сильными сейсмическими событиями. Возможными источниками гравитационных волн в атмосфере являются длиннопериодные колебания поверхности Земли или приповерхностные тепловые возмущения. Подобный механизм базируется на результатах наблюдений за процессом генерации атмосферных гравитационных волн сейсмическими колебаниями и волнами цунами. Однако до сих пор нет сообщений о длиннопериодных колебаниях поверхности Земли перед землетрясением, даже в измерении с использованием высокочувствительных сверхпроводящих гравиметров. Несмотря на то что некоторые сообщения свидетельствуют о повышении поверхностной температуры перед землетрясением,



Рис. 1. Схематическое представление возможных моделей и механизмов взаимодействий в системе «литосфера – атмосфера – ионосфера» на этапе подготовки сейсмического события. По материалам [Katogawa, 2006]

инфракрасном излучении с поверхности и скрытых аномалиях теплового потока, – представляется затруднительным объяснить, как именно подобного рода процессы могут влиять на ионосферу через слой атмосферы [Katogawa, 2006].

Настоящая работа представляет собой попытку дать теоретическое объяснение процессам распространения крайненизкочастотных акустических колебаний в системе «литосфера – стратифицированная атмосфера – ионосфера» в районе формирования очага сильного сейсмического события. Исследование акустического излучения из ограниченной области с поверхности Земли в атмосферу представляет интерес не только в плане возможности мониторинга процессов подготовки сейсмических событий, но и позволяет составить более полную картину взаимодействия различных геосфер.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Известно, что в зоне готовящегося сейсмического события в результате концентрации тектонических напряжений могут сформироваться приповерхностные области разуплотнения, которые академик А.С. Алексеев определил как пограничный слой дилатансии [Alekseev, 1993]. Линейные размеры приповерхностной зоны дилатансии могут достигать сотен километров и, таким образом, могут рассматриваться в качестве возможного эффективного источника акустических возмущений. Большие размеры источника возмущений позволяют ограничиться при исследовании акустического поля вплоть до достаточно высоких слоев атмосферы поршневой моделью излучения звука и рассмотреть эволюцию плоских волн. При этом следует учитывать, что амплитуда акустических

волн, будучи малой по сравнению с внутренним давлением в твердых телах, может оказаться большой по сравнению с характерным внутренним давлением в воздухе. Таким образом, при исследовании процессов распространения акустических волн в атмосфере необходимо учитывать и нелинейные эффекты.

Реальная атмосфера является слоисто-неоднородной средой, при описании которой необходимо учитывать большое число различных эффектов. Наиболее существенными являются нелинейность, стратификация и локальные неоднородности, а также вязкость среды. Необходимость учета нелинейных эффектов связана не только с возможностью генерации интенсивных волн, но и с экспоненциальным ростом амплитуды волны при распространении в атмосфере с уменьшающейся плотностью по высоте.

Задачи генерации акустических возмущений колебаниями земной поверхности и формирования волновых структур в атмосфере исследовалась в работах академика Г.С. Голицына и его учеников [Голицын, 1965; Голицын, Кляцкин, 1967; Голицын, Романова, 1968; Голицын, Островский, Чунчузов, 1982 и др.]. При этом основное внимание было уделено эволюции гармонических сигналов в атмосфере и влиянию ее параметров на характеристики волн. Подробно было изучено влияние вязкости и теплопроводности, учтено, что эффективная вязкость растет с высотой. Было выведено обобщенное уравнение Бюргера для описания совместного действия нелинейных и диссипативных эффектов при распространении в атмосфере и найдены модельные решения для исходно синусоидальной волны.

Целью данной работы является развитие существующих теоретических положений с целью описания эволюции импульсных сигналов в стратифицированной атмосфере. Полученные ниже результаты базируются на найденных точных и асимптотических ре-

шениях обобщенного уравнения Бюргерса. Основное внимание уделяется при этом сравнению нелинейных эффектов для периодических и импульсных сигналов.

Вначале приведем вывод нелинейного волнового уравнения, позволяющего описывать интенсивные волны в атмосфере с точностью, по крайней мере, до квадратичных членов. Для этого запишем исходную систему одномерных уравнений гидродинамики, учитывающих все упомянутые выше факторы.

Это уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

и уравнение состояния

$$p = p(\rho), \quad s = \text{const}. \quad (3)$$

В этих уравнениях u – колебательная скорость частиц среды, p – давление, ρ – плотность среды, s – энтропия, g – ускорение свободного падения, η – коэффициент вязкости, координата x направлена вертикально вверх. Уравнение (1) учитывает влияние силы тяжести и вязкости среды на распространение волны. Стратификация неявно входит в уравнения (1)–(3) за счет зависимости равновесных значений плотности и давления от координаты. Локальную неоднородность среды будем учитывать зависимостью от координат равновесной скорости звука $c_0(x)$. Последнее уравнение (3) связано с адиабатичностью распространения акустических волн, поскольку за время прохождения волны состояние среды не успевает заметно измениться. Подобная модель стратифицированной среды была использована в работах [Голыцын, Романова, 1968] и [Гохберг, Шалимов, 2008] для анализа влияния вязкости и нелинейности соответственно на профиль акустической волны. Однако исследование было ограничено эволюцией исходного синусоидального сигнала, а также были найдены решения для уравнения Бюргерса с модельной зависимостью коэффициента вязкости от высоты. Обзор работ, посвященных распространению акустических волн в атмосфере, можно найти в книге [Гохберг, Шалимов, 2008].

В данной работе получено точное решение уравнения Бюргерса для стратифицированной изотермической атмосферы, описывающее скачок конечной ширины, а также проанализированы особенности распространения импульсных сигналов, в том числе сейсмического и взрывного происхождения.

Из уравнения состояния (3) можно записать выражение для полной производной давления по времени:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{dp}{d\rho} = c_{\text{полн}}^2 \approx \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} + \left. \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} \rho', \quad (4)$$

где ρ' – приращение плотности при прохождении акустической волны. В случае уравнения состояния в виде адиабаты $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$ получаем:

$$\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = c_0^2, \quad \left. \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} = c_0^2 \frac{\gamma-1}{\rho_0}, \quad \frac{dp}{d\rho} = c_0^2 \left(1 + (\gamma-1) \frac{\rho'}{\rho_0} \right).$$

Тогда первое выражение (4) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = c_0^2 \left(1 + (\gamma-1) \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Представим плотность и давление в среде в виде следующей суммы:

$$\rho = \rho_0(x) + \rho'(x, t), \quad p = p_0(x) + p'(x, t), \quad (6)$$

где величины со штрихами связаны с акустической волной, а величины $\rho_0(x)$ и $p_0(x)$ соответствуют равновесному распределению неоднородности в стратифицированной среде в отсутствие акустических возмущений. Эти величины удовлетворяют уравнению статики, которое следует из (1) при $u = 0$:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = -\rho_0 g. \quad (7)$$

Подчеркнем, что в последующих расчетах нигде не накладывается условие малости акустических возмущений по сравнению с равновесными значениями. Единственное существенное различие в том, что равновесные параметры атмосферы считаются не зависящими от времени, поскольку их изменением за время прохождения волны можно пренебречь. Оговоримся, что при выводе используется приближенное уравнение состояния, в котором учтены только квадратично-нелинейные слагаемые. Так что учет более высоких порядков нелинейности является скорее качественным и модельным, а не строгим результатом теории.

В уравнениях (1) и (5) удобно переписать следующие выражения:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g = -\frac{\rho'}{\rho} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x},$$

$$u \frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial p_0}{\partial x} + u \frac{\partial p'}{\partial x} = -\rho_0 g u + u \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В преобразованных уравнениях удобно ввести величину

$$P = \rho' g + \frac{\partial p'}{\partial x}. \quad (8)$$

По своей сути функция (8) является силой, действующей на среду, и из этого выражения видно, что в стратифицированной среде есть две силы – сила

давления и сила тяжести. С учетом функции (8) уравнения гидродинамики (1)–(3) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + uP - \rho g u = -c_0^2 \rho \frac{\partial u}{\partial x} - c_0^2 (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0} \rho \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (11)$$

Чтобы из системы (9)–(11) получить уравнение для одной переменной, например, колебательной скорости u , продифференцируем уравнение (9) по времени t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\eta}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (12)$$

Входящую в (12) производную $\partial P/\partial t$ вычислим, используя (8) и уравнения (10) и (11). Тогда при учете только квадратичных слагаемых уравнение (12) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} u \frac{\partial u}{\partial x} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial c_0^2 \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \\ & = u \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{(\gamma - 1)}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_0^2 \frac{\rho'}{\rho_0} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнении (13) преобразуем некоторые слагаемые полученного выражения:

$$u \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \frac{u}{\rho^2} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = u \frac{\partial P}{\partial x \rho},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial c_0^2 \rho}{\partial x} = \frac{\partial c_0^2}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + c_0^2 \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial x}.$$

В последнем соотношении явно выделены слагаемые, связанные с рефракционной неоднородностью среды – зависимостью равновесной скорости звука от координат (первое слагаемое) и стратификацией среды – зависимостью от координат равновесной плотности среды (второе слагаемое). Последнее слагаемое связано с изменением плотности при наличии акустического возмущения и дает вклад в нелинейные слагаемые. Величину P/ρ можно выразить из уравнения (9) как функцию искомой скорости u .

Окончательно, уравнение (13) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} u \frac{\partial u}{\partial x} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \\ & - \left(\frac{\partial c_0^2}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + c_0^2 \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \\ & = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + u \left(\frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\gamma - 1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_0^2 \frac{\rho'}{\rho_0} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) описывает распространение акустических волн конечной амплитуды в стратифицированной среде с вязкостью. Заметим, что при выводе уравнения (14) из уравнений гидродинамики использовалось только одно приближение – разложение уравнения состояния по возмущениям плотности, ряд отброшенных в (13) членов более высокого порядка может быть элементарно учтен. На самом деле, уравнение (14) содержит в качестве коэффициентов неизвестную плотность или ее возмущения, однако все эти слагаемые являются нелинейными. Поэтому, ограничиваясь конкретным приближением по порядку нелинейности, приращение плотности может быть выражено через колебательную скорость в более низких порядках нелинейности. Например, интенсивные волны в газах и жидкостях обычно описывают в квадратичном приближении, поскольку кубические эффекты для этих сред имеют больший порядок малости. В этом случае приращения плотности, входящие в коэффициенты уравнения (14), могут быть выражены через колебательную скорость с помощью линеаризованного уравнения непрерывности (10).

Обычно характерные расстояния, на которых происходит изменение свойств среды, велики по сравнению с длиной волны. Например, входящая в уравнение (14) неоднородность плотности, связанная со стратификацией, заметно изменяется при подъеме на большую высоту. Нелинейные искажения, а также и вязкость среды, проявляются, как известно, на больших по сравнению с длиной волны расстояниях. Это связано с малостью числа Маха для обычных акустических возмущений и малостью затухания на одной длине волны. Предполагая, что все эти условия малости выполнены в условиях данной задачи, полученное уравнение (14) можно упростить в соответствии с методом медленно изменяющегося профиля [Руденко, Солуян, 1975], согласно которому решение ищется в следующем виде:

$$u = u \left(\tau = t - \int dx/c_0; x_1 = \mu x \right), \quad (15)$$

где $\mu \ll 1$ – малый параметр, имеющий смысл акустического числа Маха или отношения длины волны к характерному расстоянию изменения свойств среды. Примем следующие предположения о медленности изменения параметров:

$$\frac{u}{c_0} \sim \mu, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \sim \mu, \quad \frac{1}{c_0} \frac{\partial c_0}{\partial x} \sim \mu, \quad \eta \sim \mu, \quad \frac{\partial g}{\partial x} \sim \mu^2.$$

Решение в форме (15) означает, что волна в основном распространяется со скоростью $c_0(x)$, зависящей от координаты, а профиль волны медленно изменяется при прохождении больших по сравнению с длиной волны расстояний. Запишем преобразование производных в соответствии с решением (15):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{2\mu}{c_0} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial \tau} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{c_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Ограничимся в дальнейшем квадратичным приближением по акустическим возмущениям. Тогда в нелинейных членах запишем:

$$c_0^2 \frac{\partial \ln \rho / \rho_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = c_0^2 \frac{\partial \ln(1 + \rho' / \rho_0)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \approx c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho'}{\partial x \rho_0}. \quad (17)$$

Приращения плотности, связанные с акустической волной, можно связать с колебательной скоростью, как уже говорилось, с помощью уравнения непрерывности (10), которое можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t \rho_0} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{u}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0.$$

В нелинейных членах в квадратичном приближении достаточно учесть только линейные соотношения между скоростью и плотностью. Тогда, используя выражения (16) и медленность изменения равновесной плотности среды, получим следующее линейное соотношение между приращением плотности и колебательной скоростью:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau \rho_0} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (18)$$

откуда следует хорошо известное из линейной теории соотношение $\rho' / \rho_0 = u / c_0$. Подставляя выражения (18) в уравнение (14) и переходя в сопровождающую систему координат, получаем:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x_1} + \frac{c_0}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \\ & + \frac{1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial c_0^2}{\partial x_1} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} = \\ & = \frac{u}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + (\gamma - 1) \frac{u}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \\ & + (\gamma - 1) \frac{1}{2c_0^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\eta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}. \end{aligned}$$

Заметим, что нелинейные слагаемые можно скомпоновать:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{u}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \\ & - (\gamma - 1) \frac{u}{2c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - (\gamma - 1) \frac{1}{2c_0^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 = \\ & = -\frac{\gamma + 1}{2c_0^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right] = -\frac{\gamma + 1}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} u \frac{\partial u}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

после чего уравнение интегрируется по τ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \frac{u}{2c_0} \frac{\partial c_0}{\partial x} = \frac{\eta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (19)$$

Здесь для газов введено стандартное обозначение нелинейного параметра $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$. Уравнение (19) имеет такой же вид, как и уравнение для интенсивных волн в волноводах переменного сечения или уравнение нелинейной геометрической акустики для поля в лучевой трубке. В уравнении (19) роль переменного сечения волновода или ширины лучевой трубки играют изменение плотности за счет стратификации и флуктуации скорости звука. Уравнение (19) может быть дополнено и слагаемым, связанным с локальными неоднородностями плотности.

Конкретизируем задачу. Пусть флуктуации скорости звука отсутствуют, т. е. $c_0 = \text{const}$. В качестве равновесного распределения плотности используем стандартное экспоненциальное распределение $\rho_0 = \rho_{00} e^{-x/H}$, где ρ_{00} – равновесное значение плотности у поверхности земли, H – так называемая стандартная атмосфера или характерное расстояние, на котором плотность существенно уменьшается. В этом случае

$$\frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = -\frac{1}{2H} \quad \text{и уравнение (19) принимает вид:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{u}{2H} = \frac{\eta e^{x/H}}{2\rho_{00} c_0^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (20)$$

Заметим существенную особенность уравнения (20) – эффективный коэффициент вязкости оказывается зависящим от расстояния и возрастает по мере распространения волны, т. е. на больших высотах затухание существенно возрастает.

В уравнении (20) удобно перейти к следующим функциям:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= U(x, \tau) e^{x/2H}, \\ z &= \int_0^x e^{x/2H} dx = 2H(e^{x/2H} - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

Первое из этих преобразований соответствует линеаризованному уравнению (21) без вязкости. В новых переменных уравнение (21) приобретает вид обобщенного уравнения Бюргерса [Enflo, Rudenko, 2002]:

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} U \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\eta}{2\rho_{00} c_0^3} \left(\frac{z}{2H} + 1 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \quad (22)$$

В отличие от обычного уравнения Бюргерса [Руденко, Солуян, 1975] в уравнении (22) эффективный коэффициент вязкости зависит от координаты, причем в данном случае он линейно возрастает с пройденным расстоянием.

Для анализа полученного уравнения удобно его сначала привести к безразмерным переменным. Введем следующие переменные:

$$V = \frac{U}{u_0}, \quad s = \frac{z}{z_{nl}}, \quad \theta = \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Здесь u_0 – характерная начальная амплитуда волны, $z_{nl} = \frac{c_0^2 \tau_0}{\epsilon u_0}$ – нелинейная длина, на которой происходит первое образование разрыва в профиле гармонической волны, τ_0 – характерная длительность импульса (для гармонического сигнала – обратная частота). Тогда уравнение (22) примет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial s} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \left(1 + \frac{s}{s_0} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (23)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{\eta z_{nl}}{2\rho_{00} c_0^3 \tau_0^2} = \frac{\eta}{2\epsilon \rho_{00} c_0 \tau_0 u_0}, \quad s_0 = \frac{2H}{z_{nl}},$$

безразмерный параметр Γ равен параметру в обычном уравнении Бюргерса, s_0 описывает соотношение между характерными длинами проявления стратификации и нелинейности. Уравнение вида (23) было получено в работе [Романова, 1970], однако его решение было найдено только при введении специальной зависимости $\Gamma(s)$ для исходно синусоидального сигнала.

Вначале проанализируем уравнение (23) в более простой ситуации, когда вязкостью среды можно пренебречь. Переход к более простому уравнению простых волн возможен, если либо коэффициент вязкости $\tilde{\Gamma}$ мал у поверхности, либо велик параметр \tilde{H} , что соответствует медленно меняющейся плотности и сильным нелинейным эффектам, и мы не рассматриваем слишком большие высоты. Тогда уравнение (23) переходит в уравнение простых волн

$$\frac{\partial V}{\partial s} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \quad (24)$$

Исследование этого уравнения было проведено в работе [Романова, 1970] но только для исходного гармонического сигнала. Импульсные сигналы исследованы не были, поэтому здесь рассмотрим оба случая. Уравнение (24) хорошо изучено в теории нелинейных волн [Руденко, Солюян, 1975] и имеет неявное решение:

$$V = U_0 (\theta + Vs) \quad (25)$$

с произвольным граничным условием

$$V(z=0) = \frac{u(x=0)}{u_0} = U_0(\theta).$$

Возвращаясь к исходным переменным (21), запишем это решение в виде:

$$\frac{u(x, \tau)}{u_0} = e^{x/2H} U_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} + \frac{ue^{-x/2H}}{u_0} \frac{2H}{z_{nl}} (e^{x/2H} - 1) \right). \quad (26)$$

Видно, что стратификация среды, в данном случае экспоненциально убывающая с высотой плотность, приводит к экспоненциальному возрастанию амплитуды колебательной скорости. К тому же выводу подводит и следующее из линейного уравнения преобразование (21), что означает, что раскочка амплитуды волны на больших высотах является в принципе линейным эффектом. Однако при таком росте амплитуды нелинейные эффекты начинают играть существенную роль даже для волн изначально малой амплитуды, и их учет на больших высотах становится принципиально необходимым для любых начальных амплитуд. Существенный рост амплитуды наблюдается до образования разрыва в профиле волны, после чего появляется дополнительный процесс затухания – на ударных фронтах, который, вообще говоря, ограничивает рост амплитуды (при отсутствии других факторов, например фокусировки). Определим длину образования ударных фронтов в решении (26). Согласно (25), положению первого разрыва в профиле гармонической волны соответствует значение $s=1$, откуда

$$\frac{2H}{z_{nl}} (e^{x_s/2H} - 1) = 1 \quad \text{или} \quad x_s = 2H \ln \left(1 + \frac{z_{nl}}{2H} \right).$$

В случае $z_{nl} \ll H$, сильных нелинейных эффектов и слабой стратификации, $x_s \approx z_{nl}$. В противоположном случае сильной стратификации $x_s \approx 2H \ln(z_{nl}/2H) \gg H$. Из нелинейной акустики известно, что характерным решением уравнения (24) на стадии развитых ударных фронтов для исходного периодического сигнала является пилообразная волна, один период которой выражается N-образным профилем – линейным участком с разрывом:

$$V = -\frac{\theta}{1+s}, \quad (27)$$

для синусоидального сигнала справедливым с хорошей точностью при $s \geq 2$. Отсюда получаем

$$\frac{u}{u_0} = -\frac{\theta e^{x/2H}}{1 + \frac{2H}{z_{nl}} (e^{x/2H} - 1)}. \quad (28)$$

Выражение (28) описывает один период пилообразной волны $|\theta| \leq \tau_0$. Можно заметить интересный результат. Если амплитуда волны в однородной среде на больших расстояниях убывает до нуля (решение (27)), то в стратифицированной среде нелинейное затухание на фронтах и раскочка колебательной скорости за счет убывания плотности компенсируют друг друга, так что предельное значение оказывается конечным:

$$\frac{u}{u_0} = -\frac{z_{nl}}{2H} \theta.$$

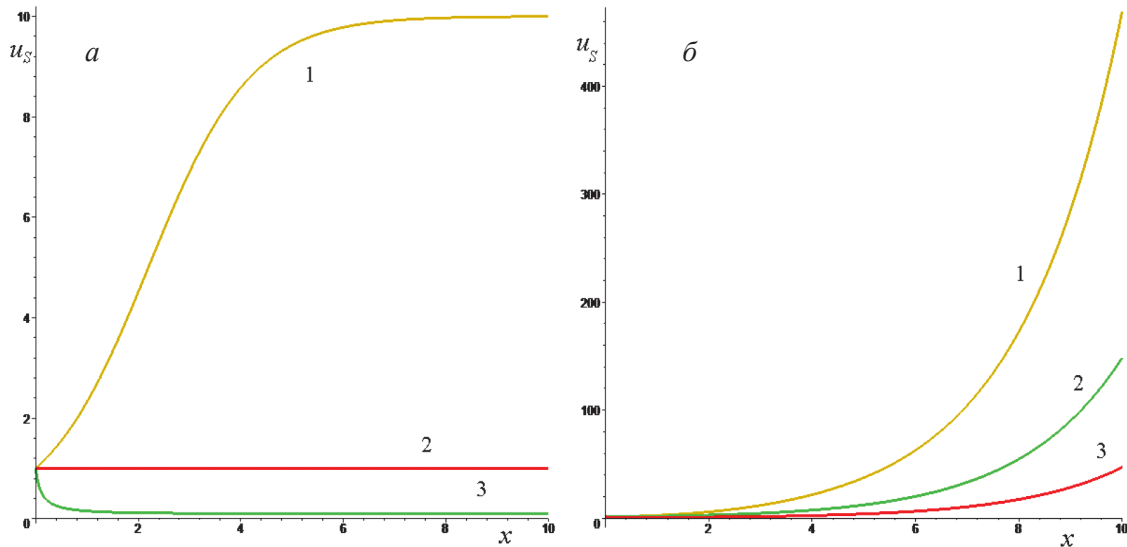


Рис. 2. Зависимость пиковой амплитуды акустической волны в стратифицированной атмосфере. *a* – периодическая пилообразная волна, *б* – одиночный N-импульс. Кривые 1—3 соответствуют параметрам $2H/z_{nl} = 0.1; 1; 10$

В случае сильной стратификации наблюдается существенное увеличение колебательной скорости.

Для одиночного двуполярного исходного импульса характерно образование N-волны. Для получения пиковой амплитуды одиночной N-волны надо применить закон сохранения импульса, из которого следует, что длительность импульса в нелинейной среде растет с пройденным расстоянием, а амплитуда будет уменьшаться по более медленному закону

$$V_N = \frac{1}{\sqrt{1+s}}, \quad \frac{u_N}{u_0} = \frac{e^{x/2H}}{\sqrt{1 + \frac{2H}{z_{nl}}(e^{x/2H} - 1)}}. \quad (29)$$

Видно, что для одиночного импульса раскочка колебательной скорости превосходит нелинейное затухание на ударных фронтах.

Зависимости пиковых амплитуд (28) для предельного профиля периодической волны и (29) для предельного профиля одиночного импульса изображены на рис. 2, *a* и *б* соответственно. Как видно, усиление эффектов стратификации по сравнению с нелинейными эффектами приводит к росту предельной амплитуды волны. Хорошо видно насыщение пиковой амплитуды для периодического профиля и нарастание пиковой амплитуды для одиночного импульса.

Помимо зависимости от соотношения нелинейности и стратификации большой интерес представляет зависимость предельных амплитуд от начальной амплитуды волны. Для этого вспомним, что $z_{nl} = c_0^2 \tau_0 / \epsilon u_0$. Переходя к числам Маха $M = u_0 / c_0$, получаем для волны и одиночного импульса соответственно (здесь $\gamma \equiv 2H\epsilon/\lambda$):

$$\frac{u_S}{c_0} = \frac{M e^{x/2H}}{1 + \gamma M (e^{x/2H} - 1)}, \quad \frac{u_N}{c_0} = \frac{M e^{x/2H}}{\sqrt{1 + \gamma M (e^{x/2H} - 1)}}.$$

Предельная амплитуда пилообразной волны равна $u_S/c_0 \approx 1/\gamma$ и не зависит от начальной амплитуды. Предельное значение одиночного импульса равно

$$\frac{u_N}{c_0} = \sqrt{\frac{M}{\gamma}} e^{x/4H}$$

и растет как с увеличением пройденного расстояния, так и при увеличении начальной амплитуды.

Из закона сохранения импульса следует, что длительность одиночного импульса (29) растет с увеличением пройденного расстояния, а именно

$$T(s) = T_0 \sqrt{1+s}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем $T(s) = T_0 \sqrt{1+s_0(e^{x/2H} - 1)}$ и на больших

расстояниях $T(s) \approx T_0 \sqrt{s_0} e^{x/4H}$. Длительность зависит от параметра s_0 .

Перейдем к анализу обобщенного уравнения Бюргерса (23), учитывающего влияние вязкости. Поскольку оказалось, что без учета вязкости предельное значение колебательной скорости может быть конечным, выясним, как скажется вязкость на величине предельного значения. Прежде всего, заметим, что анализ симметрий уравнения (25) показывает, что оно имеет автомодельное решение вида

$$V = \Phi \left(\xi = \frac{\theta}{1 + s/s_0} \right). \quad (30)$$

Подставляя (30) в (23), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\Gamma \Phi'' + \Phi \Phi' + \frac{\xi}{s_0} \Phi' = 0. \quad (31)$$

В частности, особым решением уравнения (31) является решение (27): $\Phi = -\xi/s_0$. Уравнение (31) удается один раз проинтегрировать, в результате, получаем уравнение первого порядка:

$$\Phi' + \frac{1}{s_0} \ln \Phi' = C - \frac{(\Phi + \xi/s_0)^2}{2\Gamma}. \quad (32)$$

Здесь C – константа интегрирования. Нас интересует решение, ограниченное либо стремящееся к нулю на бесконечности $\xi \rightarrow \infty$. Таким решением может быть однополярный или дипольный импульс, имеющие экстремумы в своем профиле, либо волна типа скачка давления – ударной волны. Во втором случае волна имеет конечные амплитуды на бесконечности, к которым стремится в пределе, т. е. на бесконечности производные стремятся к нулю. Как известно из нелинейной акустики, устойчивая волна может существовать, только если область повышенного давления предшествует области пониженного давления (отметим, что в линейном приближении давление и колебательная скорость пропорциональны друг другу). Таким образом, искомый профиль V в (30) должен содержать области с положительной производной, причем ее максимальное значение заведомо ограничено (рассматриваем случай конечной вязкости в (23)). Поскольку значение правой части (32) при любых значениях функции и независимой переменной не превышает константу C , то эта константа определяет максимальное возможное значение производной автомодельного профиля. Меняя значение константы, можно исследовать профили с различным максимальным наклоном.

Уравнение (32) неразрешимо относительно производной, однако его можно проинтегрировать в квадратурах методом «интегрирования посредством дифференцирования». Если уравнение задано в виде $F(\xi, \Phi, \Phi' \equiv q) = 0$, то его решение задается в параметрическом виде системой уравнений:

$$\frac{d\xi}{dq} = -\frac{F_q}{F_\xi + qF_\Phi}, \quad \frac{d\Phi}{dq} = -\frac{qF_p}{F_\xi + qF_\Phi}.$$

Разрешая уравнение (32) относительно Φ

$$\Phi + \frac{\xi}{s_0} \pm \sqrt{2\Gamma} \sqrt{C - q - \frac{1}{s_0} \ln q} = 0,$$

получаем:

$$\frac{d\xi}{dq} = \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{q \sqrt{C - q - s_0^{-1} \ln q}}, \quad \frac{d\Phi}{dq} = \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\sqrt{C - q - s_0^{-1} \ln q}}. \quad (33)$$

Интегралы (33) элементарно вычисляются численно. Проведем анализ полученного решения (33). Ранее мы выделили две характерные области – поведения профиля на бесконечности и его максимального нарастания. В первом случае мы ожидаем, что производная будет мала, $q \sim 0$. Тогда из (33) получаем, что

$$\frac{d\xi}{dq} \rightarrow \infty, \quad \text{а} \quad \frac{d\Phi}{dq} \rightarrow 0, \quad \text{т. е. абсцисса профиля очень}$$

быстро изменяется и уходит на плюс и минус бесконечность, в то же время его ордината практически не меняется; на бесконечности достигается конечное значение. Вторая характерная область соответствует максимальной производной, определяемой константой C . Пусть это максимальное значение производной равно q_0 , т. е. удовлетворяет уравнению

$$C - q_0 - s_0^{-1} \ln q_0 = 0. \quad \text{Рассматривая малые отклонения от максимального значения } q = q_0 - q' \text{ при } q' \rightarrow 0,$$

можно показать, что $\frac{d\xi}{dq} \sim \frac{1}{q_0} \frac{1}{\sqrt{q'}} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{\sqrt{q_0 - q}}$ и

$$\frac{d\Phi}{dq} \sim \frac{1}{\sqrt{q'}} = \frac{1}{\sqrt{q_0 - q}}, \quad \text{так что } \Phi \sim q_0 \xi \sim \sqrt{q_0 - q}, \quad \text{т. е. ли-}$$

нейный профиль в области его наибольшего нарастания. Константа интегрирования выбрана так, что $\Phi(\xi = 0) = 0$. Таким образом, одна ветвь решения (33) описывает часть профиля от $\xi \rightarrow -\infty$ до $\xi = 0$, где амплитуда возрастает от некоторого (отрицательного) конечного значения до нуля, а вторая ветвь описывает часть профиля от $\xi = 0$ до $\xi \rightarrow \infty$, где амплитуда продолжает возрастать от нуля до некоторого (положительного) конечного значения.

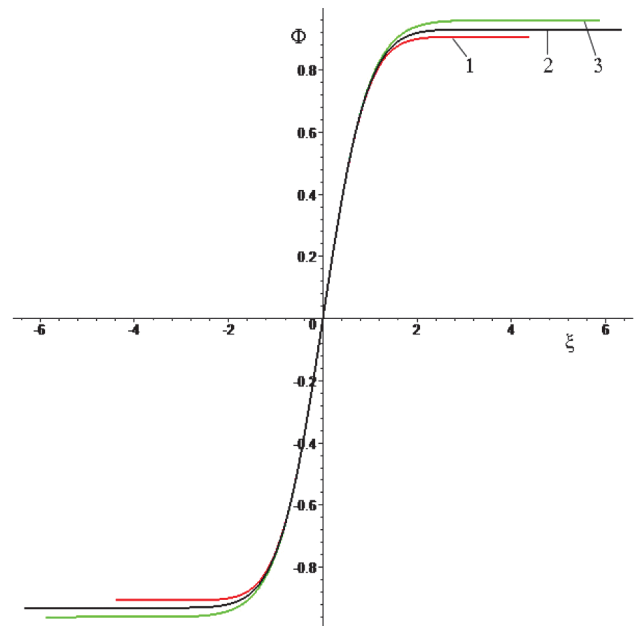


Рис. 3. Профиль автомодельного решения (33) обобщенного уравнения Бюргерса в стратифицированной атмосфере. Кривые 1–3 соответствуют значениям параметра $s_0 = 1/3; 1; 3$

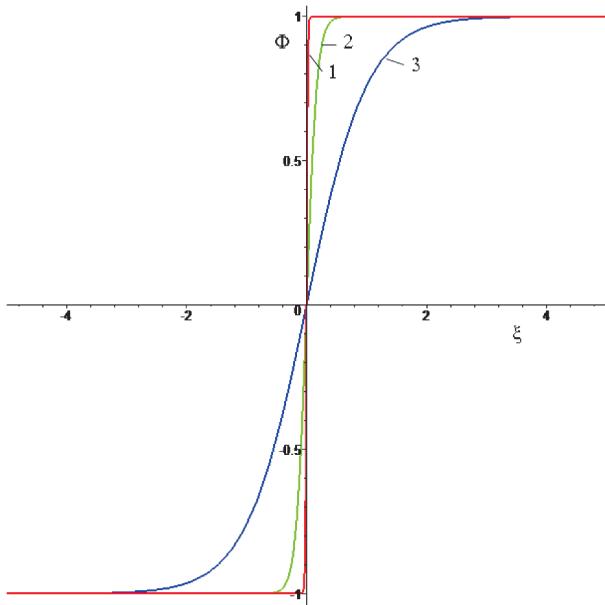


Рис. 4. Автомоделные профили при различных значениях коэффициента вязкости. Кривые 1—3 соответствуют значениям $\Gamma = 0.01; 0.1; 1$ при $A=1, s_0 = 1$

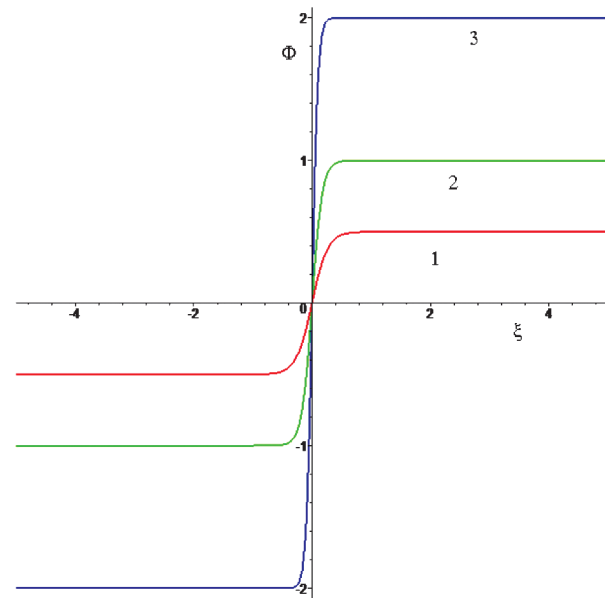


Рис. 5. Автомоделные профили для различных значений предельной амплитуды на бесконечности. Кривые 1—3 соответствуют значениям $A = 0.5; 1; 2$ при $\Gamma = 0.01, s_0 = 1$

Автомоделный профиль (30), построенный по аналитическому представлению (33), изображен на рис. 3. Видно, что автомоделный профиль представляет собой скачок колебательной скорости, распространяющийся со скоростью звука. В отличие от предыдущих решений для бездиссипативной среды ширина ударного фронта в среде с диссипацией оказывается конечной. Более того, в силу соотношения (30) ширина ударного фронта по мере распространения увеличивается пропорционально пройденному расстоянию. На рисунке приведены профили для различных значений параметра s_0 , определяющего соотношение стратификации и нелинейных эффектов. Видно, что профиль достаточно слабо зависит от этого параметра. Полученное автомоделное решение может быть использовано для построения решения, аналогичного решению Хохлова в однородной среде, описывающего на больших расстояниях предельный профиль исходной гармонической волны с конечной шириной ударного фронта.

На рис. 4 показана зависимость автомоделного профиля от коэффициента вязкости. Как видно, увеличение коэффициента вязкости приводит к расплыванию ударного фронта, увеличению его ширины. Основное отличие от нестратифицированной среды связано с зависимостью темпов расплывания фронта от расстояния. В стратифицированной среде этот процесс протекает быстрее, поскольку эффективная вязкость растет с высотой. На рис. 5 показаны автомоделные профили для различных значений предельной амплитуды. При этом важно отметить, что увеличение предельной амплитуды приводит к уменьшению ширины ударного фронта. Таким образом, волны с большей амплитудой могут сильнее

воздействовать на среду как за счет большей амплитуды, так и за счет большего градиента давлений на ударном фронте.

Более точное асимптотическое выражение, описывающее ударный фронт в стратифицированной среде, можно получить, учитывая в (33) члены более высокого порядка малости по приращению q' параметра q . Ограничиваясь в (33) следующим разложением:

$$\frac{d\xi}{dq} \approx \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{q_0 - q'} \frac{1}{\sqrt{1 + (s_0 q_0)^{-1} \sqrt{q'}}} = \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (s_0 q_0)^{-1}}} \frac{1}{q \sqrt{q_0 - q}},$$

$$\frac{d\Phi}{dq} \approx \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (s_0 q_0)^{-1} \sqrt{q'}}} = \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (s_0 q_0)^{-1}}} \frac{1}{\sqrt{q_0 - q}},$$

получим

$$\xi = \mp \frac{\sqrt{2\Gamma}}{\sqrt{q_0} \sqrt{1 + (s_0 q_0)^{-1}}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{q_0 - q}}{\sqrt{q_0}},$$

$$\Phi = \mp \frac{\sqrt{2\Gamma}}{\sqrt{1 + (s_0 q_0)^{-1}}} \sqrt{q_0 - q}.$$

Как и раньше, постоянная интегрирования выбрана так, чтобы $\Phi(\xi = 0) = 0$. Исключая из этих выражений параметр q , получаем явное выражение для формы ударного фронта:

$$\Phi(\xi) = \sqrt{\frac{2\Gamma q_0}{1 + (s_0 q_0)^{-1}}} \tanh \left[\sqrt{\frac{q_0}{2\Gamma} \left(1 + \frac{1}{s_0 q_0} \right)} \xi \right]. \quad (34)$$

Как показывает выражение (34), ударный фронт в стратифицированной среде описывается такой же функцией, как и в однородной, – гиперболическим тангенсом. Таким образом, можно говорить об универсальности этого профиля и в задачах нелинейной акустики неоднородных сред. Посмотрим, какому граничному условию соответствует решение (34). Устремляя $z \rightarrow 0$, получим, что параметр $\xi = 0$ при $\theta = 0$, $\xi \rightarrow +\infty$ при $\theta > 0$ и $\xi \rightarrow -\infty$ при $\theta < 0$. Получающийся в итоге предельный профиль имеет вид идеальной ударной волны в виде ступеньки – функции $\text{sgn } \theta$.

Решение (34) определяется параметром q_0 – максимальным значением производной профиля. Удобнее перейти к другому параметру – предельной амплитуде A , связь которой с параметром q_0 определим следующим выражением:

$$A = \sqrt{\frac{2\Gamma q_0}{1+(s_0 q_0)^{-1}}}, \quad q_0 = \frac{A^2}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma}{A^2 s_0}} \right).$$

Тогда решение (34) примет вид

$$\Phi(\xi) = A \tanh \left[\frac{A}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma}{A^2 s_0}} \right) \xi \right]. \quad (35)$$

В пределе нестратифицированной среды, $s_0 \rightarrow \infty$, получаем обычное стационарное решение уравнения

$$\text{Бюргерса } \Phi(\xi) = A \tanh \left[\frac{A}{2\Gamma} \xi \right].$$

Вернемся теперь к исходным переменным. Пройдя в обратном направлении все преобразования, получим следующие формулы замены переменных:

$$V \rightarrow \frac{u}{u_0} e^{-x/2H}, \quad s \rightarrow s_0 (e^{x/2H} - 1), \quad \theta \rightarrow \frac{\tau}{\tau_0},$$

$$\xi = \frac{\theta}{1+s/s_0} \rightarrow \frac{\tau}{\tau_0} e^{-x/2H}.$$

Тогда для амплитуды волны получаем выражение:

$$u = u_0 A e^{x/2H} \tanh \left[\frac{A}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma}{A^2 s_0}} \right) \frac{\tau}{\tau_0} e^{-x/2H} \right]. \quad (36)$$

Отсюда следует, что множитель, содержащий гиперболический тангенс, описывает расплывание по мере распространения волны ударного фронта, при этом на границе ударный фронт уже имеет конечную ширину. В свою очередь первый экспоненциальный множитель описывает увеличение амплитуды волны по мере ее распространения. Таким образом, хотя вязкость и возрастает на больших высотах и, соответственно, приводит к экспоненциальному расплыванию ударного фронта, она не может ограничить экспоненциальный рост амплитуды на больших высотах.

Физический смысл решений (35) и (36) – симметричный скачок конечной ширины. В сопровождающей системе координат центр скачка расположен

в начале и не сдвигается, т. е. скачок движется со скоростью звука. Известно, что скорость ударной волны зависит от полусуммы пиковых значений до и после разрыва. Поэтому симметричный профиль, описываемый решениями (35) и (36), не сдвигается, а профиль ударной волны, движущейся по неподвижной среде, так что перед фронтом скорость равна нулю, будет сдвигаться. К первому случаю относится периодическая волна, а ко второму – одиночная N-волна.

Для исследования скачка, движущегося по неподвижной среде, модифицируем подстановку (30) и введем новую переменную

$$V = \Phi \left(\xi = \frac{\theta + f(s)}{1 + s/s_0} \right),$$

где функция $f(s)$ описывает смещение профиля волны. Вместо уравнения (31) получим:

$$\Gamma \Phi'' + \Phi' \left(\Phi + \frac{\xi}{s_0} - B \right) = 0, \quad (37)$$

где введено обозначение $B = f'(s)$ и $B = \text{const}$ из условия применимости автомодельной подстановки. Преобразование

$$\Phi = V_0 + \Phi_0(\xi - \xi_0) \quad (38)$$

при условии $V_0 - B + \xi_0/s_0 = 0$ сводит уравнение (37) к уравнению (31) для функции $\Phi_0(\xi_1 = \xi - \xi_0)$. Таким образом, функция $\Phi_0(\xi_1)$ – это уже найденное выше решение для симметричного скачка, а преобразование (38) позволяет получить несимметричные скачки с различными значениями на разрыве и скоростями. Таким образом, можно записать решение для произвольного скачка:

$$\Phi = V_0 + \Phi_0 \left(\frac{\theta - \xi_0 + V_0 s}{1 + s/s_0} \right). \quad (39)$$

Здесь ξ_0 имеет смысл начального положения скачка, а V_0 – полусуммы предельных значений амплитуды до и после скачка. Видно, что несимметричный скачок смещается во времени со скоростью, пропорциональной «амплитуде» скачка.

Теперь решения вида (39) можно использовать для построения профилей волн в вязкой стратифицированной среде. Для периодического сигнала используем симметричный скачок, для N-волны – несимметричный. Профиль получается методом сращиваемых асимптотических разложений [Найфе, 1976], в данном случае, сшиванием линейного решения (27) вдали от разрыва и решения (39) вблизи разрыва. Условие сшивания заключается в равенстве пикового значения на разрыве линейного (так называемого внешнего) решения и предельного значения скачка на бесконечности (так называемого внутреннего решения). Для периодического сигнала нужно использовать симметричный скачок и условие сшивания приводит к вы-

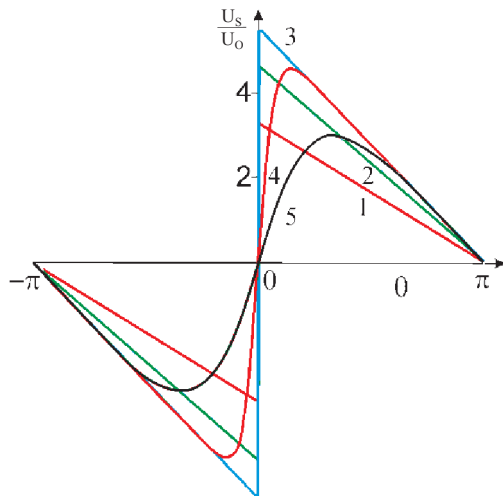


Рис. 6. Асимптотическое решение для периодического пилообразного сигнала в стратифицированной атмосфере. Кривые 1–5 соответствуют высотам над поверхностью $x = 30, 50, 100, 130, 140$ км

ражению для амплитуды в (35) $A = (1+s)^{-1}$. Для N-волны используем несимметричный скачок и из условий на бесконечности $V_0 - A = 0$ и $V_0 + A = (1+s)^{-1/2}$ получаем $V_0 = A = (1+s)^{-1/2}/2$. Решение в виде одной формулы можно получить, складывая отдельные решения и вычитая их общую часть, равную предельному значению. В итоге получаем аналог решения Хохлова для симметричного скачка

$$V_s = \frac{1}{1+s} \left(-\theta + \pi \tanh \left[\frac{\pi}{4\Gamma(1+s)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma(1+s)^2}{\pi^2 s_0}} \right) \frac{\theta}{1+s/s_0} \right] \right),$$

$-\pi < \theta < \pi$.

Это решение представлено на рис. 6 для различных высот над поверхностью Земли. При увеличении пройденного расстояния происходит нарастание амплитуды, при этом профиль вначале сохраняет узкий ударный фронт. Однако на больших высотах начинает сказываться диссипация, и волна расплывается, ее амплитуда начинает убывать.

Перейдем к исследованию импульсного сигнала. Положительная фаза N-волны описывается выражением

$$V_N = -\frac{\theta}{1+s} + \frac{1}{2\sqrt{1+s}} \times \left(1 + \tanh \left[\frac{1}{4\Gamma\sqrt{1+s}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma(1+s)}{s_0}} \right) \frac{\theta + \sqrt{1+s}}{1+s/s_0} \right] \right),$$

$-\sqrt{1+s} < \theta < 0$.

В последнем выражении учтено, что скорость движения ударного фронта по неподвижной среде равна по величине половине амплитуды на скачке. От-

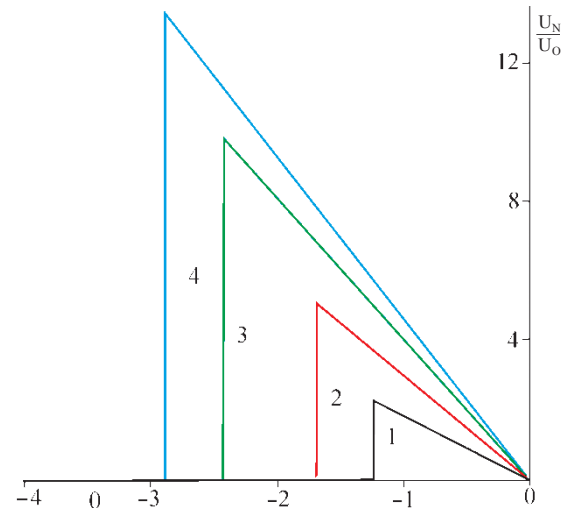


Рис. 7. Асимптотическое решение для импульсного сигнала при $\Gamma = 10^{-7}$. Кривые 1–4 соответствуют высотам над поверхностью $x = 15, 30, 45, 60$ км

рицательный интервал описывается аналогичным выражением. Скорость смещения ударного фронта на больших высотах пропорциональна $\sqrt{s} = e^{x/4H}$, поэтому ударный импульс может существенно обогнать волны бесконечно малой амплитуды.

На рис. 7 и 8 представлены профили положительной фазы N-волны на различных высотах над поверхностью Земли. Рис. 8 соответствует большим значениям вязкости по сравнению с рис. 7. С ростом пройденного расстояния амплитуда импульса растет, при этом даже при учете затухания не наступает насыщения амплитуды, в отличие от периодического сигнала. Заметное расплывание ударного фронта происходит на значительно больших высотах или

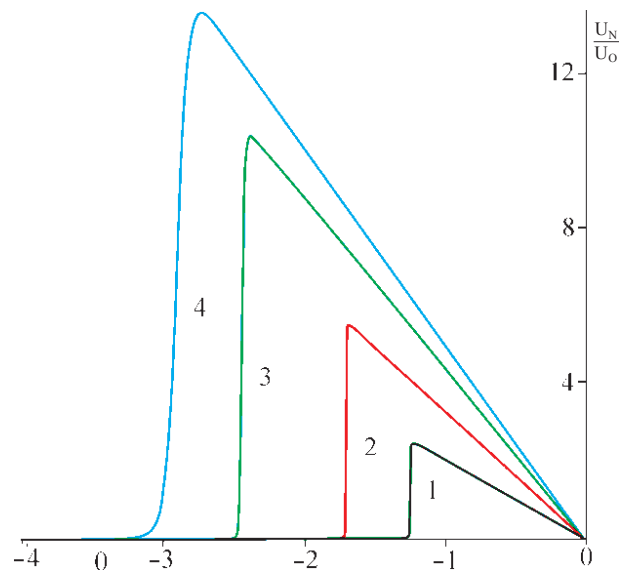


Рис. 8. Асимптотическое решение для импульсного сигнала при $\Gamma = 10^{-3}$. Кривые 1–4 соответствуют значениям высотам рис. 7 $x = 15, 30, 45, 60$ км

требует большей вязкости. Последний случай может реализовываться при уменьшении длительности импульса. В то же время распространение достаточно продолжительных импульсов, более соответствующих сейсмическим источникам возмущений, соответствует меньшим значениям вязкости, так что в этом случае на больших высотах могут наблюдаться акустические импульсы с узкими ударными фронтами.

Перейдем к расчету температурного воздействия распространяющегося одиночного импульса на атмосферу, связанного с затуханием энергии в результате образования ударного фронта, следуя процедуре работы [Романова, 1970]. Для этого воспользуемся решением (28) для линейной части профиля и учтем, что длительность импульса растет. Полную энергию импульса можно определить по формуле

$$E = \rho_0 \int_{-T(z)}^{T(z)} u^2(\tau, z) d\tau.$$

Учитывая, что $\rho_0 = \rho_{00} e^{-x/H}$, $T(z) = T_0 \sqrt{1+s}$, для полной энергии получаем выражение:

$$E = \frac{2\rho_{00}u_0^2T_0^3}{3\sqrt{1+s_0}(e^{x/2H}-1)} \rightarrow \frac{2\rho_{00}u_0^2T_0^3}{3\sqrt{s_0}} e^{-x/4H}.$$

Теперь можно оценить скорость нагревания атмосферы при прохождении ударного импульса. Изменение со временем температуры среды происходит вследствие изменения потока энергии (здесь и дальше T – температура):

$$c_p \rho_0 \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} cE,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{cu_0^2T_0^3}{3c_p} \frac{s_0}{2H} \frac{e^{3x/2H}}{(1+s_0(e^{x/2H}-1))^{3/2}} \rightarrow \frac{\rho_{00}cu_0^2T_0^3}{3c_p\rho_0} \frac{1}{2H\sqrt{s_0}} e^{3x/4H}.$$

А это значит, что на больших высотах происходит значительное повышение температуры за счет уменьшения плотности. В результате наблюдается рост амплитуды распространяющегося одиночного импульса. Этот эффект принципиально отличается от воздействия периодического сигнала, амплитуда которого на больших высотах достигает насыщения, что приводит к постоянным и слабо зависящим от высоты темпам роста температуры среды на больших высотах.

Результатом взаимодействия инфразвуковых возмущений с ионизированными слоями ионосферы являются магнитные сигналы, которые служат источником информации о геодинамических процессах, протекающих в литосфере на этапе подготовки сильных сейсмических событий [Копытенко, Исмаилов и др., 2000; Гохберг, Шалимов, 2008; Собисевич, Канониди и др., 2009]. Большой объем экспериментальных данных получен нами в результате систематических наблюдений флуктуаций магнитного поля ультранизкой

частоты на базе Северокавказской геофизической обсерватории ИФЗ РАН, оборудованной современными геофизическими приборами, включая наклономерные и магнитовариационные станции [Собисевич, Гриднев и др., 2008]. Анализ накопленной здесь геофизической информации о наведенных волновых процессах, обусловленных удаленными землетрясениями, позволил подтвердить наличие аномальных волновых форм УНЧ магнитных возмущений перед сильными телесейсмическими событиями за 2–4 часа до их начала [Собисевич, Канониди и др., 2009]. Выделенный здесь экспериментально отдельный класс квазигармонических УНЧ магнитных сигналов связан с активным воздействием на ионосферу, в том числе и инфразвуковых возмущений в зоне подготовки сильных сейсмических событий. В подтверждение сказанного приведем экспериментальные данные, которые были получены на Северокавказской геофизической обсерватории в 2007 году перед землетрясением в районе Индонезии (рис. 9, 10). Отметим, что уровни зарегистрированных квазигармонических УНЧ возмущений изменяются здесь в пределах от 1 до 5 нТл. На рис. 6, 7 приведены записи вариаций геомагнитного поля по трем компонентам (Н, D, Z) и изменения наклонов (Север – Юг, Восток – Запад) в период развития и протекания сейсмического события в районе Южной Суматры 12 сентября 2007 г., глубина очага – 33 км. Примерно за три часа перед землетрясением на записях магнитных вариометров наблюдаются квазигармонические УНЧ электромагнитные вариации с периодом 150 с. Проанализированные ряды экспериментальных наблюдений на Северокавказской обсерватории за 2007–2010 годы, показали, что у зарегистрированных землетрясений с магнитудой более 7 во всех случаях были зафиксированы характерные квазипериодические УНЧ электромагнитные возмущения. В числе отличительных признаков следует отметить отчетливые фазовые и амплитудно-временные особенности в структуре сигналов по Н, D, и Z компонентам. Квазигармонические возмущения магнитного поля с периодом от 100 до 40 с и длительностью порядка 10–12 мин выделяются по структуре из общей картины вариаций магнитного поля Земли за 2–4 часа перед сильным сейсмическим событием [Собисевич и др., 2009].

Таким образом, результаты наблюдений УНЧ геомагнитных возмущений, предвещающих сильные сейсмические события, дают основание полагать, что волновые формы регистрируемых сигналов имеют свои отличительные особенности и являются своеобразным «портретом» готовящегося землетрясения. Длительности регистрируемых возмущений, трансформация наблюдаемых волновых форм по мере приближения сейсмического удара и тонкая структура возмущения отражают спонтанную природу динамических взаимодействий и сопутствующих токовых систем, генерируемых на всех стадиях развития сейсмического процесса в литосфере. При этом полученные представительные данные по крат-

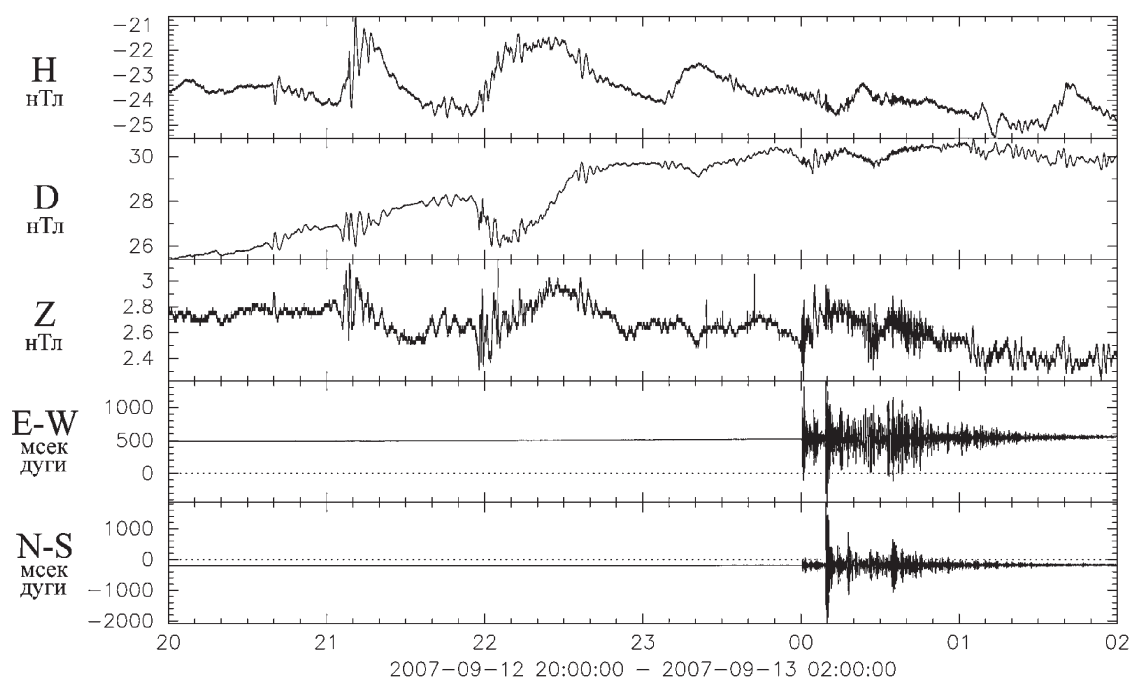


Рис. 9. Землетрясение в районе Южной Суматры 12.09.2007. УНЧ магнитные возмущения, зарегистрированные магнитными вариометрами и наклономерами лаборатории № 1 Северокавказской геофизической обсерватории ИФЗ РАН [Собисевич и др., 2009]

косрочным геомагнитным возмущениям, могут трактоваться как «краткосрочные предвестники» сильных сейсмических событий. Оперативная геофизическая информация по затронутой проблеме, получаемая в лабораториях Северокавказской геофизической обсерватории, регулярно публикуется в открытом

доступе на web-ресурсах: <http://forecast.izmiran.ru/> и <http://alex.uipe.ru/data/>.

Полученные данные дают основания полагать, что надежная регистрация отмеченного класса геомагнитных возмущений современными магнитными вариометрами возможна перед крупными землетрясениями

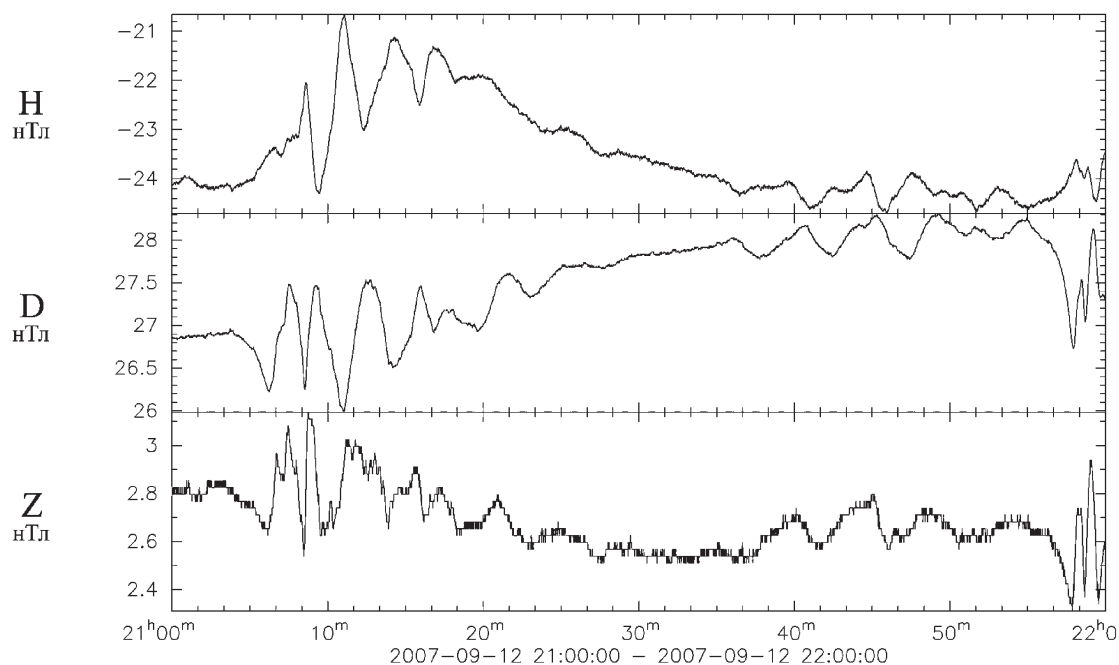


Рис. 10. Структура УНЧ магнитного возмущения, которое возникло и наблюдалось, начиная с 21:30 (т. е. за 3 часа) перед землетрясением в районе Южной Суматры 12.09.2007 [Собисевич и др., 2009]

с магнитудой более 5. Проведенные экспериментальные наблюдения УНЧ электромагнитных возмущений, регистрируемых на этапе подготовки сильных сейсмических событий, показывают, что уже сегодня эта информация является практически значимой. Так, например, при регистрации УНЧ возмущений в разнесенных пунктах комплексом геофизических приборов, которые включают и специализированную магнитометрическую аппаратуру, возможно определение направления на источник сейсмического возмущения. При этом представляется возможным не только качественно выделить с представительной вероятностью краткосрочный электромагнитный предвестник, но и приблизительно указать район будущей сейсмической катастрофы.

Таким образом, в работе исследовано распространение интенсивных широкополосных акустических сигналов в стратифицированной вязкой среде, моделирующей реальную атмосферу. Выведено нелинейное волновое уравнение, описывающее эволюцию произвольного начального профиля в среде со стратификацией и неоднородностью плотности и скорости звука, а также учитывающего вязкость среды. Предложено упрощенное уравнение для случая плавных неоднородностей. Построено решение для профиля интенсивной акустической волны с произвольным начальным профилем для случая малой вязкости. Найдено автомодельное решение, описывающее структуру ударного фронта интенсивной волны в диссипативной среде. Построены решения для профилей периодического и импульсного сигналов, рассчитана структура ударного фронта. Полученные решения для профилей позволяют оценить нагрев атмосферы, вызванный прохождением ударной волны.

Показано, что стратификация атмосферы приводит к возрастанию амплитуды акустической волны на больших высотах. Подобная «раскачка» приводит с одной стороны к возникновению сильных нелинейных эффектов (в том числе к образованию ударных волновых фронтов), а с другой стороны – к компенсации нелинейного затухания на ударных фронтах. Стратификация также приводит к тому, что эффективная вязкость среды растет с высотой и в результате ширина характерного ударного профиля в такой среде по мере распространения волны увеличивается, волна сглаживается. Однако расчеты показывают, что волна с большей амплитудой скачка на ударном фронте обладает и более крутым ударным фронтом. Таким образом, стратификация приводит к «умножению» двух основных факторов интенсивных волн – в среде образуются сильные волны с крутыми фронтами, а слабые – с более плавными. Взаимодействие этих волн с ионосферой приводит к генерации магнитных возмущений, которые удается наблюдать на фоне вариаций магнитного поля Земли.

Анализ экспериментальных наблюдений вариаций магнитного поля Земли показал, что в структуре регистрируемых магнитных сигналов удается выделить характерные ультранизкочастотные волновые

формы, предшествующие сильным телесеismicким событиям.

Несмотря на то что причинно-следственная связь аномальных явлений в системе «литосфера – атмосфера – ионосфера» все еще далека от однозначного объяснения, можно с уверенностью сказать: отмеченные ионосферные аномалии перед сильными землетрясениями – объективная реальность и их дальнейшие исследования с учетом процессов в литосфере и атмосфере представляются на сегодняшний день важными и актуальными.

ЛИТЕРАТУРА

Голицын Г.С. Затухание атмосферных волн благодаря вязкости и теплопроводности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1, № 2.

Голицын Г.С., Кляцкин В.И. Колебания в атмосфере, вызываемые движением земной поверхности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1967. Т. 3, № 10. С. 1044–1052.

Голицын Г.С., Романова Н.Н. Вертикальное распространение звуковых волн в атмосфере с переменной по высоте вязкостью // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4, № 2. С. 210–214.

Голицын Г.С., Островский Л.А., Чунгузов Е.П. Внутренние волны в океане и атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18, № 7. С. 351–368.

Гохберг Л.М., Шалимов С.Л. Воздействие землетрясений и взрывов на ионосферу. М.: Наука, 2008.

Гульельми А.В. Ультранизкочастотные электромагнитные волны в коре и в магнитосфере Земли // УФН. 2007. Т. 177, № 12. С. 1250–1276.

Копытенко Ю.А., Исмагилов В.С., Копытенко Е.А., Воронов П.М., Зайцев Д.Б. Магнитная локация источников геомагнитных возмущений // Докл. РАН. Геофизика. 2000. Т. 371, № 5. С. 685–687.

Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

Романова Н.Н. О вертикальном распространении коротких акустических волн в атмосфере // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1970. Т. 6, № 2.

Руденко О.В., Соляин С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.

Собисевич А.Л., Гриднев Д.Г., Собисевич Л.Е., Канониди К.Х. Аппаратурный комплекс Северокавказской геофизической обсерватории // Сейсмические приборы. Вып. 44. М.: ИФЗ РАН, 2008. С. 12–25.

Собисевич Л.Е., Канониди К.Х., Собисевич А.Л. Ультранизкочастотные электромагнитные возмущения, возникающие перед сильными сейсмическими событиями // Докл. РАН. Геофизика. 2009. Т. 429, № 5. С. 688–672.

Alekseev A.S. A multidisciplinary mathematical model of combined foreshock for earthquake prediction research // J. Earthquake Prediction Research. 1993. Vol. 2, N 2. P. 137–150.

Avagimov A., Bogomolov L., Cheidze T., Ponomarev A., Sobolev G., Tarasov N., Zeigarnik V. Induced seismicity by trigger stimulation

from laboratory and field tests. Paper presented at the First International Workshop on Active Monitoring in the Solid Earth Geophysics, Tono Geosci. Cent., Mizunami, Japan, 30 June to 3 July. 2004.

Enflo B.O., Rudenko O.V. To the theory of generalized Burgers' equation // *Acta acustica*. 2002. Vol. 88. P. 155–162

Gufeld I.L., Rozhnoi A.A., Tyumensev S.N., Sherstuk S.V., Yampolsky V.S. Radiowave disturbances in period to Rudber and Rachinsk earthquakes // *Phys. Solid Earth*. 1992. Vol. 28. P. 267–270.

Kamogawa M. Preseismic Atmosphere Ionosphere Coupling // *Eos*. 2006. Vol. 87, N 40.

Kushida Y., Kushida R. Possibility of earthquake forecast by radio observations in the VHF band // *J. Atmos. Electricity*. 2002. Vol. 22. P 239–255.

Liu J.Y., Chen Y.I., Pulinets S.A., Tsai Y.B., Chuo Y.J. Seismo-ionospheric signatures prior to $M \geq 6.0$ Taiwan earthquakes // *Geophys. Res. Lett.* 2000. Vol. 27. P. 3113–3116.

Liu J.Y., Chen Y.I., Chuo Y.J., Tsai H.F. Variations of ionospheric total electron content during the Chi-Chi earthquake // *Geophys. Res. Lett.* 2001. Vol. 28. P. 1383–1386.

Molchanov O.A., Hayakawa M. Subionospheric VLF signal perturbations possibly related to earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1998. Vol. 103. P. 17489–17504.

Sobolev G., Zakrzhevskaya N. Magnetic storm influence on seismicity in different regions // *Geophysical Research Abstracts*. 2003. Vol. 5. 00135.