

**ИСКАЖЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН
В СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОПЕРЕЧНЫМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НЕОДНОРОДНОСТИ**

© 2010 г. В. А. Гусев

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра акустики
119991 Москва, Ленинские горы. Тел.: (495) 9392943*

E-mail: vgusev@bk.ru

Поступила в редакцию 29.06.09 г.

Для описания совместного влияния нелинейных эффектов и рефракционных неоднородностей на эволюцию интенсивных акустических волн предложена модель среды с периодически изменяющейся в поперечном направлении и убывающей в направлении распространения локальной скоростью звука, обобщающая известные модели слоистых сред и бесконечно тонкого фазового экрана. Найдено точное решение для волны с произвольными начальными условиями – временным и поперечными профилями. Рассчитана пространственная структура волны в неоднородной среде, показано образование узких областей с высокой амплитудой и изменение темпов накопления нелинейных эффектов. Показано, что амплитуда волны на больших расстояниях от источника может не сильно отличаться от своего начального значения за счет компенсации нелинейного затухания фокусировкой на неоднородностях. Изучены возможности усиления интенсивных волн в зависимости от соотношения параметров волны и неоднородной среды.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о распространении интенсивных акустических волн в неоднородной среде, в том числе содержащих разрывы в профиле, возникает во многих практически важных приложениях [1–3]. Среди них можно отметить исследование эволюции волн, вызванных источниками различного происхождения [4, 5], задачи восстановления свойств среды и неразрушающего контроля [6], передачи информации и дистанционного управления, применение ультразвука в медицине [7]. Во всех приведенных задачах необходимо предсказывать влияние распределенных в среде неоднородностей на структуру распространяющейся волны. Помимо накопления нелинейных эффектов, приводящих к образованию резких скачков амплитуды и ударных фронтов в волне, неоднородности среды являются еще одним фактором, определяющим эволюцию акустической волны, в частности, трансформацию пространственного профиля волны и ее спектральных характеристик. Неоднородности, распределенные в протяженном слое среды, искажая фазовые и амплитудные характеристики волны, приводят к изменению лучевых траекторий и, следовательно, к образованию областей сгущения и разрежения лучей, появлению каустик. Таким образом, неоднородности могут сфокусировать волну и привести к более быстрому образованию ударного фронта в одних областях пространства, и не поз-

волить за счет дефокусировки образоваться ударному фронту в других областях. Тем самым, можно говорить о двух конкурирующих процессах, влияющих на появление больших значений амплитуды давления, – нелинейности среды и рефракционной сходимости за счет неоднородности. Развитие аналитических методов, позволяющих описать одновременное влияние нелинейности и распределенных неоднородностей, позволит лучше понять происходящие процессы и прогнозировать возможные воздействия интенсивных волн.

Существует несколько подходов к исследованию волн в неоднородных средах. Одним из эффективных приближений является хорошо изученная модель слоистой среды [8]. Но эта модель не учитывает поперечную структуру неоднородности среды, которая приводит к наиболее существенному для эволюции волны фактору – ее фокусировке на неоднородностях. Распространение волн с учетом фокусировки может быть эффективно исследовано на основе модели бесконечно тонкого фазового экрана [9–11]. Однако во многих случаях толщину неоднородного слоя нельзя считать малой. В таком протяженном слое лучи уже не будут прямыми линиями, и лучевая картина будет определяться структурой неоднородного слоя. В данной работе найдены точные решения для некоторых заданных видов неоднородности, позволяющие описать основные эффекты, сопровождающие распространение волн в протя-

женном неоднородном слое. Эволюция интенсивных волн в слое со слабой неоднородностью произвольного вида может быть исследована с помощью асимптотического метода [12].

Образование разрывов в профиле сильно нелинейных волн приводит к существенному уширению исходного спектра, причем преобладающее значение имеют гармоники с высокими номерами. Такие волны с разрывами можно описывать в приближении нелинейной геометрической акустики [2, 3, 11, 13], согласно которому для высокочастотных сигналов дифракционные эффекты являются несущественными всюду, за исключением фокальных областей. В этом приближении распространение интенсивных волн в неоднородной среде описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{2}(\nabla_{\perp} \Psi)^2 = \zeta(z, x, y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \nabla_{\perp} p \nabla_{\perp} \Psi + \frac{p}{2} \left(\Delta_{\perp} \Psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\nabla_{\perp} \rho \nabla_{\perp} \Psi}{\rho} \right) = 0. \quad (2)$$

Здесь ψ – эйконал, p – акустическое давление, $T = \tau - \psi/c_0$ ($\tau = t - z/c_0$ – время в сопровождающей системе координат), ρ – равновесная (в отсутствие акустической волны) плотность среды, c_0 – среднее (или характерное) значение скорости звука в среде, ε – нелинейный параметр. Предполагается, что волна распространяется в положительном направлении оси z , операторы ∇_{\perp} и Δ_{\perp} вычисляются по поперечным координатам x, y . Уравнения (1)–(2) содержат два вида неоднородности – рефракционную неоднородность и неравномерное распределение плотности среды. Рефракционная неоднородность связана с отклонением локальной скорости звука от ее среднего значения в среде и описывается функцией $\zeta(x, y, z)$. Видно, что эта неоднородность входит в оба уравнения. Неоднородность плотности обусловлена зависимостью равновесного значения плотности среды от координат $\rho = \rho(x, y, z)$ и входит только во второе уравнение для профиля волны.

Уравнение эйконала (1) описывает искажение исходной формы волнового фронта, вызванное неоднородностью среды, и определяет траектории лучей. В однородной среде траектории лучей представляют собой прямые линии, вдоль которых распространяется возмущение; наклон этих прямых определяется исходной формой волнового фронта. Неоднородность среды приводит к искривлению траекторий и более сложной пространственной структуре поля. К искривлению траекторий приводит только рефракционная не-

однородность. Обратим внимание на структуру уравнения переноса (2), описывающего изменение профиля волны, обусловленное как неоднородностью, так и нелинейностью среды. За нелинейные искажения профиля волны отвечает второе слагаемое, третье слагаемое описывает изменение амплитуды, связанное с перемещением точки наблюдения вдоль искривленного в неоднородной среде луча. Изменение амплитуды волны, описываемое последним слагаемым в уравнении (2), связано как с искажением волнового фронта, т.е. эффектами фокусировки и дефокусировки (рефракционная неоднородность), так и неоднородностью плотности среды. Причем эти неоднородности входят в уравнение (2) равноправно в том смысле, что слагаемые, связанные с неоднородностью плотности, можно рассматривать как поперечный лапласиан некоторой дополнительной фазы. Поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием эволюции интенсивных волн в среде с неоднородностью скорости звука.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ ДЛЯ СЛОЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НЕОДНОРОДНОСТИ

Для выявления основных свойств интенсивных волн в неоднородной среде рассмотрим двумерную задачу, когда все величины зависят только от двух пространственных переменных – продольной координаты z (вдоль направления распространения волны) и поперечной координаты y . В этом случае производные по поперечным координатам в уравнениях (1)–(2) будут равны $\nabla_{\perp} = \partial/\partial y$ и $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2$. Более общая трехмерная задача в модельной постановке решена в работе [14]. Как было показано в работе [11], удобным и эффективным методом решения уравнения эйконала (1) является введение функции наклона луча $\alpha = \partial \psi / \partial y$, которая связана с углом между лучом и поперечной осью в каждой точке. Дифференцируя (1) по y , получим неоднородное уравнение типа простых волн:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = v(y, z), \quad v \equiv \zeta_y. \quad (3)$$

Уравнение (3) может быть исследовано хорошо проработанными методами теории распространения простых (римановых) волн в нелинейных средах. Уравнение переноса (2), с учетом введения функции наклона луча, примет следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \alpha \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \alpha \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = 0. \quad (4)$$

Автомодельные решения уравнения эйконала

Уравнение (3) позволяет рассчитать картину лучей для произвольного пространственного распределения неоднородности. Для произвольного вида неоднородности это уравнение не может быть решено аналитически, поэтому представляет интерес поиск конкретных, физически интересных моделей, допускающих точные решения уравнения (3). Такие решения позволят дать полное описание основных эффектов, возникающих при распространении интенсивных акустических волн в неоднородной среде.

При поиске точно решаемых моделей уравнения (3) полезно исследование его автомодельных решений. В однородной среде $\zeta = 0$ уравнение (3) допускает решение следующего вида $\alpha = z^{b-1}\Phi(\xi = yz^{-b})$, где Φ – произвольная функция, b – произвольный параметр. Подстановка этого решения в (3) приводит к уравнению для функции Φ :

$$z^{b-2}[(b-1)\Phi - b\xi\Phi' + \Phi\Phi'] = v(z, \xi z^b).$$

Отсюда заключаем, что автомодельное решение искомого вида существует и для исходного уравнения (3), если неоднородность имеет вид: $v(z, y) = z^{b-2}v_0(yz^{-b})$. Наиболее характерен случай $b = 0$. Это неоднородность с некоторым поперечным распределением, абсолютная величина которой убывает с расстоянием. С одной стороны, такая модель обобщает хорошо изученные слоисто-неоднородные среды. С другой стороны, она более реалистично описывает прохождение волны через неоднородность конечной толщины. В атмосферной акустике такой неоднородностью может быть протяженное облако, плавно переходящее в окружающую равновесную среду или нагретый слой воздуха, в котором параметры могут существенно меняться с высотой. Отметим, что неоднородности вида $b \neq 0$ могут отвечать, в частности, каким-либо искусственно создаваемым структурам и представлять интерес для формирования заданной пространственной структуры поля. Для заданной неоднородности вида $v(z, y) = v_0(y)(1+z/z_0)^{-2}$, где заданная функция $v_0(y)$ описывает поперечное распределение, а параметр z_0 определяет характерный масштаб изменения неоднородности в продольном направлении, решение уравнения эйконала (3) можно искать в виде $\alpha = f(y)(1+z/z_0)^{-1}$, где $f(y)$ определяется из уравнения:

$$f df/dy - f/z_0 = v_0(y).$$

Найденная отсюда функция наклона луча позволяет построить автомодельное решение уравнения переноса (4) при постоянной плотности:

$p(z, y) = p(y)(1+z/z_0)^{-1}$. Наглядный физический смысл этого решения – волна с неизменным поперечным профилем $f(y)$ и убывающей по мере распространения в среде амплитудой. Такое решение отвечает некоторому конкретному граничному условию, согласованному с видом неоднородности.

Интересной для дальнейшего исследования представляется периодическая в поперечном направлении неоднородность скорости звука, в частности, следующего вида $v_0(y) = \frac{2}{y_0} \sin \frac{2y}{y_0} - \frac{2}{z_0} \sin \frac{y}{y_0}$.

При этом неоднородность скорости звука ζ определяется из соотношения $\partial\zeta/\partial y = v_0(y)(1+z/z_0)^{-2}$. Функция наклона луча для этой модели имеет вид:

$$\alpha = \frac{2 \sin y/y_0}{1+z/z_0}. \quad (5)$$

Это решение также является периодическим в поперечном направлении, а параметры z_0 и y_0 задают соотношение продольных и поперечных масштабов неоднородности. Выбор именно периодического поперечного распределения неоднородности позволяет моделировать слой реальной неоднородной среды с областями локальных фокусировок и дефокусировок, сменяющих друг друга при перемещении в поперечном направлении. Функция наклона луча (5) как раз и описывает периодическую в поперечном направлении последовательность областей локальных фокусировок, дефокусировок и точек перегиба фазового фронта. Таким образом, данная модель неоднородности позволяет рассмотреть основные эффекты, связанные с влиянием неоднородности среды на эволюцию интенсивных волн.

Решение уравнения эйконала, в частности, выражение (5), определяет функцию наклона луча в каждой точке среды, т.е. задает направление луча. Для более полного и наглядного анализа этого решения удобно найти траекторию этого луча – закон перемещения луча из заданной при $z = 0$ точки y^0 в некоторую точку y на расстоянии z от границы среды. Согласно уравнению (3) траектории лучей определяются уравнением $dy/dz = \alpha(y, z)$. Отсюда видно, что характерные области изменения лучевой картины связаны со знаком функции наклона луча. В областях с положительными значениями этой функции, $\alpha(y, z) > 0$, поперечная координата каждого луча увеличивается; в областях $\alpha(y, z) < 0$ координата уменьшается. Соседние области с различным знаком функции наклона луча разделены кривыми, вдоль которых $\alpha(y, z) = 0$, в каждой из этих точек лучи направлены вдоль оси распространения волны. Тогда ясно,

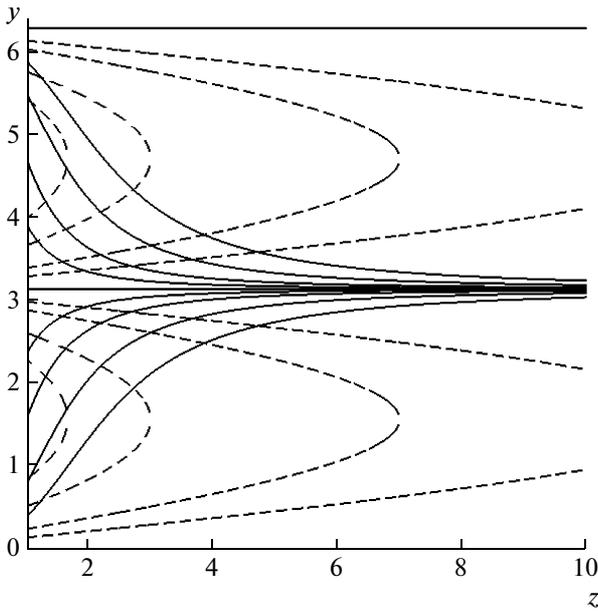


Рис. 1. Траектории лучей (сплошные линии) и линии равного наклона лучей (пунктирные линии) в среде с периодической неоднородностью.

что если область с отрицательным значением функции наклона луча расположена при больших значениях поперечной координаты, а область с положительным значением — при меньших значениях координаты, то лучи сдвигаются навстречу друг другу, образуя области сгущения. В противоположном случае лучи разбегаются друг от друга с образованием области разрежения. Отметим, что если уравнение $\alpha(y, z) = 0$ определяет параллельную оси распространения линию, то эта линия будет неподвижным лучом и осью фокусировки. В общем случае лучи будут локализоваться вблизи этой кривой. Для решения (5) траектория луча, выходящего из точки y^0 , имеет вид:

$$y/y_0 = 2 \arctg \left[\operatorname{tg} \left(y^0 / 2y_0 \right) \left(1 + z/z_0 \right)^{2d} \right].$$

Здесь введен масштабный фактор $d = z_0/y_0$, характеризующий относительные вклады поперечных и продольных неоднородностей в трансформацию волны. Видно, что периодическое распределение неоднородности приводит к периодической лучевой картине, один период которой для случая равных масштабов ($d = 1$) представлен на рис. 1 сплошными линиями. Поскольку $\alpha = \partial \psi / \partial y$, лучи с нулевым наклоном соответствуют экстремумам эйконала (волнового фронта) — локальным осям фокусировок и дефокусировок. Из уравнения траектории видно, что такие лучи ($y^0 = 0$ и $y^0/y_0 = \pi$) не смещаются (переходят в лучи $y = 0$ и $y/y_0 = \pi$ соответственно). Траектория некоторого

промежуточного луча, например $y^0/y_0 = \pi/2$, имеет вид: $y/y_0 = 2 \arctg \left(1 + z/z_0 \right)^2$. Из рисунка и асимптотики при больших z (когда значение арктангенса приближается к $\pi/2$) видно, что в данной модели все лучи сходятся к точке $y/y_0 = \pi$, образуя вблизи нее область сгущения и область разрежения вблизи $y = 0$. Можно ожидать, что в областях сгущения лучей амплитуда волны будет существенно превышать амплитуду в областях разрежения лучей. На рис. 1 пунктирными линиями показаны также линии равного уровня для модуля функции наклона луча.

Амплитуда волны в среде с постоянной плотностью

Уравнение переноса (4) после подстановки функции наклона луча (5) при $\rho = \rho_0$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{2 \sin y/y_0}{1 + z/z_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{2y_0} p \frac{2 \cos y/y_0}{1 + z/z_0} = 0. \quad (6)$$

Как упоминалось выше, одним из решений уравнения (6) является стационарный поперечный профиль с убывающей с расстоянием от границы слоя амплитудой $p = A(y; T) / (1 + z/z_0)$. Поперечный профиль A этого решения задается в неявной форме, содержащей произвольную функцию Φ , и для случая равных масштабов ($d = 1$) имеет вид:

$$A = \frac{\Phi \left(T + A \sqrt{1 + \cos y/y_0} (s - s_0) \right)}{\sqrt{1 + \cos y/y_0}}, \quad (7)$$

$$s = \frac{\varepsilon y_0}{2 \rho_0 c_0^3} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cos y/y_0}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{1 + \cos y/y_0}{2}} \right),$$

Как видно из (7), функция s , имеющая смысл эффективного расстояния и определяющая степень проявления нелинейных искажений, зависит от поперечной координаты. Используя выражения (7) и (5), можно показать, что максимальное значение s соответствует области фокусировки ($y = \pi$), минимальное — дефокусировки ($y = 0$). Произвольная постоянная s_0 в (7) позволяет определить начало отсчета расстояния s . Наиболее соответствует физическому смыслу s — пройденному от начала слоя расстоянию — такой выбор s_0 , при котором минимальное значение $s - s_0$ равно нулю, т.е. $s_0 = s(y = 0)$. Задавая характерный линейный асимптотический профиль ударных волн $\Phi = -T$, получим явное выражение для стационарного поперечного профиля:

$$A = -T / (\delta + s), \quad \delta = \sqrt{1 + \cos y/y_0}. \quad (8)$$

Такая форма профиля представляет при $|T| \leq T_0$ решение для одного периода T_0 периодической волны; дальше решение может быть периодиче-

ски продолжено. Поперечное пространственное распределение пиковой амплитуды A_{peak} профиля (8) представлено на рис. 2. Он состоит из периодической последовательности гладких кривых и чередующихся изломов в точках с нулевым наклоном луча. При переходе через такую точку меняется направление распространения лучей, и эти изломы профиля компенсируют изменение поведения лучей и обеспечивают неизменность профиля. Важно отметить следующую особенность решения (8). В линейном приближении (формально $\varepsilon \rightarrow 0$) $s = 0$ и решение оказывается неограниченным на осях фокусировки. Нелинейность ограничивает рост амплитуды в фокусе и позволяет построить решение для периодической волны с ограниченным всюду поперечным профилем. Интересно, что в случае одиночного N-импульса нелинейность не способна ограничить на осях фокусировки подобный стационарный поперечный профиль.

Достоинством модельного уравнения (6) является возможность построения его общего решения для волны с произвольными начальными временным и поперечным профилями $p|_{z=0} = p_0(y; T = \tau)$. Решение строится методом характеристик, при этом оно существенно зависит от масштабного фактора. Это позволяет исследовать особенности эволюции интенсивных волн в среде с “мелкой” или, наоборот, “крупной” поперечной структурой (по отношению характерных продольного и поперечного масштабов), анализ которой будет представлен ниже. Ввиду громоздкости выражений в общем случае приведем только общее решение для случая равных масштабов неоднородности ($d = 1$):

$$p = \frac{1}{1 + z/z_0} \frac{1}{\delta} p_0 \left(y^0; T + \frac{\varepsilon z_0}{2\rho_0 c_0^3} p(1 + z/z_0) \delta s \right), \quad (9)$$

где введены обозначения:

$$\delta = \sqrt{\cos^2 \frac{y}{2z_0} + \frac{1}{(1 + z/z_0)^4} \sin^2 \frac{y}{2z_0}},$$

$$s = \frac{1}{\delta} - 1 + \frac{|\cos y/2z_0|}{\delta} \ln \left(\left(1 + \frac{z}{z_0} \right)^2 \frac{|\cos y/2z_0| + \delta}{|\cos y/2z_0| + 1} \right), \quad (10)$$

$$y^0 = \arccos \frac{(1 + z/z_0)^4 (1 + \cos y/z_0) - (1 - \cos y/z_0)}{(1 + z/z_0)^4 (1 - \cos y/z_0) + (1 + \cos y/z_0)}.$$

Здесь s — эффективное расстояние, пройденное волной в нелинейной неоднородной среде и определяющее степень нелинейных искажений ее профиля, δ описывает рефракционную сходимость лучей и имеет смысл площади поперечного сечения лучевой трубки, y^0 — начальная поперечная координата заданного луча. Отметим, что величина δ связана только с неоднородностью

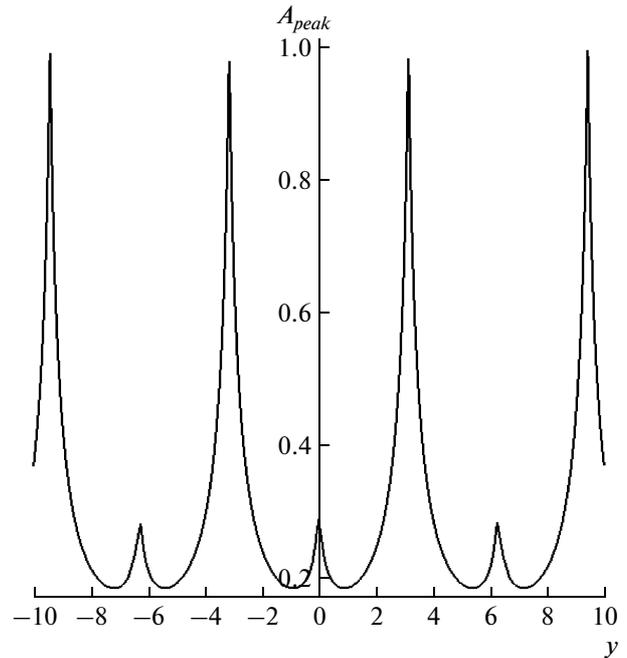


Рис. 2. Стационарное поперечное пространственное распределение пиковой амплитуды профиля (8).

среды и имеет такое же значение в линейном приближении. Таким образом, неоднородности среды приводят к изменению амплитуды волны (параметр δ) и темпов накопления нелинейных эффектов. Эффективное расстояние s теперь различно для разных лучей и зависит от вида неоднородности.

Приведем другой вывод решения уравнения (6), который позволяет провести дополнительный анализ протекающих эффектов, а также обобщить рассматриваемую модель. Перейдем в уравнении (6) к лучевым координатам, т.е. координатам, в которых траектория луча представляет прямую линию. Это преобразование соответствует переходу к таким новым координатам $z_1 = z$ и $\xi = Y(z, y)$, что выполняется равенство $\partial p / \partial z + \alpha (\partial p / \partial y) = \partial p / \partial z_1$, т.е. в преобразованном уравнении переноса отсутствует производная по поперечной координате. Фактически нахождение лучевых координат осуществляется при решении уравнения эйконала и такой метод применим во всех случаях, когда оно может быть точно решено. Однако такой переход может быть произведен и формально, без точного знания траектории луча, и в таком случае позволяет описать эволюцию волны вдоль заданного луча и выявить основные эффекты, не обращаясь к точной картине поля в исходных физических координатах. Перенос решения в лучевых координатах на исходную физическую сетку может быть затем осуществлен при численном решении уравнения эйконала. Для ре-

шения (5) поперечную лучевую координату (при $d = 1$) удобно задать в виде (индекс 1 при z_1 в дальнейшем опускаем):

$$\xi = (1 + z/z_0) \left(\frac{1 - \cos y/z_0}{1 + \cos y/z_0} \right)^{1/4}. \quad (11)$$

Уравнение переноса (6) в новых переменных z, ξ примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{2z_0} \frac{2p}{1 + z/z_0} \frac{\xi^4 - (1 + z/z_0)^4}{\xi^4 + (1 + z/z_0)^4} = 0. \quad (12)$$

В этом уравнении переменная ξ является параметром, т.е. мы добились уменьшения числа независимых переменных. По своему физическому смыслу уравнение (12) описывает изменение амплитуды вдоль некоторой лучевой трубки, нумерованной параметром ξ . В частности, последнее слагаемое по своему смыслу описывает изменение амплитуды давления за счет изменения эффективного сечения лучевой трубки (см. аналогичное преобразование в работе [11]). Переход к лучевым координатам и дальнейшее рассмотрение задачи с произвольной зависимостью от расстояния позволяет расширить данный подход и исследовать эффекты, связанные, например, с вязкостью среды и нелинейной рефракцией в неоднородной среде [15], не привязываясь к конкретной геометрической картине лучей.

В уравнении (12) целесообразно произвести следующее преобразование:

$$\frac{1}{z_0} \frac{2}{1 + z/z_0} \frac{\xi^4 - (1 + z/z_0)^4}{\xi^4 + (1 + z/z_0)^4} = \frac{d}{dz} \ln S, \text{ т.е.} \quad (13)$$

$$S = \frac{(1 + z/z_0)^2 (\xi^4 + 1)}{\xi^4 + (1 + z/z_0)^4}.$$

Здесь величина S имеет смысл характерной площади поперечного сечения лучевой трубки и введена так, что при $z = 0$ площадь лучевой трубки $S = 1$. После перехода к эффективному пройден-

ному расстоянию $s = \int_{z_0}^z dz/\sqrt{S}$ для новой функции

$P = p\sqrt{S}$ получаем уравнение простых волн [1, 12]:

$$\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} P \frac{\partial P}{\partial T} = 0. \quad (14)$$

Важно заметить, что преобразование (13) является только иллюстрацией данного подхода, и подобная процедура определения функции S и сведения к уравнению (14) возможна для неоднородности произвольного вида. Распространение волны в однородной среде описывается уравнением, по форме совпадающим с уравнением (14). Однако в (14) входят эффективные значения дав-

ления и расстояния. Таким образом, неоднородности среды приводят к изменению амплитуды волны и эффективного пройденного расстояния, т.е. темпов накопления нелинейных эффектов. Используя решение уравнения (14), можно записать выражение для давления в лучевой трубке с параметром ξ . После перехода к исходным координатам (подстановки выражений (11) и (13)) это решение совпадет с решением (9), (10).

ОБРАЗОВАНИЕ РАЗРЫВОВ В ПРОФИЛЕ ИСХОДНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА

Одним из наиболее важных нелинейных эффектов является образование разрывов в профиле волны, изначально их не содержащем. Исследуем особенности этого процесса на примере, наиболее важном для прикладных задач, — синусоидальной плоской волны. Решение (9) для граничного условия $p_0 = a_0 \sin \omega t$ примет вид (напомним, $d = 1$):

$$\frac{p}{a_0} = \frac{1}{1 + z/z_0} \frac{1}{\delta} \sin \left(\omega T + \frac{Z_0 p}{2 a_0} (1 + z/z_0) \delta s \right). \quad (15)$$

Для анализа решения (15) удобно ввести безразмерные расстояния $Z = z/z_{nl}$, $Z_0 = z_0/z_{nl}$, где $z_{nl} = \rho_0 c_0^3 / (\varepsilon \omega a_0)$ — длина образования разрыва в профиле гармонической волны в однородной среде. Эволюция исходно синусоидального сигнала (временные профили на расстояниях $Z = 0; 0.75; 2$) представлена на рис. 3. Исходный синусоидальный профиль с постоянной в поперечном направлении при $Z = 0$ амплитудой начинает неравномерно искажаться. В областях сгущения лучей происходит фокусировка и увеличение амплитуды, в областях разрежения лучей — уменьшение амплитуды. Рост амплитуды приводит к более быстрому накоплению нелинейных искажений профиля и появлению неоднозначности в профиле, а в дальнейшем — образованию разрыва. В областях разрежения лучей уменьшение амплитуды волны приводит к замедлению образования разрыва в профиле.

Из свойств решения (15) следует, что расстояние образования разрыва в профиле определяется условием $Z_0 s = 2$ и зависит, таким образом, от поперечной координаты, т.е. вдоль различных лучей разрыв образуется на различных расстояниях. Выпишем для наглядности выражения для длины образования разрыва при различных значениях поперечной координаты: в области сгущения лучей ($y/z_0 = \pi$) $z_{s\pi}/z_0 = \sqrt{1 + 2/Z_0} - 1$; в области разрежения лучей ($y/z_0 = 0$) $z_{s0}/z_0 = e^{1/Z_0} - 1$. При $Z_0 = 1$ (равенстве характерных нелинейной длины и масштаба неоднородности) эти длины равны

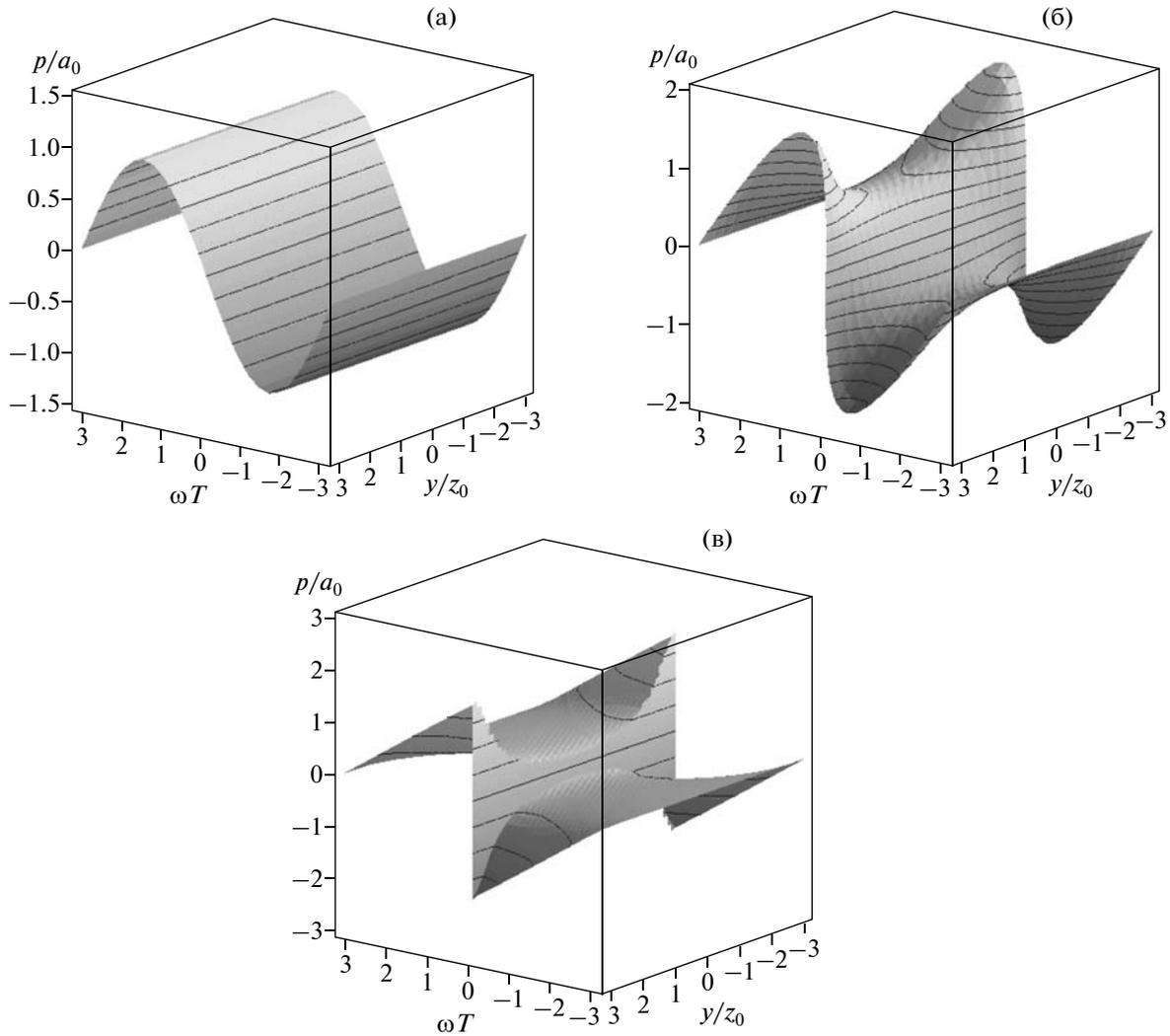


Рис. 3. Эволюция исходного синусоидального временного профиля (а) $Z = 0$, (б) $Z = 0.75$, (в) $Z = 2$.

$z_{сп}/z_0 \approx 0.7$ и $z_{s0}/z_0 \approx 1.7$ соответственно. Таким образом, первое образование неоднозначности происходит на расстоянии приблизительно $z_{сп}/z_0 \approx 0.7$ в точке сгущения лучей, что меньше длины образования разрыва в профиле гармонической волны в однородной среде. В то же время в области разрежения лучей разрыв образуется только на расстоянии $z_{s0}/z_0 \approx 1.7$. Более сильная фокусирующая неоднородность может привести к тому, что в областях разрежения лучей разрыв не образуется вовсе. Такая зависимость длины образования разрыва в профиле волны от поперечной координаты приводит к сложной структуре волнового фронта и образованию так называемых вторичных ударных волн [16].

В области до образования разрыва по аналогии с решением уравнения простых волн можно записать выражения для амплитуд высших гармоник

исходного сигнала, возникающих за счет нелинейности:

$$p/a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z, y) \sin n\omega T, \quad (16)$$

$$B_n = \frac{4}{nZ_0(1+z/z_0)\delta s} J_n\left(n\frac{Z_0}{2}s\right),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка. Выражение (16) легко получить, если учесть, что для волны вида $p = a \sin(\omega T + bp)$, где величины a , b не зависят от времени, амплитуда гармоники равна $B_n = \frac{2}{nb} J_n(nab)$. В области сгущения лучей $\delta = (1+z/z_0)^{-2}$, $s = 2z/z_0 + z^2/z_0^2$; в области разрежения лучей $\delta = 1$, $s = 2 \ln(1+z/z_0)$. Зависимости амплитуд первых трех гармоник (16) (кривые 1а, 2а, 3а соответственно) представлены на рис. 4 для

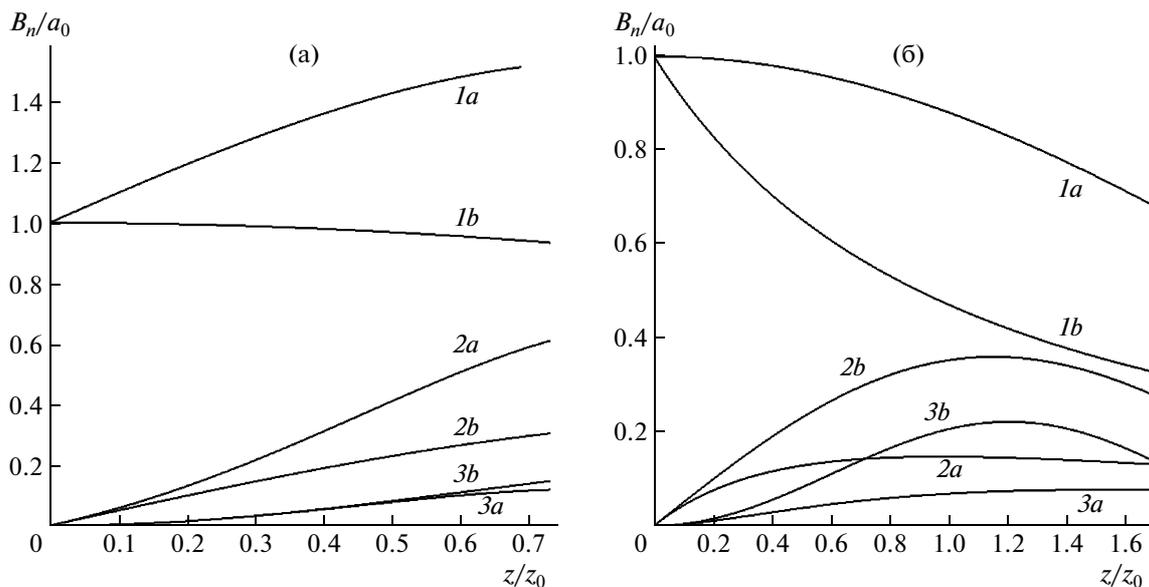


Рис. 4. Амплитуды первых трех гармоник (кривые 1а, 2а, 3а) исходного синусоидального профиля (а) в областях сгущения и (б) разрежения лучей в сравнении с амплитудами гармоник в однородной среде (кривые 1б, 2б, 3б).

значения параметра $Z_0 = 1$. Для сравнения на рисунках изображены первая, вторая и третья гармоники соответственно в однородной среде (кривые 1б, 2б и 3б). На рис. 4а представлены гармоники в области сгущения лучей при $y/z_0 = \pi$, на рис. 4б — гармоники в области разрежения лучей при $y/z_0 = 0$. За счет пространственного перераспределения энергии амплитуды первых двух гармоник в области сгущения лучей не только превосходят соответствующие амплитуды в однородной среде, но и растут с расстоянием по сравнению с начальной амплитудой. Энергия на увеличение амплитуды черпается как из высших гармоник, которые генерируются медленнее по сравнению со случаем однородной среды, так и из областей разрежения лучей, где амплитуды гармоник убывают значительно быстрее, чем в однородной среде. Интересно, что амплитуды всех четных гармоник в данной неоднородной среде оказываются больше соответствующих амплитуд в однородной среде. В то же время амплитуды нечетных гармоник, начиная с третьей и более высокие, оказываются меньше соответствующих амплитуд в однородной среде. Таким образом, неоднородность среды может приводить к эффективной генерации только некоторых определенных гармоник за счет перераспределения энергии от остальных возникающих в нелинейной среде гармоник. Этот результат позволяет использовать искусственно вводимые в среду неоднородности для эффективного преобразования исходного сигнала в его гармоники, или восстановления свойств среды по анализу спектра полученного сигнала.

ЭВОЛЮЦИЯ ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН

Перейдем теперь к анализу трансформации наиболее характерных для нелинейной акустики разрывных профилей — пилообразных волн — в неоднородной нелинейной среде в соответствии с решением (9). Рассмотрим случаи периодической пилообразной волны с постоянной амплитудой разрыва a_0 :

$$p_{S0} = -\frac{\omega\tau - 2\pi n}{\pi} a_0, \quad -\pi + 2\pi n < \omega\tau < \pi + 2\pi n,$$

n — целое,

и одиночного импульса — N -волны с пиковой амплитудой a_0 :

$$p_{N0} = \begin{cases} -a_0\tau/\tau_0, & |\tau| < \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases}$$

Поскольку в приближении нелинейной геометрической акустики эффекты дифракции не учитываются, то меняться будет лишь амплитуда a разрывных фронтов, и для периодической пилой можно сразу написать: $p_S = -(\omega T/\pi)a_S(x, y, z)$. Тогда для амплитуды волны (величины разрыва) из (9) получаем:

$$\frac{a_S}{a_0} = \frac{1}{(1+Z)\delta(1+Z_0\delta)}, \quad Z_0 = \frac{\varepsilon\omega a_0 z_0}{\pi\rho_0 c_0^3} = \frac{z_0}{z_{nl}}. \quad (19)$$

Для нахождения пиковой амплитуды одиночного N -импульса заметим, что в силу (14) для функции P выполняется закон сохранения импульса.

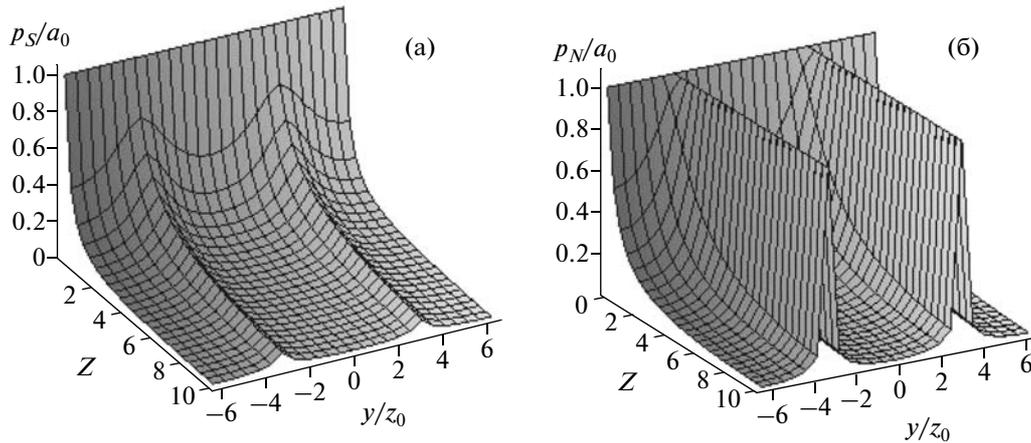


Рис. 5. Изменение поперечного профиля разрыва для (а) периодической пилообразной волны (17) и (б) одиночного N-импульса (18).

Можно также найти закон изменения импульса

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} p dT, \text{ интегрируя по } T \text{ уравнение (6):}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2 \sin y}{z_0 + z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} u \frac{2 \cos y}{z_0 + z} = 0, \quad u = \frac{1}{\delta} \frac{u_0}{1 + z/z_0}.$$

Учитывая, что $u_0 = a_0 \tau_0$, $u = a \tau$, для амплитуды N-импульса получим:

$$\frac{a_N}{a_0} = \frac{1}{(1 + Z) \delta \sqrt{1 + Z_0 s}}, \quad Z_0 = \frac{\varepsilon a_0 z_0}{\tau_0 \rho_0 c_0^3} = \frac{z_0}{z_{nl}}. \quad (18)$$

Отметим, что длительность N-импульса зависит также от поперечной координаты: $T_N = \tau_0 (1 + Z) \delta \sqrt{1 + Z_0 s}$. Она уменьшается в областях фокусировок и растет в областях дефокусировок. В решениях (17), (18) введена безразмерная переменная $Z = z/z_0$, z_{nl} – нелинейная длина в однородной среде для периодического и импульсного сигналов соответственно. Заметим, что поведение решения определяется соотношением между пространственным масштабом z_0 и нелинейной длиной.

Зависимость нормированной пиковой амплитуды периодической волны (17) и N-импульса (18) от продольной и поперечной координат показана на рис. 5а и б соответственно. Графики построены при значении параметра $Z_0 = z_0/z_{nl} = 1$. За счет модуляции скорости звука и фокусировки в среде, согласно рис. 1, образуются области сгущения лучей. Амплитуда в этих областях существенно возрастает по сравнению с окружающими областями. Соответственно, возникает сложный поперечный профиль пиковой амплитуды. Рис. 5 показывает, как этот поперечный профиль изменяется с увеличением пройденного расстояния. Сначала образуются довольно широкие области

высокого давления, затем происходит процесс их сужения, сопровождаемый увеличением максимальной амплитуды по сравнению с минимальной. В результате на больших расстояниях поперечный профиль оказывается состоящим из широких областей с малой амплитудой и узких областей с высокой амплитудой. Рис. 5 позволяет рассмотреть как изменение поперечного профиля пиковой амплитуды, так и изменение с расстоянием амплитуды для фиксированной поперечной координаты. В целом происходит убывание амплитуды, связанное с нелинейным затуханием; неоднородность среды и ее фокусирующие свойства меняют темпы этого затухания в разных областях. Исключение составляет только область оси фокусировки для одиночного импульса. Рис. 5а, б показывает принципиальное различие в распространении периодической волны и одиночного импульса, особенно их максимальных амплитуд. Пиковая амплитуда периодической волны по мере распространения уменьшается, нелинейное затухание оказывается в этом случае преобладающим процессом, и максимальная амплитуда не превышает своего начального значения. В то же время поперечная форма одиночного импульса оказывается изрезанной, образуются узкие области высокого давления в областях фокусировок, разделенные большими областями с малой пиковой амплитудой. Главным отличием является конечное предельное значение максимальной пиковой амплитуды одиночного импульса на бесконечности.

Проанализируем более подробно минимальное и максимальное значения амплитуды волны. В области разрежения ($y/z_0 = 0$) $\delta = 1$, $s = 2 \ln(1 + Z)$, и пиковые амплитуды равны $a_s/a_0 = (1 + Z)^{-1} [1 + 2Z_0 \ln(1 + Z)]^{-1}$ и $a_N/a_0 = (1 + Z)^{-1} [1 + 2Z_0 \ln(1 + Z)]^{-1/2}$. В этом случае, как и

ожидалось, пиковые амплитуды убывают, причем быстрее, чем в однородной среде. В области сгущения лучей ($y = \pi$) $\delta = 1/(1+Z)^2$, $s = Z^2 + 2Z$ и амплитуды равны $a_S/a_0 = (1+Z)[1+Z_0(Z^2+2Z)]^{-1}$ и $a_N/a_0 = (1+Z)[1+Z_0(Z^2+2Z)]^{-1/2}$ соответственно. Максимальные пиковые значения амплитуды существенно зависят от параметра $Z_0 = z_0/z_{nl}$ — соотношения между нелинейной длиной и характерным масштабом (шириной) неоднородного слоя. Это хорошо видно из соответствующих асимптотических выражений при $Z \rightarrow \infty$: $a_S/a_0 \sim 1/Z_0Z$ и $a_N/a_0 \sim 1/\sqrt{Z_0}$. При значении параметра $Z_0 = 1$ из точных выражений получаем $a_N/a_0 = 1$, $a_S/a_0 = (1+Z)^{-1}$, т.е. рефракционная сходимость точно компенсирует нелинейное затухание одиночного импульса, в то же время максимальная амплитуда периодической волны убывает так же, как в однородной среде. При $Z_0 \gg 1$ преобладает нелинейность и пиковые нормированные амплитуды как периодической волны, так и одиночного импульса быстро уменьшаются. При $Z_0 \ll 1$ сходимость превосходит нелинейное затухание, и амплитуда одиночной волны значительно возрастает до значения порядка $1/\sqrt{Z_0}$. Амплитуда периодической волны в этом случае вначале растет по сравнению с начальным значением, но на больших расстояниях все равно убывает до нуля. Таким образом, для одиночного импульса сходимость лучей полностью компенсирует нелинейное затухание волны и приводит к постоянному значению пиковой амплитуды в точках фокусировки. В случае же периодической волны не удастся достичь компенсации процессов нелинейного затухания и фокусировки, и получить конечную амплитуду на больших расстояниях.

Эти результаты позволяют сделать вывод о своеобразном эффекте насыщения. Неоднородный слой с фокусирующими областями эффективно усиливает волны малой интенсивности, соответствующие малым Z_0 , и, в то же время нормированная амплитуда волн большой интенсивности, наоборот, уменьшается с ростом начальной амплитуды волны. Граничным является случай равенства нелинейной длины и характерного масштаба неоднородности $Z_0 = 1$. Убывание нормированной амплитуды в случае больших Z_0 связано с усилением нелинейных эффектов и возрастанием темпов затухания на ударных фронтах. Исходя из смысла параметра Z_0 , получаем, что для заметного усиления волны малой интенсивности ей достаточно встретить на пути распространения плавную слабофокусирующую неоднородность. Для усиления же волны большой интенсивности на ее пути должна встретиться

неоднородность со значительной “фокусирующей силой”.

Возвращаясь к определению Z_0 в формулах (17) и (18), найдем, что абсолютная амплитуда периодической волны на больших расстояниях оказывается обратно пропорциональной начальной амплитуде. Напомним, что в случае однородной среды зависимость амплитуды от начального значения пропадает, так что амплитуда определяется только параметрами среды [1]. В случае одиночного импульса аналогичные расчеты приводят к зависимости $\sim \sqrt{a_0}$, как и в однородной среде. Это означает, что амплитуда импульса большой интенсивности все же возрастает, но гораздо медленнее, чем амплитуда импульса малой интенсивности. Таким образом, одиночные импульсы в однородной среде испытывают более сильное усиление, чем периодические сигналы, причем возможна полная компенсация нелинейного затухания на фронтах за счет рефракции на неоднородностях. Кроме того, амплитуда волн большой интенсивности в области фокусировки возрастает с увеличением начальной амплитуды, хотя и по достаточно медленному — корневому закону.

Отмеченные различия в поведении периодической волны и одиночного импульса сохраняются и при других значениях масштабного фактора $d = z_0/y_0$. На рис. 6, а, б приведены поперечные профили пиковой амплитуды периодической волны, на рис. 6, в, г — одиночного N-импульса при $z_0/z_{nl} = 2$. При переходе значения масштабного фактора через единицу поведение поперечных профилей меняется. В случае $d < 1$ вдоль поперечной оси у неоднородность меняется медленнее, чем вдоль продольной оси z (см. рис. 6, а, в) амплитуда одиночного импульса не превосходит своего начального значения и убывает с расстоянием. Поперечный профиль амплитуды периодической волны оказывается существенно более гладким, чем профиль амплитуды импульса. В случае $d > 1$ вдоль поперечной оси неоднородность меняется быстрее, чем вдоль продольной оси (см. рис. 6, б, г), профиль амплитуды периодической волны становится более резким — увеличивается перепад между максимальным и минимальными значениями. Амплитуда же одиночного импульса возрастает по сравнению со своим начальным значением. Однако это возрастание сосредоточено только в области локализации неоднородного слоя. Во всех случаях $d \neq 1$ не происходит полной компенсации нелинейного затухания и рефракции, как при $d = 1$. Принципиальная разница в том, что при $d < 1$ амплитуда одиночного импульса убывает достаточно медленно, а при $d > 1$, хотя вначале и происходит рост амплитуды, затем амплитуда убы-

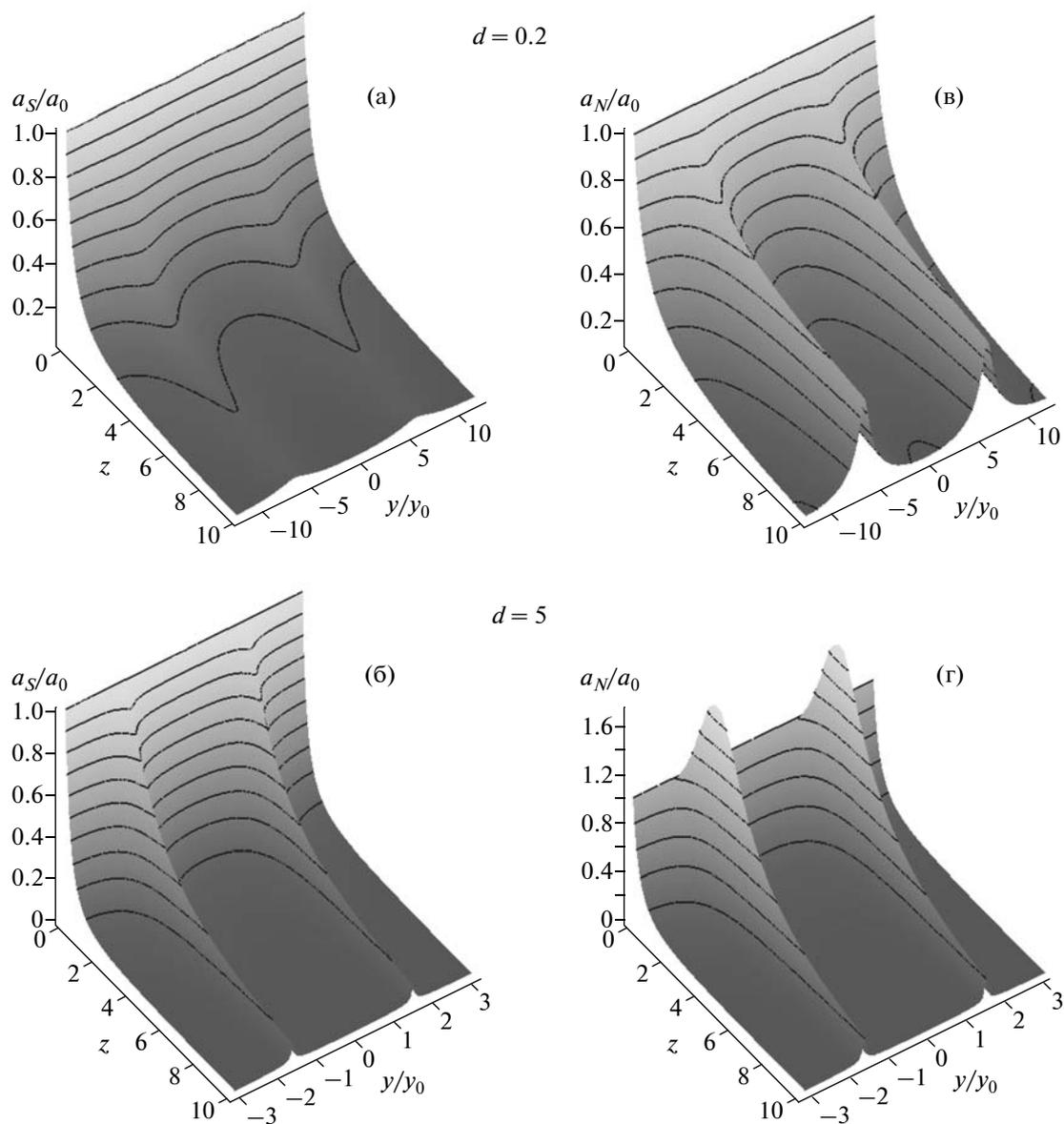


Рис. 6. Поперечные профили пиковой амплитуды для периодической волны (а, б) и одиночного N-импульса (в, г) для различных значений масштабного фактора d (а, в — $d = 0.2$, б, г — $d = 5$).

ваит гораздо быстрее. Амплитуда периодической волны не испытывает таких резких изменений и в целом всегда оказывается сглаженной по сравнению с полем одиночного импульса.

Можно сделать следующие выводы. В случае более быстрого изменения вдоль поперечной оси (по сравнению с изменением вдоль продольной оси) неоднородности могут приводить к довольно значительным эффектам фокусировки в непосредственной близости от своей локализации, но не могут оказать существенного влияния на распространение волны на больших расстояниях, и волна затухает в соответствии с законами диссипации энергии на разрывах. В противоположном случае медленного изменения вдоль поперечной

оси неоднородности не вызывают таких резких фокусировок ни вблизи, ни вдали от своей локализации, но в то же время приводят к заметно более медленному затуханию волны на больших расстояниях. В рамках данной модели выделенным оказывается случай равенства продольного и поперечного характерных масштабов неоднородности, когда удается достичь компенсации нелинейного затухания и фокусировки на большой дистанции, так что максимальная амплитуда разрыва одиночного импульса остается постоянной на больших расстояниях от области локализации неоднородности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем некоторые численные оценки полученных в работе результатов на примере прохождения через турбулентную атмосферу разрывных волн, генерируемых во время полета сверхзвуковыми пассажирскими самолетами [3, 4, 9–11]. Временной профиль этих волн обычно близок к N-волне [3, 4, 9] с характерными значениями длительности импульса 10^{-2} с и времени нарастания давления на фронте 10^{-3} с. На расстоянии $z \sim 30 - 100$ м амплитуда этих волн может достигать нескольких тысяч Па. Таким образом, нелинейная длина оказывается порядка $z_{nl} \sim 100$ м для низкочастотных компонент, описывающих профиль волны в целом, и $z_{nl} \sim 10$ м для высокочастотных компонент, описывающих фронт волны. В то же время на расстояниях порядка 10 км от самолета амплитуда давления около 100 Па, и нелинейные длины порядка 1 км и 100 м соответственно.

Оценим фокусирующие способности турбулентного слоя атмосферы, опираясь на теорию Колмогорова [17]. Флуктуации скорости u частиц среды, разнесенных в поперечном направлении на расстояние r , в сечении z описываются структурной функцией $D_u(z, r) = \langle (u_1 - u_2)^2 \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означают усреднение. Эти флуктуации вызывают искажения волнового фронта распространяющейся волны, которые можно описать структурной функцией эйконала ψ , $D_\psi(r) =$

$$= \frac{z}{2c_0^2} \int_0^z [D_u(\xi, r) - D_u(\xi, 0)] d\xi \quad [17].$$

Следовательно, лучи в разных точках будут иметь различные углы наклона, которые можно определить как $\alpha = \Delta\psi/\rho$ при $\rho \rightarrow 0$ ($\Delta\psi$ – приращение эйконала, ρ – расстояние между соседними лучами). Дисперсия угла наклона луча после прохождения

$$\text{слоя равна } \langle \alpha^2 \rangle = \left(z/2c_0^2 \right)^2 \int_0^x d\xi D_u'(\xi)/\xi, \text{ однако фоку-$$

сировка определяется различием углов наклона соседних лучей. Эта разность углов характеризуется структурной функцией $D_\alpha(r) = \langle (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \rangle = \langle (\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2)^2 \rangle / \rho^2$ при $\rho \rightarrow 0$, где $\Delta\psi_{1,2} = \psi(r_{1,2} + \rho) - \psi(r_{1,2})$ и $r = r_1 - r_2$. Вычисления с учетом выражений для структурных функций эйконала приводят к формуле $D_\alpha(r) = D_\psi''(0) - D_\psi''(r)$, где два штриха обозначают вторую производную.

Согласно теории Колмогорова [17], существует два масштаба турбулентности – внешний L_0 и внутренний l_0 . В инерционном интервале $l_0 \ll l \ll L_0$ структурная функция турбулентных пульсаций определяется законом “двух третей” Колмогоро-

ва-Обухова $D_u(R = \sqrt{z^2 + r^2}) = C_u^2 \varepsilon^{2/3} R^{2/3}$, где $C_u \sim 1$, ε – скорость диссипации энергии. В вязком интервале $l \ll l_0$ структурная функция имеет вид $D_u(R) = C_1^2 \varepsilon R^2$. Расчеты показывают, что дисперсия угла наклона максимальна для мелкомасштабных пульсаций: $\langle \alpha^2 \rangle = z C_u^2 \varepsilon^{2/3} l_0^{-1/3} / c_0^2$. Для структурной функции угла наклона при $r \sim l_0$ получаем $D_\alpha(r) \approx 5 C_u^2 \varepsilon^{2/3} z r^2 / 7 c_0^2 l_0^{7/3} \sim \varepsilon^{2/3} z l_0^{-1/3} / c_0^2$, отсюда характерное значение приращения угла наклона $\overline{\Delta\alpha} \sim \sqrt{D_\alpha} \sim \varepsilon^{1/3} l_0^{-1/6} \sqrt{z} / c_0$. Для характерных значений $c_0 = 330$ м/с, $l_0 \sim 10^{-3} - 10^{-1}$ м, $\varepsilon \sim 0.01$ м²/с³ [17] получаем оценку $\overline{\Delta\alpha} \sim 10^{-3} \sqrt{z}$. Тогда лучи, разнесенные вначале на r_0 , пересекутся на расстоянии $F \sim 10^2 r_0^{2/3}$. На больших расстояниях, согласно закону “двух третей”, искажения волнового фронта нарастают медленнее, так что эффекты фокусировки проявляются слабее. Эволюция волны в целом определяется неоднородностями масштаба длины импульса (длины волны низкочастотной компоненты) $\lambda = cT \sim 3$ м. Неоднородности такого масштаба приводят к фокусировке на расстоянии порядка 200 м. Фокусировка на неоднородностях масштаба длины волны высокочастотной компоненты, $\lambda \sim 0.3$ м, происходит на расстояниях порядка 50 м. Для интенсивных волн недалеко от самолета эти расстояния в несколько раз превосходят соответствующие нелинейные длины. Отсюда можно сделать вывод, что эволюция интенсивных волн определяется преимущественно нелинейными эффектами, неоднородность влияет в основном на степень проявления этих эффектов. При распространении волн малой интенсивности, наоборот, определяющую роль играют рефракция на неоднородностях и появление областей фокусировки.

Эти выводы согласуются с проведенным в предыдущих пунктах анализом. Как известно, центральная часть неоднородного пограничного слоя в спокойной атмосфере находится на высоте около 100 метров над поверхностью и может расширяться до нескольких сотен метров вверх за счет ветра и тепловой конвекции от нагретой земной поверхности. Для волн большой интенсивности крупномасштабные изменения неоднородности, фактически толщина слоя, порядка нелинейной длины, поэтому существенное увеличение амплитуды волны возможно за счет мелкомасштабных неоднородностей только вблизи центральной части неоднородного слоя. В случае волн малой амплитуды, наоборот, возможно заметное увеличение амплитуды за счет фокусировки на неоднородностях. Принципиальной особенностью распространения интенсивных волн в неоднородной среде является возможность ком-

пенсации нелинейного затухания на ударных фронтах за счет рефракционной сходимости, даже если фокальная область оказывается размытой.

Работа поддержана грантами программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2906.2008.2) и РФФИ (гранты 09-02-00925-а, 09-02-00967-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
2. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 290–294.
3. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
4. Pierce A.D. Spikes on sonic boom pressure waveforms // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 44. P. 1052–1061.
5. Куличков С.Н. Дальнее распространение звука в атмосфере (обзор) // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1992. Т. 28. № 4. С. 339–361.
6. Руденко О.В. Нелинейные методы в акустической диагностике (Обзор) // Дефектоскопия. Т. 29. № 8. С. 24–32.
7. Thomas J.L., Fink M.A. Ultrasonic beam focusing through tissue inhomogeneities with a time reversal mirror: application through transscull therapy // IEEE Trans. Ultrasonics Ferroelectr. Freq. Control. 1996. V. 43. № 6. P. 1122–1129.
8. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. В 2-х томах. М.: Наука, 2007. Т. 1. 448 с.
9. Rudenko O.V., Enflo B.O. Nonlinear N-wave Propagation through a One-dimensional Phase Screen // Acustica. 2000. V. 86. P. 229–238.
10. Дубровский А.Н., Руденко О.В., Хохлова В.А. Флуктуационные характеристики волны звукового удара после прохождения случайно-неоднородного слоя // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 623–628.
11. Гусев В.А., Руденко О.В. Статистические характеристики интенсивной волны за двумерным фазовым экраном // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 1. С. 30–42.
12. Гусев В.А. Метод растянутых характеристик в задаче распространения интенсивных акустических волн в неоднородных и случайно-неоднородных средах // Ежегодник РАО “Акустика неоднородных сред”. Сборник трудов школы-семинара под руководством проф. С.А. Рыбака. Изд-во Тривант. г. Троицк. 2008. Вып. 9. С. 67–77.
13. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
14. Гусев В.А. Трансформация нелинейных пилообразных волн в среде с рефракционными неоднородностями // Вестн. МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия. 2009. № 3. С. 42–45.
15. Гусев В.А. Саморефракция ударных волн в неоднородной среде // Сб. трудов XX сессии РАО. М.: ГЕОС, 2008. Т. 1. С. 156–160.
16. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
17. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.