

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.222

МЕТОД РАСТЯНУТЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКЕ

© 2011 г. В. А. Гусев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра акустики
119991 Москва, Ленинские горы. Тел.: (495) 9392943
E-mail: vgusev@bk.ru

Поступила в редакцию 24.02.11 г.

Развит асимптотический “метод растянутых характеристик” для решения нелинейных уравнений типа римановых волн применительно к расчету лучевой картины интенсивных пространственно-модулированных волн в слабо неоднородных средах. Метод позволяет избежать сингулярности, связанной с фокусами начального волнового фронта, вычислить вызванное неоднородностью среды смещение фокусов, и, таким образом, рассчитать лучевую картину и интенсивность акустического поля. Достоинством метода является запись точного нелинейного уравнения переноса для поля вдоль луча и построение его общего решения для неоднородности произвольного вида. Показано, что метод применим для расчета пространственной структуры интенсивных сфокусированных волн и ограниченных волновых пучков вне фокальной области в приближении нелинейной геометрической акустики.

Ключевые слова: неоднородные среды, сфокусированные пучки, нелинейная геометрическая акустика.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет пространственной структуры и временных профилей интенсивных пространственно-модулированных волн при распространении в неоднородных средах важен для многих прикладных задач. Примерами могут служить нелинейные волны, генерируемые при сверхзвуковых полетах, волны, используемые в некоторых устройствах медицинской диагностики и терапии и в ряде других задач, связанных с акустическим воздействием на реальные среды и распространением в них интенсивных волн [1–3]. Во всех таких задачах необходимо рассчитать изменение пространственной структуры нелинейного волнового поля из-за неоднородностей среды. Хотя перечисленные прикладные задачи часто требуют численного решения, аналитические подходы позволяют лучше понять основные качественные закономерности.

В теории волн в неоднородных средах широко используются методы геометрической оптики (ГО) и акустики (ГА) [4]. Применительно к интенсивным акустическим волнам используется их обобщение — нелинейная геометрическая акустика (НГА) [5, 6]. В базовой схеме ГО и НГА удается выделить замкнутое уравнение эйконала, описывающее лучевую структуру волнового поля. На следующем этапе рассчитывается изменение профиля и интенсивности волны вдоль лучей. Однако даже такое упрощение позволяет получить точные решения только для частных моделей, например, для плоско-слоистой

среды [7]. Другая полезная модель — это модель бесконечно тонкого фазового экрана, учитывающая однократное преломление лучей. Она успешно применялась для расчета фокусировки ударных волн при прохождении через неравномерно нагретый слой атмосферы [8, 9] и ультразвука при прохождении через кости черепа [10]. Иногда удается аналитически решить уравнения НГА и для неоднородного полупространства [11].

Для построения приближенного решения уравнений ГА существует два метода — это методы возмущений для уравнений эйконала и семейства лучей [4]. Область применимости метода возмущений для эйконала ограничена расстояниями, на которых мало поперечное смещение лучей. Метод возмущений для лучей позволяет более точно учесть преломление лучей. Надо отметить, что в качестве невозмущенного решения часто задается плоская волна в однородной среде (см., например, [12, 13]). Поэтому основное внимание при построении асимптотического метода будет уделено пространственно-модулированным волнам.

В данной работе для построения лучевой картины волны с произвольной формой исходного фазового фронта в слабо неоднородной среде развит асимптотический метод растянутых характеристик (метод Лайтхилла [14]). Преимущество этого метода при решении уравнений для траекторий лучей заключается в корректном учете поперечного смещения луча при наличии исходной кривизны волнового фронта. Такой учет позволяет избежать фо-

кальной сингулярности невозмущенного решения и определить правильные положения фокальных областей при наличии неоднородности. Метод дает возможность провести полный анализ интенсивного волнового поля в приближении НГА, т.е. вне фокальных областей возмущенного поля. В частности, этим методом получены решения для предельного поля акустического давления на оси интенсивного гауссовского пучка при учете саморефракции [15].

СХЕМА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

Задача ставится следующим образом. В приближении НГА лучевая структура поля описывается уравнением эйконала ψ , которое можно записать в виде связанной системы уравнений типа простых волн для функций наклона луча $\alpha = \partial\psi/\partial x$ и $\beta = \partial\psi/\partial y$ к поперечным осям x и y [9]:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \zeta_x, \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} + \alpha \frac{\partial\beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial\beta}{\partial y} = \zeta_y. \quad (1)$$

Профиль волны описывается нелинейным уравнением переноса [9, 16]

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{2} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \right) = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1)–(2) ψ – эйконал в приближении “квазиоптики”, который связан с обычным эйкономом Ψ соотношением $\Psi = z + \psi$. Для Ψ справедливо уравнение $(\nabla\Psi)^2 = n^2$, n – коэффициент преломления. В (2) $p = p(T = t - z/c_0 - \psi/c_0; x, y, z)$ – акустическое давление, t – время, ρ_0, c_0 – характерные значения плотности среды и скорости звука, ε – нелинейный параметр. Функция ζ описывает отклонение локальной скорости звука c от характерной c_0 : $\zeta = (c_0^2/c^2 - 1)/2$. При выводе (2) плотность среды считалась постоянной, вязкостью среды пренебрегалось.

К уравнениям (1)–(2) необходимо добавить граничные условия:

$$\alpha(z=0) = A(x, y), \quad \beta(z=0) = B(x, y), \quad (3)$$

$$p(z=0) = p_0(T, x, y).$$

Для пояснения идеи решения уравнений эйконала (1) рассмотрим двумерную задачу:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \mu v(x, z), \quad \alpha(z=0) = A(x). \quad (4)$$

Здесь $\mu \ll 1$ – малый параметр, указывающий на малые изменения неоднородности среды, функция $v(x, z)$ описывает структуру этой неоднородности.

Трудности построения аналитического решения уравнения (3) связаны с двумя факторами. Во-первых, начальная кривизна волнового фронта $A(x)$ определяет искривление лучевых траекторий, которое нельзя, вообще говоря, считать малым. Во-вторых, поперечное смещение луча пропорционально

искомой функции α . При разложении решения в ряд по отклонениям от невозмущенного решения это приводит к накоплению неточности и появлению слагаемых, аналогичных по смыслу “вековым членам” в теории колебаний.

Удобным методом построения асимптотического разложения является метод растянутых характеристик. Идея метода состоит в разложении поперечной координаты луча в ряд по отклонению от неизвестной возмущенной характеристики уравнения (4), что позволяет построить решение для произвольного граничного условия. Как показано Лайтхиллом (см. [14]), данное разложение является равномерно пригодным для больших расстояний. При использовании точной характеристики в качестве независимой переменной удается избавиться от явной фокальной сингулярности невозмущенного решения. Теперь эта сингулярность проявляется только как первое пересечение соседних лучей, и асимптотическое разложение в данном случае становится более точным. Конечным результатом метода являются уточненная траектория луча и положения фокальных областей в неоднородной среде. Отметим, что в рассмотренных в книге [14] задачах метод применялся к решению слабо нелинейных задач, в том числе волновых уравнений со слабой нелинейностью. В случае же уравнения (4) нелинейный член не считается малым и относится к невозмущенному решению.

Перейдем к схеме построения решения. При отсутствии неоднородности ($v=0$) решение однородного уравнения (4) определяется характеристикой $x - \alpha z = \text{const}$ – кривой на плоскости xz , вдоль которой функция наклона лучей сохраняет свое исходное значение: $\alpha(x, z) = A(x - \alpha z)$. Решение возмущенного уравнения также будет определяться переносом исходного значения вдоль новой неизвестной характеристики. При слабой неоднородности характеристика возмущенного уравнения (4) будет близка к характеристике невозмущенного уравнения. Это позволяет искать решение уравнения (4) в виде асимптотического ряда:

$$\alpha = \alpha_0(\xi, s) + \mu\alpha_1(\xi, s) + \dots, \quad (5)$$

где новые независимые переменные – искомая характеристика ξ возмущенного уравнения и продольная координата s – введены в соответствии с разложениями:

$$z = s, \quad x - \alpha z = \xi + \mu X_1(\xi, s) + \mu^2 X_2(\xi, s) + \dots \quad (6)$$

Фактически, характеристика ξ является поперечной, а переменная s – продольной координатами в криволинейной системе. Второе выражение в (6) представляет собой разложение характеристики невозмущенного уравнения в ряд по характеристике возмущенного уравнения. Выбор “растягивающих” функций X_m позволяет сделать разложение (5)–(6) равномерно пригодным. Запишем характеристическую систему уравнения (4):

$$\frac{dz}{1} = \frac{dx}{\alpha} = \frac{d\alpha}{\mu\nu}, \quad \left. \frac{dx}{dz} \right|_{\xi=\text{const}} = \alpha. \quad (7)$$

Последнее выражение означает, что на характеристике (т.е. при $\xi = \text{const}$) $dx/ds = \alpha dz/ds$. Следовательно, (6) эквивалентно следующему разложению:

$$x = x_0(\xi, s) + \mu x_1(\xi, s) + \dots, \quad x_0 = \xi + \alpha_0 s. \quad (8)$$

Растягивающие функции выбираются так, что $x|_{s=0} = x_0|_{s=0} = \xi$, при $m \geq 1$ $x_m|_{s=0} = 0$. Преобразуя производные к новым переменным с учетом формул (6)–(8), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{x_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\alpha}{x_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

В результате уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \mu\nu(x_0(\xi, s) + \mu x_1(\xi, s) + \dots; s). \quad (9)$$

Знак обыкновенной производной отмечает тот факт, что в (9) величина ξ является параметром. Функции $x_0(\xi, s)$, $x_1(\xi, s)$, ... определяются из условия на характеристике:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha(\xi, s). \quad (10)$$

При слабой неоднородности решение (9)–(10) может быть представлено рядами (5) и (8), а соответствующие приближения находятся последовательным интегрированием. Из (10) видно, что текущая поперечная координата определяется по характеристике возмущенного уравнения. Выпишем уравнения нулевого, первого и второго приближений:

$$\frac{d\alpha_0}{ds} = 0, \quad \frac{dx_0}{ds} = \alpha_0, \quad \alpha_0(s=0) = A(\xi), \quad x_0(s=0) = \xi.$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \nu(x_0(\xi, s), s), \quad \frac{dx_1}{ds} = \alpha_1, \quad \alpha_1(s=0) = 0,$$

$$x_1(s=0) = 0.$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = \nu'_x(x_0(\xi, s), s)x_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = \alpha_2, \quad \alpha_2(s=0) = 0,$$

$$x_2(s=0) = 0.$$

В данном методе порождающее решение — решение нулевого приближения $\alpha_0 = A(\xi)$ по форме совпадает с решением невозмущенного уравнения и определяется только начальной формой волнового фронта. Но теперь возмущение переносится вдоль неизвестной характеристики возмущенного уравнения, которая приближенно рассчитывается с учетом первого приближения на основании (8). В этом отличие от стандартных методов возмущения, в которых разложение и порождающее решение рассчитываются вдоль невозмущенного луча.

Нулевое приближение описывает лучи, образующиеся за счет начальной кривизны волнового фронта. Первое приближение

$$\alpha_1 = \int_0^s \nu(x_0(\xi, s_1), s_1) ds_1 = \int_0^s \nu(\xi + A(\xi)s_1, s_1) ds_1,$$

$$x_1 = \int_0^s ds'' \int_0^{s''} \nu(\xi + A(\xi)s_1, s_1) ds_1,$$

описывает поправки к наклонам лучей, вызванные неоднородностью среды, а также уточненные характеристики, вдоль которых происходит распространение волны.

Теперь на основе (8) можно записать уравнение возмущенной характеристики:

$$x - A(\xi)s = \xi + \mu \int_0^s ds_2 \int_0^{s_2} \nu(\xi + A(\xi)s_1, s_1) ds_1 \quad (11)$$

и решение уравнения эйконала (4) с точностью до первого порядка:

$$\alpha = A(\xi) + \mu \int_0^s \nu(\xi + A(\xi)s_1, s_1) ds_1. \quad (12)$$

Таким образом, выражения (11) для поперечной координаты луча и (12) для функции наклона луча полностью задают решение уравнения (4) в первом приближении в параметрической форме; параметром является характеристика ξ — начальная координата выхода луча.

РАСШИРЕНИЯ БАЗОВОЙ СХЕМЫ

Выше была рассмотрена схема построения решения для плоской (двумерной) задачи. Рассмотрим теперь расширение изложенной схемы.

1. Аксиально-симметричная задача. Такая ситуация возникает, например, при исследовании саморефракции интенсивных аксиально-симметричных пучков. Уравнение эйконала для наклона луча $\alpha = \partial\psi/\partial r$ имеет вид (4) с заменой поперечной координаты x на радиус r . Дальнейшая схема совпадает с изложенной выше.

2. Трехмерная задача. В общем случае необходимо решать связанную систему уравнений (1), в которой неоднородность считается малой. При отсутствии неоднородности система (1) имеет неявное решение $\alpha = A(x - \alpha z, y - \beta z)$, $\beta = B(x - \alpha z, y - \beta z)$. При наличии неоднородности ищем решение в виде рядов

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0(\xi, \eta, s) + \mu\alpha_1(\xi, \eta, s) + \dots, \\ \beta &= \beta_0(\xi, \eta, s) + \mu\beta_1(\xi, \eta, s) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

где введена продольная координата $z = s$ и поперечные координаты луча представлены в виде функций искомым характеристикам

$$\begin{aligned} x - \alpha z &= \xi + \mu X_1(\xi, \eta, s) + \dots, \\ y - \beta z &= \eta + \mu Y_1(\xi, \eta, s) + \dots \end{aligned}$$

С учетом нулевого приближения $\alpha_0(\xi, \eta, s) = A(\xi, \eta)$, $\beta_0(\xi, \eta, s) = B(\xi, \eta)$ и характеристической системы уравнений (1) последние разложения эквивалентны представлениям

$$\begin{aligned} x &= x_0(\xi, \eta, s) + \mu x_1(\xi, \eta, s) + \dots, \\ y &= y_0(\xi, \eta, s) + \mu y_1(\xi, \eta, s) + \dots, \\ x_0 &= \xi + A(\xi, \eta)s, \quad y_0 = \eta + B(\xi, \eta)s, \end{aligned} \quad (14)$$

аналогичным разложению (8). После преобразования производных к новым переменным уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \zeta_x(x(\xi, \eta, s), y(\xi, \eta, s), s), \\ \frac{d\beta}{ds} &= \zeta_y(x(\xi, \eta, s), y(\xi, \eta, s), s). \end{aligned} \quad (15)$$

Вдоль траектории луча (на характеристике) выполняются условия

$$\left. \frac{dx}{ds} \right|_{\xi, \eta = \text{const}} = \alpha, \quad \left. \frac{dy}{ds} \right|_{\xi, \eta = \text{const}} = \beta, \quad (16)$$

образующие вторую пару уравнений для определения поперечных координат луча. После подстановки рядов (13)–(14) и разложения по малому параметру, получаем уравнения для соответствующих приближений. Решения получаем последовательным интегрированием. В частности, нулевое и первое приближения имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= A(\xi, \eta), \quad \beta_0 = B(\xi, \eta), \\ x_0(\xi, \eta, s) &= \xi + A(\xi, \eta)s, \quad y_0(\xi, \eta, s) = \eta + B(\xi, \eta)s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_0^s \zeta_x(x_0(\xi, \eta, s_1), y_0(\xi, \eta, s_1), s_1) ds_1, \\ \beta_1 &= \int_0^s \zeta_y(x_0(\xi, \eta, s_1), y_0(\xi, \eta, s_1), s_1) ds_1, \\ x_1 &= \int_0^s ds_2 \int_0^{s_2} \zeta_x(x_0(\xi, \eta, s_1), y_0(\xi, \eta, s_1), s_1) ds_1, \\ y_1 &= \int_0^s ds_2 \int_0^{s_2} \zeta_y(x_0(\xi, \eta, s_1), y_0(\xi, \eta, s_1), s_1) ds_1. \end{aligned}$$

3. Волны с широким пространственным спектром. Уравнение эйконала в форме уравнений (1) соответствует малоугловому приближению, когда фаза волны близка к фазе плоской волны и распространение волны происходит преимущественно в узком

угловом интервале. В общем случае необходимо рассматривать обычное уравнение эйконала, которое для показателя преломления, близкого к 1, запишем в виде $(\nabla\Psi)^2 = 1 + 2\mu\zeta(x, y, z)$. Это уравнение может быть сведено к системе квазилинейных уравнений типа (1) для функций наклона луча:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2\mu\zeta - \alpha^2 - \beta^2} \frac{\partial\alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \mu\zeta_x, \\ \sqrt{1 + 2\mu\zeta - \alpha^2 - \beta^2} \frac{\partial\beta}{\partial z} + \alpha \frac{\partial\beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial\beta}{\partial y} &= \mu\zeta_y. \end{aligned}$$

Здесь величина $\partial\Psi/\partial z$ выражена из уравнения эйконала, причем перед корнем взят знак “+” для распространяющейся в положительном направлении оси z волны. Отличие от рассмотренного выше случая квазиоптики состоит в том, что функции α и β теперь порядка 1.

При отсутствии неоднородности решение задается в неявном виде $\alpha = A(\xi, \eta)$, $\beta = B(\xi, \eta)$ с характеристиками

$$\begin{aligned} \xi &= x - \alpha z (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{-1/2} \\ \eta &= y - \beta z (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

При наличии неоднородности вводим новые переменные в соответствии с разложениями:

$$\begin{aligned} x - \alpha z (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{-1/2} &= \xi + \mu X_1(\xi, \eta, s) + \dots, \\ y - \beta z (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{-1/2} &= \eta + \mu Y_1(\xi, \eta, s) + \dots, \quad z = s. \end{aligned}$$

Это приводит к представлениям, аналогичным (13) и (14), где теперь

$$\begin{aligned} x_0(\xi, \eta, s) &= \xi + A(1 - A^2 - B^2)^{-1/2} s, \\ y_0(\xi, \eta, s) &= \eta + B(1 - A^2 - B^2)^{-1/2} s. \end{aligned}$$

После перехода к новым переменным ξ, η, s вместо (15) и (16) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \mu D\zeta_x, \quad \frac{d\beta}{ds} = \mu D\zeta_y, \quad \frac{dx}{ds} = D\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = D\beta, \\ D &= (1 + 2\mu\zeta - \alpha^2 - \beta^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Для первого приближения получаем цепочку уравнений (здесь $D_0 = (1 - \alpha_0^2 - \beta_0^2)^{-1/2}$):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds} &= D_0 \zeta_x(x_0(\xi, \eta, s), s), \quad \frac{d\beta_1}{ds} = D_0 \zeta_y(x_0(\xi, \eta, s), s), \\ \frac{dx_1}{ds} &= D_0 \alpha_1 + D_0^3 \alpha_0 (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 - \zeta), \\ \frac{dy_1}{ds} &= D_0 \beta_1 + D_0^3 \beta_0 (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 - \zeta). \end{aligned}$$

Решение первого приближения находится интегрированием данных выражений.

4. “Решаемая” регулярная неоднородность. Пусть неоднородность в (4) можно представить в виде суммы двух слагаемых $\mu v \rightarrow f(x, z) + \mu g(x, z)$, где функция f теперь не является малой и такова, что при $g \equiv 0$ известно точное общее решение $\alpha_0(x, z)$ уравнения (4). В лучевых координатах это решение удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\alpha_0}{ds} = f(x_0, s), \quad \frac{dx_0}{ds} = \alpha_0, \quad (17)$$

и зависит от двух свободных параметров, которые обозначим ξ и η . Для граничной задачи (4), рассмотренной ранее, они имеют смысл начальных условий. Для дальнейших расчетов отметим следующее свойство общего решения [4]. Дифференцируя (17) по свободным параметрам, можно убедиться, что известные функции

$$u_1 = \partial\alpha_0/\partial\xi, \quad w_1 = \partial x_0/\partial\xi, \quad u_2 = \partial\alpha_0/\partial\eta, \\ w_2 = \partial x_0/\partial\eta$$

удовлетворяют однородной системе:

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial s} = f'_x(x_0(\xi, s), s) w_{1,2}, \quad \frac{\partial w_{1,2}}{\partial s} = u_{1,2}. \quad (18)$$

В книге [4] и цитируемой там литературе отмечается, что функции $\{u_1, w_1\}$ и $\{u_2, w_2\}$ образуют фундаментальное решение данной системы.

При наличии неоднородности разлагаем поперечную координату в ряд по неизвестной характеристике, аналогичный (8), и приходим к уравнениям

$$\frac{d\alpha}{ds} = f(x(\xi, s), s) + \mu g(x(\xi, s), s), \quad \frac{dx}{ds} = \alpha.$$

В нулевом порядке получаем невозмущенное решение, а в первом и втором порядках:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = f'_x(x_0(\xi, s), s) x_1 + g(x_0(\xi, s), s), \quad \frac{dx_1}{ds} = \alpha_1. \quad (19)$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = f'_x(x_0(\xi, s), s) x_2 + \frac{1}{2} f''_x(x_0(\xi, s), s) x_1^2 + \\ + g'_x(x_0(\xi, s), s) x_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = \alpha_2. \quad (20)$$

Теперь уравнения каждого из приближений не расщепляются, но и (19) и (20) являются системой неоднородных линейных уравнений, однородная часть которых совпадает с (18). Это означает, что решения систем (19) и (20) могут быть найдены методом вариации постоянной, например:

$$\alpha_1 = C_1(s) u_1 + C_2(s) u_2, \quad x_1 = C_1(s) w_1 + C_2(s) w_2,$$

$$C_{1,2}(s) = \pm \int_0^s \frac{g w_{2,1}}{u_1 w_2 - u_2 w_1} ds.$$

Здесь знаменатель отличен от нуля в силу линейной независимости решений $\{u_1, w_1\}$ и $\{u_2, w_2\}$. Таким образом, известное решение невозмущенного уравнения для некоторых регулярных неоднородностей

позволяет довести до квадратур решение уравнения эйконала и при наличии возмущений.

5. Вычисление фазы волны. Для полного определения акустического поля, кроме функций наклона луча, необходимо знать и фазу — эйконал ψ . В двумерном случае, используя соотношение $\alpha = \partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial\xi x_\xi^{-1}$, запишем эйконал в параметрическом виде $\psi(\xi) = \int x_\xi \alpha(\xi) d\xi$, где поперечная координата определяется выражением (11). В трехмерном случае из аналогичных соображений можно получить выражения для производных

$$\partial\psi/\partial\xi = x_\xi \alpha + y_\xi \beta, \quad \partial\psi/\partial\eta = x_\eta \alpha + y_\eta \beta.$$

Эйконал находится в параметрическом виде интегрированием любого из них; согласованность данных выражений обеспечена равенством смешанных производных, $\alpha_y = \beta_x = \partial^2\psi/\partial x \partial y$.

Отметим, что область применения метода не ограничена расчетом геометрической структуры поля и может быть расширена, например, для получения решений неоднородного уравнения простых волн. Среди таких задач можно отметить генерацию звука движущимся с околосвуковой скоростью источником [17] и нелинейные колебания в акустических резонаторах [18].

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ. ЛУЧЕВАЯ СТРУКТУРА ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

Интересной задачей является исследование особых точек — фокусов и каустик, где происходит резкое возрастание интенсивности поля. В рамках метода ГА описание поля в фокусе невозможно, но, тем не менее, он позволяет относительно просто выявить положение особых точек и рассчитать поле в их окрестности. Амплитуда волны в фокусе ограничивается дифракционными эффектами. В неоднородной, а также нелинейной средах возникают новые механизмы ограничения амплитуды за счет искажения лучевой картины. Неоднородная среда может приводить к дополнительной фокусировке и приблизить положение геометрического фокуса, или, наоборот, отодвинуть его дальше от источника. Нелинейная рефракция приводит к дефокусировке, которая также ограничивает амплитуду. “Геометрические” эффекты могут преобладать над дифракционными [19].

В качестве иллюстрации рассмотрим неоднородность $v_1 = -\sin x \sin z$, периодическую как в поперечном, так и продольном направлениях, и волну с плоским исходным волновым фронтом, $A = 0$. Тогда, согласно (11), траектории лучей определяются выражением $x = \xi + \mu \sin \xi (\sin z - z)$. На рис. 1 представлены траектории лучей в пределах первого периода поперечного распределения. Видно, что неоднородность искривляет исходно параллельные лучи, образуя области сгущения и разрежения лучей, приводит к появлению каустик. Асимптотиче-

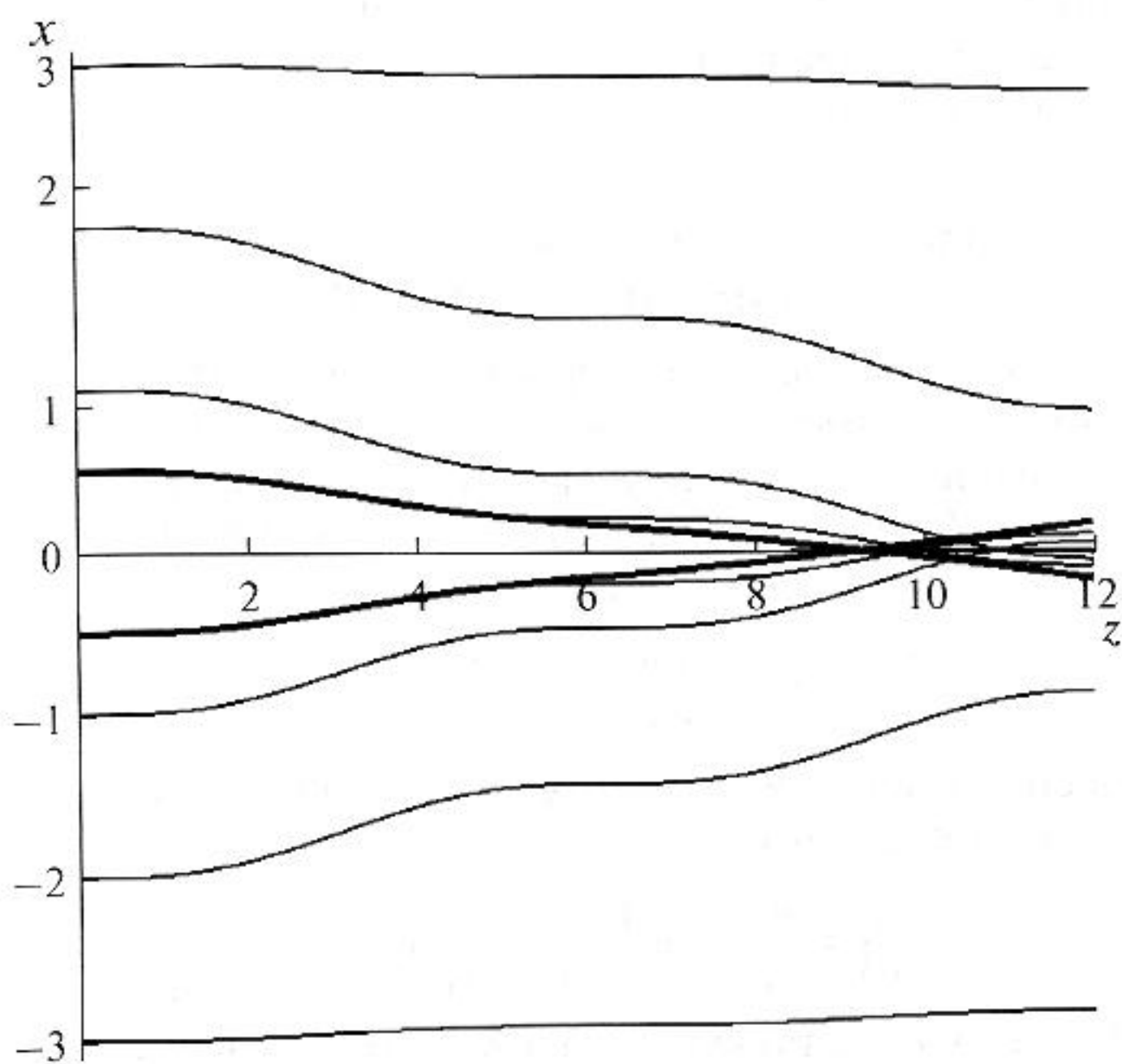


Рис. 1. Траектории лучей в среде с периодической неоднородностью $v_1 = -\sin \xi \sin z$. Тонкие линии – асимптотическое решение, жирные линии – численное решение.

ское решение (тонкие линии, для различных начальных координат луча) достаточно хорошо определяет положение первого фокуса при сравнении с численным решением (жирные линии, только начальные координаты $\xi = \pm 0.5$). Другая неоднородность, $\tilde{v}_1 = -\sin x \sin z - 6(1+z)^{-4}$ приводит также к поперечному смещению фокальных областей.

Рассмотрим далее два вида неоднородности: $v_2 = x(1-z/2)^{-2}$ и $v_3 = x(1+5z)^2$. В качестве граничного условия зададим сфокусированную волну $\alpha(z=0) = A(x) = -x$. Решение в однородной среде $\alpha_0 = -\xi$, $x_0(\xi, s) = \xi(1-s)$ показывает, что при $s = 1$ происходит фокусировка – все лучи собираются в одной точке, функция α стремится к бесконечности. Неоднородность сдвигает положение фокуса. Для неоднородности v_2 решения (11)–(12) имеют вид:

$$\alpha = -\xi + \mu \xi \left(2 - \frac{2}{1-s/2} + 4 \ln 2 - 4 \ln(2-s) \right),$$

$$x = \xi \left(1 - s + \mu \left[4(3-s) \ln(2-s) + 6s + 4s \ln 2 - 12 \ln 2 \right] \right).$$

Видно, что теперь при $s = 1$ лучи уже не пересекаются, это происходит позднее. Условие пересечения лучей $x_\xi(\xi, s) = 0$ при $\mu = 0.1$ дает $z^* = s^* \approx 1.049$. Численное решение уравнения (4) дает в этом случае $z^* \approx 1.050$, т.е. отличие гораздо меньше параметра μ . На рис. 2 приведены траектории луча $\xi = 1$: не-

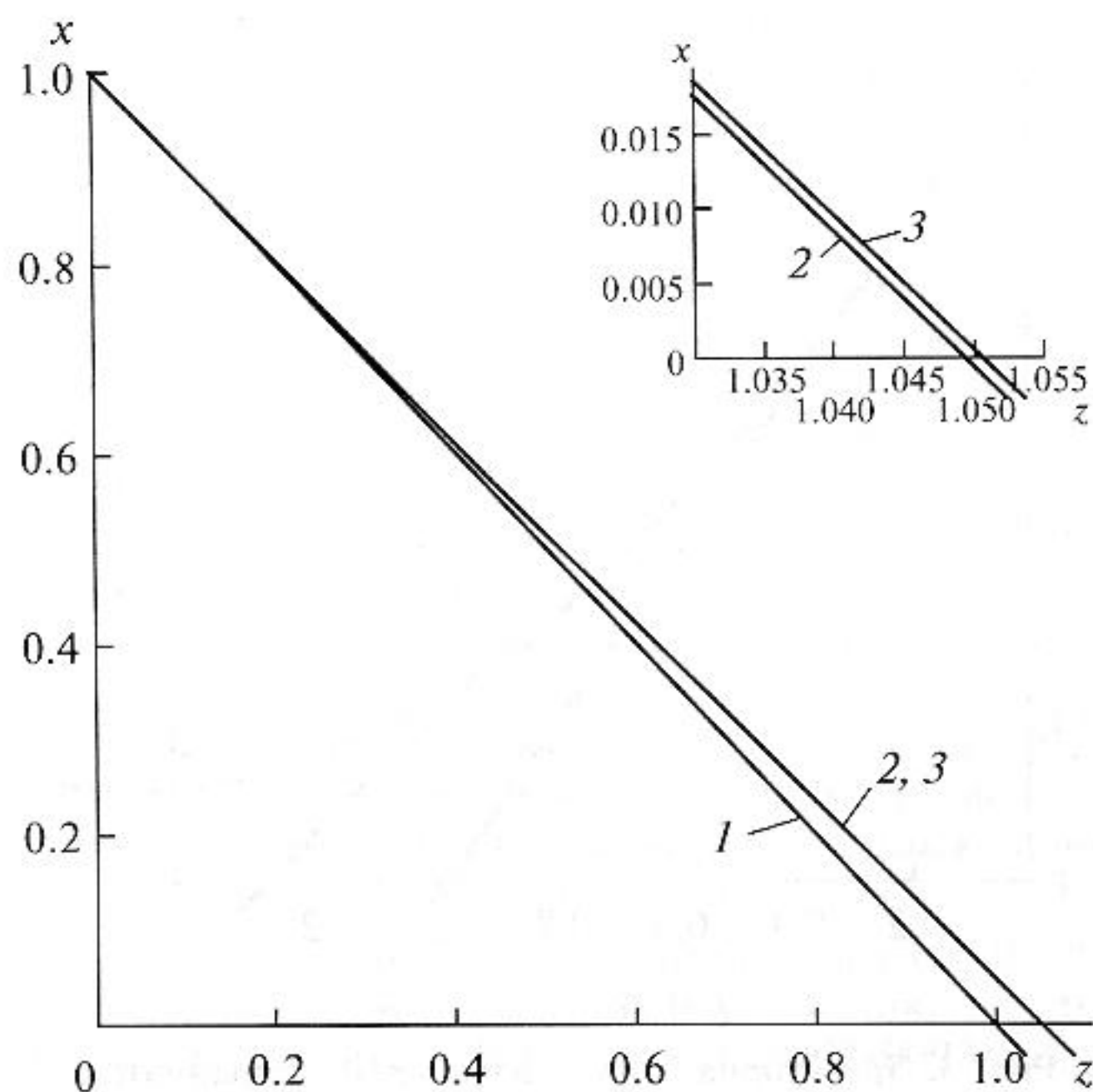


Рис. 2. Траектория луча с начальной координатой $\xi = 1$ в среде с неоднородностью $v_2 = x(1-z/2)^{-2}$. Кривая 1 – однородная среда, кривая 2 – асимптотическое решение, кривая 3 – численное решение.

возмущенное решение (кривая 1), асимптотическое решение (кривая 2) и численное решение (кривая 3); кривые 2 и 3 практически не отличаются.

Интересно сравнить этот результат с решением, полученным обычным разложением по малому параметру [4]. Полагаем $\alpha = \tilde{\alpha}_0 + \mu \tilde{\alpha}_1$, где $\tilde{\alpha}_0 = -x/(1-z)$ – невозмущенное решение. Для отклонения $\tilde{\alpha}_1$ записываем линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_1}{\partial z} + \alpha_0 \frac{\partial \tilde{\alpha}_1}{\partial x} + \tilde{\alpha}_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} = \frac{x}{(1-z/2)^2}.$$

Его решение

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{x}{1-z} \left(2 - \frac{2}{1-z/2} + 4 \ln 2 - 4 \ln(2-z) \right)$$

содержит сингулярность, связанную с начальной кривизной волнового фронта. Таким образом, в стандартной схеме не удастся пройти за особую точку невозмущенного решения, а метод растянутых характеристик позволяет с хорошей точностью определить фокус при наличии неоднородности.

Неоднородность $\tilde{v}_2 = -x(1-z/2)^{-2}$, наоборот, усиливает фокусировку. Решение для этого случая формально получается заменой μ на $-\mu$ в выражении для v_2 . Асимптотический метод дает значение для фокуса $z^* \approx 0.957$, а численное решение – $z^{**} \approx 0.958$.

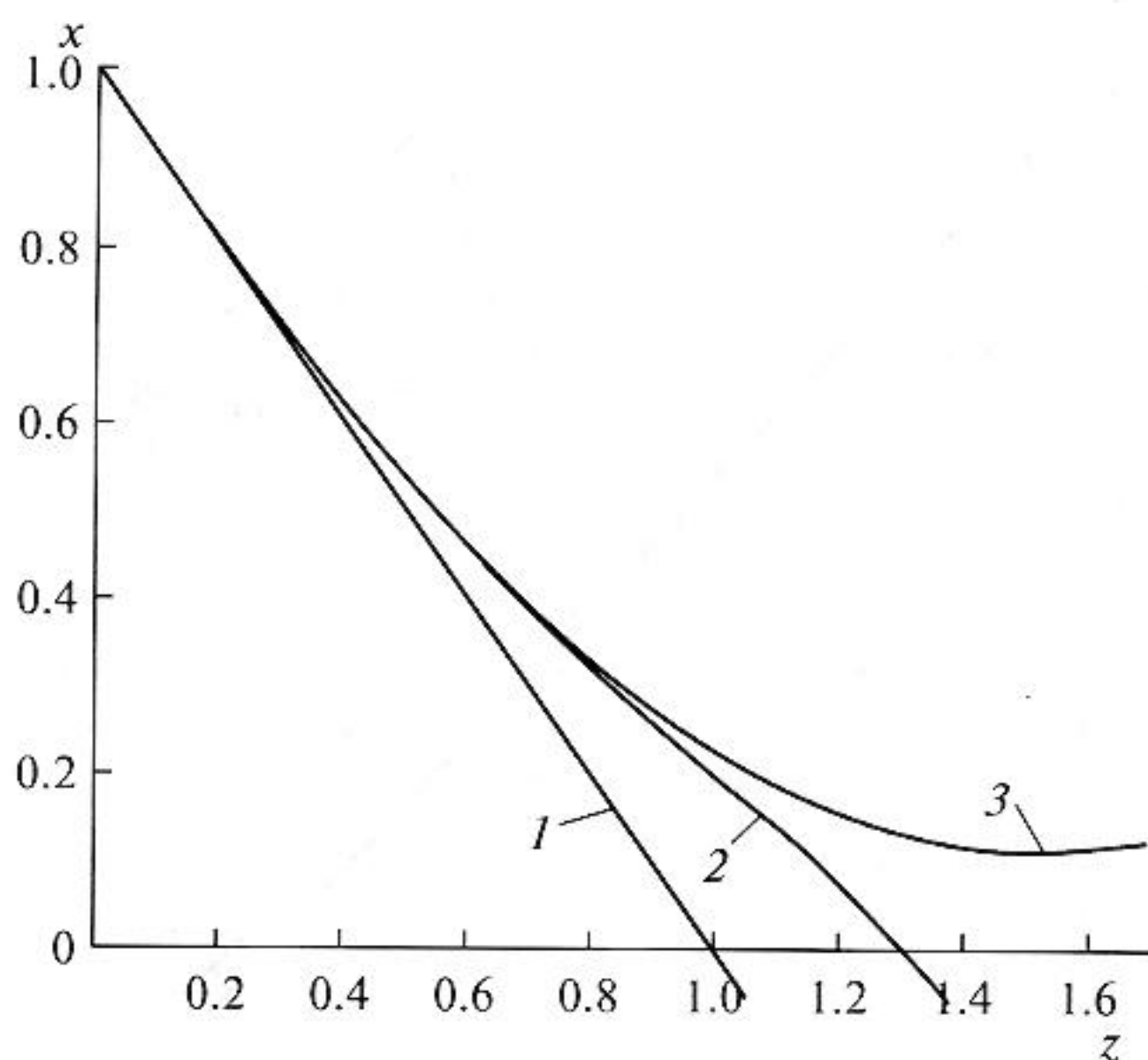


Рис. 3. Траектория луча с начальной координатой $\xi = 1$ в среде с неоднородностью $v_3 = x(1 + 5z)^2$. Кривая 1 — однородная среда, кривая 2 — асимптотическое решение, кривая 3 — численное решение.

Для неоднородности v_3 решение (11)–(12) имеет вид

$$\alpha = -\xi + \mu\xi\left(s + 9s^2/2 + 5s^3 - 25s^4/4\right),$$

$$x = \xi\left(1 - s + \mu\left[s^2/2 + 3s^3/2 + 5s^4/4 - 5s^5/4\right]\right).$$

Это решение предсказывает фокус при $s^* \approx 1.31$. Обычное разложение по малому параметру, как и в предыдущем случае, ограничено расстоянием до сингулярности невозмущенного поля. Однако численное решение показывает, что происходит поворот луча и фокусировка разрушается неоднородностью. Отличие численного и асимптотического решений связано с тем, что при приближении к точке поворота нарушается условие, при котором неоднородность можно считать малой поправкой. На рис. 3 приведены невозмущенное (кривая 1), асимптотическое (кривая 2) и численное (кривая 3) решения. Как видно, на начальном участке асимптотическое решение хорошо совпадает с численным, но по мере нарастания неоднородности решения расходятся.

Таким образом, метод позволяет при построении лучевой картины пройти за фокусы, определяемые начальной кривизной волнового фронта, и рассчитать траектории лучей и новые положения фокусов, пока сама неоднородность удовлетворяет условию малости возмущения. Когда условия нарушаются, необходимо решать самосогласованную задачу, включая в уравнение для первого приближения α_1 поправку к поперечной координате луча x_1 . В част-

ности, для неоднородности v_3 самосогласованное решение первого приближения позволяет найти точное решение.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПРОФИЛЯ И АМПЛИТУДЫ ВОЛНЫ

Амплитудные характеристики волны рассмотрим на примере двумерной задачи, для которой профиль описывается уравнением переноса (2) при $\beta = 0$. После перехода к новым переменным s, ξ уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{2x_\xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} p = 0. \quad (21)$$

В силу уравнения (10) можно установить следующие соотношения:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{dx_\xi}{ds}, \quad \frac{1}{x_\xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{d}{ds} \ln x_\xi. \quad (22)$$

В частности, такую же связь получаем в первом приближении из выражений (11)–(12):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = A' + \mu \int_0^\eta (1 + A's_1) \frac{\partial v}{\partial X} ds_1,$$

$$x_\xi = 1 + A's + \mu \int_0^s \int_0^{s_2} (1 + A's_1) \frac{\partial v}{\partial X} ds_1 ds_2,$$

где $X = \xi + As_1$, штрих обозначает производную по ξ .

Уравнение переноса (21) с учетом соотношения (22) описывает эволюцию профиля вдоль луча, найденного при решении уравнения эйконала. Существенно, что величина ξ является параметром данного уравнения. Отметим также, что при записи решения уравнения эйконала как функции возмущенной характеристики уравнение переноса (21)–(22) записывается точно. Общее неявное решение уравнения (21) может быть найдено для расходимости x_ξ произвольного вида, и для начального условия $p(z=0) = R(x)\Phi(T=\tau)$ с произвольными поперечным и временным профилями имеет вид:

$$p = \frac{R(\xi)}{\sqrt{x_\xi}} \Phi\left(T + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \sqrt{x_\xi} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{x_\xi}}\right).$$

Подстановка начального линейного профиля одного периода пилообразной волны $\Phi(\tau) = -a_0 \omega_0 \tau / \pi$ при $|\omega_0 \tau| < \pi$ приводит к выражению для текущей амплитуды волны

$$a = \frac{R}{\sqrt{x_\xi}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} R \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{x_\xi}}\right)^{-1}. \quad (23)$$

Трансформация профиля волны по мере распространения, в частности, пиковое значение N-волны

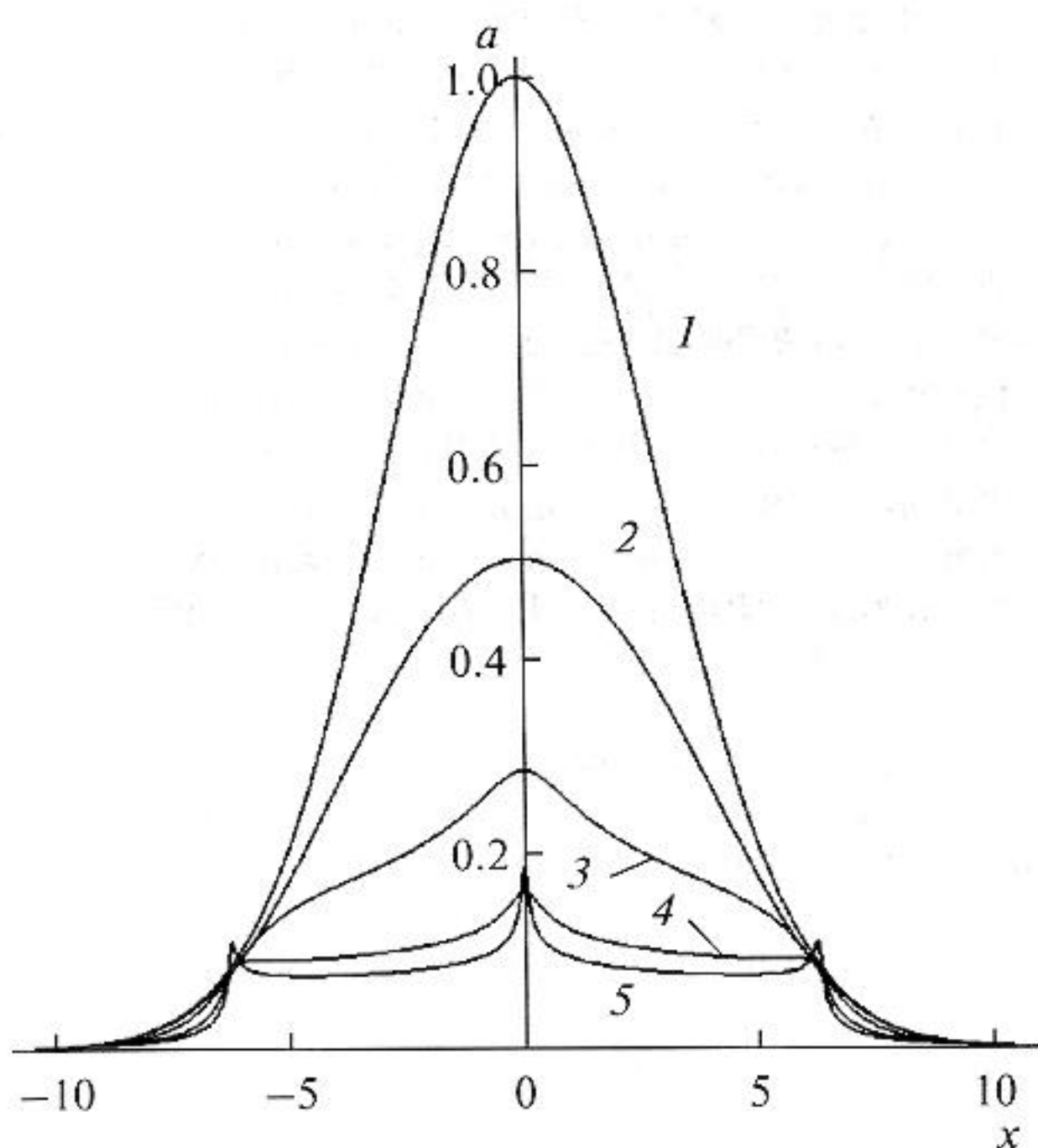


Рис. 4. Искажение поперечной формы амплитуды пилообразной волны в среде с неоднородностью $v_1 = -\sin\xi\sin z$. Исходный волновой фронт плоский. Кривые 1–5 соответствуют расстояниям $z = 0, 1, 3, 7, 9$.

определяется расходимостью лучей x_ξ , показывающей, как изменяется расстояние между соседними лучами.

В качестве примера рассмотрим неоднородность $v_1 = -\sin\xi\sin z$ и волну с плоским начальным фронтом $A = 0$ и гауссовской поперечной формой $R = \exp(-\xi^2)$. Для этой неоднородности расходимость $x_\xi = 1 + \mu\cos\xi(\sin z - z)$. Профили на расстояниях $z = 0, 1, 3, 7, 9$ (нормированы на фокусное расстояние) приведены на рис. 4. Вначале происходит убывание амплитуды за счет нелинейного затухания, однако дальше начинается заметное искажение поперечной формы и образование “всплеска” амплитуды в областях фокусировки. Резкие пики, по-видимому, должны сглаживаться дифракционными процессами. Тем не менее, неоднородность может привести к появлению побочных максимумов в поперечной структуре волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит асимптотический метод, позволяющий построить аналитическое решение системы уравнений нелинейной геометрической акустики для пространственно-модулированных волн в присутствии слабой неоднородности произвольного вида. Метод позволяет учесть вызванное неоднородностью сме-

щение фокусов, связанных с начальной кривизной волнового фронта. Благодаря этому при построении лучевой картины удается продвинуться дальше за фокальные области невозмущенного поля, сингулярность в которых ограничивает возможности стандартных методов теории возмущений. На основе найденной геометрической структуры рассчитывается искажение временных и пространственных профилей интенсивных волн, связанное как с эффектами фокусировки и дефокусировки, так и нелинейными эффектами. Полученные аналитические выражения пригодны для описания пространственно-модулированных волн с произвольной начальной кривизной волнового фронта, а также ограниченных волновых пучков. Ограничения данного метода связаны, прежде всего, с областью применимости самого приближения НГА, а также условием малости неоднородности среды.

Работа поддержана грантами программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4590.2010.2) и РФФИ (грант 09-02-00925-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pierce A.D. Spikes on sonic boom pressure wave forms // J. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. P. 1052–1061
2. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 165. Вып. 9. С. 1011–1036.
3. Руденко О.В. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // УФН. 2007. Т. 177. Вып. 4. С. 374–383.
4. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
5. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 290–294.
6. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Двумерные нелинейные волны с разрывами в стратифицированных средах // Акуст. журн. 1997. Т. 41. № 2. С. 291–295.
7. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика неоднородных сред. Т. 1. М.: Наука, 2007.
8. Дубровский А.Н., Руденко О.В., Хохлова В.А. Флуктуационные характеристики волны звукового удара после прохождения случайно-неоднородного слоя // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 623–628.
9. Гусев В.А., Руденко О.В. Статистические характеристики интенсивной волны за двумерным фазовым экраном // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 1. С. 30–42.
10. Thomas J.L., Fink M.A. Ultrasonic beam focusing through tissue inhomogeneities with a time reversal mirror: application through transscull therapy // IEEE Trans. Ultrasonics Ferroelectr. Freq. Control. 1996. V. 43. № 6. P. 1122–1129.
11. Гусев В.А. Искажение разрывных волн в среде с периодическим поперечным распределением неоднородности // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 3. С. 303–315.

12. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
13. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
14. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
15. Гусев В.А. Саморефракция сфокусированных звуковых пучков пилообразных волн (аналитические решения) // Ежегодник РАО. Акустика неоднородных сред. Москва, 2007. Выпуск 8. С. 103–112.
16. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн, изд. 2-е. М.: Наука, 1990.
17. Гусев В.Э., Карабутов А.А. К вопросу о возбуждении акустических импульсов распределенными источниками, движущимися с трансзвуковой скоростью // Акуст. журн. 1981. Т. 27. Вып. 2. С. 213–219.
18. Руденко О.В. Nonlinear standing waves, resonance phenomena and frequency characteristics of distributed systems // Acoustical Physics. 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
19. Руденко О.В., Сапожников О.А. Явления самовоздействия пучков волн, содержащих ударные фронты // УФН. 2004. Т. 174. Вып. 9. С. 973–989.