

## СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КУБИЧНО-НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОСТОЙ ВОЛНЫ РИМАНА

© 2010 г. В. А. Гусев, Ю. Н. Маков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра акустики  
119992 Москва, Ленинские горы  
Тел.: (495) 939-2943  
E-mail: yuri\_makov@mail.ru  
Поступила в редакцию 7.04.10 г.

Для неявного решения кубично-нелинейного уравнения волны Римана (уравнения простых волн) получено точное явное его Фурье-представление, которое соответствует трансформации начального синусоидального профиля до образования разрыва и, далее, асимптотическому поведению этого же профиля на больших расстояниях. Полученные решения имеют такое же значение для задач с кубичной нелинейностью как хорошо известное решение Фубини и предельный вариант решения Фея в традиционной нелинейной акустике.

В данной заметке представлены аналоги хорошо известных с 30-х годов прошлого века в “классической” квадратично нелинейной акустике спектральных решений Фубини и Фея [1, 2] для случая уравнений нелинейной акустики с кубичной нелинейностью, которые все шире входят в практику использования в связи с решаемыми задачами твердотельной акустики.

Отметим, что процесс “освоения” уравнений с кубичной нелинейностью соответствует тому пути, по которому развивалась и “классическая” нелинейная акустика. Работа [3] положила начало исследованию кубично-нелинейных аналогов уравнения волны Римана и уравнения Бюргерса, что было продолжено в [4]. Уравнение типа Хохлова–Заболотской (и Хохлова–Заболотской–Кузнецова) с кубичной нелинейностью было введено в рассмотрение в работах [5, 6], затем его изучение в общетеоретическом плане продолжено в [4, 7] и сейчас оно все шире используется для решения конкретных задач твердотельной акустики [8, 9]. Однако до сих пор все внимание было обращено на теоретический анализ и получение аналитических соотношений для описания кубично-нелинейной трансформации профиля во временном представлении [3–7]. Какие-либо аналитические решения для спектрального представления этого процесса трансформации отсутствуют. Более того, необходимость иметь представление о соответствующих спектрах заставляет численно решать эту задачу даже для простейших кубично-нелинейных уравнений (см. [8]).

Представим некоторые аналитические результаты для отсутствующих спектральных представ-

лений, что является актуальным в свете вышесказанного.

Рассмотрим безразмерный вариант уравнения волн Римана (уравнения простых волн) с кубичной нелинейностью

$$\frac{\partial V}{\partial z} + V^2 \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \quad (1)$$

Его записанное в неявном виде решение для начального синусоидального профиля плоской волны

$$V = \sin(\theta - V^2 z) \quad (2)$$

описывает трансформацию этого профиля в зависимости от координаты  $z$ ; представление о характере изменения профиля дает рис. 1 (см. также [3]).

Вычислим спектральное представление решения (2). Из рис. 1 видно, что изменяемый профиль синусоиды описывается периодической функцией, не являющейся ни четной, ни нечетной (в отличие от нечетного вида трансформации в квадратично нелинейной среде). Поэтому соот-

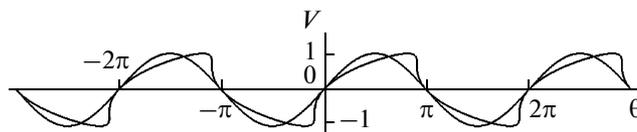


Рис. 1. Вид трансформированного согласно решению (2) волнового профиля при  $z \approx 1$  (расстояние образования разрыва) в сравнении с исходным синусоидальным профилем.

ветствующий тригонометрический ряд Фурье будет содержать и синусы и косинусы

$$V(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(z) \sin n\theta + B_n(z) \cos n\theta) \quad (3)$$

при нулевом среднем значении функции. Кроме того, специальный вид функции  $V$  с ее отрицательной частью, повторяющей положительную часть со сдвигом на полпериода, обосновывает (см. дальнейшие вычисления) наличие в представлении (3) гармоник только с нечетными номерами.

Отметим, что спектральное представление решения (2) справедливо при тех значениях  $z$ , где функция (2) остается однозначной, а именно при  $z < 1$ .

Следующая последовательность равенств приводит к вычислению коэффициентов в Фурье представлении (3). Начальные преобразования аналогичны вычислению спектра в решении Фурье

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta - zV^2) \sin(n\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \sin(\theta - zV^2) \cos(n\theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ &+ \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi + nz \sin^2 \xi) d \sin \xi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\xi = \theta - zV^2, V = \sin \xi, \theta = \xi + z \sin^2 \xi.$$

Учитывая нулевое значение первого слагаемого в правой части (4) при подстановке по периоду, для оставшегося интеграла используем следующее соотношение

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\xi + nz \sin^2 \xi) \cos \xi d\xi = \\ &= \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n} \times \int_0^{\pi} \cos\left(n\xi + \frac{nz}{2}(1 - \cos 2\xi)\right) \cos \xi d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$n = 2k + 1.$$

Разбиение в (5) интеграла на сумму двух интегралов по полупериодам показывает следующее: если в первом из них ввести новую переменную интегрирования  $\xi' = \xi + \pi$ , то он будет равен второму, но с минусом при четных  $n$  и с плюсом при нечетных  $n$ . Таким образом, заключительное интегральное выражение в (5) является ненулевым только для нечетных номеров гармоник. При

дальнейшем преобразовании выражения (5) последовательно используются формулы произведения тригонометрических функций, замена переменной интегрирования  $y = 2\xi + \pi/2$  и формулы для тригонометрических функций от суммы/разности аргументов. В результате этого получается сумма следующих двух выражений, различающихся знаками “+” и “-” (т.е. в целом – сумма четырех слагаемых):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi n} \left[ \cos\left(\frac{nz}{2} - \frac{(n \pm 1)\pi}{4}\right) \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \cos\left(\frac{n \pm 1}{2}y - \frac{nz}{2} \sin y\right) dy - \right. \\ &\left. - \sin\left(\frac{nz}{2} - \frac{(n \pm 1)\pi}{4}\right) \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin\left(\frac{n \pm 1}{2}y - \frac{nz}{2} \sin y\right) dy \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$n = 2k + 1.$$

Для интегралов, входящих в (6), с использованием новой переменной интегрирования  $x = y - 2\pi$  легко установить равенство при следующих частичных интервалах интегрирования

$$\int_{\pi}^{5\pi/2} = \int_{-\pi}^{\pi/2},$$

которое позволяет во всех интегралах в (6) заменить интервал интегрирования на  $[-\pi, +\pi]$ . Отсюда следует равенство нулю последних интегралов в (6) в силу нечетности их подынтегрального выражения. Первые интегралы в (6) являются хорошо известным интегральным представлением функции Бесселя первого рода  $J_m(x)$  [10, 11]. Полученные результаты для (6) с учетом начала (5) общей цепочки равенств дают явное выражение для коэффициентов ряда Фурье

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \frac{1}{n} \left( J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{nz}{2}\right) \cos\left(\frac{nz}{2} - \frac{n+1}{4}\pi\right) + \right. \\ &\left. + J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{nz}{2}\right) \cos\left(\frac{nz}{2} - \frac{n-1}{4}\pi\right) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

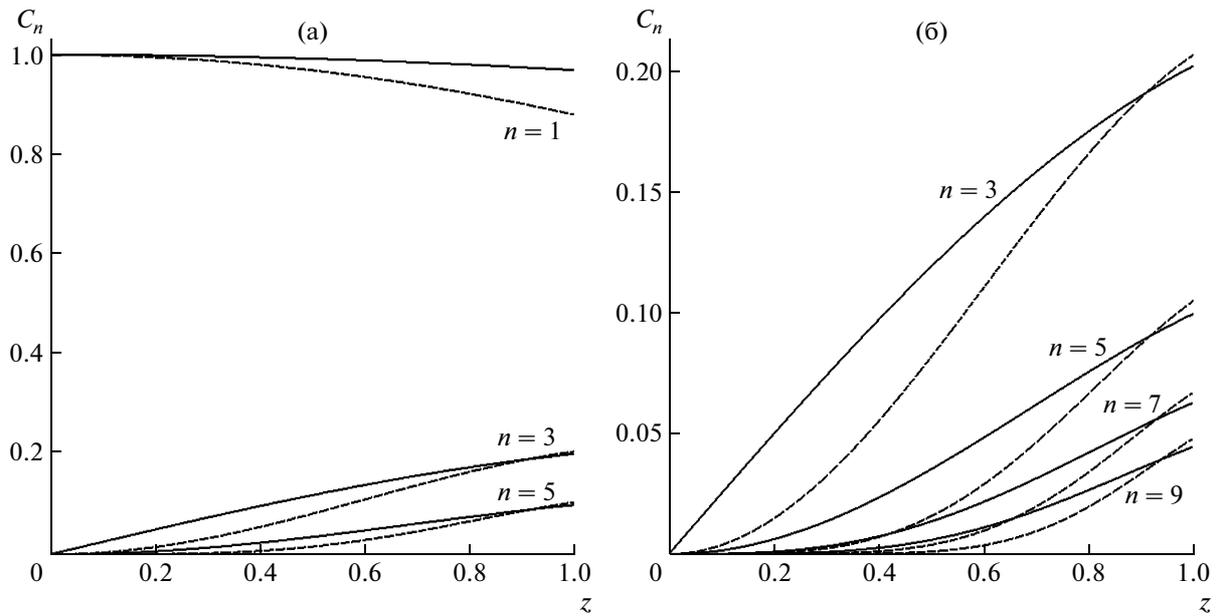
$$n = 2k + 1.$$

Вычисление коэффициентов  $B_n(z)$  в (3) проводится аналогично и дает следующий результат

$$\begin{aligned} B_n(z) &= -\frac{1}{n} \left( J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{nz}{2}\right) \sin\left(\frac{nz}{2} - \frac{n+1}{4}\pi\right) + \right. \\ &\left. + J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{nz}{2}\right) \sin\left(\frac{nz}{2} - \frac{n-1}{4}\pi\right) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$n = 2k + 1.$$

Относительно аргумента  $\varphi_n = nz/2 - (n-1)\pi/4$  выражения для коэффициентов (7), (8) можно



**Рис. 2.** Зависимости спектральных амплитуд (сплошные линии) решения (2) от расстояния  $z$  (до образования разрыва): (а) в сравнении с изменением основной гармоники, (б) без основной гармоники (более крупный масштаб). Пунктиром для сравнения показаны зависимости от  $z$  амплитуд гармоник с теми же номерами для спектрального решения Фубини (11).

представить в виде

$$\begin{aligned} A_n(z) &= C_n(z) \cos(\varphi_n(z) - \delta_n(z)), \\ B_n(z) &= -C_n(z) \sin(\varphi_n(z) - \delta_n(z)), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} C_n(z) &= \frac{1}{n} \sqrt{J_{\frac{n-1}{2}}^2\left(\frac{nz}{2}\right) + J_{\frac{n+1}{2}}^2\left(\frac{nz}{2}\right)}, \\ \delta_n(z) &= \operatorname{arctg} \frac{J_{(n+1)/2}(nz/2)}{J_{(n-1)/2}(nz/2)}. \end{aligned} \quad (9')$$

Используя (9) в полном разложении в ряд Фурье (3) решения (2) кубично нелинейного уравнения волны Римана, можно перейти к последовательности амплитуд гармоник и соответствующим сдвигам фаз

$$\begin{aligned} V(z, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(z) \sin n\theta + B_n(z) \cos n\theta) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(z) \sin(n\theta - \psi_n(z)), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\psi_n(z) = \varphi_n(z) - \delta_n(z), \quad (10')$$

Напомним, что в соотношениях (9)–(10) необходимо полагать  $n = 2k + 1$ .

Функции  $C_n(z)$  и  $\psi_n(z)$  характеризуют искомые спектральные составляющие решения (2) на расстояниях его однозначности (при  $z < 1$ ).

Наглядное представление о развитии с расстоянием  $z$  найденного спектра (10) волнового профиля (2) дает рис. 2 (в более мелком (а) и более крупном масштабе (б)), где для сравнения также показаны соответствующие зависимости (пунктир) амплитуд гармоник с теми же номерами для хорошо известного и упомянутого выше спектрального представления Фубини [1]

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nz)}{nz} \sin(n\theta) \quad (11)$$

решения  $V = \sin(\theta + zV)$ , традиционного для квадратично нелинейной акустики уравнения волны Римана.

Изменение с расстоянием сдвига фаз гармоник  $-\psi_n(z)$  (см. (10), (10')) иллюстрируется рисунком 3.

Отметим интересный “побочный” математический результат, связанный с тем, что трансформируемый при изменении  $z$  временной профиль (см. рис. 1) при  $\theta = \pi$  всегда имеет нулевое значение функции  $V$ ; через представление в виде ряда (3), (8) это приводит к следующему соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} J_{k+1}\left(\frac{(2k+1)z}{2}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)z}{2} - k\frac{\pi}{2}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} J_k\left(\frac{(2k+1)z}{2}\right) \sin\left(\frac{(2k+1)z}{2} - k\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

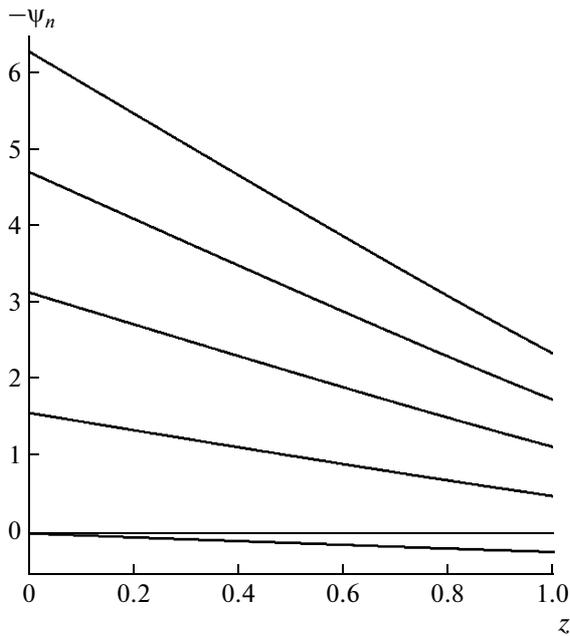


Рис. 3. Изменение с расстоянием  $z$  начальной фазы (10') гармоник решения (2). Последовательный переход от самого нижнего к последующим графикам соответствует гармоникам с  $n = 1, 3, 5, \dots$

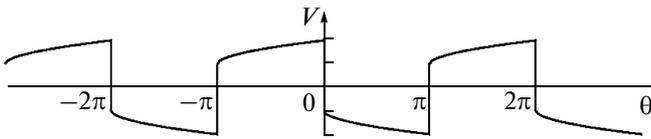


Рис. 4. Асимптотически самоподобный волновой профиль “трапецевидной пилы” [3] при  $z \gg 1$ .

В равенстве (12)  $n$  явно представлено требуемыми нечетными значениями  $2k + 1$ . Отметим нетривиальность равенства (12), заключающуюся в том, что, во-первых, из справочной литературы [11, 12] неизвестны явные соотношения между членами правого и левого ряда, а во-вторых, равенство (12) справедливо только при  $z < 1.3$  (подтверждено численной проверкой), т.е. два функциональных ряда в (12) с однозначными членами представляют одну и ту же функцию только на определенном интервале значений  $z$ .

Возвращаясь к вопросу о спектральном представлении решения (2), отметим, что на достаточно больших расстояниях  $z$ , на которых полностью формируются ударные фронты (разрывы) волнового профиля, сам этот профиль приобретает определенный асимптотически самоподобный вид, который с ростом  $z$  сохраняется при уменьшающейся характерной “амплитуде”, определяемой пиковым значением. Этот самоподобный профиль имеет вид “трапецевидной пилы” [3] (см. рис. 4) в отличие от “пилы с треугольными зубцами” в классической квадратично-нелиней-

ной акустике. К тому же, “трапецевидная пила” с изменением расстояния изменяет свою начальную фазу (сдвигается вдоль временной оси).

В [3] найдено представление асимптотического по отношению к (2) при  $z \gg 1$  профиля в следующем неявном виде

$$V_{ac}^{\pm}(\theta, z) = \pm \left( \frac{b}{z} U(\theta) \right)^{1/2}, \quad (13)$$

где  $\theta = \tau - \tau_s(z)$ ,  $\tau_s(z) = b \ln(z) - 1.73$ ,  $b = \pi / (3 - \ln 4)$ . Знак “+” соответствует первому полупериоду (например, при  $-\pi < \theta < 0$ ), знак “-” – второму полупериоду при  $0 < \theta < \pi$ . Функция асимптотически самоподобного профиля  $U(\theta)$  задается в следующем неявном виде

$$\frac{\theta - \theta_0}{b} = U - \ln(U/4) - 4, \quad (14)$$

причем для первого полупериода  $\theta_0 = 0, 1 < U < 4$ , для второго полупериода  $\theta_0 = \pi, 1 < U < 4$  и т.д.; например, для второго полупериода с учетом явного выражения для  $b$  имеем

$$\frac{\theta}{b} = U - \ln U - 1, \quad 0 < \theta < \pi.$$

В соответствии с полным решением (13) профиль первого полупериода отражается на втором полупериоде в отрицательную область относительно временной оси. Далее все периодически повторяется со сдвигом по временной оси.

Отметим, что найденную в [3] и приведенную здесь асимптотику можно получить как соответствующее аналитическое решение уравнения (1) при использовании анзаца самоподобного профиля [4].

Вычислим спектральное представление асимптотического самоподобного решения (13), (14)

$$V_{ac}(\theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(z) \exp(in\theta), \quad (15)$$

где

$$c_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_{ac}(z, \theta) \exp(-in\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{b}{z}} \int_{-\pi}^0 U^{1/2}(\theta) \exp(-in\theta) d\theta \quad (15')$$

$$z \gg 1, \quad n = 2k + 1.$$

При записи последнего интеграла (15') учтен специальный вид симметрии асимптотического профиля (по аналогии с интегралом (5) и пояснением к нему).

Обозначая  $u=U^{1/2}$ , запишем неявную функцию  $u(\theta)$  согласно (14) при  $\theta_0 = 0$  в виде

$$u = \exp\left(\frac{u^2}{2} - \frac{\theta}{2b} + a\right) = \exp(\xi), \quad (16)$$

где  $\xi = \frac{u^2}{2} - \frac{\theta}{2b} + a$ ,  $a = \ln 2 - 2$ .

Используя (16) при вычислении последнего интеграла (15') по частям (аналогично (4)), получаем

$$c_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ \frac{i\sqrt{b}}{n\pi} \left( 3 - \frac{0.5 \exp(-i2abn)}{(ibn)^{0.5-ibn}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\gamma(0.5 - ibn, 4ibn) - \gamma(0.5 - ibn, ibn)) \right) \right], \quad (17) \\ z \gg 1, \quad n = 2k + 1,$$

где  $\gamma(\lambda, \alpha) = \alpha^\lambda \int_0^x x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} dx$  — неполная гамма-функция (см. [10], 1.3.2.3), выражение для  $b$  см. в (13), выражение для  $a$  приведено в (16).

Машинное вычисление комплексных значений выражения в квадратных скобках в (17) при разных номерах  $n = 2k + 1$  дает амплитуды гармоник через модули  $C_n(z) \equiv |c_n(z)|$  (с той же зависимостью от расстояния, что и в (17)) асимптотического “самоподобного” профиля (13). Приведем результат для первых амплитуд гармоник:

$$C_1 \approx 1.372/\sqrt{z}, C_3 \approx 0.446/\sqrt{z}, \\ C_5 \approx 0.265/\sqrt{z}, C_7 \approx 0.190/\sqrt{z}, \\ C_9 \approx 0.149/\sqrt{z}. \quad (18)$$

На рис. 5 показано сопоставление спектров (в виде спектральных амплитуд) трансформируемого с расстоянием решения (2) на начальной стадии (до образования разрыва,  $z < 1$ ) в соответствии с выражением  $C_n(z)$  (см. (9')) и на стадии ( $z > 3$ ) асимптотически самоподобного профиля (13), (14) в виде “трапецевидной пилы”, для которого спектральные амплитуды (18) находятся из (17).

Полезно провести сравнение амплитуд гармоник  $C_n$  (18) с аналогичными характеристиками  $C_i$ , получающимися из предельного “безвязкостного” спектрального решения Фейя [2]

$$V = \frac{2}{1+z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

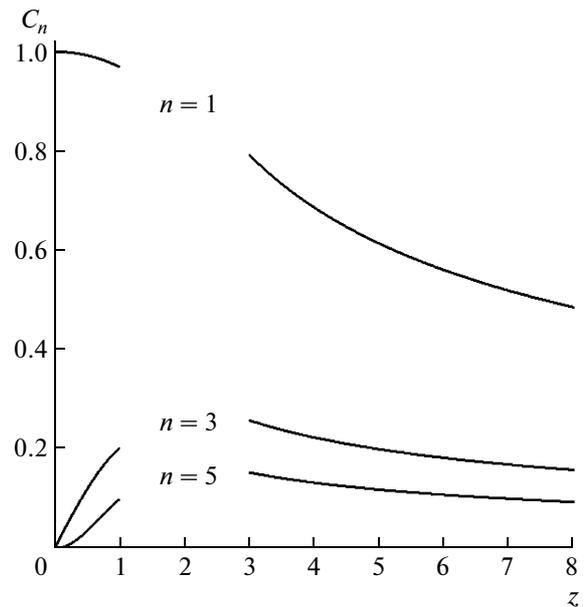


Рис. 5. Общая картина зависимости спектральных амплитуд от расстояния  $z$  для волнового профиля (2) на начальном этапе его трансформации  $z < 1$  (см. (9')) и на стадии образования “трапецевидной пилы” при  $z > 3$  (см. (18)).

для асимптотического профиля “обычной пилы” в квадратично нелинейной акустике:

$$C_1 = \frac{2}{1+z}, \quad C_2 = \frac{1}{1+z}, \quad C_3 = \frac{2}{31+z}, \\ C_4 = \frac{1}{21+z}, \quad C_5 = \frac{2}{51+z}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) видно, что, начиная с любого “разумного” расстояния (например,  $z = 3$ ), амплитуды гармоник (19) меньше соответствующих гармоник (18) и убывают более быстро с расстоянием.

Аналогично имеющемуся точному представлению упоминавшейся “пилы” в квадратично нелинейной акустике, полезно иметь хотя бы приближенное явное выражение для “пилы” (13) в кубично-нелинейном случае. Записывая (14) при  $\theta_0 = 0$  относительно  $u = U^{1/2}$  и разлагая в степенной ряд до квадратичного слагаемого функцию логарифма от  $u/4$  при условии  $|u/4| < 1$ , получим квадратичную зависимость, которая позволяет определить явную функцию  $u(\theta)$ . Однако такое действие не дает нужные значения одновременно на обоих концах интервала, а именно ( $\theta = -\pi$ ,  $u = 1$ ) и ( $\theta = 0$ ,  $u = 2$ ). Для устранения этого несоответствия воспользуемся общим видом полученной квадратичной аппроксимации  $\theta = \alpha u^2 + \beta u + \delta$ , в которой неизвестные коэффициенты найдем из вышеприведенных краевых

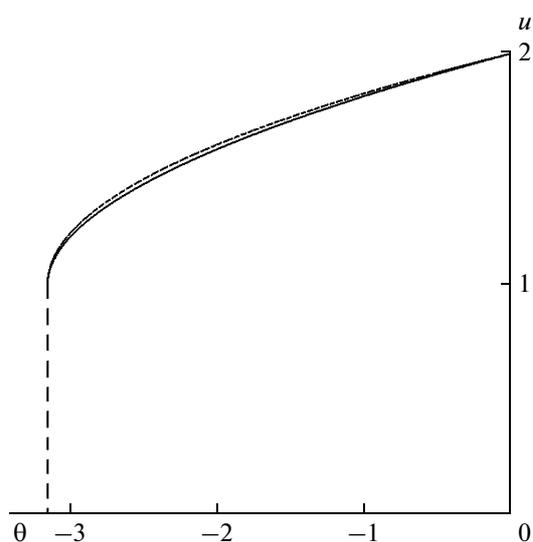


Рис. 6. Графическое сравнение точного асимптотического волнового профиля, задаваемого неявным решением (13), (14) (сплошная линия), с его аппроксимацией в виде явного решения (21) (пунктирная линия).

значений с добавлением значения производной  $\left(\frac{d\theta}{du}\right)_{u=1} = 0$ . Это дает  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = -2\pi$ ,  $\delta = 0$ ,

$$u(\theta) \equiv U^{1/2}(\theta) = 1 + \sqrt{1 + \theta/\pi}, \quad (20)$$

$$-\pi < \theta < 0,$$

а в соответствии с (13) получаем явное аппроксимирующее выражение для “трапецевидной пилы”

$$V_{ac}^{\pm}(z, \theta) = \pm \sqrt{\frac{b}{z}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right), \quad (21)$$

$$-\pi < \theta < 0,$$

$$0 < \theta < \pi.$$

Первый интервал соответствует верхнему, а второй — нижнему знаку в формуле (21). Точность полученной явной аппроксимации неявного решения (13), (14) характеризует рис. 6, где изображены графики функции  $u(\theta) \equiv U^{1/2}(\theta)$  в соответствии с точным неявным выражением (14) (сплошная линия) и с явной аппроксимирующей функцией (21) (пунктирная линия).

В заключение отметим, что, несмотря на простой вид исходного уравнения (1) и его решения (2), неявная форма последнего приводит к сравнительно трудоемкой процедуре получения его спектрального представления. В работе получены аналитические выражения для спектральных ха-

рактеристик простой волны в кубично-нелинейной среде как на стадии ее трансформации из синусоидальной формы до образования разрывов в профиле, так и асимптотически самоподобного профиля в виде “трапецевидной пилы”. В развитие этих результатов полезно получение каких-либо спектральных представлений для кубично-нелинейной пучковой акустики с использованием, например, аналитических решений [7] в параксиальной области.

Авторы благодарят О.В. Руденко за полезные замечания при подготовке данного материала, а также В.А. Петрова за компьютерную реализацию некоторых вычислительных процедур.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (№ 08-02-00811-а, 09-02-00925-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fubini E.* Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza // *Alta Frequenza*. 1935. V. 4. P. 530–581.
2. *Fay R.D.* Plane sound waves of finite amplitude // *J. Acoust. Soc. Am.* 1931. V. 3. P. 222–241.
3. *Lee-Bapty I.P., Crighton D.G.* Nonlinear wave motion governed by the modified Burgers equation // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1987. A 323. P. 173–209.
4. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Волновые пучки в кубично нелинейных средах без дисперсии. *ЖЭТФ*. 1994. Т. 106. № 2(8). С. 395–413.
5. *Rudenko O.V.* Propagation of finite-amplitude beams // In book: *Advances in Nonlinear Acoustics*. Ed. H. Nobaek. World Scientific, 1993. P. 3–6.
6. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Безынерционная самофокусировка недиспергирующих волн с широким спектром // *Квантовая электроника*. 1993. Т. 20. № 10. С. 1028–1030.
7. *Руденко О.В., Сухоруков А.А.* Дифрагирующие пучки в кубично-нелинейных средах без дисперсии // *Акуст. журн.* 1995. Т. 41. № 5. С. 822–827.
8. *Zabolotskaya E.A., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Meegan G.D.* Modeling of nonlinear shear waves in soft solids // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 5. P. 2807–2813.
9. *Wochner M.S., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123. № 5. P. 2488–2495.
10. *Прудников А.П., Бычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
11. *Справочник по специальным функциям*. Ред. Абрамовиц М., Стиган И. М.: Наука, 1979.
12. *Прудников А.П., Бычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.