

В.А. Гусев

## САМОРЕФРАКЦИЯ СФОКУСИРОВАННЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН (АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Физический факультет, кафедра акустики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы  
Тел.: (495) 9392943; E-mail: vgusev@bk.ru

*В работе предложен новый метод описания эволюции пучков интенсивных акустических пилообразных импульсов с учетом эффектов саморефракции. В приближении нелинейной геометрической акустики лучи определяются начальной кривизной волнового фронта. Саморефракция интенсивных пучков приводит к дополнительному искривлению лучей, которое для широкого диапазона параметров пучков может быть учтено в виде асимптотического разложения. Решена задача о распространении сфокусированных гауссовских пучков пилообразных волн и найдены аналитические решения для функции расходимости лучей и поля на оси пучка. На основе найденных решений показано, что саморефракция приводит к ограничению амплитуды волны в фокусе и смещению в область за геометрическим фокусом положения максимального значения амплитуды. Полученные выражения позволяют провести правильное численное исследование поперечной структуры пучка. Проанализирована зависимость саморефракции от поперечной формы пучка. К достоинствам развитого подхода относится также возможность расширения полученного решения для описания влияния на эволюцию волны слабых рефракционных неоднородностей и стратификации плотности среды.*

Одним из важных результатов нелинейной акустики является формирование ударного фронта в профиле волны конечной амплитуды. Поэтому при анализе распространения интенсивного звука необходимо учитывать особенности, связанные с появлением в профиле волны таких разрывов, или ударных фронтов. Как известно [1], скорость звуковой ударной волны зависит от ее амплитуды. Это означает, что пространственные области различной амплитуды звукового пучка, содержащего разрывы в профиле, перемещаются относительно друг друга, искривляя начальный волновой фронт. В результате изменяются амплитудные характеристики волны, в частности, происходит ограничение пиковой амплитуды в фокусе и сдвиг фокуса вдоль оси пучка [2]. Этот эффект принято называть саморефракцией, поскольку за счет различия в амплитуде пучка происходит искажение геометрической структуры и неравномерное смещение положения фронтов. Описание эффектов саморефракции на основе приближения нелинейной геометрической акустики было предложено в статье [2]. Однако конечное уравнение, описывающее расходимость лучей, было получено в параксиальном приближении, справедливом фактически только на оси пучка, и было исследовано только численными методами. Целью данной работы является построение аналитического решения, имеющего как самостоятельный теоретический интерес, так и позволяющего описать поперечную структуру пучка и обобщить полученные результаты для неоднородных сред.

В качестве исходных уравнений зададим систему уравнений нелинейной геометрической акустики неоднородных сред, в которой учтены как эффект саморефракции волны [2], так и неоднородность среды [3]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + (\nabla_{\perp} \psi)^2 = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} c_0 \frac{A}{2} + \zeta(x, y, z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} \left( p - \frac{A}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial T} + \nabla_{\perp} \psi \nabla_{\perp} p + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\psi$  – эйконал,  $\varepsilon$  – параметр нелинейности,  $\rho_0$  и  $c_0$  – равновесные значения плотности среды и скорости звука, в уравнении переноса (2)  $p$  – акустическое давление и  $A$  – амплитуда акустического давления,  $T = t - z/c_0 - \psi/c_0$  – время в сопровождающей системе координат с фазовой задержкой. Первый член в правой части уравнения эйконала (1) описывает перемещение ударного фронта за счет саморефракции. Функция  $\zeta(x, y, z)$  связана с рефракционной неоднородностью среды и описывает отклонение локальной скорости звука от ее среднего значения. В уравнении переноса (2) учтено только изменение амплитуды за счет рефракционной неоднородности среды, а плотность считается постоянной, поскольку в статье [3] показана математическая равноправность вкладов локальных неоднородностей плотности и скорости звука.

Для упрощения расчетов удобно в уравнении переноса ввести функции наклона луча (см. [3]) и перейти к безразмерным переменным. Будем рассматривать осесимметричные пучки, которые удобно описывать в цилиндрической системе координат. Тогда можно ввести функцию наклона следующим образом:  $\alpha = \partial \psi / \partial r$ , и  $\alpha$  описывает угол наклона луча к оси распространения волны. Для правильного перехода к безразмерным переменным сформулируем начальные данные. Пусть задан исходный гауссовский сфокусированный пучок с характерной поперечной шириной пучка  $r_0$ , фокусным расстоянием  $F$  и пиковой амплитудой  $A_0$ . Известно [4], что для сфокусированного по параболическому закону пучка начальный наклон луча равен  $\alpha(z=0) \equiv a_0(r) = -r/F$ . Тогда введем новые переменные:  $\tilde{z} = z/F$ ,  $\tilde{r} = r/r_0$ ,  $\alpha = (r_0/F)\tilde{\alpha}$ ,  $p = A_0\tilde{p}$ ,  $A = A_0\tilde{A}$ ,  $\tilde{T} = T/\tau_0$ ,  $\tau_0$  – длительность импульса, а также безразмерные параметры  $\gamma = F/x_s$  и  $\mu = M(F/r_0)^2$ ,  $x_s = \rho_0 c_0^3 \tau_0 / (\varepsilon A_0)$  – характерная нелинейная длина (длина образования ударного фронта в плоской волне), параметр  $M = c_0 \tau_0 / x_s \equiv \lambda / x_s$  имеет смысл числа Маха,  $\lambda$  – длина волны. С учетом выше сказанного уравнения (1)-(2) можно записать в удобном для дальнейшего анализа виде:

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{z}} + \tilde{\alpha} \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{r}} = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\zeta}(\tilde{r}, \tilde{z}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \gamma \left( \tilde{p} - \frac{\tilde{A}}{2} \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{T}} + \tilde{\alpha} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{p}}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{r}} \right) = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем знак волны над переменными будем опускать. Из уравнения (3) видно, что влияние саморефракции определяется одним параметром  $\mu$ , в тоже время вклад нелинейности в уравнение переноса определяется параметром  $\gamma$ . Параметр  $\gamma$  определяет относительное действие нелинейности и начальной фокусировки волны, при малых его значениях преобладает фокусировка и эволюция пучка близка к линейной, при больших значениях – преобладает нелинейность. Однако следует учитывать, что при приближении к фокусу происходит возрастание амплитуды и нелинейные эффекты будут накапливаться быстрее, поэтому малость параметра  $\gamma$  еще не означает возможности пренебрежения нелинейностью. Более интересным является параметр  $\mu$ , который

можно записать в двух эквивалентных видах:  $\mu = M(F/r_0)^2 = F/x_s \cdot F/x_d$ , где  $x_d = r_0^2/\lambda$  – характерная дифракционная длина. Отсюда можно сделать следующие выводы. Число Маха обычно всегда мало – даже для интенсивных используемых на практике источников звука оно не превышает  $10^{-3} \div 10^{-2}$ ; для тех же источников можно принять, что фокусное расстояние  $F$  и апертура источника  $r_0$  примерно одного порядка. С другой стороны, параметр  $F/x_s$  тоже обычно мал, поскольку представляет интерес фокусировка на относительно небольших расстояниях, например, используемые в медицине излучатели должны иметь фокусное расстояние порядка десятка сантиметров, в то же время нелинейная длина составляет метры. Второе отношение параметров  $F/x_d$  определяет относительные вклады фокусировки и дифракции, причем предпочтительнее использование режимов с малыми значениями этого параметра, поскольку они соответствуют острой фокусировке с высоким пиковым давлением и узкой фокальной перетяжкой. Таким образом, в широком диапазоне параметров, причем именно представляющих практический интерес, параметр  $\mu$  является малой величиной.

Малость этого параметра является существенно упрощающим решение полученных уравнений фактором. Как видно, уравнение эйконала (3) имеет вид неоднородного уравнения простых волн и описывает искривление траекторий луча как за счет эффектов саморефракции (первое слагаемое в правой части, [2]), так и неоднородностей среды (второе слагаемое в правой части, [3]). Траектория луча в однородной среде без учета саморефракции представляет собой прямую с наклоном, равным наклону луча в начальной точке. Ненулевая правая часть уравнения (3) приводит к изменению этих траекторий лучей. Точное решение уравнения (3) не удастся записать в пригодном для дальнейших расчетов виде. Поэтому малость параметра  $\mu$  позволяет найти асимптотическое решение уравнения эйконала. Ограничимся пока рассмотрением однородной среды  $\zeta = 0$ . При слабых отклонениях траекторий решение уравнения (3) можно искать в виде асимптотического ряда

$$\alpha = \alpha^{(0)} + \mu\alpha^{(1)} + \dots, \quad (5)$$

функция  $\alpha^{(0)}$  удовлетворяет однородному невозмущенному уравнению (3) без правой части. Решение этого невозмущенного уравнения задается в параметрическом виде.

Наибольший интерес представляет анализ эволюции исходного сфокусированного пучка. Задавая начальную кривизну волнового фронта в виде  $\alpha_0(r) = -r$  (параболическая в поперечном направлении фаза), получим следующее решение уравнения эйконала:

$$\alpha_0(\xi) = -\xi, \quad r = \xi(1-z). \quad (6)$$

Чтобы учесть в дальнейших вычислениях искривление лучей, задаваемое начальной кривизной волнового фронта, и получить равномерно пригодное асимптотическое разложение, используем метод растянутых характеристик [5]. Согласно этому методу совершим следующее преобразование

$$r = \xi(1-z) + \mu r^{(1)}(z, \xi) + \dots, \quad (7)$$

т.е. совершим растяжение независимой переменной. Оставляя в уравнении (3) только члены порядка  $\mu$ , получим уравнения для возмущенных траекторий:

$$\frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial z} = -\frac{\mu}{2} \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial A(\xi, z)}{\partial \xi}, \quad \frac{dr^{(1)}}{dz} = \alpha^{(1)}, \quad (8)$$

где величина  $r_\xi = \partial r / \partial \xi$  – якобиан перехода к лучевым координатам  $z, \xi$  и имеет смысл расходимости лучей. Запишем решение уравнений (8):

$$\alpha = -\xi - \frac{\mu}{2} \int_0^z \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial A(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta', \quad r = \xi(1-z) - \frac{\mu}{2} \int_0^z d\eta'' \int_0^{\eta''} \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial A(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta'. \quad (9)$$

Второе выражение в (9) определяет траекторию луча, т.е. значение поперечной координаты  $r$  луча, вышедшего из точки  $r(z=0) = \xi$ , на расстоянии  $z$ . Видно, что сдвиг луча происходит за счет исходной модуляции фазового фронта и саморефракции, причем при пренебрежении эффектами саморефракции лучи представляют собой прямые линии. Саморефракция приводит к более сложным траекториям лучей. При дальнейших вычислениях понадобятся следующие производные, которые запишем, сохраняя величины только первого порядка по малому параметру  $\mu$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = -1 - \frac{\mu}{2} \int_0^z \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial^2 A(\xi, \eta')}{\partial \xi^2} d\eta', \quad r_\xi = 1-z - \frac{\mu}{2} \int_0^z d\eta'' \int_0^{\eta''} \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial^2 A(\xi, \eta')}{\partial \xi^2} d\eta'. \quad (10)$$

При вычислении этих производных учтено, что сама величина  $r_{\xi\xi}$  имеет порядок малости  $\mu$  и, соответственно, ее вклад в искривление траекторий лучей будет иметь второй порядок малости.

Уравнение переноса (4) в лучевых координатах  $z, \xi$  имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \left( p - \frac{A}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{p}{2} \left( \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{r} \right) = 0. \quad (11)$$

Замечая соотношения между функциями (9) и их производными (10), множитель при последнем слагаемом удобно записать в виде

$$\frac{1}{r_\xi} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{r} = \frac{d}{dz} \ln r_\xi + \frac{d}{dz} \ln r \equiv \frac{d}{dz} \ln \Delta, \quad \Delta = \frac{r r_\xi}{\xi} = \left( 1-z - \frac{\mu}{2} \int_0^z d\eta'' \int_0^{\eta''} \frac{1}{\xi} \frac{\partial A(\xi, \eta')}{\partial \xi} \frac{d\eta'}{r_\xi} \right) \left( 1-z - \frac{\mu}{2} \int_0^z d\eta'' \int_0^{\eta''} \frac{\partial^2 A(\xi, \eta')}{\partial \xi^2} \frac{d\eta'}{r_\xi} \right). \quad (12)$$

Здесь величину  $\Delta$  можно интерпретировать как характерную ширину лучевой трубки [3] в цилиндрической системе координат – площадь элементарного кольца радиуса  $\xi$ . Нормировка этой площади на величину радиуса  $\xi$  удобна тем, что тогда  $\Delta(z=0) = 1$ .

Соответствующим образом преобразованное уравнение (11) может быть формально решено для произвольного начального профиля (не будем забывать, что наклон луча  $\alpha$  сам определяется пока неизвестной амплитудой ударного фронта). Общее решение уравнения (11) с граничным условием  $p(z=0) = R(r)p_0(\tau)$  имеет вид:

$$p = \frac{R(\xi)}{\sqrt{\Delta}} p_0 \left( T + \gamma p \sqrt{\Delta} \int_0^z \frac{d\eta}{\sqrt{\Delta}} - \gamma \int_0^z A dz \right). \quad (13)$$

Пиковая амплитуда одиночного пилообразного N-импульса с начальным профилем  $p_0(\tau) = -\tau$  при  $|\tau| < 1$  и  $p_0(\tau) = 0$  при  $|\tau| > 1$  ( $\tau$  нормировано на начальную длительность импульса  $\tau_0$ ) определяется выражением:

$$A = \frac{R(\xi)}{\sqrt{\Delta}} \left( 1 + \gamma R(\xi) \int_0^z \frac{d\eta}{\sqrt{\Delta}} \right)^{-1/2}. \quad (14)$$

Пиковая амплитуда (14) определяется как накоплением нелинейных эффектов, так и, в первую очередь, рефракцией лучей, которая в свою очередь определяется именно пиковой амплитудой в силу решения уравнения эйконала (9). Таким образом, решение задачи задается связанными между собой выражениями для амплитуды волны (14) и эффективной ширины лучевой трубки (12) для фиксированного исходящего луча, а также траекторией луча (9). Для получения физически интересных результатов необходимо конкретизировать задачу. Рассмотрим исходный сфокусированный гауссовский пучок с поперечной формой пучка  $R = \exp(-r^2)$ . Наибольший интерес представляет зависимость амплитуды волны на оси пучка. Благодаря особенностям рассматриваемой задачи именно эту область рассмотреть проще всего. Действительно, согласно выражениям (9) искривление лучей пропорционально первой производной от поперечной формы пучка, и поэтому луч, выходящий из центра пучка с координатой  $r(z=0) = \xi = 0$ , остается на оси пучка  $r = 0$ . Такой результат справедлив для любого луча, выходящего из точки с экстремальным в поперечном направлении значением амплитуды пучка. Это согласуется с тем, что локальная ось фокусировки соответствует экстремуму формы волнового фронта и, следовательно, нулевому значению угла наклона луча. Тот факт, что для осевого луча существует точное и при этом простое выражение в лучевых координатах,  $\xi = 0$ , позволяет проанализировать поведение амплитуды волны на оси пучка, полагая в решении (12), (14)  $\xi = 0$ . Замечая также, что на оси  $r/\xi = r_\xi$ , и вводя обозначение для расходимости лучей на оси  $\sqrt{\Delta} = r_\xi \equiv Q$ , после дифференцирования получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 Q}{dz^2} = \frac{\mu}{2Q^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\gamma s}} + \frac{1}{(1+\gamma s)^{3/2}} \right) \equiv \frac{\mu}{Q^2} f(s), \quad (15)$$

с начальными условиями

$$Q|_{z=0} = 1, \quad \left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=0} = -1. \quad s = \int_0^z \frac{dz'}{Q(z')}. \quad (16)$$

При малых значениях параметра  $\gamma \rightarrow 0$  уравнение (15) может быть проинтегрировано точно. Оно сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ}{dz} = \pm \sqrt{C - \frac{\mu}{Q}}, \quad (17)$$

где константа  $C$  определяется из граничных условий (16). Решение состоит из двух ветвей. Первая ветвь определяется начальным условием при  $z = 0$ , при этом надо выбрать знак минус и  $C = 1 + \mu$ . Тогда производная оказывается отрицательной,  $Q$  убывает от начального значения  $Q = 1$  до минимального значения  $Q_{\min} = \mu/(1 + \mu)$ . Вторая, положительная ветвь решения (17) описывает увеличение расходимости лучей после прохождения фокальной области. Таким образом, в результате саморефракции расходимость лучей нигде не становится равной нулю и, соответственно, амплитуда волны оказывается конечной даже в геометрическом фокусе в приближении нелинейной геометрической акустики. Решение определяется следующими выражениями: до точки поворота

$$z_1 = (1 + \mu)^{-3/2} \left( \sqrt{1 + \mu} [1 - \sqrt{Q} \sqrt{(1 + \mu)Q - \mu}] + \mu \ln \frac{1 + 1/\sqrt{1 + \mu}}{\sqrt{Q} + \sqrt{Q - \mu/(1 + \mu)}} \right), \quad (18)$$

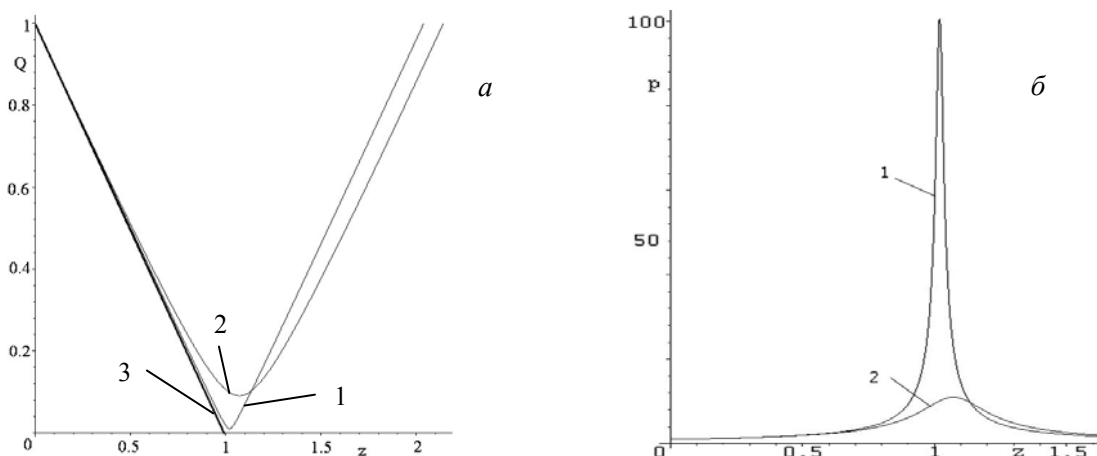


Рис.1. Расходимость лучей (а) и зависимость пиковой амплитуды от расстояния (б) для значения параметра  $\mu = 0.01; 0.1$ ,  $\gamma = 0$  (кривые 1-2). Кривая 3 – расходимость лучей при пренебрежении саморефракцией.

и  $z_2 = 2z_0 - z_1$  после точки поворота. Точка поворота  $z_0$  определяется условием  $z_0 = z_1(Q_{\min})$ . На рис.1 приведены траектории лучей и зависимости пиковой амплитуды от расстояния для двух значений параметра  $\mu = 0.01; 0.1$  (кривые 1-2 соответственно). Приведенные графики принципиально отличаются от решений в приближении нелинейной геометрической акустики, не учитывающих эффектов саморефракции – максимальная амплитуда оказывается конечной, в то время как при пренебрежении саморефракцией амплитуда сфокусированного пучка в фокусе стремится к бесконечности. Расходимость лучей теперь не уменьшается до нуля, а после фокуса начинает нарастать (кривые 1-2, рис. 1а), при пренебрежении саморефракцией расходимость равна нулю в геометрическом фокусе (кривая 3, рис. 1а). При слабой саморефракции (малых  $\mu$ ) зависимость амплитуды близка к линейному случаю и случаю отсутствия саморефракции в том смысле, что максимальная амплитуда достигает значительной величины и эта величина достигается в точке, расположенной вблизи геометрического фокуса. Здесь необходимо подчеркнуть, что максимальная амплитуда имеет порядок  $\mu^{-1}$ . При больших значениях  $\mu$  саморефракция приводит к сильному сдвигу положения максимального значения амплитуды вдаль от геометрического фокуса и сильному сглаживанию амплитуды. Таким образом, саморефракция препятствует полному схождению лучей в геометрическом фокусе и ограничивает рост амплитуды даже в рамках нелинейной геометрической акустики.

Объяснение эффекта саморефракции в следующем. При отсутствии саморефракции волна имеет параболическую в поперечном направлении фазу, так что все лучи согласованы друг с другом и собираются в одну точку – геометрический фокус. Саморефракция заключается в том, что области пучка с большей амплитудой бегут быстрее, в результате приосевые области пучка выбегают вперед и нарушается условие согласования лучей друг с другом. Соответственно, приосевые лучи перестают пересекаться и каустическая особенность исчезает. Для областей вдали от оси пучка пиковая амплитуда по абсолютной величине становится меньше и эффекты фокусировки для них могут оказаться сильнее проявленными. Подробное исследование поперечной структуры пучка будет проведено ниже.

Для произвольных значений параметра  $\gamma$  решение уравнения (15) будем искать в виде  $Q = 1 - z + \mu F(s(z))$ , где  $F$  – искомая функция. Подставляя эту форму решения в (15) и учитывая, что  $ds/dz = 1/Q(z)$ , получим:

$$\frac{d^2 F}{ds^2} - \frac{dF}{ds} \frac{dQ}{dz} = f(s), \quad s(z=0) = 0, \quad F(0) = 0, \quad \frac{dF}{ds}(0) = 0. \quad (19)$$

В уравнении (19) величина  $dQ/dz = -1 + \mu dF/dz$  содержит слагаемые различных порядков малости, поэтому (19) можно решать методом последовательных приближений. В первом порядке получаем линейное уравнение для функции  $F$  как функции переменной  $s$ . Для заданной в (15) функции  $f$  расходимость лучей  $Q$  и амплитуда  $A$  в зависимости от расстояния  $z$  определяются в параметрическом виде:

$$Q(s) = \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{1 + \gamma s} - e^{-s} + \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{2} \left( 1 + \frac{2}{\gamma} \right) e^{-1/\gamma - s} \left( \operatorname{erfi} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - \operatorname{erfi} \sqrt{\frac{1 + \gamma s}{\gamma}} \right) \right), \quad \operatorname{erfi} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt,$$

$$z(s) = 1 - C_0 e^{-1/\gamma - s} + \frac{\mu}{\gamma^2} \left( - (1 + \gamma s) e^{-s} + \left( 1 + \frac{3\gamma}{2} \right) \sqrt{1 + \gamma s} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi\gamma} \left( 1 + \frac{3\gamma}{2} \right) e^{-1/\gamma - s} \operatorname{erfi} \sqrt{\frac{1 + \gamma s}{\gamma}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{2} \left( 1 + \frac{2}{\gamma} \right) (1 + \gamma s) e^{-1/\gamma - s} \left( \operatorname{erfi} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - \operatorname{erfi} \sqrt{\frac{1 + \gamma s}{\gamma}} \right) \right),$$

$$A = \frac{1}{Q(s)} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma s}}. \quad (20)$$

Учет второго приближения более корректно описывает расходимость лучей после геометрического фокуса; до фокуса второе приближение мало. На рис. 2 приведены профили для трех значений параметра  $\gamma$ , причем в соответствии с работой [2] принято  $\mu = D\gamma$ . Кривые 1-3 соответствуют значениям  $D = 0.01$ ,  $\gamma = 0.1; 1; 10$  соответственно. Рис.2 показывает полное согласие с результатами численного расчета [2]: при увеличении нелинейного затухания амплитуда волны убывает и сдвигается вдали от геометрического фокуса.

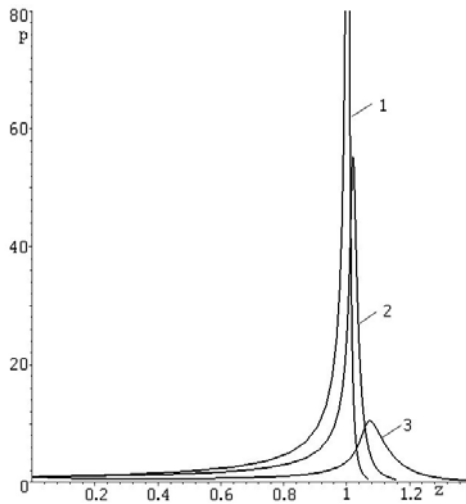


Рис.2. Зависимость пиковой амплитуды от расстояния при  $\mu = 0.01\gamma$ ,  $\gamma = 0.1; 1; 10$  (кривые 1-3).

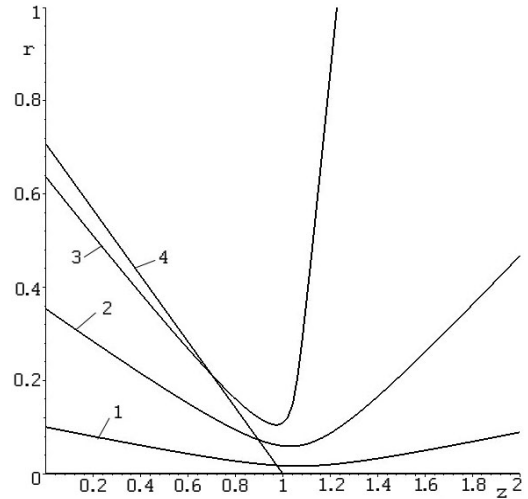


Рис.3. Траектории лучей для различных точек выхода луча при  $\gamma = 0$ .

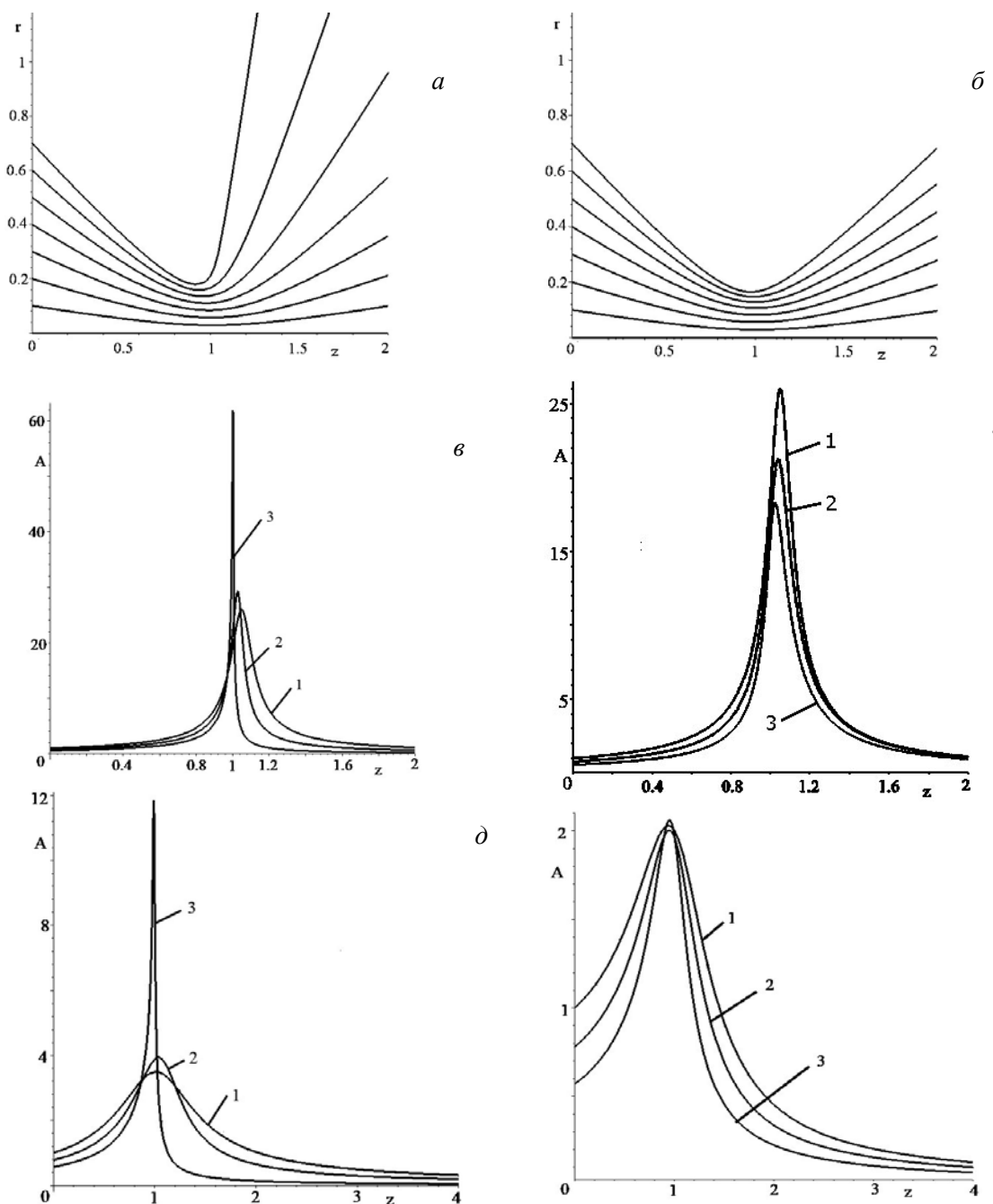


Рис. 4. Траектории лучей (а-б) и зависимости пикового амплитуды давления от расстояния (в-е) в поперечных плоскостях. Графики в-е соответствуют значениям параметров: в –  $\mu = 0,01$ ,  $\gamma = 0,1$ , г –  $\mu = 0,01$ ,  $\gamma = 1$ , д –  $\mu = 0,1$ ,  $\gamma = 0,1$ , е –  $\mu = 0,1$ ,  $\gamma = 1$ . Кривые 1-3 соответствуют лучевым координатам  $\xi = 0; 0,5; 0,75$ .

Используя выражения (9), (10) и (14) можно записать уравнения для расходимости лучей и приведенного поперечного расстояния  $r/\xi$  для произвольного значения лучевой координаты и, соответственно, для произвольной поперечной координаты, т.е. рассмотреть поперечную структуру пучка. Во-первых, заметим, что согласно выражению (10) для расходимости лучей слагаемое, связанное с саморефракцией, при  $\gamma \rightarrow 0$  равно нулю в точке перегиба поперечного профиля. В результате при удалении от центра пучка и приближении к точке перегиба происходит нарастание амплитуды, причем



ее ограничение происходит только во втором порядке малости ( $\sim \mu^2$ ). В параксиальном приближении, использованном в работе [2], поперечная форма пучка фактически заменялась параболой и эффект возрастания амплитуды при удалении от оси не учитывался. На рис. 3 приведены траектории лучей для случая  $\gamma = 0$  для различных точек выхода луча. Видно, что вблизи фокуса лучи сближаются, но параксиальные лучи не пересекаются; после фокуса лучи быстро разбегаются. Но лучи из области перегиба поперечной амплитуды практически не отклоняются и пересекаются, образуя каустики. Естественно, случай  $\gamma = 0$  является идеализацией для слабого нелинейного затухания, учет этого фактора приводит к ограничению амплитуды. На рис. 4 приведены результаты численного расчета зависимостей пиковой амплитуды от расстояния для различных значений лучевых координат – точек выхода лучей. На рис. 4а и 4б показаны траектории лучей – при малых значениях  $\gamma$  после фокуса лучи разбегаются значительно быстрее, приводя к резкому уменьшению амплитуды. Рисунки 4в-г и 4д-е построены при различных значениях  $\mu$  – как и на приведенных выше рисунках увеличение параметра саморефракции приводит к сглаживанию максимальной амплитуды и сдвигу его положения вдаль от геометрического фокуса. Самым важным результатом является различное поведение максимального значения в разных поперечных плоскостях при различных значениях параметра  $\gamma$ . Кривые 1-3 соответствуют лучевым координатам  $\xi = 0; 0,5; 0,75$ . При малых  $\gamma$  – сильной фокусировке и слабом нелинейном затухании – на оси пучка амплитуда настолько возрастает, что начинает заметно сказываться нелинейное затухание. В результате на оси пучка образуется локальный минимум амплитуды и при удалении от оси амплитуда возрастает. При больших  $\gamma$  нелинейное затухание действует пропорционально на все области пучка и исходная форма пучка качественно сохраняется. При промежуточных значениях  $\gamma \sim 1$  на оси пучка образуется область примерно равной амплитуды – так называемая изотропизация пучка.

Аналогичный результат – образование локального минимума амплитуды сфокусированного гауссовского пучка на его оси – был получен в работе [6], где было найдено точное решение в приближении нелинейной геометрической акустики для волны с произвольным поперечным профилем. Таким образом, этот эффект является характерной особенностью распространения пучков пилообразных волн и не связан непосредственно с саморефракцией, она только приводит к конечности амплитуды в фокусе и позволяет описать поле в фокальной области.

Необходимо отметить еще одно важное следствие полученного решения (12), (14). Поскольку расходимость луча пропорциональна второй производной поперечной формы пучка  $R''$  (и похожей по смыслу величине  $R'/\xi$ ), то влияние саморефракции будет существенным только для пучков с локально параболической поперечной формой (как, например, гауссовский пучок на оси  $\exp(-r^2) \approx 1 - r^2$ ). Для пучков с быстрее убывающей в поперечном направлении амплитудой саморефракция не может ограничить рост амплитуды, по крайней мере, в первом порядке малости по  $\mu$ .

Таким образом, в работе получено аналитическое решение задачи распространения сфокусированных пучков пилообразных волн с учетом саморефракции. Полученные выражения позволяют найти как поле на оси пучка, так и рассмотреть поперечную структуру поля.

Работа поддержана грантами «Ведущие научные школы» НШ-4449.2006.2 и РФФИ 06-02016658.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О.В., Солуян С.Н. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Мусатов А.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А. Учет нелинейной рефракции и нелинейного поглощения при фокусировке мощных импульсов // Акуст. Журн. Т.38, №3, с.502-510, 1992.
3. Гусев В.А., Руденко О.В. Статистические характеристики интенсивной волны за двумерным фазовым экраном // Акуст. журн, т.52, №1, с.30-42, 2006.
4. Виноградова М.Б, Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
5. Найфе А. Методы возмущения. М.: Мир, 1976.
6. Гусев В.А. Эволюция ограниченных в пространстве волн звукового удара при прохождении через неоднородный слой атмосферы // Известия РАН. Серия физическая. Т.70, №12, с.1712-1715, 2006.