

В.А.Гусев, В.А. Петров

## ИНТЕНСИВНЫЕ ЛИНЕЙНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Физический факультет, кафедра акустики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы  
Тел.: (495) 9392943; E-mail: vgusev@bk.ru*

*Исследованы особенности распространения интенсивных сдвиговых волн в твердом теле с неоднородностями модулей упругости. Выведено уравнение, описывающее дифракционные и нелинейные эффекты при распространении интенсивной волны в такой среде. Найдено выражение для спектра исходно синусоидального сигнала в кубично-нелинейной среде, а также интегральное явное выражение для спектра сигнала с произвольным профилем. На основе этих выражений рассчитаны амплитуды гармоник после прохождения тонкого неоднородного слоя.*

Сдвиговые волны в твердых телах предоставляют большие возможности для исследования свойств среды распространения, неразрушающей диагностики и воздействию на элементы среды [1]. Особенности перспективы применения сдвиговых волн связаны с медицинскими и биологическими приложениями, поскольку поврежденные биологические ткани обычно слабо отличаются от здоровых по плотности и продольному модулю упругости, но могут значительно отличаться по сдвиговому модулю упругости [2]. В тоже время сдвиговые волны большой интенсивности обладают существенными особенностями, которые отличают их от хорошо изученных продольных волн в жидкости и твердых телах. Главное отличие заключается в том, что для поперечных плоских волн преобладающей является кубичная, а не квадратичная нелинейность [3].

Распространение интенсивных линейно-поляризованных сдвиговых волн вдоль оси  $z$  в изотропном твердом теле описывается уравнением [4]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u_y^2 \frac{\partial u_y}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2\rho c^3} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} \right) = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} u_y. \quad (1)$$

Здесь  $u_y$  - компонента смещения вдоль оси  $y$ ,  $\tau = t - z/c$ ,  $\gamma$  - параметр нелинейности,  $\eta$  - сдвиговая вязкость. Это уравнение по своей структуре аналогично уравнению Хохлова-Заболотской-Кузнецова, описывающему эволюцию продольных волн, однако (1) содержит кубичную, а не квадратичную нелинейность.

При исследовании свойств среды и неразрушающем контроле необходимо уметь описывать волны в неоднородных средах. При этом интенсивные волны могут дать дополнительную информацию о среде за счет информации, содержащейся в генерирующихся высших гармониках. Будем рассматривать модель среды с медленно изменяющимися модулями упругости. При выводе уравнения для интенсивных сдвиговых волн в неоднородной среде поступим следующим образом. Поскольку мы рассматриваем акустические волны с достаточно малыми числами Маха, то в первом порядке нелинейные члены и члены, описывающие искажения волны за счет неоднородности, будут входить аддитивно. Поэтому вначале мы можем вывести линейное эволюционное уравнение для волн в неоднородной среде, а затем добавить необходимые слагаемые в уравнение (1). Волновое уравнение для упругих волн в твердом теле с переменными (зависящими от координат) модулями упругости можно записать в виде [5]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \Delta u + \text{grad } \lambda \cdot \text{div } u + \text{grad } \mu \times \text{rot } u + 2(\text{grad } \mu \cdot \nabla) u. \quad (2)$$

Будем считать, что в среде в направлении оси  $z$  распространяется сдвиговая волна. При этом, вообще говоря, будут возникать компоненты смещения как в обоих поперечных направлениях, так и в продольном направлении. Изменение параметров Ламэ каким-либо конкретным направлением пока ограничивать не будем, но будем считать, что это изменение происходит достаточно медленно, на масштабах, существенно больших длины волны. Тогда систему уравнений можно упростить в соответствии с методом медленно изменяющегося профиля, предполагая, что входящие величины имеют следующие порядки малости:

$$u_x = u_x(\tau = t - z/c_0, \sqrt{\varepsilon}x, \sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon z), \quad u_y = u_y(\tau = t - z/c_0, \sqrt{\varepsilon}x, \sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon z), \\ u_z = \sqrt{\varepsilon}u_z(\tau = t - z/c_0, \sqrt{\varepsilon}x, \sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon z).$$

Здесь введены малый параметр  $\varepsilon \ll 1$  и характерная скорость сдвиговой волны бесконечно малой амплитуды  $c_0$ . Подставляя эти выражения в исходные уравнения и сохраняя слагаемые порядка малости не выше  $\varepsilon$ , для поперечных компонент смещения получим:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} = \frac{c_0}{2\mu} \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial S}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + S \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right], \quad (3) \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial \tau} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} = \frac{c_0}{2\mu} \left[ (\lambda + \mu) \frac{\partial S}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + S \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right].$$

Здесь введены локальная скорость сдвиговой волны  $c_i = \sqrt{\mu/\rho}$ , расстройка локальной скорости  $\zeta = 2(c_0^2/c_i^2 - 1)$ ,  $S = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial u_z}{\partial \tau}$ . Для продольной компоненты сохраним

только старшие члены, имеющие порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial S}{\partial \tau} + \rho \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = 0.$$

Отсюда видно, что в однородной среде  $S = 0$ . В случае неоднородной среды, используя определение  $S$ , можно записать:

$$S = \frac{c_i^2 - c_0^2}{c_i^2 - c_0^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho(c_i^2 - c_0^2)} \left( u_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mu}{\partial y} \right).$$

Подставляя найденное выражение в уравнения (3) и пренебрегая квадратичными по отклонениям параметров среды слагаемыми, получим:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial \tau} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \tau^2} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \frac{c_0}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{c_0}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{c_0}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial \tau} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \frac{c_0}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{c_0}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{c_0}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

В дальнейшем будем считать, что в исследуемой волне отлична от нуля только компонента смещения  $u_y$ . Тогда волна будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{u_y}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial u_y}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right).$$

Мы получили эволюционное уравнение, описывающее распространение поперечного волнового пучка в среде с переменными модулями упругости. Сравнивая это уравнение с уравнением (1), можно добавить необходимые слагаемые и записать уравнение, описывающее эволюцию интенсивной сдвиговой волны в неоднородной среде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u_y}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial u_y}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2\rho c^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Такой вывод уравнения оправдан для описания акустических полей, поскольку числа Маха обычно малы и взаимодействием нелинейных эффектов и неоднородности можно пренебречь.

Распространение плоских сдвиговых волн в плоско-слоистой среде описывается значительно более простым уравнением (в дальнейшем везде  $u_y \equiv u$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} u + \frac{\zeta}{c_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\eta}{2\rho c^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \quad (5)$$

В этом случае удобно перейти в систему координат, движущуюся с локальной скоростью звука  $\tilde{\tau} = t - \int_0^z dz/c_l(z)$ , что позволяет избавиться от последнего слагаемого в левой части (5).

В итоге получаем кубично-нелинейный аналог обобщенного уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} u = \frac{\eta}{2\rho c^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{\tau}^2}.$$

Пренебрегая вязкостью, получим также неоднородное кубичное уравнение простых волн:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} u = 0. \quad (6)$$

Это уравнение замечательно тем, что заменой переменных  $u = U(\tilde{\tau}, z)/\sqrt{\mu}$ ,  $l = \int_0^z dz/\mu$  оно сводится к однородному уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial l} - \frac{\gamma}{c^3} U^2 \frac{\partial U}{\partial \tilde{\tau}} = 0. \quad (7)$$

В случае общего уравнения (4) целесообразно, как обычно принято в теории волн в неоднородных средах, перейти к приближению нелинейной геометрической акустики, согласно которому поле ищется в виде

$$u = u(T = \tau - \psi(x, y, z)/c_0, x, y, z).$$

Приближение геометрической акустики с достаточной точностью описывает высокочастотные волны, для которых дифференцирование по времени соответствует умножению на некоторый большой параметр. Выделяя старшие члены, получим уравнение эйконала

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 = \zeta. \quad (8)$$

Следующие члены по большому параметру образуют нелинейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) u = 0. \quad (9)$$

Уравнение эйконала (8) имеет такой же вид, как и в линейном случае. Решение этого уравнения в общем случае представляет собой нетривиальную задачу. Наглядным и удобным подходом в решении уравнения эйконала является переход к функциям наклона лучей:  $\alpha = \partial \psi / \partial x$ ,  $\beta = \partial \psi / \partial y$ . Запишем уравнения (8)-(9) с учетом введенных функций:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \zeta_x, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = \zeta_y. \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\alpha}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{2\beta}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) u = 0. \quad (11)$$

Предположим, что мы нашли его решение – функции наклонов лучей  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда траектории лучей, вдоль которых распространяется возмущения, определяются, согласно (10), уравнениями

$$\frac{dx}{dz} = \alpha, \quad \frac{dy}{dz} = \beta. \quad (12)$$

Эти уравнения определяют два семейства кривых  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(x, y, z)$  и  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y, z)$ , где параметры  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\eta}$  определяют конкретный луч. В уравнении (11) мы можем перейти от декартовых поперечных координат к лучевым координатам  $\xi$  и  $\eta$ , таким, чтобы выполнялось условие  $\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z_1}$ , т.е. в преобразованном уравнении

отсутствовали первые производные по поперечным координатам. Уравнения, определяющие лучевые переменные, в точности совпадают с уравнениями (12), т.е. являются траекториями лучей. После перехода к лучевым координатам уравнение (11) будет зависеть от поперечных координат только как от параметров, т.е. получается одномерное уравнение переноса для поля вдоль фиксированного луча.

Точное решение уравнения эйконала (10) можно найти в модели неоднородной среды в виде бесконечно тонкого фазового экрана [6]. В случае если неоднородность локализована в сравнительно тонком слое, то можно считать, что она вносит зависящую от координат фазовую задержку, приводящую к искривлению волнового фронта, но при этом амплитуда волны не успевает заметно измениться. В таком случае неоднородность можно отнести к граничному условию, а в среде решать однородную задачу. Решение уравнения эйконала (10) в однородной среде при  $\zeta = 0$  можно записать в неявном виде

$$\alpha = A(\xi = x - \alpha z, \eta = y - \beta z), \quad \beta = B(\xi = x - \alpha z, \eta = y - \beta z), \quad (13)$$

где функции  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  описывают значения функций наклона луча в начальной плоскости  $z = 0$ . Тогда в уравнении переноса можно записать  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dz} = \frac{d}{dz} \ln S$ , где

$S = 1 + z \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \right) + z^2 \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right)$  - площадь поперечного сечения лучевой трубки. Здесь учтено, что функции  $A(\xi, \eta)$  и  $B(\xi, \eta)$  не зависят явно от  $z$ . Уравнение переноса примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^3} u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u}{2} \frac{d}{dz} \ln S = 0. \quad (14)$$

Как видно, уравнение переноса (14), записанное для поля вдоль фиксированного луча, по своей структуре аналогично уравнению (6) для плоской волны, поэтому уравнение (14) с помощью замены переменных  $u = U/\sqrt{S}$ ,  $s = \int_0^z dz/S$  можно свести к кубичному уравнению простых волн (7). Решение уравнения эйконала (13) удобно записать в параметрическом виде, используя в качестве параметров лучевые координаты:  $\alpha = A(\xi, \eta)$ ,  $\beta = B(\xi, \eta)$ , при этом текущие декартовы координаты данного луча определяются выражениями  $x = \xi + zA(\xi, \eta)$ ,  $y = \eta + zB(\xi, \eta)$ .

Перейдем к исследованию нелинейных взаимодействий в кубично-нелинейных средах на основе уравнения (7). Для удобства введем безразмерные переменные  $V = U/u_0$ ,  $\theta = \tau/\tau_0$  и  $s = l/z_{nl}$ , где введены характерные амплитуда  $u_0$  и длительность  $\tau_0$ , а также нелинейная длина  $z_{nl} = \frac{\tau_0 c_0^3}{\beta u_0^2}$ . В этих переменных уравнение (7) и его решение принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial s} - V^2 \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad (15)$$

$$V = \Phi(\theta + V^2 s), \quad (16)$$

Одной из важных характеристик нелинейных взаимодействий является трансформация исходного спектра волны, связанная с искажениями ее профиля. В случае квадратично-нелинейной среды была предложена процедура [7], позволяющая найти спектр

неявной функции. В результате были получены разложение Бесселя-Фубини для спектра искаженного исходно синусоидального сигнала и выражения для спектра волны с произвольным начальным профилем. Эта процедура может быть развита для нахождения спектра волн в кубично-нелинейной среде.

**Спектр исходно синусоидального сигнала.** Вначале рассмотрим классический пример эволюции исходного синусоидального сигнала в кубично-нелинейной среде. В этом случае можно наиболее наглядно исследовать законы нелинейных взаимодействий, генерации и преобразования гармоник исходного сигнала и перекачку энергии между возникающими частотами, поскольку в исходном спектре присутствует всего одна частота и, следовательно, все другие возникающие частоты связаны с нелинейными эффектами.

Итак, выберем в качестве  $\Phi$  в (16) гармоническую волну  $\Phi = \sin \theta$ . Поскольку функция (16) в этом случае будет периодической, ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta.$$

Коэффициенты разложения по синусам и косинусам равны соответственно:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_T \sin(\theta + zV^2) \sin(n\theta) d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_T \sin(\theta + zV^2) \cos(n\theta) d\theta.$$

Здесь интегралы берутся по периоду волны  $T$ .

В среде с квадратичной нелинейностью решение  $V_q = \sin(\theta + zV_q)$  уравнения простых волн было нечетным:  $V_q(-\theta) = \sin(-\theta - zV_q) = -\sin(\theta + zV_q) = -V_q(\theta)$ , и в спектре присутствовали только синус-компоненты, а все коэффициенты разложения по косинусам были равны нулю. В кубично-нелинейной среде это не так.

Вычислим последовательно коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ .

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_T \sin(\theta + zV^2) \sin(n\theta) d\theta = -\frac{1}{\pi n} \sin(\theta + zV^2) \cos(n\theta) \Big|_T + \frac{1}{\pi n} \int_T \cos(n\theta) d \sin \xi.$$

Здесь выполнено интегрирование по частям и введена новая переменная  $\xi = \theta + zV^2$ , так что  $\theta = \xi - zV^2$ . Подстановка по периоду волны, очевидно, равна нулю. Поскольку рассматривается гармоническая волна  $V = \sin \xi$ , то  $\theta = \xi - z \sin^2 \xi$ . Представляя произведение косинусов в виде суммы, получаем:

$$A_n = \frac{1}{\pi n} \int_T \cos(n\xi - nz \sin^2 \xi) \cos \xi d\xi = \frac{1}{2\pi n} \int_T [\cos((n+1)\xi - nz \sin^2 \xi) + \cos((n-1)\xi - nz \sin^2 \xi)] d\xi.$$

Теперь используем формулу  $\sin^2 \xi = (1 - \cos 2\xi)/2$  и введем переменные  $2\xi = y$ ,  $d\xi = dy/2$ .

Поскольку  $0 < \xi < 2\pi$ , то  $0 < y < 4\pi$ . Учтем, что в силу периодичности  $\int_0^{4\pi} = 2 \int_0^{2\pi}$ , а также

сделаем еще одно преобразование  $y = t + \frac{\pi}{2}$ , так что  $\cos y = -\sin t$ . В результате получим:

$$A_n = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \left[ \cos\left( (n+1)\frac{t}{2} + (n+1)\frac{\pi}{4} - \frac{nz}{2} - \frac{nz}{2} \sin t \right) + \cos\left( (n-1)\frac{t}{2} + (n-1)\frac{\pi}{4} - \frac{nz}{2} + \frac{nz}{2} \sin t \right) \right] dt.$$

Используя формулы для косинусов суммы и значения стандартных интегралов  $\int_0^{2\pi} \cos(mt - x \sin t) dt = 2\pi J_m(x)$ , где  $J_m(x)$  - функция Бесселя, и  $\int_0^{2\pi} \sin(mt - x \sin t) dt = 0$ ,

получаем окончательное явное выражение для синус-компонент спектра:

$$A_n(z) = \frac{1}{n} \left( J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{nz}{2}\right) \cos\left(\frac{nz}{2} - \frac{n+1}{4}\pi\right) + J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{nz}{2}\right) \cos\left(\frac{nz}{2} - \frac{n-1}{4}\pi\right) \right). \quad (17)$$

Важно подчеркнуть, помнить, что формула (17) справедлива только при целых  $m$ , то есть только при таких  $n$ , когда выражение  $(n \pm 1)/2$  является целым числом. В случае, когда  $(n \pm 1)/2$  является полуцелым числом, соответствующие интегралы равны нулю. Отсюда следует, что отличны от нуля амплитуды только нечетных гармоник. Необходимо иметь в виду, что полученные выражения для спектральных компонент справедливы только до появления неоднозначности в профиле волны, т.е. до расстояния образования разрыва.

Вычисления коэффициентов разложения по косинусам проводятся аналогично:

$$B_n(z) = \frac{1}{n} \left( J_{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{nz}{2} \right) \sin \left( \frac{nz}{2} - \frac{n+1}{4} \pi \right) + J_{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{nz}{2} \right) \sin \left( \frac{nz}{2} - \frac{n-1}{4} \pi \right) \right). \quad (18)$$

В выражениях (17) и (18) удобно ввести величину  $\varphi_0 = nz/2 - n\pi/4 + \pi/4$ , тогда квадратурные амплитуды можно записать в компактном виде:

$$A_n(z) = C_n \cos(\varphi_0 - \delta), \quad B_n(z) = C_n \sin(\varphi_0 - \delta),$$

$$C_n(z) = \frac{1}{n} \sqrt{J_{\frac{n-1}{2}}^2 \left( \frac{nz}{2} \right) + J_{\frac{n+1}{2}}^2 \left( \frac{nz}{2} \right)}, \quad \delta(z) = \arctg \frac{J_{(n+1)/2} \left( \frac{nz}{2} \right)}{J_{(n-1)/2} \left( \frac{nz}{2} \right)}. \quad (19)$$

Выше мы нашли коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  разложения по соответствующим синусам и косинусам. Известно, что любое колебание вида  $A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta$  можно представить в виде колебания  $C_n \sin(n\theta + \varphi_n)$ , где  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  – амплитуда соответствующей частотной компоненты (в данном случае гармоники), а  $\varphi_n = \arctg(B_n/A_n)$  – фаза волны. Из выражений (19) следует, что величина  $C_n$  и является амплитудой гармоники, а фаза определяется из соотношения  $\varphi_n = \arctg(\tg(\varphi_0 - \delta))$ , т.е.  $\varphi_n = \varphi_0 - \delta$  с приведением к интервалу периодичности  $\pi$ .

При малых  $z$  можно записать выражения для амплитуд гармоник:

$$A_1(z) \approx 1 - \frac{z^2}{16}, \quad B_1(z) \approx \frac{z}{4}, \quad C_1(z) \approx 1 - \frac{z^2}{32}; \quad A_3(z) \approx \frac{9z^2}{32}, \quad B_3(z) \approx -\frac{z}{4}, \quad C_3(z) \approx \frac{z}{4} \left( 1 + \frac{81z^2}{128} \right).$$

Ниже на графиках рис. 1 приведены зависимости амплитуд гармоник от расстояния. Номерам гармоник соответствуют цифры около кривых. По оси абсцисс отложено расстояние, нормированное на длину образования разрыва в синусоидальной волне, поэтому графики приведены только до единицы. По оси ординат отложена амплитуда гармоник, нормированная на начальную амплитуду сигнала (начальную амплитуду первой гармоники). Из рисунков видно, что амплитуда волны основной частоты, распространяясь в среде, уменьшается. Зато амплитуды высших гармоник растут по мере распространения волны. Это

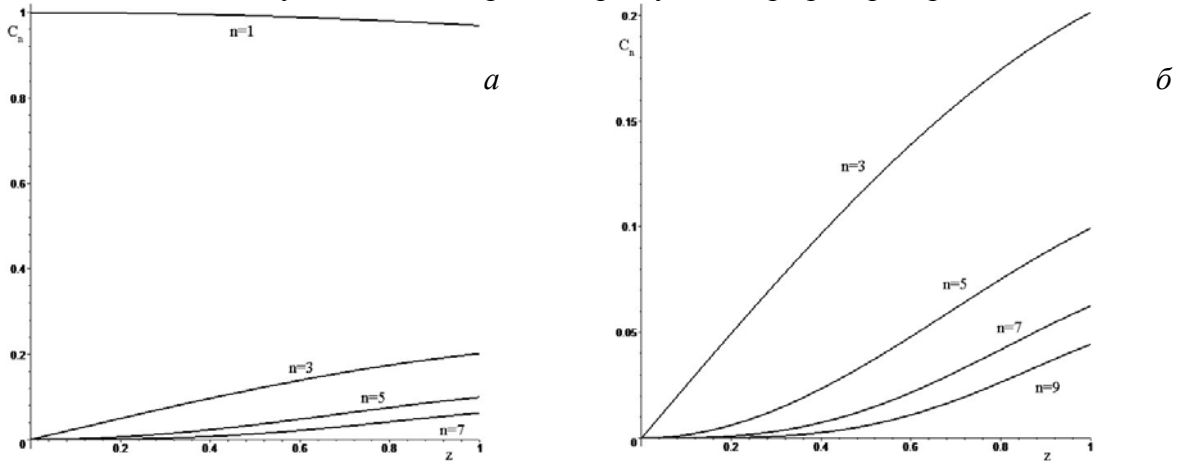


Рис. 1. Зависимость амплитуд гармоник (цифры у кривых – номера соответствующих гармоник) исходно синусоидальной волны в кубично нелинейной среде. а – амплитуды 1, 3, 5 и 7 гармоник, б – 3, 5, 7 и 9 гармоник

означает, что происходит перераспределение энергии между гармониками и ее перекачка из волны основной частоты в высшие гармоники.

Для оценки поведения фазы учтем, что эффективное расстояние  $z$  меняется в относительно малом интервале и хорошее приближение даст первый член ряда функций Бесселя  $J_n(x) \approx (x/2)^n / n!$ . Тогда

$$\delta \approx \arctg \frac{nz/2}{n+1} \approx \frac{nz/2}{n+1} \sim \frac{z}{2}, \text{ т.е. с достаточной}$$

точностью является линейной функцией расстояния. Переход от арктангенса к аргументу возможен, поскольку для высоких гармоник пропадает зависимость от номера гармоники. При этом фаза  $\varphi_0$  по определению является линейной функцией расстояния, так что полная фаза  $\varphi_n$  каждой из гармоник является практически линейной функцией, что и демонстрирует рис. 2.

**Спектр произвольного периодического сигнала.** Пусть  $\Phi$  - произвольная периодическая функция, которая может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье:

$$V = \Phi(\theta + zV^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z) \exp(in\theta),$$

где коэффициенты определяются выражением

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \Phi(\theta + zV^2) \exp(-in\theta) d\theta.$$

По аналогии с предыдущим случаем введем новую переменную  $\theta + zV^2 = \xi$ , а затем проинтегрируем по частям:

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi in} \int \exp(-in\theta) d\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi in} \int \exp(-in\xi + inz\Phi^2(\xi)) d\Phi(\xi).$$

Это выражение можно записать так:

$$C_n(z) = \frac{1}{2\pi in} \int \exp(-in\xi + inz\Phi^2) \Phi' d\xi. \quad (20)$$

Выражение (20) позволяет вычислить спектр волны с произвольным исходным профилем в кубично-нелинейной среде. Однако эта формула обладает определенным недостатком – для вычисления спектра необходимо помимо исходного профиля задать и его производную. Усовершенствуем формулу (20) так, чтобы в выражение для спектра входил только исходный профиль. Для этого вычислим производную (20) по  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_n}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi in} \int in\Phi^2 \exp(-in\xi) \exp(inz\Phi^2) d\Phi = \frac{1}{2\pi} \int \Phi^2 \exp(-in\xi) \frac{d(\exp(inz\Phi^2) - 1)}{2inz\Phi} = \\ &= \frac{1}{4\pi inz} \int \Phi \exp(-in\xi) d(\exp(inz\Phi^2) - 1) = \frac{1}{4\pi inz} (-1) \int (\exp(inz\Phi^2) - 1) \exp(-in\xi) (-in\Phi + \Phi') d\xi. \end{aligned}$$

Здесь мы еще раз проинтегрировали по частям. В итоге получаем:

$$\frac{\partial C_n}{\partial z} = \frac{1}{4\pi inz} \int (e^{inz\Phi^2} - 1) e^{-in\xi} (in\Phi - \Phi') d\xi. \quad (21)$$

Проследим за искажением спектра (21) при малых  $z$ :

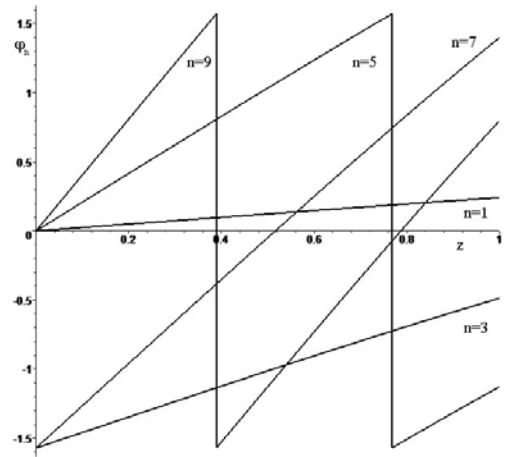


Рис. 2. Изменение фазы гармоник с расстоянием (цифры у кривых – номера соответствующих гармоник)

$$\frac{\partial C_n}{\partial z} = \int \frac{\Phi^2}{4\pi} \exp(-in\xi)(in\Phi - \Phi')d\xi, \quad C_n = C_n^{(0)} + \frac{z}{4\pi} \int \Phi^2(in\Phi - \Phi')e^{-in\xi}d\xi.$$

Последний из интегралов можно вычислить по частям:  $\int_T \Phi^2 \Phi' e^{-in\xi} d\xi = \frac{in}{3} \int_T \Phi^3 e^{-in\xi} d\xi$ , так что

$$C_n = C_n^{(0)} + \frac{inz}{6\pi} \int_T \Phi^3 e^{-in\xi} d\xi.$$

Таким образом, искажение спектра на малых расстояниях определяется спектром куба исходного спектра.

Для дальнейшего преобразования выражения (21) заметим, что согласно (20) один из интегралов можно записать в виде:  $(4\pi inz)^{-1} \int e^{inz\Phi^2 - in\xi} \Phi' d\xi = C_n/2z$ . Кроме того, интегрируя по частям, можно показать, что  $\int e^{-in\xi} \Phi' d\xi = \int e^{-in\xi} d\Phi = in \int \Phi e^{-in\xi} d\xi$ . В результате для амплитуды гармоники получаем линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial C_n}{\partial z} = -\frac{C_n}{2z} + \frac{1}{4\pi inz} \int in\Phi e^{inz\Phi^2 - in\xi} d\xi = \frac{1}{4\pi z} \int \Phi e^{inz\Phi^2 - in\xi} d\xi - \frac{C_n}{2z},$$

которое удобно записать в виде:

$$\frac{\partial C_n}{\partial z} + \frac{C_n}{2z} = \frac{Q}{2z}, \quad Q = \frac{1}{2\pi} \int \Phi e^{inz\Phi^2 - in\xi} d\xi. \quad (22)$$

Уравнение (21) не содержит производной начального профиля. Это уравнение можно решить методом вариации постоянной:

$$C_n = \frac{C_0(z)}{\sqrt{z}}, \quad C_0 = C_{00} + \frac{1}{4\pi} \int_T \Phi e^{-in\xi} d\xi \int_0^z \frac{e^{inz\Phi^2}}{\sqrt{z}} dz = C_{00} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_T \Phi e^{-in\xi} \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{-in\Phi^2 z})}{\sqrt{-in\Phi^2}} d\xi.$$

Окончательно можно записать выражение для спектральных амплитуд

$$C_n = \frac{1}{4\sqrt{-in\pi z}} \int_T e^{-in\xi} \operatorname{sign}(\Phi(\xi)) \operatorname{erf} \sqrt{-inz\Phi^2} d\xi.$$

Константа  $C_{00}$  положена равной нулю в соответствии с граничными условиями. Это решение можно записать в другой форме, используя связь интеграла вероятности от комплексного аргумента и интегралов Френеля:  $\operatorname{erf}(x\sqrt{-i}) = \sqrt{-2i}(C(x) + iS(x))$ :

$$C_n = \frac{1}{2\sqrt{2n\pi z}} \int_T e^{-in\xi} \operatorname{sign}(\Phi(\xi)) \left[ C(\sqrt{nz\Phi^2}) + iS(\sqrt{nz\Phi^2}) \right] d\xi.$$

По найденным комплексным спектральным амплитудам можно найти действительные коэффициенты разложения по синусу и косинусу по формулам:

$$A_n = i(C_n - C_n^*), \quad B_n = C_n + C_n^*,$$

где  $C_n^*$  - комплексно сопряженная величина от  $C_n$ .

Перейдем к исследованию интенсивных волн в неоднородной среде. Возвращаясь к исходным переменным и используя решение (16), можно записать:

$$u = S^{-1/2} \Phi \left( \theta + u^2 S \int_0^z dz/S \right). \quad (23)$$

Рассмотрим прохождение волны через одномерный экран с периодической функцией наклона луча  $B(\eta) = \sin \eta$ . В этом случае получаем, что площадь поперечного сечения лучевой трубки  $S = 1 + z \cos \eta$ , эффективное пройденное расстояние в нелинейной среде  $s = \ln(1 + z \cos \eta) / \cos \eta$  (в частности, при  $\eta = \pi/2$   $s = z$ ). Поперечная координата луча определяется в этом случае из соотношения  $y = \eta + z \sin \eta$ . Траектории лучей после прохождения такого экрана изображены на рис. 3. Видно, что лучи представляют собой прямые линии, идущие под различными углами, что приводит к образованию областей



сгущения и разрежения лучей, а также пересечению лучей. Можно ожидать, что это приведет к изменению пространственной структуры волны и ее амплитуды.

Используя формулы (19) и (23), найдем амплитуды гармоник интенсивного исходно синусоидального сигнала в неоднородной среде:

$$D_n(z) = \frac{1}{n\sqrt{S(z)}} \sqrt{J_{\frac{n-1}{2}}^2\left(\frac{ns(z)}{2}\right) + J_{\frac{n+1}{2}}^2\left(\frac{ns(z)}{2}\right)}. \quad (23)$$

Фаза гармоник равна  $\varphi_n^{inh} = ns/2 - n\pi/4 + \pi/4 - \arctg[J_{(n+1)/2}(ns(z)/2)/J_{(n-1)/2}(ns(z)/2)]$ .

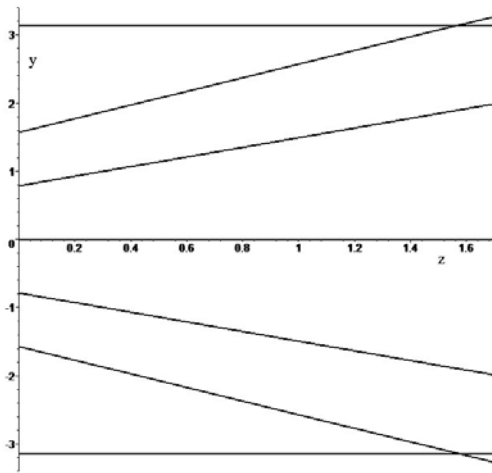


Рис. 3. Траектории лучей для одномерного фазового экрана с функцией наклона лучей  $B = \sin \eta$

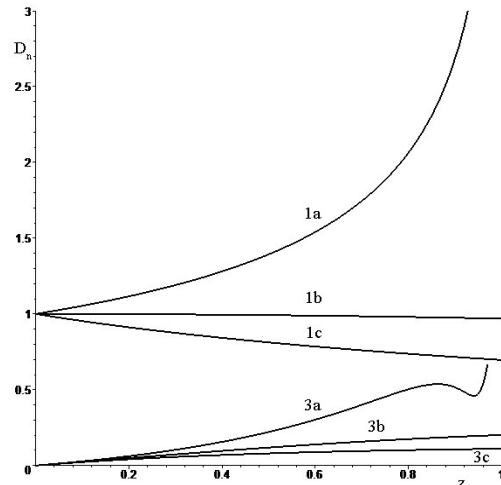


Рис. 4. Зависимость амплитуды гармоник от расстояния вдоль различных лучей. Цифры обозначают номер гармоники, буквы a,b,c соответствуют лучам  $\eta = \pi, \pi/2, 0$

Н рис. 4 представлена зависимость амплитуды 1 и 3 гармоник от расстояния для различных лучей. Кривые 1a и 3a соответствуют лучу  $\eta = \pi$  - оси фокусировки лучей в данной модели, кривые 1c и 3c соответствуют лучу  $\eta = 0$  - оси дефокусировки, кривые 1b и 3b – промежуточному лучу  $\eta = \pi/2$ . В области сгущения лучей происходит рост амплитуды гармоник за счет перекачки энергии из соседних областей, где амплитуда уменьшается. При наличии областей фокусировки происходит значительный рост высших гармоник, что предоставляет возможности для нелинейной диагностики твердых тел.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-02-00925-а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О.В. Мощный фокусированный ультразвук: нелинейные эффекты, возбуждение сдвиговых волн и медицинская диагностика // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 1996. №6. С. 18-32.
2. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D., Fowlkes J.B., Emelianov S.Y. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics // Ultrasound in Medicine and Biology. 1998. V.24. №9. P.1419-1435.
3. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т. 102. №4. С. 549-586.
4. Wochner M.S., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A. Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations // JASA. 2008. V. 123. No.5. P.2488-2495.
5. Бреховских Л.М., Гордин О.А. Акустика неоднородных сред. Т.1. М.: Наука, 2007.
6. Гусев В.А., Руденко О.В. Статистические характеристики интенсивной волны за двумерным фазовым экраном // Акуст. Журн. 2006. Т.52. №1. С. 30-42.
7. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007.