

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи

Хохлова Вера Александровна

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН
В ДИССИПАТИВНЫХ И СЛУЧАЙНО-
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ
МЕДИЦИНСКОЙ И АТМОСФЕРНОЙ АКУСТИКИ**

01.04.06 – акустика

Диссертация на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук

Москва, 2012 год

Оглавление

Предисловие	5
Введение	8
Глава 1 Нелинейные взаимодействия пилообразных волн и ударных импульсов за случайным фазовым экраном ..	
1.1 Вводные замечания	26
1.2 Статистические характеристики нелинейной пилообразной волны за фазовым экраном в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА)	28
1.3 Статистика нелинейного поля одиночного N -импульса за фазовым экраном. Приближение НГА	34
1.4 Статистика нелинейной N -волны за экраном при учете дифракции	39
1.5 Искажение поля сфокусированного ультразвукового пучка конечной амплитуды за случайным фазовым слоем	51
1.6 Заключительные замечания	56
Глава 2 Распространение нелинейных акустических сигналов в случайно-неоднородной движущейся среде: численный и физический эксперименты	
2.1 Вводные замечания	59
2.2 Моделирование распространения сферически расходящихся N -импульсов в однородной нелинейной среде с релаксацией	61
2.3 Сравнение результатов численного и физического экспериментов по распространению мощных N -импульсов в однородном воздухе	65
2.4 Метод калибровки широкополосных микрофонов с использованием нелинейных эффектов	68
2.5 Эволюционное уравнение для нелинейных волн в неоднородных движущихся средах. Теоретическая модель	71
2.6 Нелинейные и дифракционные эффекты при распространении N -волн в случайно-неоднородной движущейся среде. Численный эксперимент	76
2.7 Сравнение результатов моделирования и эксперимента	83
2.8 Заключительные замечания	89

Глава 3	Асимптотический спектральный метод. Разрывные волны в средах с различным частотно-зависимым поглощением	
3.1	Вводные замечания	91
3.2	Асимптотический спектральный метод восстановления разрывных функций по конечному спектру.....	93
3.3	Асимптотический метод решения уравнения простых волн	94
3.4	Учет разрыва производной в профиле волны	99
3.5	Формирование двух разрывов на периоде волны	108
3.6	Использование асимптотики в виде решения Фейя для описания ударных фронтов конечной ширины	111
3.7	Разрывные волны в средах со степенным частотным законом поглощения, близким к линейному	112
3.8	Разрывные волны в средах с селективным поглощением второй гармоники	121
3.9	Нелинейное насыщение в среде с частотно - зависимым усилением	126
3.10	Асимптотический подход для моделирования ограниченных пучков разрывных волн с использованием неоднородной пространственной сетки	129
3.11	Заключительные замечания	134
Глава 4	Нелинейные взаимодействия разрывных волн в ближнем поле ультразвукового излучателя	
4.1	Вводные замечания	136
4.2	Спектральный алгоритм расчета ближнего поля мощного поршневого излучателя	138
4.3	Сравнение численного решения с известными данными измерений и моделирования.....	142
4.4	Основные характеристики нелинейного поля. Эффект формирования двух разрывов на периоде волны.....	145
4.5	Сравнение результатов моделирования и данных эксперимента для разрывного профиля волны.....	155
4.6	Заключительные замечания	162
Глава 5	Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусирующих излучателей диагностического ультразвука	
5.1	Вводные замечания. Нелинейные методы современной ультразвуковой медицинской диагностики и проблема калибровки высокоамплитудных полей диагностических датчиков	164
5.2	Постановка задачи для численного моделирования.....	166
5.3	Результаты моделирования, сравнение с экспериментом	169
5.4	Заключительные замечания	178

Глава 6	Численный и физический эксперименты в задачах характеризации нелинейных полей источников ультразвуковой хирургии	
6.1	Вводные замечания	179
6.2	Основные уравнения для моделирования полей HIFU-излучателей в воде	182
6.3	Метод определения параметров нелинейных фокусированных полей HIFU-излучателей в воде	184
6.4	Фокусировка мощных ультразвуковых пучков в воде и предельные значения параметров разрывных волн	197
6.5	Пространственное распределение параметров акустического поля в нелинейных фокусированных пучках	208
6.6	Влияние аподизации поля на излучателе на проявление нелинейных эффектов при фокусировке	215
6.7	Трехмерные нелинейные поля ультразвуковых терапевтических решеток	219
6.8	Метод эквивалентного излучателя для описания HIFU-полей	224
6.9	Заключительные замечания	231
Глава 7	Ультразвуковая хирургия с использованием высокоамплитудных разрывных волн	
7.1	Вводные замечания	234
7.2	Основные уравнения для моделирования полей HIFU-излучателей в ткани и соответствующего теплового воздействия на ткань	237
7.3	Метод определения параметров нелинейного акустического поля в фокусе при распространении в биологической ткани	239
7.4	Нелинейные эффекты при использовании сканирующего режима облучения ткани	248
7.5	Нелинейные эффекты при использовании сканирующего режима облучения гелевого фантома	254
7.6	Эффект локального сверхбыстрого кипения в ткани при воздействии фокусированным пучком разрывных волн	262
7.7	Нелинейные эффекты при облучении ткани через грудную клетку	272
7.8	Заключительные замечания	278
Заключение	281
Приложения	287
Литература	305

Предисловие

Результаты исследований, представляемые в данной диссертации, были получены в течение около 20-ти лет моей работы на кафедре акустики физического факультета МГУ. В предисловии мне хотелось бы вспомнить и поблагодарить моих родных, коллег и друзей, с которыми прошли эти и более ранние годы.

С детских лет мне посчастливилось расти в окружении физиков. Мой папа, А.И. Ковригин, организовывал летом поездки с палатками, водными лыжами и виндсерфингом, зимой – катание на горных лыжах в Подмоскowie и на Кавказе. В этом участвовали многие сотрудники, аспиранты и студенты Корпуса нелинейной оптики. Хочется сказать слова благодарности папиным коллегам и друзьям, которые многому меня научили и во многом служили и служат для меня примером. Я также с благодарностью вспоминаю спортивную школу на Ленинских горах и насыщенные пять лет учебы во 2-й физико-математической школе, своих одноклассников и учителей, каждый из которых был яркой личностью.

Конечно, был неувидителен выбор физического факультета МГУ и потом кафедры общей физики и волновых процессов. Я искренне признательна лекторам и преподавателям физфака, таким разным, неформальным и увлеченным своим делом, как были наши преподаватели математики С.А. Габов и Б.Н. Химченко. Моим научным руководителем и учителем в студенчестве и аспирантуре был О.В. Руденко, благодаря которому я начала заниматься задачами нелинейной акустики и который всегда с большим вниманием относился к моей деятельности, в то же время не ограничивая самостоятельность. Вместе с ним я перешла на кафедру акустики, на которой в 1990 году закончила аспирантуру и была оставлена на работу. Я признательна сотрудникам кафедры В.А. Красильникову, Л.К. Зарембо, В.А. Бурову, Ю.Н. Макову, П.Н. Кравчуну, В.Г. Можяеву, А.И. Коробову, П.С. Ланде, В.А. Гордиенко и Б.И. Гончаренко, интерес, профессионализм и поддержка которых всегда ощущалась в научной и учебной работе.

Много связано и с сотрудниками других институтов. Так, исследования по терапевтическим решеткам были выполнены с Л.Р. Гавриловым из Акустического института им. Н.Н. Андреева, одним из мэтров медицинского терапевтического ультразвука у нас в стране. Общение с ним всегда было очень живо, приятно, очень помогало и поддерживало. Всегда ощущалась дружеское отношение наших коллег из Института общей физики РАН Л.М. Крутянского и А.П. Брысева, с которыми были выполнены эксперименты с селективным фазовым слоем.

Остальные экспериментальные исследования и ряд теоретических работ выполнялись при сотрудничестве с зарубежными научными центрами США, Франции и Англии. Я благодарна М. Гамильтону из университета шт. Техас в Остине, с которым в 1993 году были выполнены совместные работы по развитию параксиального подхода к описанию нелинейных звуковых пучков. Уже более 15 лет моя научная работа тесно связана с исследованиями, проводимыми в Центре промышленного и медицинского ультразвука университета шт. Вашингтон в Сиэтле. Взаимодействие с директором Центра Л. Крамом, а также с М. Аверкью, благодаря которому началось это сотрудничество, Р. Кливлендом и многими другими сотрудниками Центра было для меня неотъемлемой частью исследований и большим положительным жизненным опытом, дружбой с интересными, увлеченными людьми научного сообщества медицинского ультразвука. Совместная работа в лаборатории с сильными экспериментаторами М. Бэйли, П. Качковским, Дж. Хванг, М. Кейни и другими многому меня научила и позволила почувствовать круг задач, для которых комбинация физического и численного эксперимента могла бы поднять на новый уровень качество их решения. Особенности распространения мощного ультразвука в биологических тканях с использованием асимптотического спектрального подхода исследовались совместно с моей аспиранткой С.С. Кащеевой. Идеи экспериментов по характеристике ударно-волновых полей источников ультразвуковой хирургии и исследованию новых механизмов воздействия ультразвука на ткани явились продолжением численных исследований, проведенных совместно с аспиранткой О.В. Бессоновой.

Ценным опытом было экспериментальное исследование новых нелинейно-дифракционных эффектов в ближнем поле поршневых излучателей, которое было инициировано результатами численного эксперимента и проводилось в сотрудничестве с Д. Катиньодем, директором лаборатории Ультразвука Института здоровья и медицинских исследований Франции г. Лиона. Многолетнее взаимодействие с Д. Катиньодем и сотрудниками этого института Ж.И. Шапломом и С. Лафоном оказало большое влияние на выбор направлений исследований в области медицинского ультразвука.

Эксперименты в области аэроакустики были выполнены в лаборатории механики жидкостей и акустики Высшей инженерной школы г. Лиона, Франция. Вместе с Ф. Блан-Беноном мы являлись со-руководителями недавно защитивших кандидатские диссертации аспирантов М.В. Аверьянова и П.В. Юлдашева, которые непосредственно проводили измерения. Большую помощь оказал С. Оливьер и другие сотрудники лаборатории. Совместное руководство аспирантами, постановка задач, выполнение совместных

проектов позволило приобрести опыт в решении практических задач нелинейной аэроакустики и физики нелинейных волн в случайно-неоднородных средах.

Возможность проведения экспериментов, связанных с разработкой современных многоэлементных излучателей ультразвуковой хирургии и исследованием нелинейных эффектов в полях таких решеток, была предоставлена нам Дж. Хэндом, коллегой Л.Р. Гаврилова из Имперского колледжа в Лондоне. Цикл экспериментальных работ, связанный с ультразвуковым облучением тканей через ребра, был проведен в Национальной физической лаборатории в Теддингтоне моей аспиранткой С.М. Шмелевой (Бобковой) и А. Шоу, специалистом по задачам метрологии медицинского ультразвука. Многолетняя дружба связывает меня с Г. тер Хаар из Института онкологических исследований в г. Саттоне в Великобритании, где моей аспирантке Е.А. Филоненко была предоставлена возможность реализовать в эксперименте для клинической системы ультразвуковой хирургии предсказанные численно ударноволновые режимы облучения ткани.

Лаборатория 3-66 на физфаке это второй дом, куда всегда хочется приходить. Атмосфера понимания, юмора, энтузиазма, дружелюбия и высокой требовательности к себе была создана и сохраняется ее сотрудниками, аспирантами и студентами. О.А. Сапожников и В.Г. Андреев всегда были надежной опорой в научной и преподавательской работе. Я особенно благодарна Олегу Сапожникову, с которым мы вместе учились, начиная с 1-го курса, а потом работали на протяжении уже более 30 лет. У него всегда можно было получить ценный профессиональный совет и дружескую поддержку при решении не только научных, но и обычных жизненных проблем. Спасибо А.В. Шанину, который часто подстраховывал меня в учебной работе. Выполнение представляемой работы было бы невозможно без аспирантов и студентов, которыми мне посчастливилось руководить и при этом многому научиться. Шестеро из них уже стали кандидатами наук, многие успешно работают в области акустики и смежных дисциплин в нашей стране и за рубежом.

Выполнение и написание настоящей работы было бы невозможным без поддержки моей мамы и папы, моего мужа Мити, его мамы Елены Михайловны, дочек Тани и Маши. Их помощь дома, участие и искренний интерес к моей работе, уважительное и дружеское отношение к моим коллегам и ученикам всегда ощущались и были очень важными для меня. Я уверена, что завершение данной диссертации очень порадовало бы моего папу, памяти которого я бы хотела посвятить эту работу.

Введение

В настоящей диссертационной работе представлены результаты исследований, выполненных автором на кафедре акустики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в период 1991 – 2011 г.г. Диссертация посвящена комплексному теоретическому и экспериментальному исследованию нелинейно-дифракционных явлений, сопровождающих распространение интенсивных акустических волн с ударными фронтами в средах со сложным частотным законом поглощения и случайно-неоднородных средах [1-5]. Проведенные исследования в основном, связаны с современными проблемами аэроакустики и медицинской акустики, которые являются яркими примерами областей физики нелинейных волн в слабодиспергирующих средах, где результаты фундаментальных исследований находят успешное практическое применение [6, 7]. До недавнего времени наиболее известным практическим применением нелинейных эффектов в акустике являлась разработка параметрических антенн в гидроакустике [8]. В последние годы интенсивно развивается направление неинвазивной ультразвуковой хирургии (или HIFU - общепринятое сокращение от словосочетания High Intensity Focused Ultrasound) с использованием фокусированного ультразвука большой интенсивности [9]. Широко используются новые нелинейные методы ультразвуковой медицинской визуализации и неразрушающего контроля, основанные на генерации в среде высших гармоник диагностических импульсов [10-14]. Поглощение в биологических тканях отличается от квадратичного по частоте закона классических жидкостей [15], что приводит к новым особенностям в распространении разрывных акустических волн. Задачи, связанные с распространением волн в турбулентной атмосфере и развитие различных моделей случайно-неоднородных сред [16, 17], привлекают к себе повышенное внимание исследователей в связи с развитием сверхзвуковой гражданской авиации и проблемой звукового удара [18 - 20]. Несмотря на различия в плане практического применения, перечисленные выше задачи могут быть описаны в рамках единого математического аппарата нелинейных эволюционных уравнений физики нелинейных волн в средах со слабой дисперсией [21, 22].

Следует выделить две важные особенности, отличающие научное направление, развиваемое в данной работе. Во-первых, в ней рассматриваются взаимодействия сильно искаженных акустических сигналов, которые принципиальным образом отличаются от взаимодействий квазигармонических нелинейных волн [23]. Описание акустических полей с разрывами является гораздо более сложной задачей как в плане построения

теоретических моделей, так и в численном моделировании. Хотя первые алгоритмы моделирования нелинейных дифрагирующих пучков с использованием ударо-улавливающих схем Годунова были созданы в 1970-х годах [24], для моделирования условий эксперимента численные расчеты стали использоваться лишь в последние годы. Это является второй особенностью данной работы: использование численного эксперимента как инструмента в решении рассматриваемых задач в комплексе с проводимыми физическими экспериментами. Такой подход и разработанные численные алгоритмы под конкретные экспериментальные установки позволили не только существенно расширить круг поддающихся решению задач, но и обеспечить новый, более высокий уровень их исследования.

Таким образом, АКТУАЛЬНОСТЬ ДАННОЙ РАБОТЫ связана с быстрым развитием новых практических приложений мощного ультразвука. Наиболее важным примером являются современные медицинские приложения, как, например, неинвазивная ультразвуковая хирургия с использованием высокоинтенсивных фокусированных пучков и нелинейная диагностика. При воздействии ультразвука на биологическую ткань образующиеся в профиле нелинейной волны ударные фронты играют важную, а иногда и определяющую роль. Однако по-прежнему не существует общепринятых методов характеристики ультразвуковых ударноволновых полей, создаваемых устройствами ультразвуковой хирургии, а также полного понимания физических механизмов вызываемых разрывными ультразвуковыми волнами биологических эффектов. Развитие нелинейных методов является перспективным для медицинской ультразвуковой диагностики. Исследование нелинейно-дифракционных эффектов в импульсных полях, создаваемых медицинскими датчиками, необходимо для эффективного использования их преимуществ. В области аэроакустики актуальной является проблема оценки шумовой безопасности в связи с развитием сверхзвуковой гражданской авиации. Здесь необходимо развитие различных моделей сред со случайными неоднородностями как распределенными в пространстве, так и в сосредоточенными в слое. Для понимания физических явлений, связанных с распространением мощного ультразвука и его воздействия на среды распространения также необходимо развитие адекватных моделей, подтвержденных в экспериментах. С теоретической точки зрения, эти задачи могут быть описаны в рамках моделей распространения нелинейных дифрагирующих волн в средах в различными типами диссипации и в присутствии неоднородностей. Создание таких комплексных теоретических и экспериментальных моделей и разработка методов решения соответствующих нелинейных волновых уравнений является важной частью данной работы.

Основные ЦЕЛИ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ состоят в следующем:

1. Развитие теоретических моделей и исследование на их основе распространения нелинейных акустических волн за случайным фазовым экраном. Исследование возможности селективного разрушения поля гармоник в фокусированном пучке конечной амплитуды после прохождения случайного фазового слоя специальной конфигурации.
2. Теоретическое и экспериментальное исследование статистических распределений и средних характеристик нелинейных акустических волн с ударными фронтами в случайно-неоднородных средах с учетом дифракционных эффектов, диссипативных и релаксационных процессов, а также многократного образования случайных каустик.
3. Разработка асимптотического метода описания разрывных решений эволюционных уравнений нелинейной акустики с использованием ограниченного спектра. Исследование особенностей распространения разрывных акустических волн в средах с различным частотно-зависимым поглощением.
4. Исследование нелинейно-дифракционных эффектов в ограниченных звуковых пучках со сложной пространственной структурой ближнего поля.
5. Создание численной модели для трехмерных импульсных фокусированных пучков, учитывающей нелинейные и дифракционные эффекты, а также частотно-зависимое поглощение в биологических тканях. Исследование пространственной структуры поля высших гармоник для улучшения качества диагностических изображений.
6. Развитие комбинированного экспериментального и численного метода количественной характеристики параметров ударно-волновых полей излучателей для ультразвуковой хирургии в воде и биологической ткани. Разработка метода определения параметров нелинейных фокусированных ультразвуковых пучков в биологической ткани по данным измерений либо моделирования в воде (нелинейный дирейтинг).
7. Развитие новых принципов неинвазивной ультразвуковой хирургии с использованием облучения в режиме высокоамплитудных разрывных волн. Создание численных моделей для расчета нелинейных полей современных излучателей, в том числе многоэлементных фазированных решеток в воде и в ткани в различных клинических условиях.
8. Количественное исследование явления усиления теплового воздействия ультразвука на ткань за счет нелинейных эффектов в режимах, характерных для приборов неинвазивной ультразвуковой хирургии. Исследование эффекта сверхбыстрого нагрева и возникновения локального кипения в биологической ткани в фокусе излучателя при облучении в режиме разрывных волн и физических механизмов вызываемых при этом биологических эффектов.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА представленной работы заключается в следующем:

1. Развита новая аналитическая и численная модели для описания статистических свойств параметров нелинейных волн за случайным фазовым экраном. Аналитическая модель построена на основе приближения нелинейной геометрической акустики. В численной модели учитывается влияние пространственных масштабов фазовых флуктуаций экрана, совместное влияние нелинейных, дифракционных и диссипативных эффектов, что существенно расширяет область ее применимости. Показано теоретически и подтверждено экспериментально, что при использовании физически реализуемого фазового слоя специальной конфигурации возможно селективное влияние на качество фокусировки различных гармоник слабо фокусированного пучка конечной амплитуды.
2. Получено модифицированное нелинейное уравнение эволюционного типа, описывающее распространение нелинейных акустических сигналов в неоднородной движущейся среде с учетом флуктуаций скорости среды, поперечных направлению распространения волны. Впервые построены решения для функций распределения и средних характеристик нелинейного акустического волн с разрывами в случайно неоднородной движущейся среде при учете дифракции, многократного образования каустик, вязкого поглощения и релаксации, а также эффектов, связанных с продольными и поперечными флуктуациями неоднородного поля скорости среды. Теоретические результаты подтверждены в модельных физических экспериментах.
3. Предложен, обоснован и реализован новый экспериментальный метод калибровки широкополосных микрофонов по нелинейному удлинению N -волны в среде с поглощением и релаксацией в воздухе с использованием определения длительности импульса по положениям нулей в его спектре.
4. Получена замкнутая система конечного числа связанных нелинейных уравнений, описывающая разрывные решения эволюционных уравнений нелинейной акустики, и разработана процедура восстановления разрывного профиля на основе получаемого решения. Построенная модель позволила выявить новые особенности взаимодействия разрывных волн в средах с различной зависимостью поглощения от частоты.
5. Показаны особенности изменения пространственной структуры различных параметров нелинейных дифрагирующих ультразвуковых полей, связанные с образованием разрывов. Обнаружен эффект формирования и взаимодействия двух разрывов на одном периоде волны в ближнем поле плоского поршневого излучателя и в фокальной области сходящегося пучка за счет интерференции прямой и краевой волн.

6. Развита новая численная модель, позволяющая рассчитывать импульсные поля ультразвуковых диагностических датчиков произвольной геометрии с учетом нелинейности, произвольного частотного закона поглощения среды и дисперсии скорости звука. На основе полученных численных решений продемонстрированы преимущества метода диагностики на второй гармонике и необходимость учета характерного для биологических тканей линейного по частоте закона поглощения.

7. Предложен, обоснован и подтвержден в численном и физическом экспериментах новый метод определения параметров нелинейного сильно фокусированного акустического пучка в биологической ткани на основе полученных в воде результатов моделирования или измерений.

8. Разработан новый численный алгоритм для моделирования трехмерных нелинейных ультразвуковых полей мощных многоэлементных терапевтических решеток в условиях образования ударных фронтов в области фокуса. Показано, что при уровнях интенсивности, допускаемых для современных решеток, в их фокусе образуется высокоамплитудный ударный фронт, даже при облучении через ребра. Показана применимость модели эквивалентного осесимметричного излучателя для упрощения расчета поля терапевтической решетки в области фокуса.

9. Показано, что в условиях, характерных для современной клинической практики, образование разрывов и поглощение энергии волны на ударных фронтах могут приводить к локальному нагреву биологической ткани до температур выше 100°C и возникновению кипения в течение нескольких миллисекунд, что позволяет реализовать ряд новых биоэффектов.

Совокупность научных результатов диссертации может рассматриваться как существенный вклад в актуальное научное направление «Мощные ультразвуковые поля в случайно-неоднородных и диссипативных средах», заключающееся в создании новых комплексных экспериментально-теоретических моделей описания разрывных волн, разработке методов их решения, выявлении новых нелинейно-дифракционных явлений, возникающих в турбулентной среде и при фокусировке ударно-волновых акустических пучков высокой интенсивности, исследовании новых механизмов ударноволнового воздействия на среды типа биологических тканей.

ДОСТОВЕРНОСТЬ представленных в диссертационной работе результатов подтверждается соответствием результатов теоретических исследований данным проведенных численных и физических экспериментов, а также теоретическим расчетам и данным, полученным в работах других авторов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ

Развитая в работе модель распространения нелинейного импульса за случайным фазовым экраном может быть использована для быстрой оценки статистики акустического поля, используя в качестве входных данных всего три параметра: нелинейную длину, рефракционную длину фазового экрана и характерный размер неоднородностей. Специальный фазовый слой может использоваться для селективного воздействия на поле отдельных гармоник, в частности, для управления качеством их фокусировки в нелинейном пучке в некоторых задачах ультразвуковой диагностики.

Созданный в работе комплекс программ на основе нелинейного волнового уравнения эволюционного типа может использоваться для одновременного расчета статистических распределений, а также пиковых и средних характеристик нелинейных акустических полей в случайно-неоднородной движущейся среде. Для одиночных импульсов с ударным фронтом развитые методы позволяют получать характерные значения флуктуаций амплитуды и ширины фронта в неоднородной среде. Эти результаты важны для практических задач аэроакустики, подводной акустики и медицинского ультразвука. Проведенные эксперименты по распространению мощных акустических импульсов в турбулентной воздушной среде показали возможность исследования формирования случайных фокусов первого и высших порядков в лабораторных условиях. Разработанный экспериментальный метод калибровки широкополосных микрофонов по нелинейному удлинению N -волны с учетом вязкости и релаксационных явлений может использоваться в лабораторных условиях для измерения спектральных характеристик измерительных систем в воздухе при изменении их составляющих, геометрии или изменении характеристик с течением времени.

В области задач медицинской акустики предлагаемая работа является основой для разработки новых стандартов описания полей, создаваемых устройствами неинвазивной хирургии, что будет способствовать повышению безопасности и эффективности и, таким образом, дальнейшему внедрению этого метода для лечения больных. Нелинейная модель для импульсных излучателей может использоваться при калибровке полей и определении индексов безопасности датчиков диагностического ультразвука. Полученные калибровочные кривые по изменению коэффициентов концентрации поля в нелинейном пучке позволяют рассчитать параметры поля в фокусе произвольного поршневого ультразвукового преобразователя при любом уровне его возбуждения. Данные результаты представляют несомненную практическую важность и могут использоваться для оценки нелинейных эффектов в фокусе терапевтических излучателей и выбора оптимальных

уровней облучения. Модель эквивалентного осесимметричного излучателя может быть использована для количественной оценки параметров нелинейных полей, создаваемых многоэлементными решетками ультразвуковой хирургии в области фокуса в широком диапазоне параметров и мощностей излучения.

Представленный новый метод определения параметров нелинейного поля в фокусе ультразвукового преобразователя в ткани на основе данных, полученных в воде, необходим для планирования хирургических процедур. Результаты моделирования могут быть использованы как альтернатива физическим измерениям даже при наличии ударных фронтов в профиле волны. Созданный комплекс программ расчета полей многоэлементных решеток позволит характеризовать возможности нелинейных режимов облучения для конкретных приборов ультразвуковой хирургии и может использоваться для оптимизации конфигурации решетки на этапе разработки прибора.

Предсказанный в моделировании и получивший подтверждение в эксперименте эффект сверхбыстрого нагревания ткани до температур выше 100°C и возникновения кипения за несколько миллисекунд после начала воздействия ультразвуком позволяет визуализировать область воздействия HIFU при разработке клинических протоколов облучения, прицеливании, мониторинге воздействия в режиме реального времени. Полученные предварительные результаты показывают перспективность использования новых физических механизмов контролируемого теплового и механического разрушения ткани в методах HIFU с использованием ударноволнового воздействия.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ:

1. Развитая дифракционная модель позволяет определять статистические характеристики нелинейной N -волны за случайным фазовым экраном путем численного расчета по достаточно длинной реализации. Статистика поля за экраном определяется амплитудой волны, рефракционной длиной и пространственным масштабом экрана. Приближение нелинейной геометрической акустики в данной задаче справедливо до расстояний 0.3 от рефракционной длины.
2. При помощи специального "резонансного" фазового слоя возможно селективное воздействие на определенные частоты нелинейной волны, приводящее, например, к разрушению фокусировки одних спектральных компонент сфокусированного пучка и сохранению фокусировки других.
3. Развитый в работе численный алгоритм позволяет моделировать распространение квазиплоских периодических и импульсных акустических сигналов в неоднородных

движущихся средах с учетом эффектов нелинейности, дифракции, продольной и поперечной компонент флуктуаций скорости среды, вязкости и релаксации. Результаты моделирования, получившие подтверждение в эксперименте, позволяют предсказывать пространственную структуру акустического поля в турбулентной движущейся среде, определить статистические распределения, пиковые и средние характеристики параметров поля в условиях многократного формирования случайных фокусов.

4. Разработанный метод абсолютной калибровки широкополосных микрофонов в газах, основанный на численном расчёте и измерении нелинейного удлинения N -волны по положениям нулей в её спектре, позволяет определять чувствительность микрофонов в условиях проявления эффектов вязкости и релаксации среды.

5. Полученные количественные данные численного моделирования для коррекции коэффициентов концентрации и насыщения ультразвукового поля в фокусе нелинейного пучка позволяют рассчитать различные характеристики нелинейно-искаженных профилей волны в широком интервале параметров и мощностей фокусирующих поршневых преобразователей, использующихся в устройствах ультразвуковой хирургии.

6. Интерференция прямой и краевой волн в ограниченных пучках, создаваемых плоскими и фокусирующими поршневыми источниками, может приводить к формированию двух ударных фронтов на одном периоде волны при её распространении в режиме развитых разрывов.

7. Разработанный новый алгоритм перенесения данных измерений акустического поля в воде на поглощающие среды, основанный на масштабировании давления на излучателе, позволяет определять значения различных параметров акустического поля, таких как пиковые давления, интенсивность и мощность тепловыделения, в фокальной области излучателей для ультразвуковой хирургии в клинических условиях облучения ткани.

8. Образование ударного фронта в профиле волны в фокальной области пучка в биологической ткани может приводить к ее сверхбыстрому локальному нагреванию до температуры кипения и формированию паровых пузырьков в течение нескольких миллисекунд. Аналитическая оценка, основанная на теории слабых ударных волн, позволяет предсказать время возникновения кипения в ткани с точностью 10%.

9. Разработанный новый алгоритм позволяет рассчитывать трехмерные нелинейные поля современных терапевтических решеток с локализованным образованием ударных профилей. Результаты численного эксперимента показывают, что при достижимых уровнях мощностей возможно сильное проявление нелинейных эффектов и формирование разрывов в профиле волны в фокусе с амплитудой 60-100 МПа даже при фокусировке через грудную клетку.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Основные результаты исследований, представленных в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих профильных научных конференциях: International Symposia on Nonlinear Acoustics (Bergen, Norway, 1993; Nanjing, China, 1996; Goettingen, Germany, 1999; Moscow, Russia, 2002; Stockholm, Sweden, 2008), Всероссийских школах-семинарах «Волновые явления в неоднородных средах» (1998, 2000, 2010, п. Красновидово, Московская обл.), IEEE Ultrasonics Symposia (Seattle, USA, 1995; Sendai, Japan, 1998; Montreal, Canada, 2004; Vancouver, Canada, 2006; Rome, Italy, 2009); World Congress on Ultrasonics (Berlin, Germany, 1995), Intern. Congresses on Ultrasonics (ICU, Santiago, Chile, 2009; Gdansk, Poland, 2011; Intern. Congresses on Acoustics (Seattle, USA, 1998; Rome, Italy, 2001; Madrid, Spain, 2007; Sydney, Australia, 2010), French Congresses on Acoustics (Lousanna, 2000; Lyon, 2010); Joint Congress CFA/DAGA, 2004, Strasbourg, France; Meetings of the Acoustical Society of America (ежегодно с 1993 г.), Congress of World Federation for Ultrasound in Medicine and Biology, Florence, Italy, 2000; Forum Acusticum (Budapest, Hungary, 2005); 14th Intern. Congress on Sound and Vibration 2007, Cairns, Australia; сессиях Российского акустического общества (1997, 2000, 2001, 2004–2011), 2-й межд. конф. «Фундаментальные проблемы физики» (Саратов, 2000); XII Школе «Нелинейные Волны – 2004», Нижний Новгород; Intern. Symposia on Therapeutic Ultrasound (Chongqing, China, 2001; Lyon, France, 2003; Kyoto, Japan, 2004; Boston, USA, 2005; Oxford, UK, 2006; Seoul, Korea, 2007; Minneapolis, USA, 2008; Aix-En-Provence, France, 2009; NY, USA, 2011); Межд. симпозиумах «MRI-guided Focused Ultrasound Surgery», Washington, D.C., USA, 2008 и 2010; Ultrasonics International (Granada, Spain, 2003), Евразийских конгрессах по медицинской физике и инженерии «Медицинская физика» (Москва, 2001 и 2005), межд. конференции «Progress in Nonlinear Science» (Нижний Новгород, 2001), 2-й межд. конференции «Frontiers of Nonlinear Physics», Нижний Новгород, 2004, межд. симпозиумах “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics” (Нижний Новгород, 2003 и 2005); трехстороннем русско-французско-германском семинаре “Computational Experiment in Aeroacoustics”, Светлогорск, 2010; Межд. конференции «Advanced Metrology for Ultrasound in Medicine» Teddington, UK, 2010; Межд. онкологическом научно-образовательном форуме «Онкохирургия-2010, В будущее через новые технологии», Москва, 2010; Ломоносовских чтениях, Москва, МГУ, 2011.

Материалы диссертации также представлялись на семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ, Акустического института им. Н.Н. Андреева, Института общей физики РАН, Научно-исследовательского вычислительного центра и факультета фундаментальной медицины МГУ; на семинарах следующих зарубежных научных

институтов: The University of Texas at Austin, Austin, USA (1993, 1996), Applied Physics Laboratory, University of Washington, Seattle, USA (1995–2011), Dept. of Physics, Potsdam University, Potsdam, Germany (1999, 2002), Physics Dept., Royal Marsden Hospital, Sutton, UK (1999), Université du Maine, Le Mans, France (2000), Dept. of Aerospace and Mechanical Engineering, Boston University, Boston, USA (2000), Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale, Unité 556, Lyon, France (2002, 2006), The University of Tokyo, Tokyo, Japan (2003), Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France (2003); как приглашенные лекции на научных международных школах «Linear and nonlinear acoustic wave propagation in heterogeneous media: modern trends and application», Les Houches, France, 2008; «Therapeutic Ultrasound» (Cargese, France, 2007, 2009, Les Houches, 2011); на конгрессе World Federation for Ultrasound in Medicine and Biology, Vienna, Austria, 2011.

ПУБЛИКАЦИИ

По теме диссертации опубликовано 37 статей в рецензируемых отечественных и зарубежных научных журналах, включенных в перечень ведущих периодических изданий ВАК, в числе которых «Акустический журнал», «Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия», «Известия РАН. Серия физическая», «Physics of Wave Phenomena», «The Journal of the Acoustical Society of America», «IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control», «Ultrasound in Medicine and Biology». Кроме того, по материалам работы опубликовано более 50 статей в трудах конференций и сборниках и более 60 тезисов докладов.

СТРУКТУРА И ОБЪЁМ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, приложений и списка литературы. Работа изложена на 323 страницах и содержит 169 рисунков и 1 таблицу. Список литературы включает 331 наименование.

ЛИЧНЫЙ ВКЛАД АВТОРА

Все изложенные в диссертации оригинальные теоретические и численные результаты получены лично автором, либо при его непосредственном участии. Выбор задач, моделей и методов исследований осуществлялся автором. Оригинальные экспериментальные результаты получены при определяющей роли автора в постановке экспериментов в комплексе с проводимыми теоретическими исследованиями, в обработке и обсуждении получаемых данных, подготовке публикаций.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении обсуждается актуальность темы исследований, приводятся цели, научная новизна, практическая ценность работы и защищаемые положения, даётся краткая аннотация содержания глав. В вводном параграфе каждой из 7 оригинальных глав диссертации приводится обзор литературы и обсуждается состояние проблемы, соответствующей исследованиям главы. В заключительном параграфе каждой из глав приводятся краткие выводы и обсуждаются перспективы дальнейших исследований. В заключении к диссертации сформулированы основные полученные в работе результаты. Далее приведены приложения, в которых описываются различные численные алгоритмы решения модельных нелинейных эволюционных уравнений, разработанных и использованных при выполнении работы. Численные алгоритмы основаны на методе расщепления по физическим факторам и использовании различных конечно-разностных схем, оптимизированных для каждого из операторов интегрирования [25, 26]. В конце приводится список цитированной литературы.

Оригинальная часть диссертации включает в себя несколько взаимосвязанных циклов исследований. Первый из них описан в главах 1 – 2 и посвящён исследованиям статистических свойств случайных акустических полей с разрывами. Основными особенностями здесь является рассмотрение многомерных акустических полей, одновременный учет нелинейных и дифракционных явлений, многократного прохождения нелинейной волны через образующиеся случайные каустики, возможность одновременного расчета статистических распределений, пиковых и средних параметров акустического поля из полученных численных решений.

В первой главе рассматриваются статистические свойства нелинейных акустических полей за случайным фазовым экраном. Результаты данной главы основаны на анализе аналитических решений, получаемых в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА) [2, 27], а также численных решений уравнений Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК) [28, 29] и Вестервельта [30]. Статистика акустического поля в данной задаче определяется начальной модуляцией фазы волны бесконечно тонким фазовым слоем. Вначале задача исследуется аналитически, используя приближение НГА. На основе полученного аналитического решения для сходимости лучей за экраном рассчитываются и анализируются функции распределения и средние характеристики амплитуды периодической пилообразной волны (§1.2) и одиночного N -импульса (§1.3). Рассматриваются модели широкополосного и узкополосного экранов с гауссовской статистикой сходимости лучей. Полученные решения позволяют описать статистику поля до образования первых каустик. Далее, чтобы учесть дифракционные эффекты и

прохождение волны через области случайных фокусировок, задача исследуется численно на основе уравнения ХЗК (§1.4). Рассматривается модель фазового экрана с гауссовским спектром, свойства которого задаются двумя пространственными масштабами. Один характерный масштаб это длина рефракции или характерное расстояние, на котором образуется большинство первых каустик. В приближении НГА длина рефракции определяет статистику сходимости лучей. Другой масштаб это длина корреляции или характерный размер неоднородностей экрана, который не учитывается в модели НГА. На основе гипотезы эргодичности по результатам моделирования с длинными реализациями фазового экрана рассчитываются функции распределения, средние значения и дисперсия амплитуды случайного поля N -волны за экраном. Обсуждается влияние нелинейных эффектов на усиление либо ослабление поля в случайных фокусах, а также влияние размеров неоднородностей на эффективность фокусировок. Сравняются результаты моделирования с аналитическими решениями, что позволяет сделать вывод об ограничениях применимости приближения НГА. Последняя часть главы посвящена исследованию идеи о принципиальной возможности использования резонансного фазомодулирующего слоя для избирательного воздействия на гармоники нелинейной волны (§1.5). Искусственное введение резонансной дисперсии является альтернативой идее резонансного поглощения с целью воздействия на каскадный процесс перетекания энергии волны вверх по спектру при распространении нелинейной волны в слабодиспергирующей среде [31]. Эта задача исследуется в работе теоретически и экспериментально на примере фокусировки нелинейного пучка через физически реализуемый фазовый экран специальной конфигурации. Обсуждается возможность изменения качества фокусировки различных гармоник в пучке при помощи резонансных фазовых искажений, вносимых специальным фазовым слоем.

Во второй главе рассматриваются физическая и численная модели, позволяющие исследовать статистику нелинейных акустических полей в турбулентной атмосфере с учетом эффектов дифракции, вязкости, релаксации, а также влияния продольной и поперечной к направлению волны компонент случайной скорости среды. Вначале описываются теоретическая модель и результаты предварительных расчетов (§2.2) и измерений (§2.3) нелинейных сферически расходящихся N -волн в однородной атмосфере. На основе полученных результатов находятся характерные пространственные масштабы проявления нелинейных эффектов, релаксации и термовязкого поглощения в условиях более сложных измерений в турбулентном потоке. Далее определяются основные параметры N -волн для статистических исследований и влияние ограниченности полосы чувствительности измерительной системы на определение этих параметров. Описывается

новый подход к определению длительности N -волны, форма которой искажается при регистрации, и разработанный в работе метод калибровки широкополосных микрофонов в поглощающей среде, основанный на нелинейном удлинении импульса (§2.4).

Для теоретического описания распространения N -волны и статистики акустического поля в нелинейной турбулентной среде предлагается новое эволюционное уравнение, учитывающее векторные свойства скорости движения среды (§2.5). Обсуждаются общие свойства решений полученного уравнения. Численно исследуется влияние случайных фокусировок, нелинейности, дифракции, различных составляющих скорости среды на статистику поля (§2.6). Результаты моделирования сравниваются с данными физического эксперимента, в котором измеряются статистические характеристики турбулентных полей скорости среды и параметров генерируемых искровым источником высокоамплитудных N -волн в турбулентном потоке (§2.7). Описывается разработанная экспериментальная установка и измерения, проведенные в Высшей инженерной школе г. Лиона (Франция) по распространению генерируемой искровым источником N -волны в турбулентном потоке. Обсуждаются отличия по сравнению с проведенными ранее модельными экспериментами [32]. Увеличение характерных масштабов новой установки, ширины турбулентного слоя, скорости потока и длительности N -волны позволили выявить влияние случайных каустик на статистику параметров акустической волны, обеспечить многократное формирование случайных каустик, а также уменьшить относительное влияние диссипативных эффектов, связанных с термовязкими и релаксационными механизмами поглощения.

Третья глава диссертации посвящена развитию нового асимптотического спектрального подхода для моделирования акустических волн с разрывами в нелинейных средах с произвольным законом поглощения и соответствующей дисперсией скорости звука. Основная идея метода основана на априорном знании высокочастотной асимптотики спектра разрывных функций, $S(\omega) \sim 1/\omega$. Это позволяет заменить спектр волны в его высокочастотной части на аналитическое выражение для спектра пилообразной волны в системе связанных уравнений для взаимодействующих гармоник и при восстановлении разрывного решения. В §3.2 обсуждаются известные из литературы примеры, в которых высокочастотные асимптотики разрывных функций использовались как косметическая процедура при восстановлении по конечному спектру временных функций с особенностью типа математического разрыва [33]. В данной главе работы предложено использовать асимптотику пилообразной волны не только на этапе восстановления разрывного профиля, но и непосредственно при решении нелинейного волнового уравнения. Принцип построения замкнутой системы связанных нелинейных уравнений для конечного числа гармоник описывается в §3.3 на примере решения

уравнения простых волн. Сравнение численных решений, описывающих эволюцию профиля исходной гармонической волны, с известными аналитическими результатами подтверждает, что разработанный подход позволяет с высокой степенью точности моделировать распространение разрывных волн при помощи относительно небольшого числа гармоник (30 – 50). Обобщение развитого метода на случай, когда в профиле волны, наряду с разрывом, содержится особенность следующего порядка в виде разрыва производной, приводится в §3.4 на примере распространения одиночного импульса с ударным фронтом. Дальнейшее развитие метода позволяет учесть возможность образования двух разрывов на одном периоде волны (§3.5). Для решения задачи о распространении нелинейной волны в слабопоглощающей среде в качестве модели используется уравнение Бюргерса и асимптотика Фейя, описывающая структуру ударного фронта конечной ширины (§3.6).

Далее разработанный асимптотический подход используется для исследования ряда ранее не решенных задач о влиянии различных видов частотного закона поглощения и дисперсии среды на эволюцию распространяющихся в такой среде разрывных возмущений. Так, в §3.6 рассматриваются особенности распространения нелинейных волн в средах со степенным частотным законом поглощения, близким к линейному. Такая зависимость закона поглощения типична для мягких биологических тканей [6, 15]. Исследуется влияние параметров степенного закона поглощения, отличного от хорошо изученного квадратичного закона, и дисперсии скорости звука на эволюцию профиля, структуру ударного фронта и поглощение энергии волны. Приводится теоретическая оценка устойчивости разрывной структуры ударного фронта волны в таких средах. В §3.8 рассматривается задача о влиянии селективного по частоте поглощения на второй гармонике на формирование и эволюцию разрыва в профиле исходно гармонической волны. В §3.9 рассматриваются эффекты насыщения при распространении акустических волн в активной среде, т.е. в среде с частотно зависимым усилением, характерным для термоакустических двигателей [34]. Численно описывается процесс стабилизации параметров акустического поля за счет усиления нелинейных эффектов, образования разрывов и соответствующего нелинейного поглощения. Модификация асимптотического метода для численного моделирования нелинейных акустических пучков с учетом дифракционных эффектов описывается в §3.10. Здесь для оптимизации алгоритма также вводится пространственно-неоднородная сетка, соответствующая геометрии дифрагирующего пучка. В качестве примера рассматриваются разрывные решения для пучка исходно гармонических волн с гауссовской пространственной аподизацией.

Следующий цикл работ рассматривается в **четвертой главе** и связан с численным и экспериментальным исследованием нелинейно-дифракционных эффектов в пучках поршневых излучателей со сложной осциллирующей пространственной структурой ближнего поля. Основные параметры разработанного для решения данной задачи численного алгоритма описаны в §4.2. Алгоритм основан на интегрировании уравнения ХЗК в спектральном представлении и оптимизирован для моделирования разрывных решений. В качестве граничного условия рассматривается плоский поршневой излучатель. В §4.3 проводится тестирование развитого алгоритма путем моделирования проведенного ранее эксперимента и сравнения численных решений с данными измерений для гармоник и расчетов с использованием другого независимого алгоритма [35, 36]. Далее проводится детальное исследование особенностей нелинейно-дифракционных явлений в пучке, когда ударные фронты образуются в ближней зоне излучателя (§4.4). В этой части основное внимание уделяется особенностям искажения профиля волны, образованию и эволюции разрывных фронтов. Рассматриваются такие важные метрологические характеристики акустического поля, как пиковые значения давления в профиле волны, интенсивность и полная мощность пучка. Обсуждается обнаруженный в численном моделировании новый эффект формирования двух разрывов на периоде волны в ближнем поле дифрагирующего пучка. Для подтверждения полученных в численном эксперименте новых результатов проводится эксперимент, который описывается в §4.5.

Пятая глава посвящена построению новой численной модели и исследованию нелинейных импульсных полей, создаваемых прямоугольными фокусирующими излучателями диагностического ультразвука, работающими в режиме визуализации с использованием высших гармоник. Предложенная модель является обобщением известной конечно-разностной схемы на основе уравнения ХЗК для аксиально-симметричных пучков в среде с вязкостью и теплопроводностью [37, 38]. Модификация разработанного в данной части диссертации алгоритма включает в себя учет произвольного частотного закона поглощения, соответствующей дисперсии и произвольной геометрии излучателя. В § 5.2 дается постановка задачи и обосновывается ее актуальность для диагностических ультразвуковых систем. Приводятся результаты численных расчетов, полученных с использованием нового алгоритма, для типичной ультразвуковой фазированной решетки марки P4-2, используемой в диагностической ультразвуковой системе Philips HDI-5000 в режиме визуализации на второй гармонике. Для биологической ткани используется линейный по частоте закон поглощения, для воды - классическая квадратичная зависимость, обусловленная процессами вязкости и теплопроводности. Обсуждаются преимущества современного нелинейного метода

звуковидения на основе второй гармоники, отличия в результатах моделирования при выборе различных законов поглощения. Проводится сравнение поля второй гармоники, возникающей за счет нелинейности при излучении основной частоты, с линейным полем на удвоенной частоте излучения. Анализируются пространственные распределения, показывающие основные преимущества использования второй гармоники. Адекватность и точность получаемых в численном эксперименте результатов подтверждается данными измерений акустического поля для рассматриваемого диагностического датчика (§ 5.3).

В шестой главе разрабатывается новый подход к характеристике пучков, создаваемых излучателями мощного фокусированного ультразвука современных устройств неинвазивной ультразвуковой хирургии. В отличие от ранее используемых методов, данный подход основан на комбинации измерений ультразвукового поля и численного моделирования. Суть метода заключается в использовании полученных в эксперименте результатов сканирования поля в режиме линейной фокусировки пучка, при небольших уровнях работы излучателя, для постановки граничных условий в численной модели. Дальнейшее детальное исследование параметров поля в рабочем диапазоне мощностей излучателя как в линейном режиме, так и в условиях сильного проявления нелинейных эффектов, в воде и при облучении ткани, проводится в численном эксперименте. Точность результатов тестируется с помощью сравнения отдельных наиболее важных рассчитанных и измеренных параметров поля, к примеру, профилей волны в фокусе излучателя. Основой для данного подхода послужили результаты исследований, проведенных в главе 4. Полученные результаты показывают, что численный эксперимент может служить эффективным дополнением, а часто и надежной заменой гораздо более трудоемких измерений. При этом результаты численного эксперимента, лишенного ограничений измерительных систем, могут даже превосходить по точности данные, получаемые в физическом эксперименте.

Описание основных уравнений, граничных условий и физических параметров для моделирования ультразвуковых пучков в воде приводится в § 6.2. Развитый комплексный метод характеристики нелинейных фокусированных ультразвуковых полей представлен в § 6.3 на примере типичного для HIFU излучателя. Далее проводится исследование изменения коэффициентов концентрации и предельных значений различных параметров акустического поля при нелинейной фокусировке (§ 6.4). Характерные особенности пространственных распределений нелинейных ультразвуковых пучков рассматриваются в § 6.5. Обсуждаются основные эффекты, проявляющиеся по мере усиления начальной амплитуды пучка: сильная пространственная локализация пикового положительного давления и образующихся ударных фронтов, расширение области пикового

отрицательного давления, смещение пиковых давлений вдоль оси и другие. Влияние пространственной аподизации поля на излучателе исследуется в § 6.6 на примере гауссовского и поршневого источников. Наиболее сложный с точки зрения численного моделирования случай исследования трехмерных разрывных полей, создаваемых многоэлементными двумерными фазированными решетками, рассматривается в § 6.7. Разработанный для решения данной задачи численный алгоритм не имеет мировых аналогов. Новый метод использования модели эквивалентного поршневого излучателя для упрощения описания нелинейных эффектов в фокальной области решетки описывается в § 6.8. Метод позволяет связать результаты прямого моделирования полей решеток, которые на сегодняшний день являются уникальными, с более реализуемыми результатами расчетов и измерений для более простых конфигураций излучателей.

Развитые в заключительной **седьмой главе** диссертации подходы и полученные результаты представляют физическую основу для нового направления в неинвазивной ультразвуковой хирургии с использованием ударноволнового воздействия. Выполнение данной части работы также проходило при комплексном использовании численного и физического экспериментов. Основные уравнения, граничные условия, физические и безразмерные численные параметры для моделирования приводятся в § 7.2. Новый метод определения параметров нелинейного ультразвукового поля в биологической ткани, необходимый для планирования терапевтической процедуры облучения, представлен в § 7.3. Нелинейные эффекты, принципиально реализуемые только в присутствии разрывов, демонстрируются в моделировании и эксперименте при сканирующем режиме создания тепловых разрушений в биологической ткани в форме полос (§ 7.4). Это, в первую очередь, существенное увеличение размеров области разрушения по сравнению с облучением в режимах гармонических или слабо искаженных нелинейных волн и возможность визуализации области облучения с использованием диагностического ультразвука в режиме В-моды. Физические механизмы усиления эффективности воздействия и повышенной эхогенности в ткани в таких режимах облучения более детально исследуются в § 7.5. Здесь в качестве фантома ткани используется прозрачный гель с параметрами, близкими к биологической ткани, но отличающийся меньшим коэффициентом поглощения. Прозрачность гелевого фантома позволяет использовать, наряду с ультразвуковыми методами, оптическую визуализацию изменений в фокальной области пучка в образце. Более слабое поглощение ультразвука в геле приводит к усилению относительной роли нелинейных эффектов при нагревании фантома в режиме развитых разрывов, поскольку эффективное поглощения энергии волны на разрывном фронте не зависит от линейного коэффициента поглощения в среде [1, 3]. В численном и

физическом эксперименте показывается, что возникновение яркого эхогенного пятна на диагностическом ультразвуковом изображении связано с нагревом среды ударными волнами до температуры кипения и образованием парогазовых полостей миллиметровых размеров – сильных рассеивателей диагностических импульсов. На больших мощностях образование пузырей кипения и одновременное повышение эхогенности на ультразвуковом изображении регистрировалось уже на первом же кадре видеосъемки, т.е. меньше, чем за 30 мс облучения. Этот временной интервал почти на два порядка меньше традиционного времени облучения в HIFU, в течение которого ожидается значительное повышение температуры ткани. Следует отметить, что наблюдаемые ранее в HIFU эффекты, вызванные появлением пузырьков, обычно не связывали с нагревом ткани разрывными волнами до температур кипения и часто ошибочно объясняли возникновением под действием отрицательной фазы волны кавитацией [39]. Новый эффект сверхбыстрого нагревания гелевого фантома и образцов ткани ударными волнами исследуется теоретически и экспериментально в § 7.6. Для сравнения эффектов кавитации и кипения в эксперименте используются дополнительные методы регистрации пузырьков с помощью высокоскоростной съемки в геле, регистрации нелинейного рассеяния нагревающей волны в виде высокочастотного широкополосного шума и измерения флуктуаций напряжения на излучателе, возникающих за счет отражения фокусированной волны от пузырьков. Проверяется в эксперименте возможное влияние неоднородностей ткани, препятствующее формированию ударных фронтов в ткани. В теоретических исследованиях используется несколько подходов различной степени сложности. Обсуждаются перспективы использования ударноволновых полей и образования пузырьков кипения для разработки новых подходов к контролируемому тепловому и механическому разрушению ткани. В § 7.7 исследуется возможность реализации ударноволнового воздействия при облучении через грудную клетку таких органов, как, например, печень и сердце. Уровни давления, которые возможно реализовать с учетом ограничений на начальную интенсивность излучателя, отражение, поглощение и дополнительные дифракционные эффекты при распространении ультразвука через ребра, могут быть недостаточны для формирования разрывов в фокусе. Исследования проводятся с использованием нового развитого для терапевтических решеток алгоритма и показывают принципиальную возможность реализации таких режимов облучения.

В Заключение приводятся основные результаты работы. В приложениях описываются особенности разработанных численных алгоритмов. В конце диссертации помещён список цитируемой литературы. Ссылки на публикации автора в тексте диссертационной работы выделены подчёркиванием.

1

Нелинейные взаимодействия пилообразных волн и ударных импульсов за случайным фазовым экраном

1.1. Вводные замечания

Изучение статистических проблем в нелинейной акустике в основном шло по пути описания временной статистики одномерных шумовых волн, распространяющихся в регулярной однородной среде. Подробно были исследованы задачи о нелинейном искажении спектров и корреляционных функций интенсивного шума [40], взаимодействиях случайных волн с разрывами [41, 42], трансформации вероятностных распределений [41, 43, 44]. Неоднородные задачи, учитывающие влияние дифракции и пространственных неоднородностей среды, изучены гораздо менее полно. В работах [40, 45] рассматривались нелинейные и дифракционные эффекты в звуковых пучках со случайной поперечной пространственной структурой. Однако применимость развитого метода ограничивалась случаем слабого проявления нелинейности.

В настоящее время большое внимание привлекает к себе проблема распространения в неоднородных средах сильно искаженных нелинейных акустических волн, содержащих разрывы. С точки зрения практических приложений этот интерес связан с развитием сверхзвуковой авиации и проблемой звукового удара [20, 46], а также с применением мощного ультразвука в медицине - экстракорпоральной литотрипсии [47, 48], ультразвуковой хирургии и развитием нелинейных методов ультразвуковой визуализации [10, 49, 50]. Измерения волн звукового удара, прошедших сквозь турбулентную область атмосферы, показали, что существенное влияние на форму волны оказывают локализованные в приземном слое неоднородности типа атмосферной турбулентности и облачности [51 - 53]. Неоднородности биологической ткани (слои кожи и жира, соединительные ткани) могут искажать фокусировку пучков, создаваемых устройствами ультразвуковой хирургии, уменьшая полезное воздействие или приводя к нежелательным побочным эффектам из-за поражения здоровых тканей [54, 55]. В полях медицинских диагностических ультразвуковых приборов, при построении изображения на основе генерируемых в ткани высших гармоник, искажение фокусировки на неоднородностях

ткани уменьшает пространственное разрешение изображений, чувствительность и увеличивает ошибки измерений [50, 56, 57]. В то же время результаты недавних исследований показывают, что при определенных условиях фокусировка гармоник в неоднородной среде может иметь преимущества по сравнению с обычной фокусировкой пучка, излучаемого на частоте гармоник [50, 58].

Параллельно в нелинейной акустике недиспергирующих сред давно обсуждается проблема контроля каскадных процессов генерации гармоник, приводящих к формированию разрывов и усиленному нелинейному поглощению акустических волн. Такой контроль можно осуществлять, например, путем введения резонансных поглотителей на выбранных гармониках [59, 60] или путем введения начального фазового сдвига между гармониками (предискажение профиля) [61, 62]. По аналогии со вторым методом специально подобранные фазовые неоднородности среды для избирательной расфазировки выделенной гармоник могут представлять интерес как еще один перспективный метод управления процессом генерации гармоник.

Целью данной главы является развитие модели случайного фазового экрана и исследование статистических свойств нелинейных акустических волн за экраном. Также теоретически и экспериментально проверяется гипотеза о возможности избирательного воздействия фазового экрана на выбранную частоту при фокусировке пучка периодических волн. Отметим, что бесконечно тонкий модулирующий фазу волны экран является простейшей моделью случайно-неоднородной среды, позволяющей выявить многие существенные эффекты, характерные и для более сложных неоднородных сред. Большая часть результатов для модели фазового экрана связана с описанием линейных волн [63]. Модель также используется в численных расчетах как аппроксимация слоя случайно-неоднородной среды на шаге сетки вдоль направления распространения волны [64 - 66]. В нелинейной акустике такая модель ранее не рассматривалась.

Результаты и выводы главы основаны на анализе аналитического решения задачи в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА) [23], а также численных решений уравнений Хохлова-Заболотской-Кузнецова [28, 29] и Вестервельта [30]. Построение приближенной аналитической модели нелинейного поля за экраном позволило адекватно описать основные физические явления и эффекты, сопровождающие распространение интенсивного звука в случайно-неоднородной среде. В то же время получение численных решений в рамках более сложных моделей позволило существенно расширить как круг исследуемых задач, так и точность их решения. Полученные в данной главе результаты опубликованы в работах [67 - 72].

1.2. Статистические характеристики нелинейной пилообразной волны за фазовым экраном в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА)

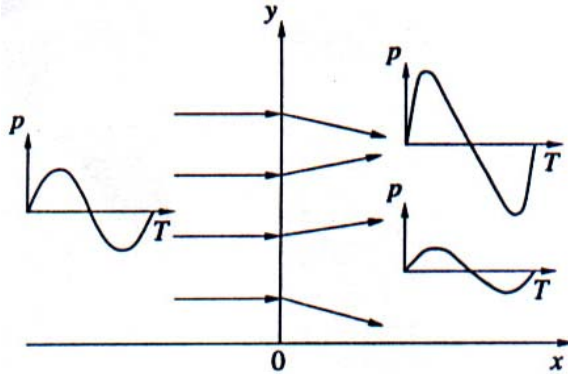


Рис. 1.1. Геометрия акустических лучей и временные профили ($T = \tau - \Psi(x, y)/c_0$) исходной плоской нелинейной волны до и после прохождения через случайный фазовый экран, расположенный при $x = 0$.

Пусть исходно плоская регулярная волна конечной амплитуды падает на случайный фазовый экран, расположенный при $x = 0$ перпендикулярно направлению распространения волны x (рис. 1.1). После прохождения через экран фронт волны приобретает случайный фазовый сдвиг $\Psi_0(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (y, z)$ - поперечные пространственные координаты. Непосредственно за экраном форма волны тогда будет иметь вид:

$$p(x=0) = p_0(\tau - \Psi_0(\mathbf{r})/c_0), \quad \text{где } p -$$

акустическое давление, $\tau = t - x/c_0$ - время в бегущей системе координат, c_0 - скорость звука, $p_0(t)$ - произвольная функция, описывающая исходный временной профиль волны. Ясно, что начальное искажение фазового фронта волны будет приводить к появлению случайным образом расположенных областей как расходимости волны, так и сфокусированных участков фронта. При этом пространственная структура акустического поля в произвольном сечении нелинейной среды x за экраном будет иметь вид хаотически расположенных пятен различной интенсивности, статистика которых будет определяться как статистикой исходной пространственной модуляции, так и нелинейно-дифракционными эффектами, по-разному проявляющимися в областях сходимости и расходимости волнового фронта.

Распространение волны за экраном будем описывать уравнением Хохлова-Заболотской (ХЗ):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (1.1)$$

где ρ_0 - равновесная плотность среды, ε - параметр нелинейности, Δ_{\perp} - лапласиан по поперечным координатам.

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$p = p(x, \mathbf{r}, T = \tau - \Psi(x, \mathbf{r})/c_0), \quad (1.2)$$

где функция Ψ описывает искажение формы исходного фронта волны $\Psi_0(\mathbf{r})$, временная координата T учитывает различную фазовую задержку. В приближении нелинейной геометрической акустики (НГА) уравнение (1.1) после подстановки (1.2) переходит в систему для двух неизвестных функций p и Ψ [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \Psi)^2 &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{1}{2} p \Delta_{\perp} \Psi + \nabla_{\perp} \Psi \nabla_{\perp} p &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Первое из уравнений системы (1.3) совпадает с уравнением эйконала линейной геометрической акустики [2]. Второе уравнение типа переноса описывает изменение профиля волны, обусловленное нелинейностью среды и геометрией - сходимостью либо расходимостью - волнового фронта. Ограничимся здесь рассмотрением наиболее простой модели одномерного фазового экрана, когда его характеристики и соответственно форма фазового фронта волны за ним изменяются лишь в одном поперечном направлении y (рис. 1.1). Тогда в системе (1.3) лапласиан и градиент по поперечным координатам равны, соответственно, $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial y^2$, $\nabla_{\perp} = \partial / \partial y$. Модифицированные уравнения типа (1.3) использовались для описания волн в непрерывной неоднородной плоскостной среде [73]

Уравнение эйконала (1.3) в случае одномерной модуляции фронта волны легко преобразуется в уравнение простых волн для функции наклона лучей $\beta = \partial \Psi / \partial y$ к координате распространения x :

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \quad (1.4)$$

неявное решение которого, $\beta = \beta_0(y - \beta x)$, справедливо в области до появления пересечения лучей. Здесь случайная функция $\beta_0(y) = \partial \Psi_0(y) / \partial y$ характеризует угол наклона лучей на границе при $x = 0$. Второе уравнение системы (1.3) тогда запишется как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial \varphi}{\partial T} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} p \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) также можно решить точно для произвольного исходного профиля волны $p_0(T = \tau - \Psi_0(y) / c_0)$. Поскольку наклон луча β , попадающего в точку с координатами (x, y) , однозначно определяется и равен наклону β_0 этого же фиксированного луча при $x = 0$, удобно перейти к лагранжевой пространственной переменной - поперечной координате η луча при $x = 0$ и решать уравнение (1.5) в новых

координатах, т.е. описывать искажение профиля волны на фиксированном луче. После замены пространственных координат (x, y) на $(x, \eta = y - \beta(x, y)x)$, имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{1}{2} p \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, \eta) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь производная $\partial \beta / \partial y$ в новых переменных x, η , в соответствии с (1.4), записывается как:

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, \eta) = \frac{\partial \beta / \partial \eta}{1 + x \partial \beta / \partial \eta} = \frac{d}{dx} (\ln(1 + x \partial \beta / \partial \eta)) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma(x, \eta)}{dx}, \quad (1.7)$$

и может быть представлена в виде полной производной, поскольку функция $\beta(x, \eta) = \beta_0(\eta)$ является функцией только одной лагранжевой переменной $\eta = y - \beta(x, y)x$ и не изменяется с расстоянием x . Функция $\sigma(x, \eta) = 1 + x \partial \beta / \partial \eta$ имеет смысл площади поперечного сечения лучевой трубки на расстоянии x от экрана между двумя близкими лучами, вышедшими из точки с координатами $(x = 0, \eta)$.

Введем далее функцию $V = p\sigma^{1/2}$ и новую координату $\xi = \int_0^x \sigma^{-1/2}(x_1, \eta) dx_1$. После преобразования переменных от $p(x, \eta, T)$ к $V(\xi, \eta, T)$, уравнение переноса (1.6) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} V \frac{\partial V}{\partial T} = 0. \quad (1.8)$$

Учитывая условие на границе $V(\xi = 0, \eta, T) = p_0(y = \eta, T)$, общее решение уравнения (1.8) запишется как

$$V(\xi, \eta, T) = p_0 \left(\eta, T + \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} V \xi \right). \quad (1.9)$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем:

$$p(x, \eta, T) = \sigma^{-1/2} p_0 \left(\eta, T + \left(2\varepsilon / c_0^3 \rho_0 \right) px / \left(1 + \sigma^{-1/2} \right) \right). \quad (1.10)$$

Общее неявное решение (1.10) уравнения переноса (1.5) описывает эволюцию произвольного исходного профиля волны $p_0(y, \tau)$ вдоль фиксированного луча с начальной поперечной координатой $y(x = 0) = \tau$.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретного примера. Пусть исходный профиль волны имеет форму симметричной периодической пилы с постоянной амплитудой разрывов a_0 . Форма одного из периодов волны при $x = 0$ имеет вид линейной функции: $p_0 = -(\omega T / \pi) a_0$, где $-\pi < \omega T < \pi$, ω - циклическая частота волны. Легко показать, что за экраном пилообразная форма волны будет сохраняться, поскольку в приближении НГА не

учитываются эффекты дифракции, меняться будет лишь амплитуда a разрывных фронтов за счет нелинейного затухания и различной сходимости либо расходимости лучей: $p(x, y) = -(\omega T/\pi)a(x, y)$. В областях фокусировки амплитуда разрывов будет увеличиваться и, соответственно, будут усиливаться эффекты нелинейного поглощения; в областях расходимости лучей - уменьшаться. Пользуясь решением (1.10), легко получить выражение для амплитуды волны $a(x, \eta)$ на фиксированном луче:

$$\frac{a(x, \eta)}{a_0} = \frac{1 + \sigma^{-1/2}}{1 + 2x/x_n + \sigma^{1/2}}, \quad (1.11)$$

где $x_n = \pi c_0^3 \rho_0 / \epsilon a_0 \omega$ - характерная нелинейная длина.

Заметим, что, согласно (1.7), полученное решение (1.11) определяется функцией $\partial\beta/\partial\eta$, которая имеет смысл сходимости лучей $\partial\beta/\partial y$ при $x=0$ (второй производной функции пропускания фазового экрана) и может быть выражена через функцию сходимости $\partial\beta/\partial y(x, y)$ и на произвольном (до пересечения лучей) расстоянии x . Если начальный фазовый сдвиг фронта есть величина случайная, то амплитуда разрывов в волне за экраном также становится случайной, и ее статистика, в соответствии с (1.11), определяется статистикой сходимости лучей, приходящих в точку наблюдения. Таким образом, статистические характеристики амплитуды исходной регулярной пилообразной волны в некотором сечении нелинейной среды за экраном могут быть найдены в два этапа. Сначала, пользуясь уравнением (1.4), нужно исследовать пространственную статистику сходимости лучей $\partial\beta/\partial y$. Далее, соотношение (1.11) позволяет найти средние значения и вероятностные распределения для амплитуды волны.

Поскольку наклон лучей $\beta(x, y)$ описывается уравнением простых волн (1.4), задача о преобразовании статистики сходимости лучей аналогична задаче об изменении статистики производных в простой волне. Как известно [43], одноточечная функция распределения простой волны $W(\beta)$ не изменяется в области до образования разрывов (пересечения лучей в данном случае), а эволюцию функции распределения производных $W(\partial\beta/\partial y)$ можно проанализировать аналитически, используя связь между статистикой воли Римана в лагранжевых и эйлеровых координатах [41]. В данном случае лагранжевой переменной является начальная поперечная координата $y(x=0) = \eta$, из которой выходит фиксированный луч. Используя формулы связи [41] между одноточечными функциями распределения полей $\beta(\eta)$, $\beta(y)$ и производных $\partial\beta/\partial\eta$, $\partial\beta/\partial y$ в лагранжевых (на определенном луче η на расстоянии x от экрана) и эйлеровых (в определенной точке

пространства (x, y) координатах, получим следующие формулы для вероятностных распределений функций сходимости

$$W(\partial\beta/\partial\eta, x) = (1 + x \partial\beta/\partial\eta) W_0(\partial\beta/\partial\eta), \quad (1.12)$$

$$W(\beta', x) = \frac{1}{(1 - \beta' x)^3} W_0\left(\frac{\beta'}{1 - \beta' x}\right), \quad (1.13)$$

где $\beta' = \partial\beta/\partial y$, $W_0(\beta')$ - исходное распределение $\partial\beta_0/\partial y$ при $x = 0$.

Рассмотрим эволюцию начального гауссовского распределения сходимости лучей:

$$W_0(\beta') = (2\pi)^{-1/2} x_p \exp(-\beta'^2 x_p^2 / 2). \quad (1.14)$$

Здесь x_p - рефракционная длина, т.е. характерное расстояние, на котором появляются пересечения лучей.

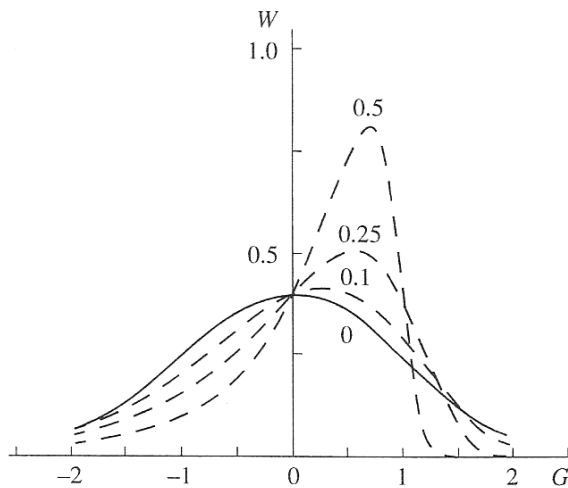


Рис. 1.2. Функции распределения сходимости акустических лучей $W(G = x_p \beta')$ на различных расстояниях x/x_p от экрана (цифры у кривых). Сплошная кривая - исходное гауссовское распределение при $x = 0$.

На рис. 1.2 изображены рассчитанные по формуле (1.13) функции распределения сходимости лучей, нормированной на характерное среднее значение x_p^{-1} , на различных расстояниях x/x_p от экрана. Видно, что максимум исходного симметричного распределения (сплошная кривая) смещается в сторону положительных значений сходимости, что соответствует повышению вероятности наблюдения расходящихся лучей. В то же время можно показать, что возрастает и вероятность больших отрицательных значений сходимости, т.е.

сильно сфокусированных лучей.

Перейдем теперь к описанию амплитудных характеристик акустического поля за экраном. Найдем обратную функцию в решении (1.11) для сходимости $\partial\beta/\partial\eta(x, y)$ как функции амплитуды $a(x, y)$ и, переходя к безразмерным переменным, получим:

$$x_p \partial\beta/\partial\eta = F(A) = \frac{\left[\left(f + (f^2 + 4A)^{1/2} \right) / 2A \right]^2 - 1}{Dz}, \quad (1.15)$$

где вспомогательная функция $f = 1 - 2Az - A$, $A = a/a_0$, $z = x/x_n$ - расстояние в длинах нелинейности, параметр $D = x_n/x_p$ характеризует относительное влияние

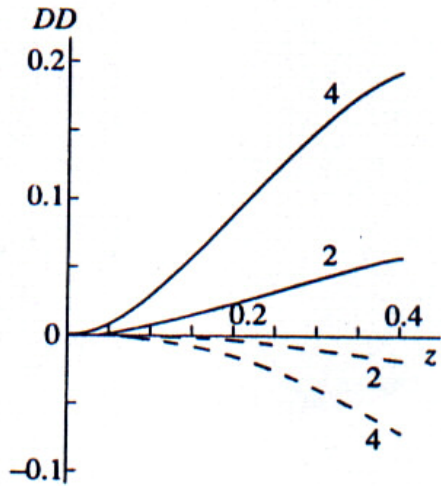


Рис. 1.3. Зависимости разности интенсивностей $DD = \langle A^2 \rangle - (1+z)^{-2}$ случайно модулированной и плоской волны (штриховые кривые) и среднеквадратичного отклонения $DD = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ (сплошные кривые) от расстояния в нелинейных длинах $z = x/x_n$ для различных значений параметра $D = x_n/x_p$ (цифры у кривых).

эффектов нелинейного поглощения и рефракции.

Функцию распределения амплитуд разрывов тогда можно рассчитать в явном виде, пользуясь полученным выше решением (1.12) с учетом функциональной связи (1.15):

$$W(A, z) = (1 + DzF(A))W_0(F(A))|\partial F/\partial A|, \quad (1.16)$$

где W_0 - произвольное исходное распределение сходимости лучей.

На рис. 1.3 изображены зависимости разностей интенсивности модулированной и плоской волн (штриховые кривые) и дисперсии амплитуды (сплошные кривые) от безразмерного расстояния для различных значений параметра $D = 2; 4$. Кривые были рассчитаны усреднением соответствующих величин с распределением (1.16). Как видно из

рисунка, модулированная волна поглощается в среднем быстрее, чем регулярная плоская, однако различие не превышает 10%, дисперсия распределения растет с увеличением пройденного волной расстояния. Указанные эффекты проявляются тем сильнее, чем сильнее исходная модуляция фронта (большие значения параметра D).

На рис. 1.4 изображены функции распределения (1.16), рассчитанные для различной степени начальной модуляции фронта волны на расстоянии $z = 0.25$ от экрана. Сплошная вертикальная линия соответствует исходному δ -образному распределению. Видно, что при отсутствии модуляции ($D = 0$) распределение сохраняет δ -форму, нелинейное затухание волны приводит к смещению пика распределения в сторону меньших значений амплитуды - вертикальная штриховая линия на рисунке. Модуляция фронта приводит к расширению распределения, максимум плотности вероятности смещается в сторону меньших значений амплитуды по сравнению с плоским случаем. В то же время появляется "хвост" в области больших значений амплитуды, что соответствует увеличению вероятности флуктуационных выбросов - росту интенсивности волны, происходящему в областях случайных фокусировок. Аналогичная трансформация вероятностных распределений амплитуды N -волн после прохождения тонкого турбулентного слоя наблюдалась экспериментально в работе [74].

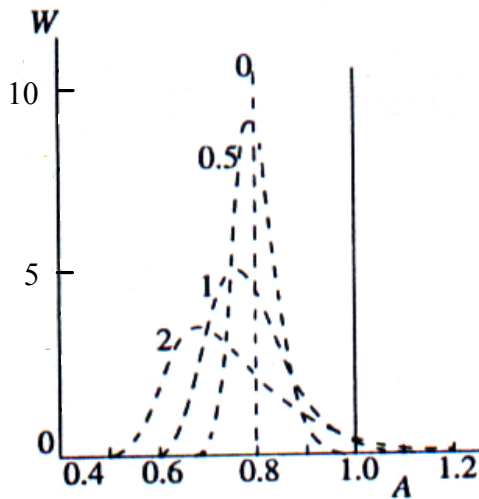


Рис. 1.4. Функции распределения амплитуды $A = a/a_0$ пилообразной волны на расстоянии $z = x/x_n = 0$ (сплошная линия - исходное δ -распределение) и $z = 0.25$ (штриховые кривые) при различной степени модуляции волны $D = x_n/x_p$ (цифры у кривых).

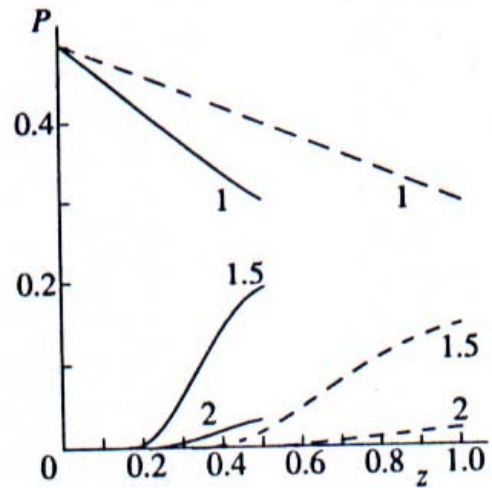


Рис. 1.5. Зависимости вероятности превышения пикового давления $A = a/a_0$ над уровнем $k(1+z)^{-1}$ ($k = 1; 1.5; 2$ - цифры у кривых) от расстояния $z = x/x_n$ для различных степеней модуляции $D = 1$ (сплошные кривые) и $D = 0.5$ (штриховые кривые). Вертикальный масштаб для кривых, соответствующих значениям $k = 1.5; 2$, увеличен в 10 раз.

Представляет интерес количественная оценка вероятности наблюдения больших значений амплитуды волны. Рисунок 1.5 показывает вероятности превышения амплитудой модулированной волны уровня в $k = 1; 1.5; 2$ раза по сравнению с амплитудой нелинейной плоской волны на тех же расстояниях. Видно, что вероятность наблюдения в случайной волне пикового значения, большего, чем в плоской ($k = 1$), уменьшается линейно от значения $P = 0.5$ при $z = 0$. Эта зависимость объясняется геометрией сходимости лучей за экраном: области пространства, занимаемые сходящимися лучами, где амплитуда выше, сужаются (рис. 1.1) и легко показать (1.12), что вероятность $P(A > (1+z)^{-1}) = P(\partial\beta/\partial\eta < 0) = 0.5(1 - (2/\pi)^{1/2} Dz)$. Вероятность превышения в 1.5 и в 2 раза не превосходит, соответственно, 2% и 0.5%.

1.3. Статистика нелинейного поля одиночного N -импульса за фазовым экраном. Приближение НГА

Рассмотрим теперь статистические характеристики акустического поля одиночного разрывного импульса (N -волны) при распространении за случайным фазовым экраном. Пусть на статистически однородный фазовый экран (рис. 1.1) падает N -волна, профиль которой имеет вид: $p(x=0) = p_0(\tau) = -a_0 \tau/\tau_0$ при $-\tau_0 < \tau < \tau_0$ и $p_0 = 0$ для других значений τ .

Решение (1.10) тогда легко преобразуется к явному виду:

$$p(x, \eta, T) = -\frac{\sigma^{1/2} a_0 T / \tau_0}{1 + (2\varepsilon / c_0^3 \rho_0) x / (1 + \sigma^{1/2})} \quad (1.17)$$

Как видно, в приближении нелинейной геометрической акустики форма N -волны между разрывами на переднем и заднем фронтах остается линейной, однако изменяются наклон линейного участка профиля, длительность импульса $2\tau_u(x, \eta)$ и, соответственно, амплитуда разрыва $a(x, \eta) = p(x, \eta, T = -\tau(x, \eta))$. Чтобы найти амплитуду и длительность N -волны за экраном, заметим, что функция $p(x, \eta, T)\sigma^{-1/2}$ в решении (1.10) представима как известное неявное решение уравнения простых волн для исходной N -волны длительностью $2\tau_0$ и амплитудой разрыва a_0 . В соответствии с законом сохранения импульса, площадь положительной и отрицательной фазы N -волны сохраняется: $\tau_u(x, \eta) \cdot a(x) = \tau_0 \cdot a_0$. Тогда, используя эту связь между амплитудой разрыва и длительностью волны в решении (1.17), получим следующее выражение для амплитуды разрыва в произвольном сечении нелинейной среды за экраном:

$$\left(\frac{a(x, \eta)}{a_0}\right)^2 = \sigma^{-1} \frac{1 + \sigma^{1/2}}{1 + 2x/x_n + \sigma^{1/2}}. \quad (1.18)$$

Как следует из формулы (1.18), аналогично (1.11), амплитуда волны на фиксированном луче определяется площадью сечения лучевой трубки $\sigma(x, \eta)$, которая, в свою очередь, есть функция случайной величины $\partial\beta/\partial\eta$ - сходимости лучей в лагранжевых

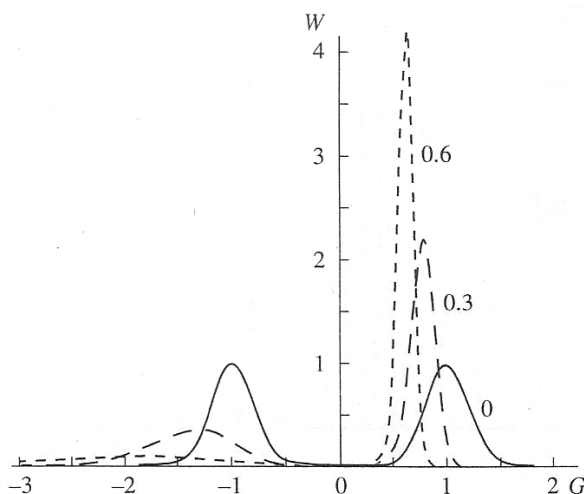


Рис. 1.6. Функции распределения сходимости лучей $W(G = x_p \beta')$ на различных расстояниях x/x_p от экрана (цифры у кривых) для исходного узкополосного распределения (сплошная кривая).

переменных. Амплитуда волны в эйлеровых координатах в определенной точке пространства (x, y) за экраном, как и в случае пилообразных волн, рассчитывается по формуле (1.13).

Пользуясь соотношением (1.18), проанализируем изменение средних значений и вероятностных распределений для функции сходимости лучей (1.13) и амплитуды N -волны при распространении за экраном. Рассмотрим решение для начального широкополосного гауссовского

распределения (1.14) (рис. 1.2) и узкополосного гауссовского распределения (рис. 1.6):

$$W(\beta') = \frac{x_p}{2} (2\pi\Delta^2)^{-1/2} \left[\exp(-(\beta' x_p - 1)^2 / 2\Delta^2) + \exp(-(\beta' x_p + 1)^2 / 2\Delta^2) \right] \quad (1.19)$$

Здесь x_p - характерная рефракционная длина (расстояние, на котором появляются пересечения лучей), $\Delta = 0.25$ - параметр, характеризующий относительную ширину распределения (1.19). Как видно из рис. 1.2 и 1.6, плотность вероятности “перетекает” в сторону положительных значений сходимости, что соответствует повышению вероятности наблюдения расходящихся лучей. Вероятность регистрации расходящихся лучей линейно растет с увеличением расстояния от экрана: $P(\beta' > 0) = 0.5 + \alpha x / x_p$, где $\alpha = (2\pi)^{1/2}$ и $\alpha = 0.5$ для распределений (1.14) и (1.19), соответственно. Распределение в области положительных значений β' становится более острым и смещается в сторону меньших значений

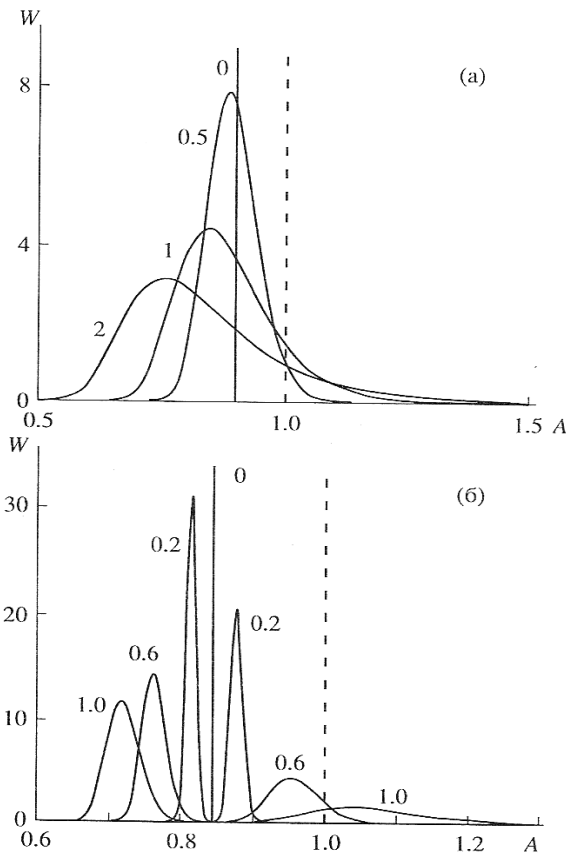


Рис. 1.7. Функции распределения нормированной амплитуды $A = a/a_0$ N -волны при широкополосной (а) и узкополосной (б) исходной модуляции на расстоянии $z = x/x_n = 0.25$ (а) и 0.4 (б) от экрана для различных соотношений между нелинейной и рефракционной длинами $D = x_n/x_p$ (цифры у кривых). Штриховые линии - исходные δ -распределения амплитуды при $x = 0$.

сходимости. В области отрицательных значений β' , напротив, распределение расширяется, возрастает плотность вероятности наблюдения больших отрицательных значений сходимости, т.е. сильно сфокусированных лучей.

Рассмотрим теперь эволюцию функции распределения амплитуды разрывов N -волны за экраном для двух исходных распределений сходимости лучей $W_0(\beta')$ (1.14) и (1.19). Используя связь между амплитудой разрыва и сходимостью $\gamma = \partial\beta / \partial\eta(x, y)$ (1.18), функция распределения которой определяется формулой (1.12), получим:

$$W(a, x) = (1 + \gamma x) W_0(\gamma) \left| \frac{\partial a}{\partial \gamma} \right| \quad (1.20)$$

где $a = a(\gamma)$ определяется формулой (1.18).

На рис.1.7 изображены функции распределения (1.20) нормированной амплитуды N -волны, $A = a/a_0$. Распределения рассчитаны для

широкополосной (а) и узкополосной (б) исходной модуляции фазового фронта на определенном расстоянии от экрана $x/x_n=0.25$ (а) и $x/x_n=0.4$ (б) для различных соотношений между нелинейной и рефракционной длинами $D = x_n/x_p$ (цифры у кривых). Вертикальные сплошные линии соответствуют дельтаобразным распределениям на тех же расстояниях в отсутствие модуляции, штриховые - исходные распределения при $x = 0$. В случае плоской волны ($D = 0$) распределение сохраняет дельтаобразную форму, нелинейное затухание волны приводит к смещению пика распределения в сторону меньших значений амплитуды. При случайной исходной модуляции фронта происходит расширение распределений, при этом максимум плотности вероятности смещается в сторону меньших значений амплитуды по сравнению с плоским случаем. В то же время возрастает плотность вероятности больших значений амплитуды, что обусловлено ростом амплитуды волны в областях случайных фокусировок. Как уже упоминалось раньше, подобная трансформация вероятностных распределений амплитуды N -волн после прохождения тонкого турбулентного слоя наблюдалась в модельных экспериментах [74]. Сравнение распределений на рис.1.7 (а) с рассчитанными для периодической пилообразной волны (рис.1.4), показывает, что для одиночной N -волны смещение плотности вероятности в сторону меньших значений амплитуды происходит более медленно. Это связано с более медленным затуханием энергии на разрывах в N -волне $a \sim (1+x/x_n)^{-1/2}$ по сравнению с периодической волной $a \sim (1+x/x_n)^{-1}$.

На рис.1.8 изображены кумулятивные вероятности $P = \int_{A_{pez}}^{\infty} W(a)da$ наблюдения амплитуды большей, чем определенное значение A для широкополосной (а) и узкополосной (б) моделей экрана. Значения амплитуды нормированы на соответствующую амплитуду регулярной (при отсутствии модуляции) нелинейной волны $A/A_{pez}=A \cdot (1+x/x_n)^{1/2}$ на том же расстоянии. Цифры у кривых соответствуют расстояниям от экрана в длинах рефракции, сплошные линии соответствуют случаю слабого проявления нелинейности ($x/x_n=0.1$ на данном расстоянии x/x_p), штриховые - случаю сильного проявления нелинейности ($x/x_n=10$). Видно, что при удалении от экрана изменение распределения вероятности становится более размытым, возрастает вероятность наблюдения больших значений амплитуды. Усиление нелинейных эффектов приводит к еще более плавному спаду кривой кумулятивной вероятности, однако этот эффект является достаточно слабым. На рис.1.8 нанесены также точки, соответствующие результатам экспериментов, проведенных в работах [74, 75]. Результаты качественно согласуются с полученными здесь аналитическими оценками.

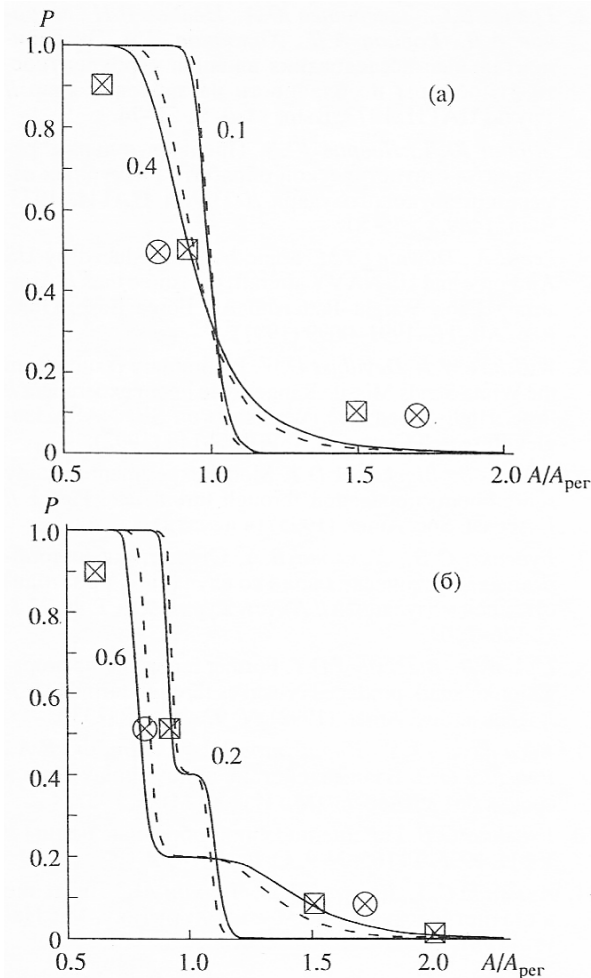


Рис. 1.8. Кумулятивные распределения вероятности нормированной амплитуды $A/A_{per} = A(1+x/x_n)^{1/2}$ для двух моделей экрана с широкополосной (а) и узкополосной (б) модуляцией. Цифры у кривых соответствуют расстояниям от экрана в длинах рефракции, сплошные кривые соответствуют случаю слабой нелинейности ($x/x_n=0.1$ на данном расстоянии x/x_p), штриховые - сильной нелинейности ($x/x_n=10$). Экспериментальные точки соответствуют данным измерений, полученным в работах \otimes - [74], \square - [75].

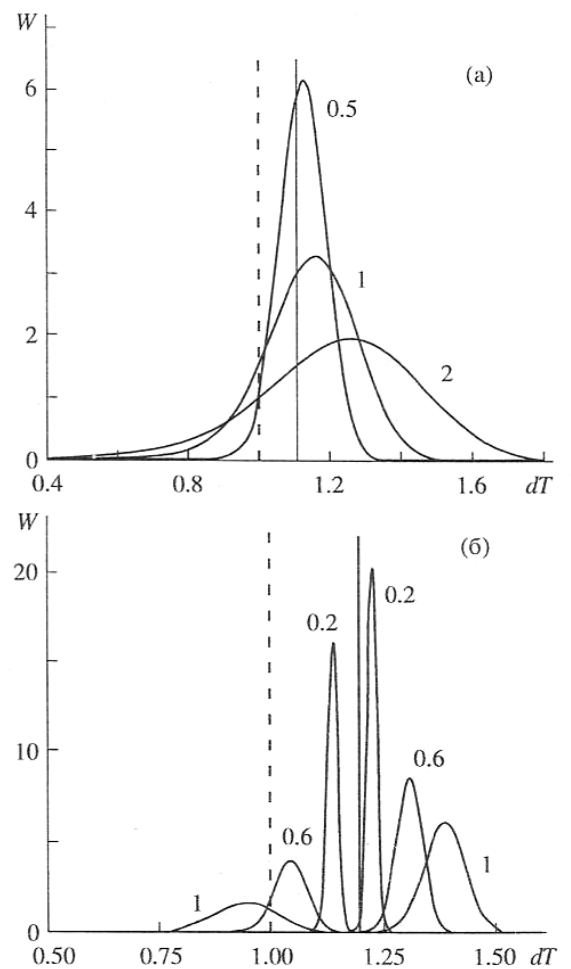


Рис. 1.9. Функции распределения времени нарастания dT ударного фронта для широкополосной (а) и узкополосной (б) моделей экранов. Распределения рассчитаны на расстояниях от экрана в длинах нелинейности $x/x_n=0.25$ (а) и $x/x_n=0.4$ (б) для различных соотношений между нелинейной и рефракционной длинами $D=x_n/x_p$ (цифры у кривых). Вертикальные сплошные линии - дельтаобразные распределения на тех же расстояниях в отсутствие модуляции, штриховые - исходные распределения при $x=0$.

Важной характеристикой волны звукового удара является время нарастания или ширина ударного фронта. Рассмотрим здесь вероятностные характеристики этой величины, исходя из предположения, что в области вдали от пересечения лучей ширина ударного фронта может быть аппроксимирована величиной, обратно пропорциональной амплитуде волны, как и в плоском случае [21]. В данном приближении функция распределения времени нарастания легко находится из распределения (1.20) для

амплитуды волны. На рис.1.9 изображены функции распределения времени нарастания dT , нормированного на начальную ширину ударного фронта, для двух рассматриваемых моделей экранов. Распределения рассчитаны на определенном расстоянии в длинах нелинейности от экрана $x/x_n=0.25$ (а) и $x/x_n=0.4$ (б) для различных соотношений между нелинейной и рефракционной длинами $D=x_n/x_p$ (цифры у кривых). Вертикальные сплошные линии - дельтаобразные распределения на тех же расстояниях в отсутствие модуляции, штриховые - исходные распределения при $x=0$. Видно, что плотность вероятности смещается в сторону увеличения времени нарастания, что обусловлено с одной стороны, уменьшением среднего значения амплитуды волны за счет нелинейного затухания и, с другой стороны, дефокусировкой лучей. Тенденция к увеличению в среднем времени нарастания ударного фронта волны после прохождения случайно-неоднородного слоя неоднократно наблюдалась в экспериментах [51, 75 - 77]. Влияние областей случайных фокусировок проявляется в расширении распределения и в область меньших значений времени нарастания.

1.4. Статистика нелинейной N -волны за экраном при учете дифракции

В данной части работы, в отличие от приближения НГА, используемого в предыдущих двух параграфах, задача о распространении N -волны большой амплитуды за случайным фазовым экраном решается численно на основе уравнения ХЗ (1.1). Обсудим преимущества такого обобщения полученных аналитических решений данной задачи. Решения, полученные в приближении НГА, справедливы только до расстояний, где образуются первые каустики, т.е. площадь какой-либо лучевой трубки обращается в ноль. В аналитическом решении для N -волны не учитывается нелинейная зависимость скорости распространения ударного фронта от его амплитуды, приводящая к дополнительным искажениям волнового фронта. Этот эффект может быть рассмотрен в рамках приближения НГА, однако в этом случае аналитического решения построить не удастся. При лучевом подходе также не учитываются дифракционные эффекты, поэтому сохраняется симметричная форма N -волны, тогда как в действительности при измерении профилей волн звукового удара, прошедших турбулентный слой, наблюдаются более сложные профили, например, U -волны, волны с двумя пиками давления, либо сглаженные профили [75]. В приближении НГА статистические свойства акустического поля на выбранном расстоянии от экрана зависят только от соотношения рефракционной и нелинейной длин. При учете дифракционных эффектов, существенное влияние на свойства акустического поля оказывает еще один параметр, а именно корреляционная

длина флуктуаций фазового экрана. При малых масштабах флуктуаций фазы фокусировка будет происходить от небольших участков поверхности экрана, а при больших – с больших апертур. При одном и том же расстоянии до каустик, амплитуда поля в них будет выше для больших масштабов флуктуаций. Следовательно, для корректного описания дифракционных эффектов при прохождении волны через каустики необходимо учитывать функцию пространственной корреляции фазового экрана.

Таким образом, численное решение уравнения Хохлова-Заболотской (ХЗ) позволяет учесть корреляционные свойства экрана, совместное влияние нелинейных и дифракционных эффектов, а также делает возможным описание статистики поля при прохождении случайных каустик и за каустиками. Учитывая свойство эргодичности, расчет одного случая и достаточно большой реализации позволяет сразу определить вероятностные распределения и средние значения всех параметров акустического поля за экраном.

Итак, рассмотрим, как и ранее, распространение вдоль оси x исходно плоской N -волны перпендикулярно к одномерному фазовому экрану, расположенному при $x = 0$ (рис. 1.10). Для удобства расчетов запишем уравнение ХЗ (1.1) в следующих безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}. \quad (1.21)$$

Здесь $P = p/p_0$ – акустическое давление, нормированное на начальную амплитуду N -волны p_0 , $\sigma = x/\lambda$ – координата вдоль направления распространения волны и $\rho = y/\lambda$ – поперечная координата, нормированные на длину N -волны $\lambda = c_0 T_0$, c_0 – скорость звука в среде, $\theta = 2\pi\tau/T_0$ – безразмерное время, нормированное на начальную длительность N -волны T_0 , $\tau = t - x/c_0$ – время в бегущей системе координат. В уравнение (1.21) входит безразмерный нелинейный параметр $N = 2\pi\varepsilon p_0 / c_0^2 \rho_0 = \pi\lambda / x_n$, где $x_n = T_0 c_0^3 \rho_0 / 2\varepsilon p_0$ – характерная нелинейная длина, на которой амплитуда плоской N -волны уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. Уравнение (1.21) решается численно (см. приложение 2).

В качестве граничного условия задается N -волна со случайной временной задержкой $2\pi\Psi(\rho)$ для каждого значения поперечной координаты, т.е. $P(\sigma = 0, \theta, \rho) = P_0(\theta - 2\pi\Psi(\rho))$, где функция $P_0(\theta)$ определяет профиль N -волны с безразмерной длительностью 2π . Ограничимся рассмотрением модели случайного

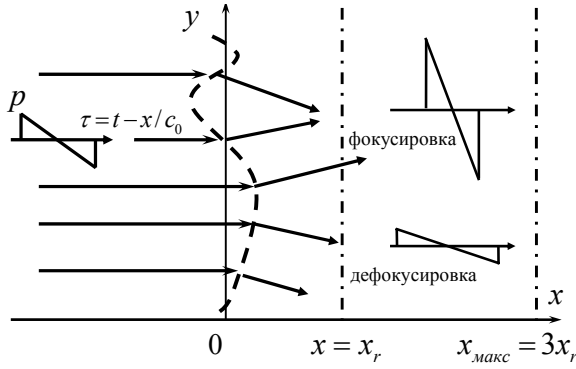


Рис. 1.10. Распространение исходно плоской N -волны за бесконечно тонким фазовым экраном (штриховая линия), расположенным при $x=0$. Характерная рефракционная длина экрана обозначена как x_r , максимальное расстояние в расчетах составляет $x_{\max} = 3x_r$.

фазового экрана с гауссовским пространственным спектром, который удобен для расчетов и является широко используемой моделью [64, 66, 90]. Конкретные реализации экрана $\Psi(\rho)$ были получены с использованием метода фильтрации белого гауссовского шума [65]. В этом методе амплитуды гармоник дискретного пространственного спектра Фурье функции $\Psi(\rho)$ представляют собой δ -

коррелированные псевдослучайные нормально распределенные комплексные числа, умноженные на коэффициент $\sqrt{G(k = n\Delta k)\Delta k}$, где

$$G(k) = G_0 \exp(-k^2 l^2 / 2), \quad (1.22)$$

– гауссовская спектральная плотность мощности фазового экрана $\Psi(\rho)$, G_0 – амплитуда спектра, l – корреляционная длина, определяющая характерный масштаб флуктуаций фазы, n – номер дискретной пространственной Фурье гармоники, Δk – шаг дискретизации между гармониками. Действительная и мнимая части результата обратного дискретного преобразования Фурье дают две статистически независимые реализации фазового экрана. Флуктуации фазы $\Psi(\rho)$ имеют гауссовскую функцию распределения с нулевым средним значением и дисперсией D_0 :

$$W(\Psi) = 1/\sqrt{2\pi D_0^2} \exp(-\Psi^2 / 2D_0^2). \quad (1.23)$$

Вторая производная функции фазового экрана, $\partial^2 \Psi / \partial \rho^2$, определяющая сходимость лучевых трубок в каждой точке с поперечной координатой ρ , также имеет гауссовскую функцию распределения [70]:

$$W(\Psi'' = \partial^2 \Psi / \partial \rho^2) = 1/\sqrt{2\pi D_2^2} \exp(-\Psi''^2 / 2D_2^2) \quad (1.24)$$

Величина $\sigma_r = 1/D_2$, обратная дисперсии распределения функции сходимости D_2 , соответствует характерной длине рефракции, т.е. расстоянию, на котором образуется большинство первых каустик. Поскольку уравнение ХЗ справедливо для параксиального распространения волн и небольших углов дифракции [78], то для моделирования рефракционная длина была выбрана достаточно большой как по сравнению с

корреляционной длиной, так и по сравнению с длиной начальной N -волны: $\sigma_r = 63$. Гауссовский спектр, задаваемый уравнением (1.22), характеризуется двумя независимыми параметрами: амплитудой G_0 и характерной корреляционной длиной l . Согласно общим свойствам гауссовских случайных процессов, характерная рефракционная длина σ_r связана с параметрами G_0 и l как:

$$\sigma_r^{-2} = 3\sqrt{2\pi}l^{-5}G_0 \quad (1.25)$$

На рис. 1.11 слева представлены примеры реализаций двух фазовых экранов, обладающих одной и той же рефракционной длиной σ_r , но разными корреляционными

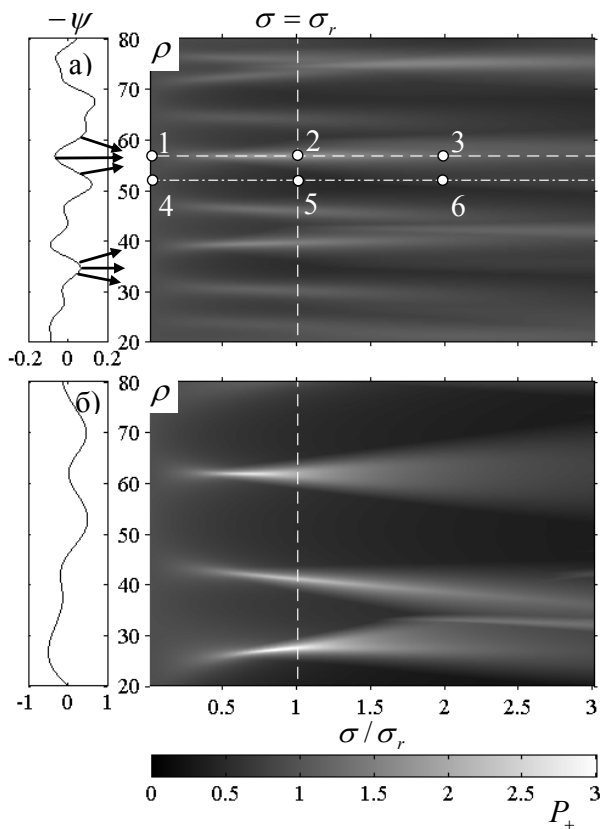


Рис. 1.11. Распределения пикового положительного давления N -волны за фазовыми экранами $\Psi(\rho)$ (изображены слева) с различными корреляционными длинами: а) $l=3$ и б) $l=6$. Нелинейная длина $\sigma_n = 8\sigma_r$, рефракционная длина $\sigma_r = 63$. Профили N -волны, рассчитанные вдоль горизонтальной пунктирной линии (область фокусировки) в точках 1-3, показаны на рис. 1.13 (а), профили, рассчитанные вдоль горизонтальной штрихпунктирной линии (область дефокусировки) в точках 4-6, показаны на рис. 1.13 (б). Распределение пикового положительного давления вдоль вертикальной штриховой линии на рис. 1.11 (а) показано на рис. 1.14 (б).

длинами, измеряемыми в длинах исходной N -волны. Показан начальный временной сдвиг акустической волны $\Psi(\rho)$, задаваемый фазовым экраном. Верхней реализации (рис. 1.11 (а)) соответствует безразмерная корреляционная длина $l=3$, нижней (рис. 1.11 (б)) - в два раза большая длина $l=6$. Масштабы пространственных флуктуаций, равные нескольким длинам N -волны, были выбраны в соответствии с экспериментальными данными работы [77]. Стрелки на рис. 1.11 (а) иллюстрируют фокусировку или дефокусировку акустической волны в соответствии с опережающей или запаздывающей начальной фазой (выпуклые или вогнутые участки фазового экрана). Видно, что диапазон изменения фазы для второго экрана с более крупными пространственными неоднородностями шире, чем для мелкомасштабного экрана. Это легко объяснить, учитывая, что амплитуда флуктуаций фазы пропорциональна дисперсии D_0 , (1.23), для которой в

случае гауссовского спектра (1.22) справедливо соотношение: $D_0^2 = \sqrt{2\pi}G_0/l$. Используя формулу (1.25) и исключая G_0 , можно найти, что $D_0 = l^2/\sigma_r\sqrt{3}$, т.е. дисперсия пропорциональна квадрату корреляционной длины. Следовательно, флуктуации второго фазового экрана, будут более интенсивны, чем флуктуации первого, что и наблюдается на рис. 1.11. В приближении НГА эти два фазовых экрана с одинаковой рефракционной длиной эквивалентны в статистическом смысле и порождают одинаковые решения для функции распределения амплитуды N -волны. При учете дифракции, решения для них будут различными.

На рис. 1.11 (а,б) справа представлены характерные примеры пространственных распределений пикового положительного давления P_+ за экранами. Для наглядности, ширина областей, показанных в качестве примера, гораздо меньше ширины всей области моделирования. Расчеты проводились для безразмерной нелинейной длины $\sigma_n = 8\sigma_r$ и безразмерной рефракционной длины $\sigma_r = 63$. В целом за экраном наблюдается сложная картина акустического поля; фокальные области формируются на различных расстояниях от фазового экрана и имеют различную степень концентрации поля, зависящую от размера и амплитуды конкретной неоднородности фазового экрана. Первые области фокусировок большой амплитуды (каустики) расположены приблизительно на расстоянии рефракционной длины σ_r от фазового экрана. Это расстояние отмечено на рисунке вертикальной штриховой линией. На расстояниях, превышающих рефракционную длину, также наблюдаются случайные фокусы, которые обусловлены крупномасштабными флуктуациями фазы. В среднем амплитуда N -волны в этих дальних фокусах меньше, чем в ближних, что в основном связано с проявлением сильного нелинейного поглощения.

Сравнение рис. 1.11 (а) и (б) показывает, что большие по размеру флуктуации фазы приводят к более интенсивным фокусировкам. Например, максимум безразмерного давления на рис. 1.11 (а) составляет $P_+ = 1.8$, а на рис. 1.11 (б) $P_+ = 3.1$. В то же время, для экрана с большей корреляционной длиной наблюдается меньшее количество фокусов. Таким образом, при той же рефракционной длине, мелкомасштабные модуляции волнового фронта, по сравнению с крупномасштабными модуляциями, приводят к большему количеству случайных фокусировок, но с меньшим пиковым давлением.

Эффективность фокусировки в каустиках также сильно зависит и от нелинейных эффектов. Будем сравнивать результаты нелинейных расчетов с результатами, полученными при линейном распространении N -волны. Если нелинейные эффекты достаточно сильны, то распространение N -волны сопровождается эффективным поглощением энергии на ударных фронтах, вследствие чего ее амплитуда быстро

уменьшается на пути от экрана до каустика. С другой стороны, нелинейное уменьшение ширины ударного фронта в областях увеличения амплитуды приводит к улучшению фокусировки, поскольку профиль волны в каустике дифференцируется (с некоторой поправкой на поглощение и нелинейные эффекты). При не очень больших амплитудах N -волны эффект нелинейного улучшения фокусировки будет превосходить эффект от нелинейного поглощения. Наоборот, если амплитуда достаточно велика, то фокусировка оказывается слабее, чем при линейном распространении. Таким образом, эффективность фокусировки поля в случайных каустиках зависит от рефракционной длины и является немонотонной функцией амплитуды исходной волны.

Такое немонотонное поведение эффективности фокусировки в зависимости от нелинейных эффектов проиллюстрировано на рис.1.12 (а, б). На рис. 1.12 (а) показаны распределения пикового давления вдоль продольной координаты σ при фиксированной поперечной координате $\rho = 56.7$ (горизонтальная штриховая линия на рис. 1.11 (а)). Выбранная траектория проходит через каустику. На рис. 1.12 (б) показано распределение пикового давления вдоль поперечной координаты ρ на расстоянии рефракционной длины от экрана $\sigma = \sigma_r$ (вертикальная штриховая линия на рис. 1.11 (а)). Для сравнения представлены результаты расчетов в линейном и трех нелинейных режимах распространения. Сплошная линия соответствует линейному распространению (1), а в расчете нелинейных режимов использовались следующие значения нелинейных длин: $\sigma_n = 8\sigma_r$ – штриховая линия (2), $\sigma_n = 2\sigma_r$ – пунктирная линия (3) и $\sigma_n = \sigma_r$ – штрихпунктирная (4). Из рис. 1.12 видно, что пиковое давление в фокусе при слабом проявлении нелинейных эффектов, $\sigma_n = 8\sigma_r$ (2), примерно на 10% превосходит пиковое

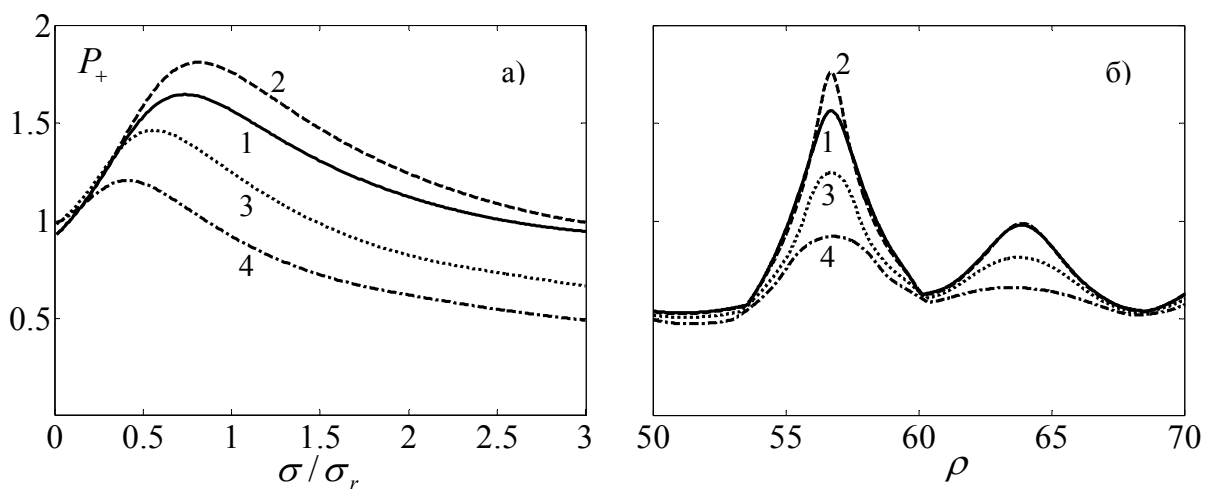


Рис. 1.12. Изменение положительного пикового давления вдоль горизонтальной а) и вертикальной б) штриховых линий на рис. 1.11 (а) при различных нелинейных длинах: 1) $\sigma_n = \infty$ (линейное распространение), 2) $\sigma_n = 8\sigma_r$, 3) $\sigma_n = 2\sigma_r$, and 4) $\sigma_n = \sigma_r$. Кривая 2) соответствует реализации поля пикового давления, показанной на рис. 1.11 (а).

давление в линейном случае. Кривые (3) и (4) соответствуют гораздо более сильному проявлению нелинейности, при которой нелинейное поглощение на ударном фронте доминирует над эффектом улучшения фокусировки. При этом пиковое давление меньше, чем в линейном случае, уменьшается при дальнейшем увеличении нелинейности, наблюдается смещение максимума поля в направлении фазового экрана.

Искажение профиля начальной N -волны вследствие совместного влияния нелинейности, дифракции и случайных фокусировок показано на рис.1.13. Профили волны рассчитаны на различных расстояниях от экрана вдоль белых горизонтальных линий на рис. 1.11 (а). Штриховая линия проходит через каустику, а штрихпунктирная – через низкоамплитудную область дефокусировки. Белыми точками на рис. 1.11 (а) отмечены расстояния, на которых были рассчитаны профили. Нумерация точек соответствует нумерации профилей на рис. 1.13. Начальный профиль N -волны показан сплошными линиями (1) и (4). Характерные изменения профиля N -волны, наблюдающиеся при распространении через каустику, показаны на рис. 1.13 (а): в зоне фокусировки ($\sigma = \sigma_r$) профиль имеет несимметричную U -образную форму с большим положительным пиковым давлением (2, штриховая линия); на больших расстояниях $\sigma = 2\sigma_r$ (3, пунктирная линия) пиковое давление в профиле меньше, наблюдается длинный «хвост» давления и за счет нелинейных эффектов увеличивается длительность импульса. На рис.1.13 (б) показаны профили при прохождении N -волны через область дефокусировки. Наблюдаются двухпиковый (5, пунктирная линия) и сглаженный (6, штриховая линия) профили, которые образуются в результате интерференции рассеянных волн с различающимися временами прибытия.

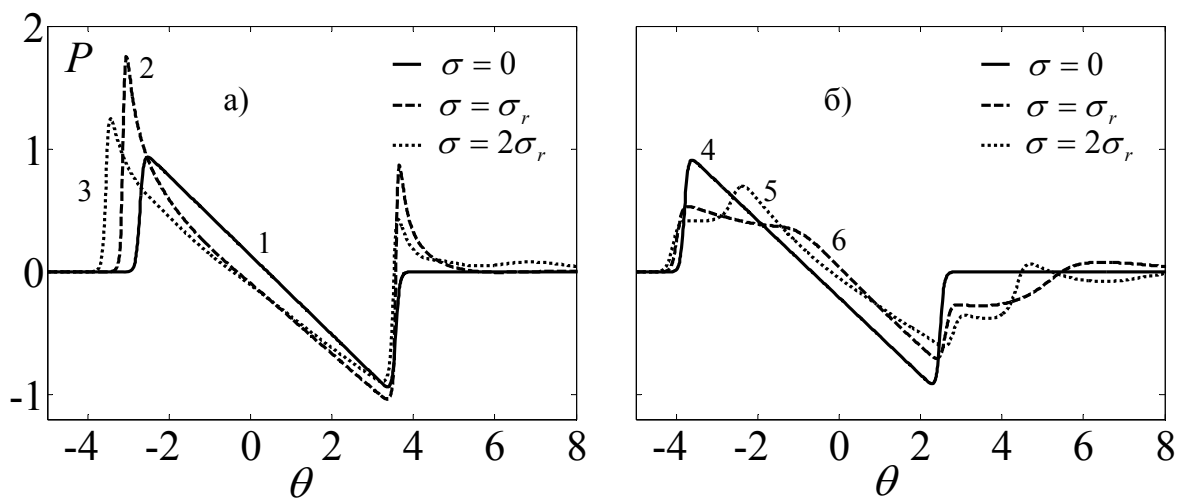


Рис. 1.13. Профили N -волны, рассчитанные в точках 1-3 и 4-6 вдоль горизонтальных штриховой (а) и штрихпунктирной (б) линий, показанных на рис. 1.11 (а). Профили пронумерованы последовательно: начальная волна (1, 4), волна в фокусе (2, $\sigma = \sigma_r$), и после фокуса (3, $\sigma = 2\sigma_r$). В области дефокусировки наблюдаются двухпиковый (5) и сглаженный (6) профили.

Статистические свойства поля N -волны за фазовым экраном будем описывать функциями распределения вероятности положительного пикового давления, P_+ . При построении функций распределения использовались численные решения уравнения ХЗК для поля за двумя независимым реализациям фазового экрана. На каждом шаге по координате σ амплитуда давления P_+ рассчитывалась в каждом узле сетки по поперечной координате, а вероятность $W(P_+)dP_+$ определялась пропорционально числу узлов с амплитудами, лежащими в интервале от P_+ до $P_+ + dP_+$. Нелинейная и рефракционная длины были выбраны одинаковыми, $\sigma_n = \sigma_r$. Результаты расчетов показаны на рис. 1.14 на расстояниях $\sigma = 0.25\sigma_r$ (а), $\sigma = \sigma_r$ (б) и $\sigma = 2\sigma_r$ (в) от фазового экрана. Тонкой черной линией с круговыми маркерами представлены результаты для фазового экрана с корреляционной длиной $l = 3$. Тонкая серая линия со сплошными круговыми маркерами соответствует фазовому экрану с корреляционной длиной $l = 6$. Для сравнения, сплошными линиями показаны также функции распределения, полученные аналитически в приближении НГА (рис. 1.7). Отметим, что аналитические решения верны лишь до расстояний, меньших рефракционной длины. Амплитуды нелинейной плоской N -волны, без начальной модуляции фронта, показаны вертикальными пунктирными линиями. Результаты моделирования на основе уравнения ХЗ и аналитические решения НГА показывают уширение начальной δ -образной функции распределения амплитуды N -волны. На небольших расстояниях от фазового экрана ($\sigma = 0.25\sigma_r$, рис. 1.14 (а)) функции распределения амплитуды, полученные в рамках ХЗК и НГА подходов, практически

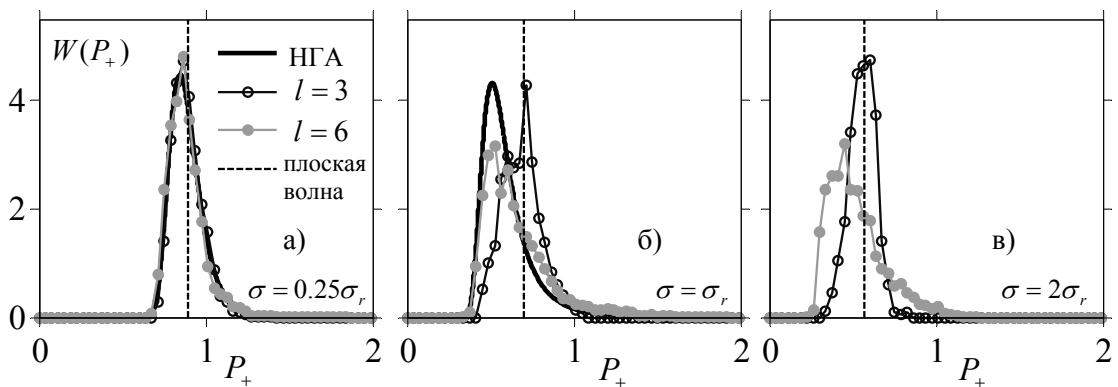


Рис. 1.14. Сравнение функций распределения положительного пикового давления N -волны, полученных в дифракционной модели ХЗ (круговые маркеры) и аналитических решений лучевой модели НГА (сплошные линии). Черные круговые маркеры соответствуют фазовому экрану с корреляционной длиной $l = 3$, серые маркеры – $l = 6$. Штриховые линии показывают распределения в случае распространения плоской волны (δ -функции). Показаны распределения на расстояниях $\sigma = 0.25\sigma_r$ (а), σ_r (б) и $2\sigma_r$ (в) за фазовым экраном. Нелинейная и рефракционная длины одинаковы: $\sigma_n = \sigma_r$, $\sigma_r = 63$.

совпадают: в предфокальной области дифракционные эффекты и различие в корреляционных длинах экранов несущественны.

На больших расстояниях ($\sigma = \sigma_r$, рис. 1.14 (б)), результаты НГА и дифракционной модели начинают заметно различаться. Серая кривая (крупные флуктуации фазы) остается все еще довольно близкой к распределению, полученному в приближении НГА. Хорошее согласие распределений наблюдается для малых амплитуд, которые соответствуют зонам дефокусировки (рис. 1.11а). Это означает, что профили в этих областях, рассчитанные с учетом дифракции и без нее, оказываются близкими по амплитуде. Области случайных фокусировок с высокой амплитудой занимают лишь небольшую часть от поперечного сечения акустического поля (рис. 1.11 (а)), и поэтому вносят небольшой вклад в функцию распределения вероятности. В обеих моделях функции распределения не равны нулю вплоть до больших амплитуд, но значения плотности вероятности в этой области относительно малы. Если некоторые случайные каустики образуются, немного не доходя до выбранного расстояния, то их вклад в высокоамплитудную часть распределения в приближении НГА исключается, а в численном решении – учитывается; поэтому вероятность наблюдения больших амплитуд с учетом дифракции (серая кривая) выше, чем в решении НГА (черная кривая). Также, в приближении НГА значения функции распределения в целом несколько завышены по сравнению с результатами моделирования на основе уравнения ХЗК. Это также объясняется тем, что в приближении НГА лучевые трубки, площадь сечения которых на некотором расстоянии стала равной нулю, далее не учитываются. Вследствие случайной природы фазового экрана некоторые из каустик появляются на близких расстояниях, меньших, чем рефракционная длина σ_r . Лучевые трубки, участвующие в образовании каустик, исключаются из расчета, и общее число лучевых трубок, используемое при нормировке распределения, уменьшается. Следовательно, с увеличением пройденного волной расстояния за фазовым экраном, значения функции распределения вероятности становятся относительно больше, и функция теряет свойство нормировки на единицу.

В случае мелкомасштабных неоднородностей (рис. 1.14 (б), черная кривая с круговыми маркерами), дифракционные эффекты выражены значительно сильнее. Поскольку сильные фокусировки отсутствуют (рис. 1.11 (а)), то вероятность наблюдения очень больших амплитуд меньше, чем при крупномасштабных неоднородностях. С другой стороны, количество случайных фокусов больше и вероятность наблюдения повышенных амплитуд больше, чем в случае, когда случайных фокусов мало. Функция распределения смещена в область повышенных амплитуд и практически симметрична относительно значения, соответствующего нелинейному распространению плоской N -волны.

Следовательно, мелкомасштабные модуляции волнового фронта приводят к уширению δ -образной функции распределения плоской N -волны, однако с меньшим смещением в область малых амплитуд, как это имеет место при крупномасштабных модуляциях. На рис. 1.14 (в) показано, что различие между мелкими и крупными неоднородностями сильнее проявляется на еще больших расстояниях от экрана ($\sigma = 2\sigma_r$). Решение в приближении НГА здесь уже несправедливо и показаны только результаты моделирования на основе уравнения ХЗК. Видно, что при крупномасштабных неоднородностях вероятность наблюдения больших амплитуд возрастает, но при этом максимум функции распределения смещен в область малых амплитуд.

Влияние нелинейных эффектов на искажение функций распределения пикового давления показано на рис. 1.15. Распределения построены на расстоянии двух рефракционных длин $\sigma = 2\sigma_r$ для линейного распространения (рис. 6 (а)) и двух случаев нелинейного распространения при $\sigma_n = 4\sigma_r$ (рис. 1.15 (б)) и $\sigma_n = \sigma_r$ (рис. 1.15 (в)). Корреляционная длина фазового экрана равна $l = 3$. Видно, что с ростом нелинейности распределения амплитуды становятся уже. Например, при сильной нелинейности (рис. 1.15 (в)) распределение примерно в два раза уже, чем при линейном распространении (рис. 1.15 (а)). Кроме того, при сильной нелинейности вероятность наблюдения высоких амплитуд очень незначительна. Таким образом, нелинейные эффекты приводят к уменьшению уровня флуктуаций амплитуды, вызванных начальными искажениями волнового фронта. Это объясняется тем, что за счет сильного нелинейного поглощения в областях фокусировок происходит ускоренное уменьшение амплитуды, и, следовательно, снижение уровня максимальных амплитуд при дальнейшем распространении.

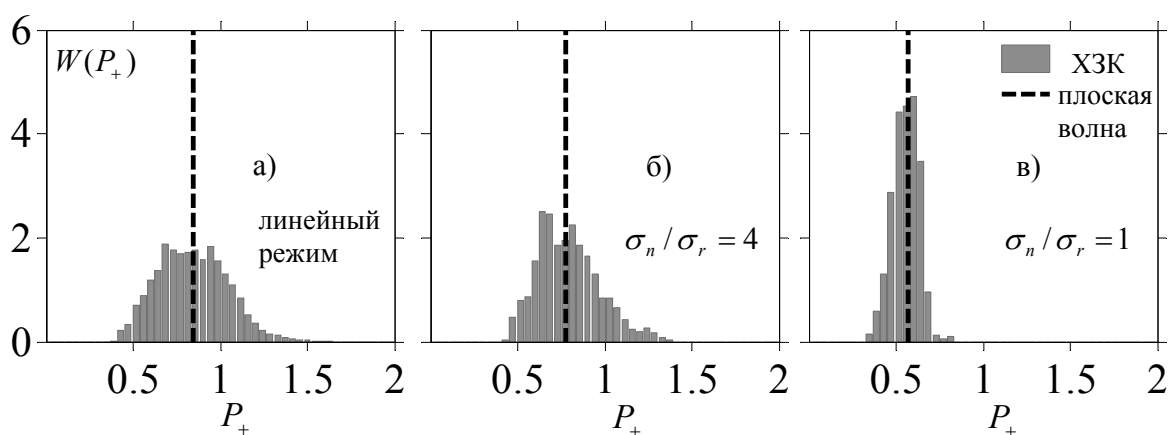


Рис. 1.15. Сравнение функций распределения пикового положительного давления N -волны на расстоянии $\sigma = 2\sigma_r$ при различных нелинейных длинах σ_n : (а) линейное распространение, (б) $\sigma_n = 4\sigma_r$ и (в) $\sigma_n = \sigma_r$ для фазового экрана с корреляционной длиной $l = 3$.

Количественно совместное влияние нелинейных эффектов и случайных фокусировок на функции распределения пикового давления может быть проанализировано сравнением двух первых статистических моментов: среднего значения и дисперсии. На рис. 1.16 (а, б) представлены зависимости среднего значения и дисперсии от расстояния. Рефракционная длина равна $\sigma_r = 63$, а корреляционная длина $l = 6$ (крупномасштабные неоднородности). На обоих рисунках (а) и (б) черные линии соответствуют распространению волны за фазовым экраном: сплошные линии (1) – линейному распространению, штриховые линии (2) – нелинейному распространению при $\sigma_n = 8\sigma_r$, штрихпунктирные (3) – при $\sigma_n = \sigma_r$. На рис. 1.16 (а) набор из трех серых линий соответствует распространению плоской волны без фазовой модуляции. На рис. 1.16 (б) набор серых линий соответствует дисперсии, полученной в приближении НГА до расстояния одной рефракционной длины, соответствующего области его применимости.

Из рис. 1.16 (а) видно, что при наличии фазового экрана средняя амплитуда всегда меньше, чем в случае плоской волны, как это можно было ожидать из распределений, показанных на рис. 1.14. При слабой нелинейности средняя амплитуда немного выше, чем при линейном распространении. Так же как и в случае одиночного фокуса, показанного на рис. 1.12, фокусировка здесь происходит более эффективно, поскольку за счет нелинейных эффектов волна имеет более крутой ударный фронт. Поскольку нелинейность слабая, эффект улучшения фокусировки не подавлен увеличением нелинейного поглощения. Так как в плоской волне нелинейность приводит только к дополнительному затуханию, то эффект обратный – среднее значение давления больше при линейном распространении. При сильной нелинейности эффективность поглощения на ударном

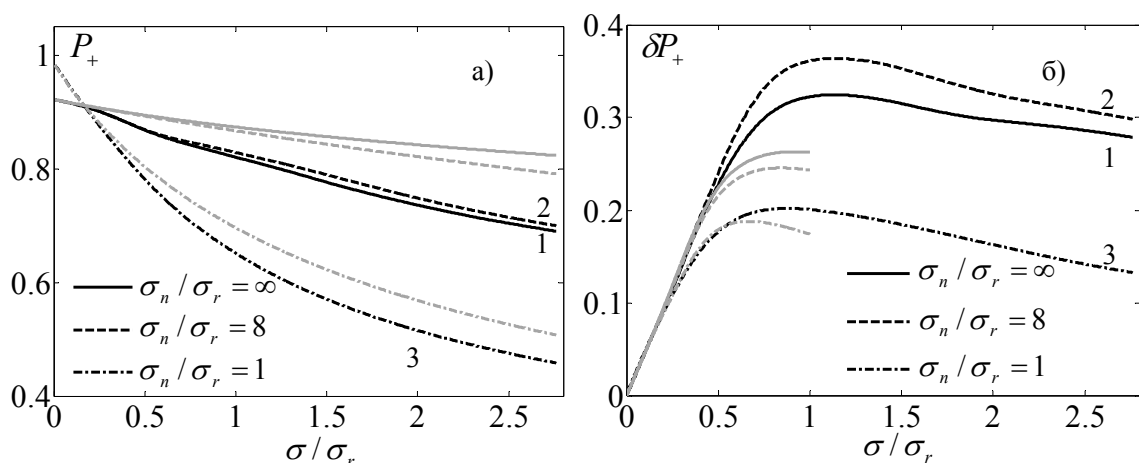


Рис. 1.16. Зависимость среднего значения пикового давления (а) и его дисперсии (б) от расстояния за фазовым экраном при разных нелинейных длинах σ_n : сплошная линия – линейное распространение, штриховая – нелинейное с $\sigma_n = 8\sigma_r$ и штрихпунктирная – с $\sigma_n = \sigma_r$ (3). Серые линии на рисунке (а) соответствуют амплитуде плоской N -волны. На рисунке (б) серые линии соответствуют аналитическим решениям, полученным в приближении НГА.

фронте возрастает, и средние амплитуды существенно меньше, чем при линейном распространении, как в плоской волне, так и в случайном поле.

Дисперсия амплитуды с увеличением расстояния меняется немонотонно (рис. 1.16 (б)). Результаты представлены только для случая случайного поля, т.к. в плоской волне дисперсия равна нулю. Вначале дисперсия линейно растет с расстоянием, начиная с нуля при $\sigma = 0$. Скорость начального линейного роста не зависит от нелинейной длины, что соответствует асимптотическому выражению для дисперсии $\delta P_+ = 0.5\sigma / \sigma_r$, при $\sigma \ll \sigma_r$, полученному в приближении НГА. На расстоянии примерно равном рефракционной длине дисперсия достигает максимума, поскольку большинство сильных фокусировок, приводящих к уширению функции распределения, наблюдается как раз на этих расстояниях. После прохождения максимума дисперсия медленно и монотонно уменьшается. Из рис. 1.16 (б) видно, что при линейном (1) и слабо нелинейном (2) режимах распространения максимум дисперсии находится практически на расстоянии одной рефракционной длины от экрана. При сильной нелинейности максимум смещен к экрану из-за влияния нелинейного поглощения, которое подавляет высокоамплитудные выбросы. Как и среднее значение амплитуды, максимум дисперсии обладает немонотонным поведением при увеличении нелинейности. При слабой нелинейности (2) дисперсия немного больше, чем при линейном распространении (1). Сильная нелинейность (3) приводит к значительному снижению максимума и общего уровня дисперсии, как это видно также из рис. 1.15. Таким образом, при больших амплитудах исходной N -волны флуктуации пикового давления за экраном оказываются существенно подавленными из-за сильного нелинейного поглощения на фронтах, которое особенно выражено в областях фокусировок.

На рис. 1.16 (б) также показано сравнение дисперсии амплитуды, полученной в численных расчетах, с аналитическими решениями в приближении НГА (серые линии) при различных нелинейных длинах. Отметим, что расчет дисперсии в НГА проводился с учетом перенормировки функций распределения: $\tilde{W}(P_+) = W(P_+) / \int_0^\infty W(P_+) dP_+$, о чем уже шла речь при обсуждении рис. 1.14. Из рисунка видно, что примерно на расстоянии $\sigma = 0.5\sigma_r$ от фазового экрана решения, полученные в приближении НГА, уже заметно отличаются от результатов решения уравнения ХЗК. Если бы перенормировка функций распределения амплитуды не проводилась, то тогда заметные отличия проявились бы уже на расстоянии $\sigma = 0.25\sigma_r$. На больших расстояниях, ближе к длине рефракции, решения, полученные в приближении НГА, более не применимы и существенно отличаются от

результатов, рассчитанных с учетом дифракции и прохождения волны через случайные фокусы.

1.5. Искажение поля сфокусированного ультразвукового пучка конечной амплитуды за случайным фазовым слоем

В данном параграфе, в отличие от предыдущих задач, рассматривается прохождение не плоской волны, а ограниченного фокусированного пучка конечной амплитуды через случайный фазовый слой. Основной идеей этой части работы было показать, что фокусировка высших гармоник в пучке может быть менее подвержена разрушению фазовым слоем, чем фокусировка волны основной частоты [79], а также продемонстрировать в численном моделировании и подтвердить в эксперименте возможность избирательного разрушения фокусировки определенных гармоник.

Рассматривался фазовый слой, состоящий из множества случайно расположенных в плоскости одинаковых круглых областей, дающих фиксированный фазовый сдвиг. Подобная модель была использована в работе [80] для экспериментального подтверждения выводов теории, основанной на модели фазового слоя с плавными изменениями и слабой модуляцией фазы в условиях квазилинейного распространения пучка. В нашей работе величина фазового сдвига подбиралась такой, чтобы обеспечить специфические «резонансные» условия для определенных гармоник. Кроме того, анализировался более полный их набор, включающий шесть первых гармоник.

Для численного описания нелинейных и дифракционных эффектов в сфокусированном ультразвуковом пучке со случайной фазовой модуляцией использовалось уравнение Вестервельта [30]:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p^2) \quad (1.26)$$

Здесь $\Delta p = \partial^2 p / \partial z^2 + \partial^2 p / \partial y^2 + \partial^2 p / \partial x^2$, x – координата вдоль оси пучка, z и y – поперечные к x пространственные координаты. В отличие от уравнения Хохлова-Заболотской в уравнении (1.26) не делается предположения о малости углов дифракции. Поскольку рассматриваемые характерные размеры исследуемых неоднородностей составляют всего несколько длин волн, дифракционные эффекты необходимо было учитывать более точно.

Уравнение (1.26) также решалось численно с помощью специально разработанного для этой цели нового алгоритма (см. приложение 2). В качестве граничного условия

использовались как модель поршневого фокусирующего излучателя, так и полученные экспериментально данные по распределению амплитуды колебательной скорости на поверхности преобразователя. Измерения проводились с помощью метода акустической голографии в условиях линейного режима фокусировки [81]. При сравнении результатов численного эксперимента абсолютная величина амплитуды давления вблизи поверхности излучателя выбиралась таким образом, чтобы фокальные распределения первой и второй гармоник для случая однородной среды наилучшим образом совпадали с измеренными значениями в воде.

Для определения степени сохранения (разрушения) фокусировки фазовым слоем использовался энергетический критерий, сходный с введенным в работе [56]. В его основе лежит вычисление доли мощности пучка, сконцентрированной в пределах главного фокального пика. Рассчитывалось отношение α_n мощности пучка на частоте n -ой гармоники в пределах ее главного фокального максимума W_n к полной мощности пучка W_{0n} на той же частоте: $\alpha_n = W_n / W_{0n}$. Нормированная величина $Q_n = \alpha_n^{scr} / \alpha_n^0$, где коэффициент α_n^{scr} рассчитывался в присутствии случайного слоя, а α_n^0 – без слоя, характеризует степень сохранения фокусировки n -ой гармоники пучка после прохождения через слой. Размер зоны центральной фокальной области выбирался по уровню -6 дБ от максимума каждой из гармоник по аналогии с принятыми методиками для определения средней по пространству интенсивности в фокусе [6]. Случаю полного разрушения фокальной области соответствует $Q_n \rightarrow 0$, а случаю фокусировки без фазового слоя $Q_n = 1$. Величины α_n^0 , α_n^{scr} и Q_n вычислялись для первых шести гармонических компонент пучка. Моделирование проводилось для различных положений слоя на оси пучка и величин фазового сдвига на неоднородностях слоя. Ниже приведены наиболее показательные результаты для случая 180-градусного набега фазы по основной частоте, иллюстрирующие эффект избирательного воздействия на нечетные гармоники.

Упрощенная схема эксперимента, проведенного для подтверждения результатов моделирования, представлена на рис. 1.17. Пьезокерамический ультразвуковой излучатель диаметром 40 мм, фокусным расстоянием 72 мм и резонансной частотой 1.1 МГц размещался в водном бассейне. Длительность излучаемых импульсов составляла ~ 23 мкс, частота повторения 100 Гц, положительное пиковое давление в фокусе в отсутствие слоя составляло 2.2 МПа, а интенсивность пучка в фокусе – 300 Вт/см². Измерение акустического поля осуществлялось широкополосным мембранным гидрофоном (GEC-Marconi) с диаметром активной зоны 0.5 мм. Гидрофон перемещался в фокальной плоскости излучателя с помощью автоматизированной позиционирующей системы

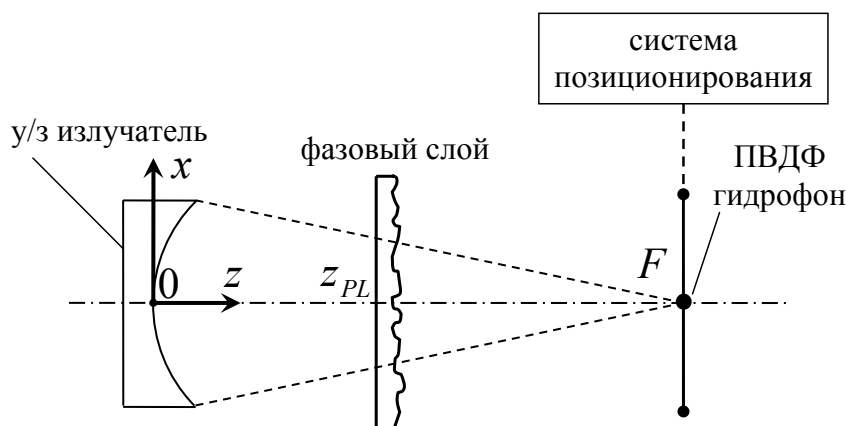


Рис. 1.17. Схема экспериментальной установки для наблюдения разрушения фокусировки гармоник после прохождения фазового слоя.

Velmex BiSlide. Сканирование осуществлялось на области 50×50 мм с шагом 1 мм. Для центральной фокальной области использовалась дополнительная сетка сканирования с шагом 0.2 мм. В каждой точке измеряемого поля производилось усреднение сигнала по 16 выборкам и последующий Фурье-анализ с вычислением комплексных амплитуд p_n первых шести гармоник.

Для нахождения величины Q_n в фокальном распределении поля каждой n -ой гармоники в отсутствие слоя определялась область, где амплитуда составляла не менее -6 дБ от центрального максимума. В этой области по элементам сетки измерений вычислялась сумма квадратов модулей комплексных амплитуд $|p_n|^2$, пропорциональная мощности гармоники W_n в фокальном пятне. Величина W_{0n} , пропорциональная полной мощности гармоники, рассчитывалась аналогичным суммированием по всей измеряемой области. При этом значения $|p_n|$, не превосходящие амплитуду шумов, полагались равными нулю. Далее вычислялась величина Q_n на основе приведенных выше соотношений.

Фазомодулирующий слой помещался между излучателем и фокусом ортогонально оси излучателя. Внешний вид одной из моделей слоя показан на рис. 1.18. Слой представлял собой пластинку из полиэтилена с одинаковыми цилиндрическими углублениями. Толщина пластинки составляла 4.4 мм, а диаметр углублений – 3 мм. Максимальные искажения достигались при отношении площади углублений к общей площади слоя равном 0.5. Именно это соотношение площадей и использовалось при изготовлении слоя. Значение диаметра углублений $d = 3$ мм было выбрано как компромисс между разумным для изготовления числом углублений и стремлением к

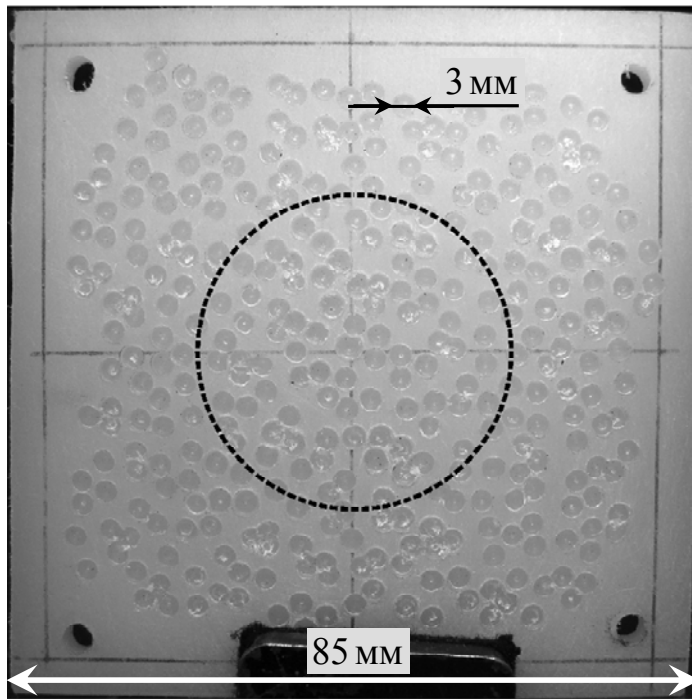


Рис. 1.18. Фотография модели фазового слоя. Глубина отверстий соответствует 180° фазовому сдвигу для основной частоты пучка. Окружностью показан размер излучателя.

достижению существенных искажений фокусировки.

Для нахождения координат центров углублений в моделировании и эксперименте был реализован алгоритм, отличающийся от использованного ранее в работах по созданию двумерных фазированных решеток со случайным расположением элементов [82]. Алгоритм предполагал разбиение поверхности на сетку, состоящую из равносторонних треугольников со стороной $D = d\sqrt{\pi/\sqrt{3}}$, с

последующим случайным и независимым друг от друга отклонением центров отверстий из узлов сетки в пределах заданного круга. Радиус круга для случайного отклонения выбирался таким образом, чтобы перекрытия отверстий отсутствовали или были незначительными. Характерное значение этого радиуса было равно $1.25 \cdot (D - d)$.

Слой был изготовлен из полиэтилена низкой плотности (PE-LD). Скорость продольных волн в слое составляла $c_{pe} = 1950$ м/с, плотность $\rho_{pe} = 920$ кг/м³ [83], а акустический импеданс – $\rho_{pe}c_{pe} = 1.79 \cdot 10^6$ кг/м²с. Близость импедансов полиэтилена и воды ($\rho_w c_w = 1.49 \cdot 10^6$ кг/м²с) обеспечивала хорошее акустическое согласование этих двух сред. Коэффициент прохождения волны (по звуковому давлению), измеренный для плоскопараллельной пластинки полиэтилена толщиной 4.4 мм с учетом затухания на частоте 1.1 МГц при нормальном падении в воде, составил 0.79. В экспериментах использовалась модель фазового слоя с глубиной цилиндрических выемок 2.8 ± 0.1 мм, что соответствовало фазовому сдвигам на неоднородностях слоя для основной частоты 180° с точностью не хуже 4%.

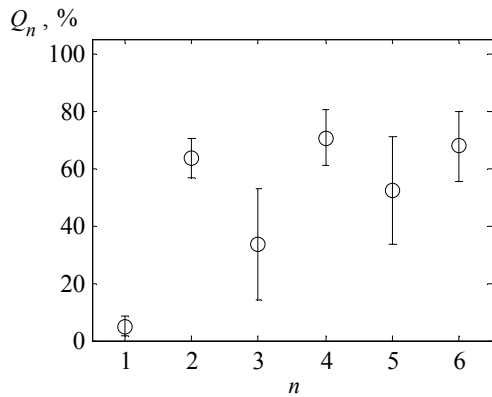


Рис. 1.19. Результаты моделирования критерия сохранения фокусировки Q_n для первых шести гармоник за 180° фазовым слоем, расположенным на половине расстояния от излучателя, $z_{PL} = 0.5F$.

на рисунке показаны значения Q_n (кружки) и среднеквадратичные отклонения, полученные как результат усреднения десяти расчетов с различными реализациями распределений фазовых областей на слое. Как и предполагалось, характерной особенностью данного случая является сильное искажение фокусировки пучка на основной частоте и на нечетных гармониках. В то же время, четные гармоники, фаза которых фактически не изменяется при прохождении слоя, искажены слабее. С повышением номера гармоник

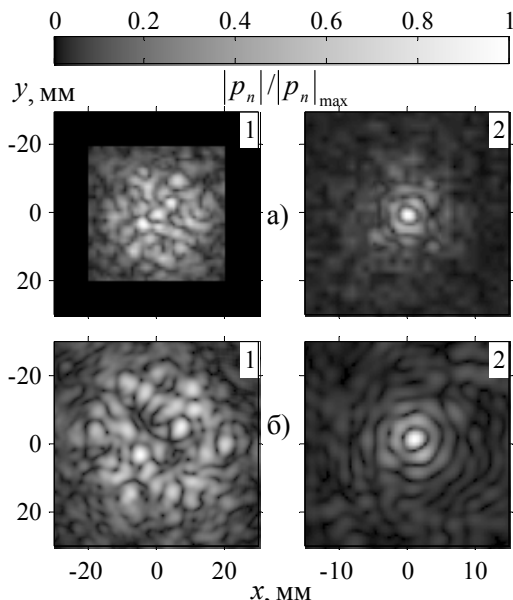


Рис. 1.20. Распределения амплитуд 1-й и 2-й гармоник, измеренные (верхний ряд) и рассчитанные (нижний ряд) в фокальной плоскости за 180° фазовым слоем, расположенным на расстоянии $z_{PL} = 0.5F$ от излучателя.

Результаты одного из расчетов критерия сохранения фокусировки Q_n для первых шести гармоник представлены на рис. 1.19. Слой располагался на половине фокусного расстояния $z_{PL} = 0.5F$, фазовый сдвиг составлял 180° , т.е. за слоем инвертировалась фаза основной частоты и всех нечетных гармоник. Излучение преобразователя считалось поршневым, потери на отражение и затухание в слое не учитывались. Все остальные параметры моделирования соответствовали описанной выше геометрии и условиям эксперимента. На

рисунке показаны значения Q_n (кружки) и среднеквадратичные отклонения, полученные как результат усреднения десяти расчетов с различными реализациями распределений фазовых областей на слое. Как и предполагалось, характерной особенностью данного случая является сильное искажение фокусировки пучка на основной частоте и на нечетных гармониках. В то же время, четные гармоники, фаза которых фактически не изменяется при прохождении слоя, искажены слабее. С повышением номера гармоник разброс между значениями Q_n для четных и нечетных гармоник уменьшается. Расчеты были также проведены для других положений слоя в пределах от $z_{PL} = 0.25F$ до $0.75F$ и дали качественно сходные результаты.

Результаты моделирования рассмотренного случая «резонансного» искажения поля гармоник за фазовым слоем сравнивались с экспериментом. Данные измерений распределения поля 1-ой и 2-ой гармоник в фокальной плоскости излучателя, для случая, когда 180° -градусный слой находится в положении $z_{PL} = 0.5F$, показаны на рис. 1.20 (а). Эксперимент демонстрирует практически полное разрушение фокусировки 1-ой и сохранение фокусировки 2-ой

гармоники. На рис. 1.20 (б) показан соответствующий расчет для использовавшейся в эксперименте реализации слоя и для измеренного распределения колебаний на излучателе. Видно, что эксперимент и расчет качественно хорошо согласуются друг с другом, хотя и не совпадают в деталях, поскольку установить точное положение фазового слоя в плоскости (x,y) оказалось затруднительно.

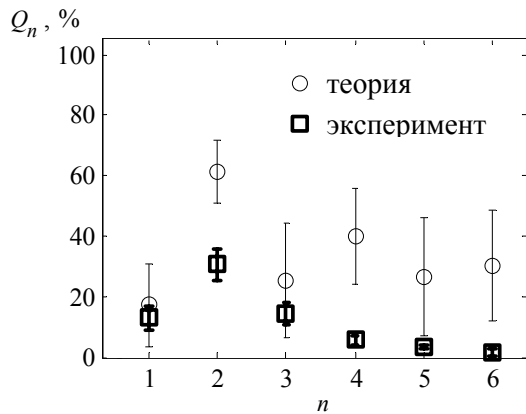


Рис. 1.21. Сравнение критерия сохранения фокусировки Q_n для первых шести гармоник при расположении фазового слоя на расстоянии $0.75F$ от излучателя за 180° фазовым слоем. Квадратные маркеры – данные эксперимента, круговые маркеры – результаты численных расчетов.

На рис. 1.21 приведены результаты измерений и расчета зависимости критерия Q_n от номера гармоники для фазового слоя 180° при его расположении на расстоянии $z_{PL} = 0.75F$. Соответствие эксперимента и расчета, предсказывающего провалы на нечетных гармониках, наблюдается для трех первых гармоник, при этом, как и прогнозирует расчет, разрушение фокусировки 1-ой гармоники очень сильное. На гармониках выше 3-ей измеренные величины Q_n значительно ниже расчетных, что может быть вызвано снижением точности измерений малых амплитуд регистрируемых

сигналов на этих частотах. Другой возможной причиной расхождений может являться наличие гармонических компонент, возбуждаемых непосредственно излучателем из-за недостаточной линейности лабораторного усилителя мощности.

Таким образом, в данной части работы численно и экспериментально исследованы характерные особенности фокусировки гармоник ультразвукового пучка конечной амплитуды за фазовым слоем с фиксированным набегом фазы в областях случайно распределенных неоднородностей. Продемонстрировано, что в такой системе за счет выбора величины сдвига фазы в слое можно получить избирательное разрушение фокусировки основной гармоники и ближайших нечетных гармоник. Возможна настройка слоя на избирательное воздействие на другие гармоники.

1.6. Заключительные замечания

Целью данной главы диссертации было исследование особенностей нелинейных взаимодействий акустических волн со случайной пространственной модуляцией. Разработанные аналитические и численные модели позволили описать статистические свойства

сильно искаженных акустических возмущений, содержащих разрывы: периодических пилообразных волн и одиночных N -волн. Отметим, что рассматривались сильно искаженные нелинейные волновые объекты, динамика которых принципиально иная, чем поведение квазигармонических сигналов. В отличие от последних, разрывные волны испытывают нелинейное затухание, нелинейную рефракцию и более локализованную фокусировку [23].

Развитая в работе аналитическая модель позволила получить точное решение для функции распределения амплитуды интенсивной акустической волны за бесконечно тонким случайно-неоднородным слоем (фазовым экраном) и выделить основные физические эффекты, сопровождающие распространение нелинейной волны в случайно-неоднородной среде. Полученное решение описывает пространственную структуру поля и эволюцию произвольного временного профиля волны за одномерным экраном до расстояний образования первых случайных каустик.

Для исходной плоской пилообразной волны и одиночного импульса в виде N – волны рассчитаны функции распределения, средние значения и вероятности флуктуационных выбросов амплитуды ударных фронтов на различных расстояниях от экрана. Показано, что при удалении от экрана происходит расширение функций распределения параметров волны, обусловленное эффектами случайных фокусировок и дефокусировок. Случайная модуляция фазового фронта приводит в среднем к уменьшению амплитуды, но также к росту вероятности больших флуктуационных выбросов по сравнению с регулярным случаем. Проанализированы две модели фазового экрана с различными гауссовскими распределениями второй производной функции пропускания. Развитый здесь подход позволил в дальнейшем рассмотреть аналитически и более сложные задачи: наклонное падение N -волны на экран [84], двумерный фазовый экран [85] и другие, представляющие несомненный интерес проблемы.

С развитием вычислительных мощностей и техники численного моделирования стал возможным прямой расчет распространения волны за случайно-модулирующим слоем на основе уравнения ХЗ. Это дало возможность учесть дифракционные явления, влияющие на форму волнового профиля; исследовать прохождение волны через случайные каустики, учесть пространственные корреляционные свойства экрана, влияющие на статистику поля на расстояниях после образования каустик; влияние нелинейной зависимости скорости распространения ударного фронта N -волны от ее амплитуды, приводящей к дополнительным искажениям волнового фронта.

Показано, что вблизи экрана результаты дифракционной и лучевой моделей находятся в хорошем согласии. На больших расстояниях случайное акустическое поле

может быть корректно описано только при учете дифракции. Первые области случайных фокусировок (каустики) в среднем образуются на расстоянии рефракционной длины за экраном, которое в приближении НГА полностью характеризует его фокусирующие свойства. Учет дифракционных эффектов показал, что фазовые экраны с одной и той же рефракционной длиной, статистически эквивалентные в рамках НГА, оказывают различное влияние на акустическое поле и его статистические свойства, если флуктуации фазы имеют различный пространственный масштаб. В противоположность приближению НГА, где сигнал сохраняет форму N -волны, дифракционная модель описывает более реалистичные профили, характерные для распространения N -волны в неоднородной среде. Например, в каустиках образуются U -волны, а в областях дефокусировки - сглаженные и двухпиковые профили. При этом полученные «эталонные» аналитические решения послужили важным критерием при проверке точности численных схем в пределе малости проявления дифракционных эффектов.

При распространении волны через области случайных фокусировок и дальше, эффекты дифракции приводят к сглаживанию пространственной структуры случайного акустического поля и, таким образом, к концентрации функций распределения пикового давления вблизи средних значений. Этот эффект сильнее выражен для экранов с флуктуациями фазы малых масштабов. Влияние нелинейных эффектов на статистические свойства акустического поля имеет немонотонный характер. Слабая нелинейность приводит к небольшому увеличению эффективности случайных фокусировок, росту вероятности высокоамплитудных выбросов, и как следствие, к дополнительному смещению функций распределения в сторону больших амплитуд. Среднее значение и дисперсия амплитуды при этом оказываются больше, чем для линейной волны. Сильные нелинейные эффекты подавляют флуктуаций амплитуды поля, функции распределения становятся уже, а среднее значение и дисперсия меньше.

Подтверждение в моделировании и эксперименте гипотезы о возможности избирательного частотного воздействия фазового экрана открывает новые возможности для контроля каскадных процессов взаимодействия волн в недиспергирующих средах. Для исследования задачи разработан новый численный алгоритм, позволяющий отойти от параболического приближения при описании дифракционных эффектов. Показано, что при фокусировке гармоник ультразвукового пучка конечной амплитуды за фазовым слоем с фиксированным набегом фазы в областях случайно распределенных неоднородностей за счет выбора величины сдвига фазы в слое можно получить избирательное разрушение фокусировки основной гармоники и ближайших нечетных гармоник. Возможна настройка слоя на разрушение и других гармоник.

2

Распространение нелинейных акустических сигналов в случайно-неоднородной движущейся среде: численный и физический эксперименты

2.1 Вводные замечания

Комплексное использование численного и лабораторного эксперимента является на сегодняшний день мощным инструментом в изучении распространения мощных акустических сигналов через неоднородные среды. Как показали результаты первой главы, использование численного моделирования позволило существенно расширить как круг исследуемых задач, так и возможности описания различных физических эффектов. Лабораторные измерения в большинстве случаев, в частности, в задачах аэроакустики, являются менее затратными по сравнению с полевыми. В лабораторных условиях легче контролировать параметры экспериментальной установки и состояние окружающей среды, что важно при статистических исследованиях. Сравнение данных измерений и результатов расчетов позволяет проверить состоятельность развитых теоретических моделей и численных алгоритмов, выявить ограничения и неточности в измерениях используемых в эксперименте устройств и улучшить методы их калибровки.

В данной главе рассматриваются физическая и численная модели, позволяющие исследовать статистические характеристики нелинейных акустических полей в турбулентной движущейся среде типа атмосферы с учетом эффектов дифракции, вязкости, релаксации, а также влияния продольной и поперечной к направлению волны компоненты случайной скорости среды. В теоретической части было предложено новое эволюционное уравнение, разработан численный алгоритм и получены решения, описывающие основные особенности распространения N -волны и статистики акустического поля в случайно-неоднородной движущейся среде. До последнего времени основные результаты для сред с распределенными неоднородностями векторного типа были получены на основе упрощенных моделей, в основном, в приближении нелинейной геометрической акустики [27]. Но даже в этом случае аналитические решения были построены только для стратифицированных сред [86]. Для линейного распространения

звука в неоднородных движущихся средах недавно были получены параболические уравнения, в которых сохраняются векторные свойства скорости движения среды [87 - 89]. Нелинейное распространение звука в средах со скалярными неоднородностями также рассматривалось в рамках параболического приближения [90, 91, 22]. Нелинейные эффекты в дифрагирующих звуковых пучках при распространении в случайно-неоднородных движущихся средах, насколько нам известно, ранее не исследовались.

В экспериментальных исследованиях данной главы измерялись статистические характеристики турбулентных полей скорости среды и параметров генерируемых искровым источником высокоамплитудных N -импульсов, распространяющихся перпендикулярно создаваемому турбулентному потоку. Экспериментальная установка была разработана в Высшей инженерной школе г. Лиона (Франция). Аналогичные эксперименты проводились ранее в работах Липкенса [32, 77, 92, 93], однако из-за малой ширины турбулентного слоя не удалось исследовать влияние образования случайных каустик на статистику параметров акустической волны. Кроме того, малая длина акустической волны приводила к сильному поглощению акустической энергии, в десятки раз большему, чем для нелинейных N -волн в реальной атмосфере. Увеличение характерных масштабов новой установки позволило обеспечить многократное формирование случайных каустик, а также уменьшить относительное влияние диссипативных эффектов, связанных с термовязкими и релаксационными механизмами поглощения.

Предварительные расчеты и измерения нелинейных N -волн проводились в однородной атмосфере. Полученные результаты позволили выявить характерные пространственные масштабы проявления нелинейных эффектов, релаксации и термовязкого поглощения в условиях более сложных измерений в турбулентном потоке. Были определены основные параметры импульсного поля для статистических исследований, влияние ограниченности полосы чувствительности измерительной системы на определение этих параметров. Также был предложен новый подход к определению длительности N -импульса, форма которого искажается при распространении и регистрации, и разработан новый метод калибровки широкополосных микрофонов в поглощающей среде, основанный на нелинейном удлинении импульса.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [94 - 99]

2.2. Моделирование распространения сферически расходящихся N -импульсов в однородной нелинейной среде с релаксацией

Для численного описания распространения нелинейных импульсных сигналов в однородной атмосфере использовалось модифицированное уравнение Бюргерса, учитывающее влияние сферической расходимости волны, нелинейности, поглощения за счет вязкости и теплопроводности, а также релаксационные процессы с участием молекул азота N_2 и кислорода O_2 [95, 1, 100]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{p}{r} = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \sum_{\nu=1}^M d_\nu \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \exp(-(\tau - \tau')/\tau_\nu) \frac{\partial p}{\partial \tau'} d\tau'. \quad (2.1)$$

Здесь p – акустическое давление, r – радиальная координата, $\tau = t - (r - r_0)/c_0$ – время в бегущей системе координат, $c_0 = 343.8$ м/с – равновесная скорость звука на низких частотах, r_0 – координата задания граничных условий; $\rho_0 = 1.29$ кг/м³ – плотность, $\varepsilon = 1.21$ – коэффициент нелинейности, $b = 4.86 \cdot 10^{-5}$ Па·с – коэффициент вязкости воздуха.

Атмосфера состоит в основном из молекул азота и кислорода, которые определяют ее релаксационные свойства и, соответственно, число релаксационных процессов в уравнении (2.1) $M = 2$ [1, 4]. Каждый ν -й процесс характеризуется временем релаксации τ_ν и коэффициентом $d_\nu = (c_\infty^\nu - c_0)/c_0^2 = c_\nu/c_0^2$, где c_∞^ν – так называемая “замороженная” скорость звука для сигнала в среде, время релаксации τ_ν в которой значительно больше, чем характерный период сигнала $T_s \ll \tau_\nu$ [4]. Релаксационные коэффициенты вычислялись на основе эмпирических формул при относительной влажности 34%, температуре 293 К и равновесном давлении 1 атм: $c_1 = c_\infty^{(1)} - c_0 = 0.11$ м/с, $\tau_1 = 6.0$ мкс (O_2), $c_2 = c_\infty^{(2)} - c_0 = 0.023$ м/с, $\tau_2 = 531$ мкс (N_2) [4].

В качестве граничного условия была выбрана «идеальная» N -волна с бесконечно узким ударным фронтом, по длительности (30 мкс) и амплитуде (1000 Па) близкая к данным измерений в описанном ниже эксперименте на расстоянии от источника $r_0 = 15$ см. Исходный сигнал и его спектр показаны на рис. 2.1 (а,б). Спектр N -волны задаётся аналитическим выражением $S = 2 \cdot \text{abs}[(\sin(2\pi fT) - 2\pi fT \cdot \cos(2\pi fT))]/(2\pi f)^2$, в котором положение нулей определяется соотношением: $\text{tg}(2\pi fT) = 2\pi fT$.

На рисунках 2.1 (в, г) показаны релаксационные зависимости скорости звука c и поглощения α от частоты, полученные из линеаризованного уравнения (2.1) [1]:

$$c = c_0 \left[1 + c_0 \sum_{\nu=1}^2 \frac{d_\nu \cdot (\omega \tau_\nu)^2}{1 + (\omega \tau_\nu)^2} \right], \quad \alpha = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} + \sum_{\nu=1}^2 \frac{d_\nu}{\tau_\nu} \frac{(\omega \tau_\nu)^2}{1 + (\omega \tau_\nu)^2}. \quad (2.2)$$

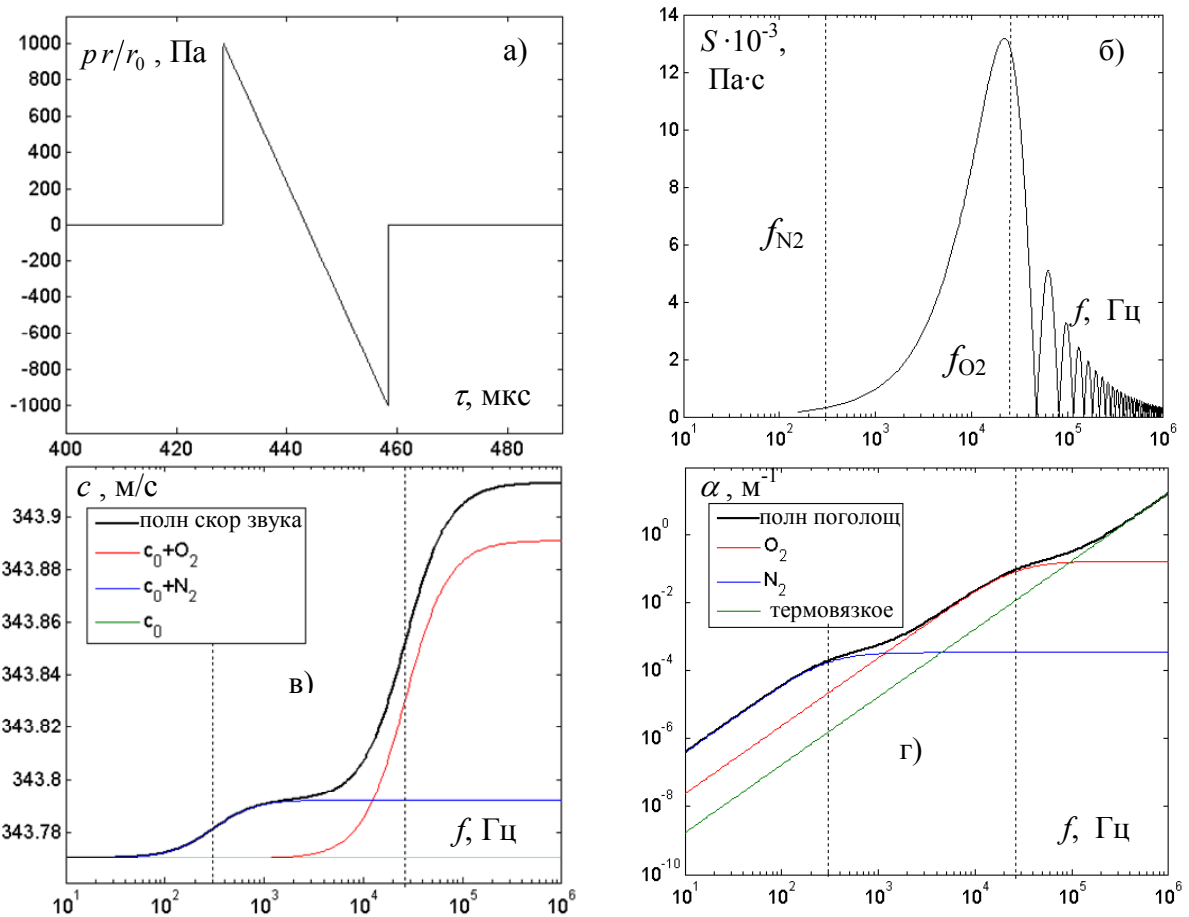


Рис. 2.1. Профиль (а) и спектр (б) исходной N -волны. Релаксационная зависимость скорости звука (в) и поглощения (г) от частоты в воздухе. Характерные частоты релаксации кислорода O_2 и азота N_2 показаны вертикальными пунктирными линиями.

Характерные частоты процессов релаксации для молекул кислорода ($f_1 = 1/(2\pi\tau_1) \sim 26500$ Гц) и азота ($f_2 = 1/(2\pi\tau_2) \sim 300$ Гц) при относительной влажности 34% и температуре 20°C показаны на рис. 2.1 (б-д) вертикальными пунктирными линиями. Видно, что характерная частота релаксации молекул кислорода лежит близко к максимуму спектра N -волны данной длительности, в то время как для молекул азота она соответствует низким частотам спектра, амплитуда которых мала. Изменение скорости звука, связанное с релаксацией молекул азота N_2 , в 5 раз меньше (рис. 2.1, в), а увеличение коэффициента поглощения - на три порядка меньше (рис. 2.1 (г)), чем для молекул кислорода O_2 . Поэтому можно ожидать, что релаксация молекул азота будет вносить незначительный вклад в искажение профиля волны.

Уравнение (2.1) решалось численно во временном представлении с использованием метода расщепления по физическим факторам [95,101]. Нелинейные эффекты рассчитывались с использованием схемы типа Годунова [102], термовязкое поглощение - на основе явной конечно-разностной схемы; для расчета релаксации использовалось преобразование, приводящее релаксационный интеграл к дифференциальному виду, после

чего интегрирование проводилось по схеме Кранка-Николсона [26]. Точность получаемых решений проверялась путем сравнения численных результатов с известным аналитическим решением Поляковой в виде плоской стационарной волны в среде с одним релаксационным процессом [103]; при выбранных параметрах численного алгоритма, максимальное отличие численного решения при сравнении с аналитическим не превышало 1%. Более подробно особенности алгоритма описаны в приложении 3.

Для иллюстрации относительного влияния эффектов нелинейности, релаксации, и поглощения в условиях эксперимента, профили N -волны рассчитывались на расстоянии $r = 6$ м от источника (рис. 2.2). Различные физические эффекты включались в модель поочередно: сначала моделировалось линейное распространение сигнала в идеальной среде, далее учитывалось влияние только нелинейности, затем только релаксационных эффектов, только поглощения, и, наконец, все вышеуказанные эффекты учитывались одновременно. Для того, чтобы “исключить” влияние сферической расходимости волны, полученные решения были скорректированы путем умножения на отношение текущего расстояния r к начальному r_0 .

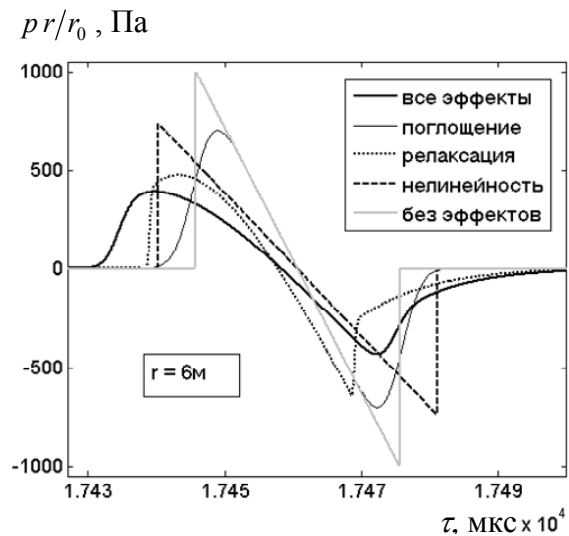


Рис. 2.2. Профили N -волны на расстоянии $r = 6$ м при поочередном учете различных эффектов: идеальная линейная среда (без эффектов, серая линия), только нелинейность (штриховая линия), только релаксация (точечная линия), только поглощение (тонкая черная линия), с учетом всех эффектов (жирная черная линия).

Если при моделировании учитывается только сферическая расходимость волны (“без эффектов”), то профиль скорректированной волны при распространении остается неизменным и повторяет профиль исходного импульса (серая линия). Нелинейные эффекты приводят к классическому увеличению длительности N -волны и соответствующему уменьшению амплитуды ударного фронта (штриховая линия). Релаксационные процессы ведут к асимметричному искажению профиля волны и смещению переднего и заднего ударных фронтов в направлении распространения волны (точечная линия). Пиковое значение давления сглаженного положительного полупериода импульса уменьшается сильнее, чем амплитуда более острого отрицательного полупериода. Длительность импульса, измеряемая между его передним и задним ударными фронтами, под действием релаксации практически не изменяется, поскольку

оба фронта движутся с одинаковой скоростью высоких частот. Видно также, что релаксация несильно сглаживает ударный фронт импульса.

Эффекты поглощения за счет вязкости и теплопроводности приводят к существенному уменьшению амплитуды волны и уширению ударных фронтов, но не меняют симметрию импульса и его длительность, определяемую между половинными значениями пиковых давлений (тонкая черная линия). Таким образом, видно, что все физические эффекты: нелинейность, релаксация и поглощение оказывают достаточно сильное влияние на уменьшение амплитуды импульса и поэтому они все должны учитываться при численном моделировании. Решение, соответствующее этому случаю одновременного учета всех эффектов, показано на рис. 2.2 жирной черной линией.

Более подробно относительное влияние нелинейных, релаксационных и диссипативных эффектов на зависимость пикового положительного давления p_+ и половинной длительности T импульса от пройденного расстояния проиллюстрировано на рис. 2.3. Видно, что вплоть до расстояний приблизительно 2 м от источника пиковое давление p_+ уменьшается в основном за счет нелинейных эффектов, которые доминируют над диссипативными и релаксационными процессами (рис. 2.3 (а)). На больших расстояниях амплитуда разрыва уменьшается за счет сферической расходимости волны, соответственно уменьшается роль нелинейного поглощения, и, следовательно, релаксационные и диссипативные процессы постепенно становятся определяющими в изменении профиля распространяющегося сигнала.

Поскольку профиль N -волны в среде с релаксацией асимметричен, то однозначно определить его длительность, используя временное представление, достаточно сложно.

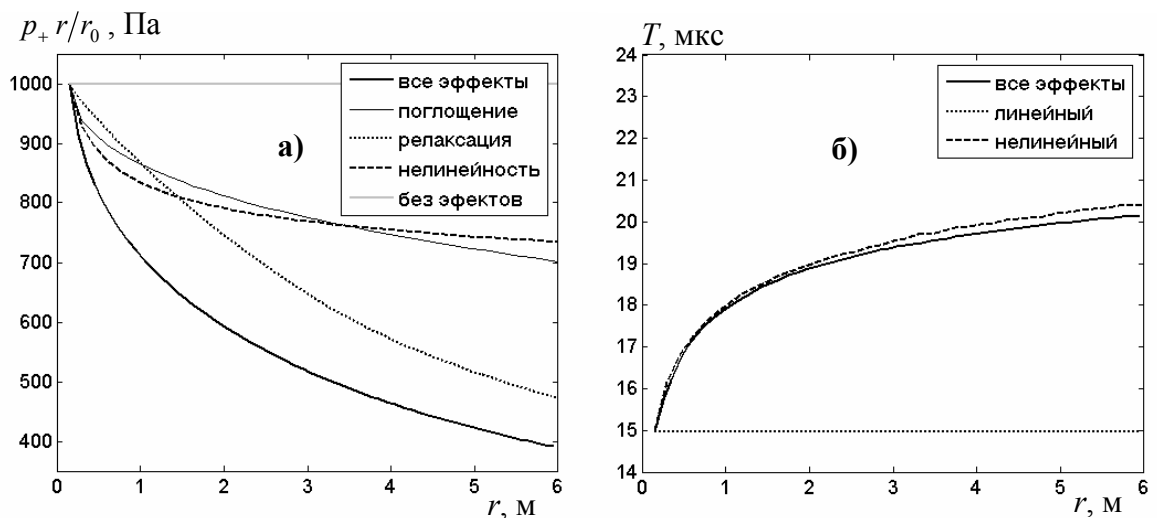


Рис. 2.3. Зависимость пикового положительного давления $p_+ r/r_0$ (а) и половины длительности (б) сферически расходящейся N -волны от пройденного расстояния.

Более того, в случае экспериментальных данных, профиль волны дополнительно искажается вследствие дифракции на краях микрофона, а также из-за неравномерности его частотного отклика. Будем определять длительность импульса в частотном представлении, совмещая положение минимумов спектра расчетного или экспериментального профилей с положением минимумов в спектре идеальной N -волны с бесконечно узким ударным фронтом (рис. 2.1). В основе такого определения лежит предположение о том, что любые линейные искажения профиля импульса могут быть представлены как результат умножения спектра импульса на некоторую плавную передаточную функцию. Такое преобразование приводит к уменьшению или увеличению амплитуды различных компонент спектра, но не приводит к смещению положений его нулевых значений или резких минимумов.

На рис. 2.3 (б) показаны зависимости половины длительности импульса T от пройденного расстояния r . Видно, что длительность импульса изменяется в основном за счет нелинейного распространения ударных фронтов. Небольшое влияние релаксации/поглощения наблюдается за счет дополнительного уменьшения амплитуды волны, и, как следствие, ослабления нелинейных эффектов. Видно также, что характерный масштаб нелинейности, в котором наблюдается сильное изменение длительности импульса, составляет около 2 м.

Таким образом, представленные выше результаты предварительных расчетов позволяют выявить вклад различных физических процессов в искажение профиля импульса в условиях эксперимента. Пиковые значения давления импульса определяются в сравнимой степени нелинейностью, релаксацией и поглощением. Асимметрия профиля волны связана с релаксацией, а уширение ударного фронта – с поглощением. При этом длительность импульса увеличивается только за счет нелинейного распространения. Поскольку нелинейные эффекты зависят от амплитуды исходного импульса, это позволяет осуществить абсолютную калибровку чувствительности микрофона, используя данные измерений длительности импульса на различных расстояниях от источника [104].

2.3. Сравнение результатов численного и физического экспериментов по распространению мощных N -импульсов в однородном воздухе

Перейдем теперь к сравнению результатов моделирования и данных измерений. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2.4. Измерения проводились в однородном воздухе в заглушенной камере на расстояниях от 15 см до 2 м от источника ударных волн. Для генерации N -волн использовался искровой источник с вольфрамовыми

электродами с зазором 6 мм и прикладываемым напряжением 15 кВ. Для регистрации акустического сигнала использовались микрофоны Bruel & Kjaer диаметром 1/8 дюйма, у которых была удалена решетка, вносящая дополнительные дифракционные искажения в измеряемый сигнал. Микрофон устанавливался в жесткий



Рис. 2.4. Схема экспериментальной установки

экран также для уменьшения дифракционных искажений на краях микрофона, размеры которого близки к наименьшим длинам волн в спектре сигнала [32, 105]. Электрический сигнал с микрофона подавался на усилитель (Nexus Bruel&Kjaer) с расширенным до 200 кГц частотным диапазоном. Источник и микрофон были установлены на рельсы, что позволяло изменять расстояние между ними.

Искровой разряд создает быстрый локальный нагрев воздуха между электродами, вследствие чего возникает короткое по длительности, но большое по амплитуде возмущение давления. Указанное возмущение имеет сложную форму, однако, поскольку амплитуда давления очень велика (> 1000 Па), уже на первых сантиметрах своего распространения от источника это возмущение под действием нелинейных эффектов трансформируется в N -волну. Проведенные эксперименты показали хорошую повторяемость параметров генерируемой N -волны: величина положительного пика давления на калибровочном микрофоне, расположенном на фиксированном расстоянии 37 см выше источника, составляла 390 ± 10 Па, половина длительности импульса - 15.27 ± 0.23 мкс, стандартное отклонение времени прихода импульса - 1.7 мкс. На расстоянии одного метра от источника характерное максимальное давление в импульсе P_{\max} составляло 120 Па, половина длительности T - 15 мкс, а ширина ударного фронта t_{10-90} , определяемая между 10% и 90% уровнями давления на фронте от P_{\max} , - менее 3 мкс.

Для сравнения результатов моделирования и эксперимента исходная амплитуда и длительность N -волны в численной модели определялись путем сопоставления длительности измеренных N - импульсов и рассчитанных на различных расстояниях от источника на основе аналитического решения уравнения простых волн:

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} \frac{P_0}{T_0} r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}. \quad (2.3)$$

Длительность импульсов в обоих случаях определялась по положению нулей в спектре волны. Здесь был использован полученный выше результат, что изменение длительности импульса происходит в основном за счет нелинейных эффектов, а не релаксации или поглощения (рис. 2.3 (б)). Два неизвестных параметра $T_0 = 14.32$ мкс (половина длительности) и $p_0 = 1148$ Па (пиковое давление) на расстоянии $r_0 = 0.15$ м от источника) в линейной зависимости T^2 от $\ln(r/r_0)$ были получены при сопоставлении решения (2.3) с соответствующими данными эксперимента, используя метод наименьших квадратов (МНК) (рис. 2.5).

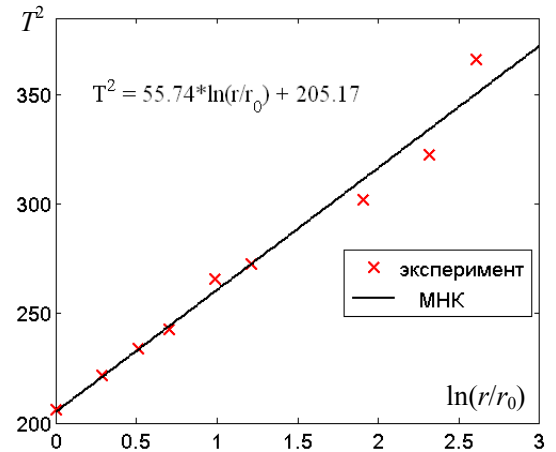


Рис. 2.5. МНК для квадрата половины длительности импульса. Коэффициент корреляции $R=0.975$.

На рис. 2.6 показаны измеренные и полученные численно профили волн на различных расстояниях от источника. Видно, что в целом наблюдается хорошее согласие между измерениями и расчетами, но имеются и некоторые отличия. По сравнению с рассчитанными N -волнами, экспериментальные сигналы имеют значительно более широкий ударный фронт, обладают более сложной структурой с несколькими осцилляциями за фронтом и более плавный профиль в области разрежения с меньшей амплитудой. Как будет показано ниже, эти отличия между экспериментом и результатами моделирования связаны в основном с ограниченным частотным диапазоном микрофона и усилителя. Дополнительные искажения могут также вносить дифракционные эффекты на краях экрана и микрофона.

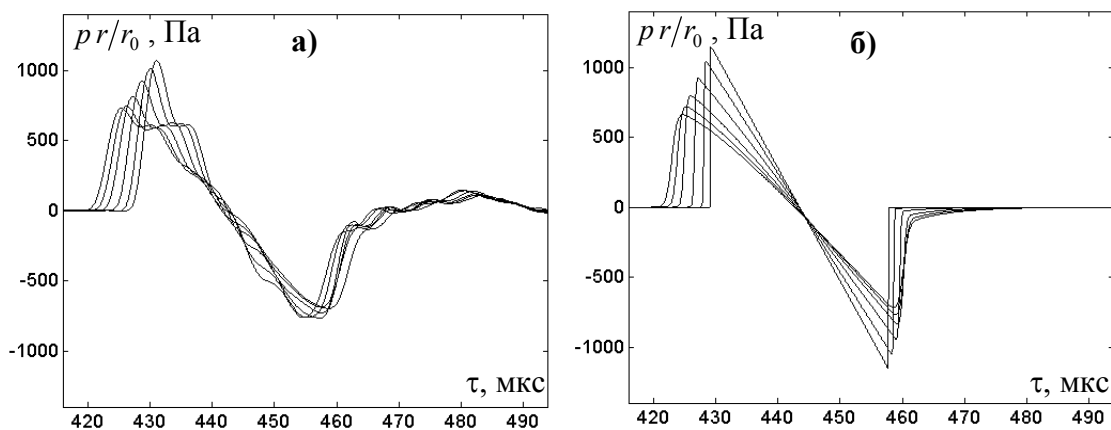


Рис. 2.6. Измеренные (а) и рассчитанные (б) профили N -волн на различных расстояниях от источника $r = 0.15, 0.3, 0.5, 1, 1.5,$ и 2 м. Монотонное убывание амплитуды импульса соответствует увеличению пройденного волной расстояния.

2.4. Метод калибровки широкополосных микрофонов с использованием нелинейных эффектов

Чтобы обеспечить лучшее согласие между теорией и экспериментом (рис. 2.6), необходимо знать полный частотный отклик широкополосной измерительной системы, который включает в себя фильтр микрофона, усилителя, а также дифракционные эффекты. При измерении разрывных сигналов такая проблема возникает во многих задачах атмосферной акустики [95, 98, 106]. С течением времени, а также при изменении условий использования измерительного оборудования, его исходные частотные характеристики, предоставленные производителем, могут измениться. В данной части работы предложен новый метод, сочетающий в себе преимущества физического и численного эксперимента и позволяющий в лабораторных условиях определить частотную характеристику широкополосного измерительного тракта.

Будем рассчитывать полный частотный отклик измерительной системы как отношение спектра расчетного импульса к спектру измеренного экспериментально на том же расстоянии от источника. Результирующий усредненный амплитудно-частотный отклик системы изображен на рис. 2.7 (а) (сплошная линия) в сравнении с амплитудно-частотной характеристикой микрофона, предоставленной производителем (штриховая линия). Видно, что общий отклик системы является достаточно ровным вплоть до 10 кГц, на более высоких частотах наблюдаются осцилляции с амплитудой ± 3 дБ и затем резкий спад на частоте приблизительно 150-200 кГц. Структура частотных кривых обоих фильтров также очень близка друг к другу, а отличия в чувствительности на плато составляют менее 1 дБ. Таким образом, искажения измеренных профилей в основном

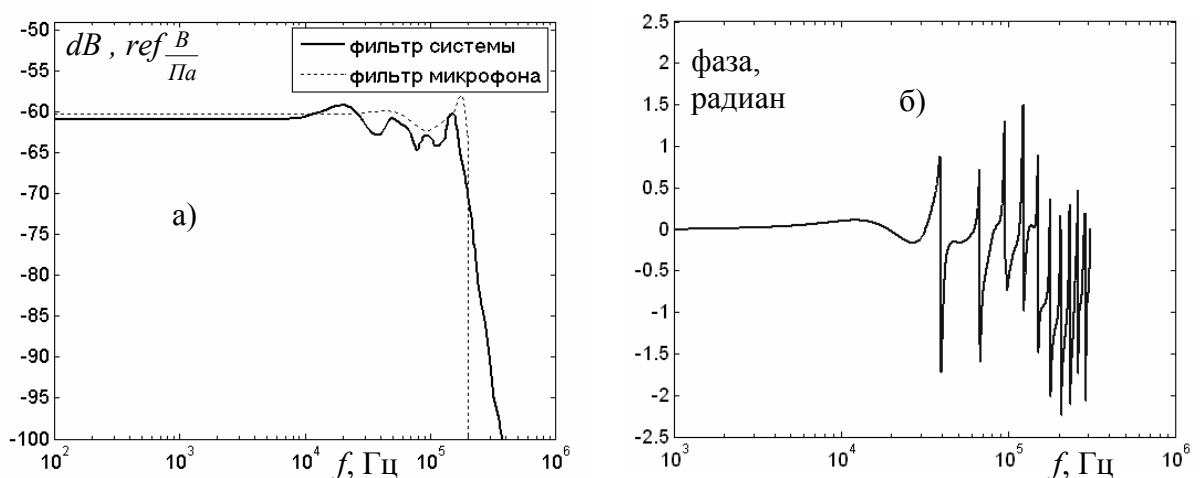


Рис. 2.7. Усредненная амплитудно-частотная характеристика (а) и пример фазово-частотной (б) характеристики измерительной системы (сплошные кривые). Амплитудная характеристика микрофона, предоставленная производителем, показана точечной линией.

связаны с микрофоном. Полученная фазово-частотная характеристика фильтра представлена на рис. 2.7 (б). Достаточно слабо меняясь в окрестности нуля до 30-40 кГц, она сильно флуктуировала на более высоких частотах, причем по-разному для разных измеренных волн. Это, возможно, связано со случайными флуктуациями в положении искрового пробоя и, следовательно, во времени прихода импульса. Поэтому далее к расчетным сигналам фазово-частотная характеристика не применялась. На рис. 2.8 (а) показаны экспериментальный профиль, измеренный на расстоянии $r_0 = 0.15$ м от источника (красная пунктирная линия), идеальная исходная N -волна (синяя линия), и идеальная N -волна после фильтрации с помощью рассчитанного амплитудного отклика системы (черная линия).

Видно, что после фильтрации идеальной N -волны с бесконечно узким ударным фронтом и более высоким значением пикового положительного давления, временные профили и амплитуда теоретического и экспериментального импульсов становятся гораздо ближе. По-прежнему наблюдаются отличия в уровнях отрицательного пикового давления, которые можно объяснить тем, что не учитывалась фазовая характеристика

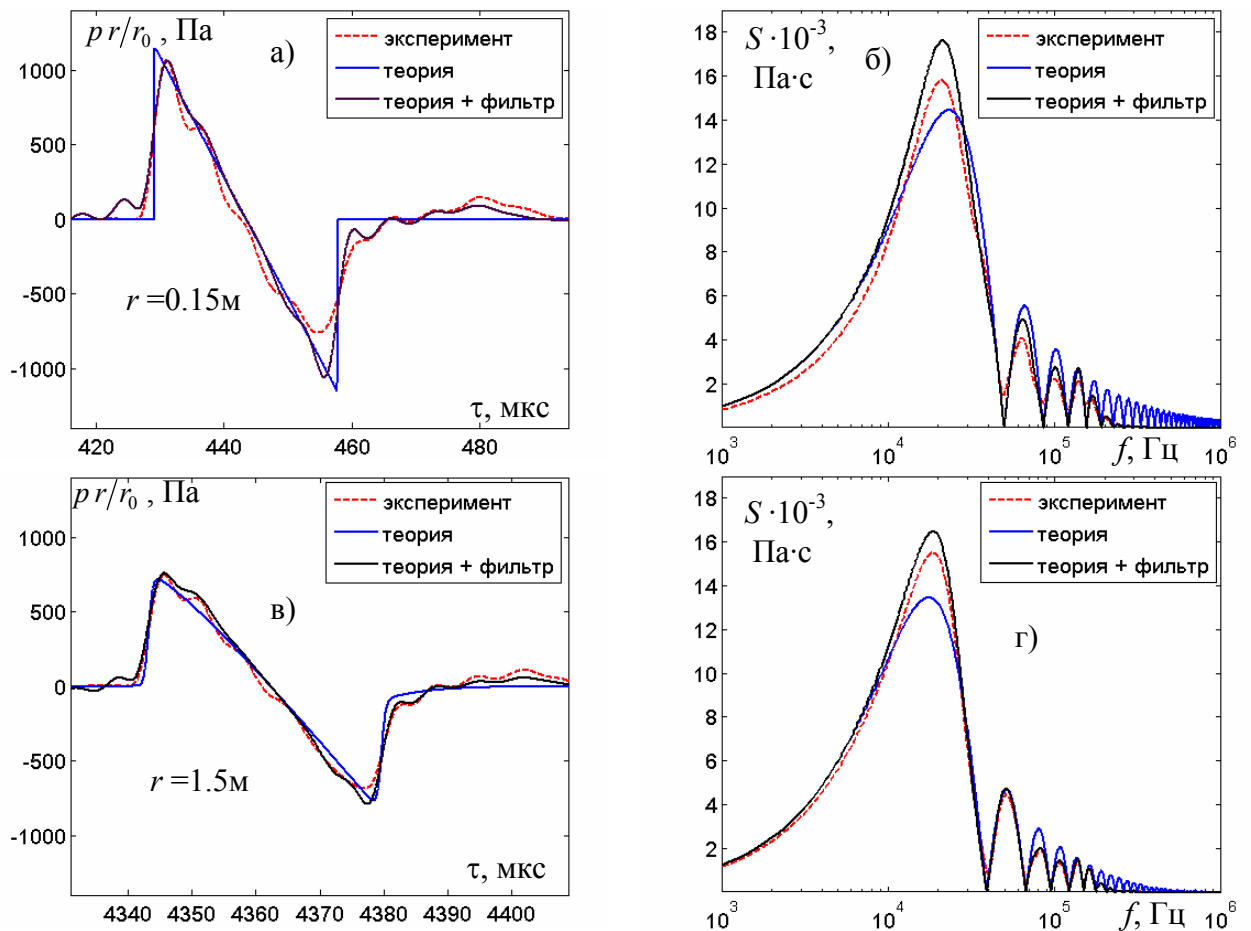


Рис. 2.8. Экспериментальный (пунктирная линия) и теоретический (синяя линия) N -импульсы и соответствующие им спектры на начальном расстоянии $r_0 = 0.15$ м (а, б) и $r = 1.5$ м (в, г) от источника. Теоретические профили после фильтрации и их спектры показаны черными линиями.

частотного отклика измерительной системы. Видно, что положения минимумов спектров, соответствующих представленным импульсам, хорошо согласуются для всех трех случаев рис. 2.8 (б). Это подтверждает предположение о том, что частотная характеристика системы не изменяет положение нулей в спектре волны и, следовательно, оправдывает введенное выше новое определение длительности импульса.

На рис. 2.8 (в,г) сравниваются экспериментальный и рассчитанные профили и спектры N -волны на расстоянии $r = 1.5$ м от источника. Значения пикового положительного и отрицательного давления и положения локальных минимумов спектров также близки для всех трех сигналов. Наблюдаются различия по ширине ударного фронта между экспериментальным импульсом и рассчитанным без фильтрации, которые уменьшаются после применения фильтра к рассчитанному профилю.

Более детальное сравнение измеренных и расчетных профилей импульса на различных расстояниях от источника показали аналогичные закономерности влияния фильтрации. Длительность N -волны в численной модели не меняется после применения амплитудного фильтра, пиковое давление меняется несильно и практически совпадает после фильтрации с данными эксперимента. Ширина ударного фронта (время изменения давления на фронте волны от уровня 0.1 до 0.9 амплитуды волны) экспериментальных профилей почти на порядок превышает теоретические значения. После применения фильтра системы к рассчитанным профилям волны разница составляет всего ~20%, т.е. уширение фронта в эксперименте обусловлено ограниченностью частотной характеристики системы регистрации.

Нелинейный метод калибровки датчиков давления использовался ранее для определения чувствительности широкополосных гидрофонов в воде [107, 108]. В его основе лежит предположение о том, что изменения амплитуды нелинейной N -волны либо наклона плавной части пилообразной волны в среде распространения описываются формулами теории простых волн. Это предположение является неверным в применении к атмосферной акустике, где необходимо учитывать поглощение и релаксацию. Известные в атмосферной акустике «нелинейные» методы определения чувствительности измерительных систем основывались на зависимости скорости движения ударного фронта сигнала [109] либо длительности сигнала от его амплитуды [104]. При этом также не учитывалось влияние эффектов поглощения и дисперсии, обусловленных релаксационными эффектами. В отличие от предыдущих работ, разработанный здесь новый метод позволяет проводить калибровку датчиков давления в поглощающих и диспергирующих средах и определять амплитудные и фазовые спектральные характеристики измерительной системы в широкой полосе частот.

2.5. Эволюционное уравнение для нелинейных волн в неоднородных движущихся средах. Теоретическая модель

Для теоретического описания распространения акустических сигналов в турбулентной атмосфере необходима модель, учитывающая как нелинейные и дифракционные эффекты, эффекты частотно зависимо поглощения, так и эффекты, связанные с векторной природой турбулентных флуктуаций. Многие широко используемые модели основываются на нелинейных эволюционных уравнениях типа Хохлова-Заболотской-Кузнецова [22, 90, 91]. Однако представленные до последнего времени в литературе уравнения не учитывают векторный характер неоднородной движущейся среды, то есть флуктуации скорости среды в направлении поперечном распространению волны. В данной части работы предложено модифицированное эволюционное уравнение, позволяющее описать все перечисленные выше эффекты, в том числе и эффекты неоднородной движущейся среды.

Наиболее строгий подход к построению теоретической модели, включающей в себя векторные неоднородности, состоит в том, чтобы, исходя из общей системы уравнений гидродинамики, получить волновое уравнение, учитывающее флуктуации скорости звука, плотности и всех компонент скорости движущейся среды. Такой подход, представленный в работах [17, 110, 111], приводит к следующему уравнению, описывающему распространение линейных акустических волн в средах с неоднородностями скалярного и векторного типов:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} \right) - \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь p – акустическое давление, x_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненты радиус вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в декартовой системе координат, c – скорость звука в среде, ρ – плотность среды, t – время, u_i – компоненты вектора скорости движения среды (далее потока или течения) вдоль координат x , y , и z . Переменные p , c , ρ , \mathbf{u} являются функциями времени t и координат x, y, z , $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, и $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$. Кроме общих допущений линейной акустики непоглощающих сред при выводе этого уравнения использовано еще только одно условие о малости числа Маха, связанного с течением: $|\mathbf{u}|/c_0 \ll 1$, где c_0 – равновесная скорость звука.

Используя метод медленно меняющегося профиля в параболическом приближении теории дифракции [1, 2] и следуя аргументам работы [17] о малости различных

слагаемых, описывающих флуктуации среды, из уравнения (2.4) можно получить эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\Delta c + u_x}{c_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{c_0} \mathbf{u}_\perp \nabla_\perp p - \frac{p}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_\perp p, \quad (2.5)$$

описывающее распространение акустических волн в трехмерно-неоднородных движущихся средах. Здесь u_x - продольная компонента течения в среде, $\mathbf{u}_\perp = (u_y, u_z)$ поперечные компоненты течения и $\nabla_\perp = (\partial/\partial y, \partial/\partial z)$. При выводе уравнения (2.5) предполагалось, что все неоднородности плавно изменяются в пространстве, а поле неоднородностей задано в моменты времени прихода акустической волны и остается неизменным в течение ее прохождения. В этом случае распределения скорости звука, плотности и скорости движения среды могут рассматриваться как функции только пространственных координат: $c = c(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$, и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$, то есть они «заморожены» во времени. В отсутствие неоднородностей, то есть, если $\Delta c, \Delta \rho = 0$ и $\mathbf{u} = 0$, уравнение (2.5) переходит в хорошо известное параболическое уравнение теории дифракции [1].

Учтем теперь, что дополнительные члены, описывающие нелинейные эффекты и поглощение, могут быть включены в линейное эволюционное уравнение (2.5) аддитивным образом [1] В итоге получим следующее нелинейное эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\Delta c + u_x}{c_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{c_0} (\mathbf{u}_\perp \nabla_\perp p) - \frac{p}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_\perp p \quad (2.6)$$

где ε - коэффициент нелинейности, b - коэффициент вязкости. Слагаемое, описывающее вязкое поглощение $b/(2c_0^3 \rho_0) \cdot \partial^2 p / \partial \tau^2$, может быть заменено на линейный оператор общего вида $L(p)$, если необходимо учесть эффекты релаксации или другие потери [112].

Уравнение (2.6) является уравнением типа Хохлова-Заболотской-Кузнецова, описывающим эффекты дифракции, нелинейности, поглощения; и обобщенное здесь для учета неоднородностей скорости звука и плотности, а также неоднородностей потоков в среде. Первое слагаемое уравнения отвечает за распространение волны, второе описывает нелинейные эффекты, третье - неоднородности скорости звука (скалярные) и неоднородности течения вдоль оси x (векторные), четвертое - неоднородности поперечных течений (векторные), пятое - неоднородности плотности среды (скалярные), шестое - поглощение. Правая часть уравнения описывает дифракционные эффекты. Новым здесь является четвертое слагаемое, соответствующее неоднородностям поперечных течений.

Запишем модифицированное уравнение ХЗК (2.6) в двумерной декартовой системе координат в безразмерном виде без учета скалярных неоднородностей:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial V}{\partial \theta} - 2\pi U_{\parallel} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + U_{\perp} \frac{\partial V}{\partial \rho} - L[V] \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} \quad (2.7)$$

Здесь $V = p/p_0$ - акустическое давление, нормированное на исходную амплитуду волны, $\theta = \omega_0 \tau$ - безразмерное время, $\omega_0 = 2\pi c_0 / \lambda$ - круговая частота, λ - длина акустической волны, $\sigma = x/\lambda$ - безразмерная координата распространения, $\rho = y/\lambda$ - безразмерная поперечная координата, $U_{\parallel} = u_x/c_0$ - безразмерное аксиальное течение и $U_{\perp} = u_y/c_0$ - безразмерное поперечное течение, $N = 2\pi\beta p_0 / c_0^2 \rho_0 = \lambda / x_s$ - безразмерный параметр нелинейности, где $x_s = c_0^3 \rho_0 / \beta p_0 \omega_0$ - расстояние образования разрыва для плоской гармонической волны. $L[V]$ - оператор частотно-зависимого поглощения, который в общем случае может включать в себя релаксационные эффекты:

$$L[V] = A \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \sum_{v=1}^2 D_v \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{\theta - \theta'}{\theta_v}\right) \frac{\partial V}{\partial \theta'} d\theta', \quad \text{где } A = 2\pi^2 b / (c_0 \rho_0 \lambda) - \text{ безразмерный}$$

параметр поглощения, а $D_v = 2\pi c_v / c_0$ и $\theta_v = \omega_0 \tau_v$ - сила и время релаксации кислорода и азота соответственно для $v = 1, 2$. При описании распространения импульса для нормировки удобнее использовать его длительность $2T_0 = 2\pi/\omega_0$, а не частоту ω_0 .

Для определения порядков величин безразмерных параметров в уравнении (2.7) для реальной атмосферы рассмотрим два интересующих нас случая: лабораторный [32,77,104,105] и полевой эксперименты [113, 114, 75, 115]. Измеряемые амплитуды звукового давления и амплитуды флуктуаций скорости среды в лабораторном и полевом экспериментах имеют близкие значения ($p_0 \sim 1000$ Па, $u_{x,y} \sim 15$ м/с). Таким образом, при нормальных атмосферных условиях для безразмерного параметра нелинейности получим $N \sim 0.06$, а для амплитуды параметра флуктуаций скорости среды $U_{\perp, \parallel} \leq 0.05$. Параметр термовязкого поглощения A зависит от длины звуковой волны, которая в условиях лабораторного эксперимента равна $\lambda \sim 1.2$ см, а при полевых измерениях $\lambda \sim 50$ м (порядка длины самолета). Следовательно, получим вариацию параметра термовязкого поглощения в зависимости от интересующих нас масштабов эксперимента: $A \sim 1.5 \cdot 10^{-4}$ (лабораторный эксперимент) или $A \sim 3.6 \cdot 10^{-8}$ (полевые измерения).

Уравнение (2.7) аналитически решить не удастся, однако оно обладает некоторыми свойствами подобия, которые могут быть использованы для получения целого класса решений по одному известному численному решению. В общем случае движение среды можно представить как комбинацию различных флуктуаций скорости на фоне среднего

течения. В соответствии с этим компоненты полной скорости можно записать как: $U_{\parallel} = U_{\parallel}^0 + \tilde{U}_{\parallel}$ и $U_{\perp} = U_{\perp}^0 + \tilde{U}_{\perp}$, где переменные с тильдой обозначают флуктуации скорости, а переменные с индексом 0 – среднее движение среды.

Рассмотрим здесь векторные неоднородности с постоянной во времени компонентой скорости следующего вида: $U_{\parallel}^0 = B(\sigma) \cdot \rho + C(\sigma)$, $U_{\perp}^0 = D(\sigma)$, и произвольными случайными флуктуациями \tilde{U}_{\parallel} и \tilde{U}_{\perp} . Можно показать, что при следующей замене переменных:

$$\theta_1 = \theta + \theta_{01}(\sigma) + \theta_{02}(\sigma) \cdot \rho, \quad \sigma_1 = \sigma, \quad \rho_1 = \rho + \rho_0(\sigma), \quad (2.8)$$

где неизвестные функции $\theta_{01}(\sigma)$, $\theta_{02}(\sigma)$, $\rho_0(\sigma)$ могут быть найдены из системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\theta_{02}}{d\sigma} = 2\pi B, \quad \frac{d\theta_{01}}{d\sigma} = 2\pi C - D\theta_{02} + \frac{1}{4\pi}\theta_{02}^2, \quad \frac{d\rho_0}{d\sigma} = -D + \frac{1}{2\pi}\theta_{02}, \quad (2.9)$$

можно полностью исключить из эволюционного уравнения среднее движение среды, в то же время сохраняя видоизмененные флуктуирующие компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{\partial V}{\partial \sigma_1} - NV \frac{\partial V}{\partial \theta_1} - 2\pi \tilde{U}_{\parallel}^1 \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta_1} + \tilde{U}_{\perp}^1 \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho_1} - A \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1^2}, \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\parallel}^1(\sigma_1, \rho_1) &\equiv \tilde{U}_{\parallel}(\sigma_1, \rho_1 - \rho_0(\sigma_1)) + \frac{1}{2\pi} \theta_{02}(\sigma_1) \cdot \tilde{U}_{\perp}(\sigma_1, \rho_1 - \rho_0(\sigma_1)), \\ \tilde{U}_{\perp}^1(\sigma_1, \rho_1) &\equiv \tilde{U}_{\perp}(\sigma_1, \rho_1 - \rho_0(\sigma_1)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Заметим, что, согласно уравнениям (2.11), флуктуации течений в среде в поперечном направлении изменяют скорость распространения звуковой волны. Этот эффект имеет ясную физическую интерпретацию: при повороте фазового фронта поперечное течение уже не перпендикулярно нормали к фронту, его проекция на волновой вектор становится неравной нулю, то есть такое течение изменяет фазовую скорость волны. Напротив, хотя проекция продольного течения на перпендикуляр на изменившееся направление волнового вектора должна проявиться как поперечное течение, этого не происходит. По-видимому, эта поправка играет роль при больших углах и не описывается в рамках параболического приближения.

Рассмотрим теперь пример слоисто-неоднородной среды, описываемой законом $U_{\parallel}^0 = B_0 \cdot \rho + C_0$ и $U_{\perp}^0 = 0$, где B_0 и C_0 – некоторые произвольные константы: горизонтальное течение с линейно изменяющейся в поперечном направлении амплитудой. Тогда получаем следующую замену переменных:

$$\theta_1 = \theta - C_0 \cdot \sigma + \frac{1}{12\pi} B_0^2 \cdot \sigma^3 - B_0 \cdot \sigma \cdot \rho, \quad \sigma_1 = \sigma, \quad \rho_1 = \rho - \frac{1}{4\pi} B_0 \cdot \sigma^2, \quad (2.12)$$

из которой легко увидеть, что в присутствии течения ось пучка имеет параболическую форму, а фазовый фронт поворачивается. В случае чисто поперечного течения, то есть при $U_{\parallel}^0 = 0$ и $U_{\perp}^0 = D(\sigma)$, замена переменных принимает следующий вид:

$$\theta_1 = \theta, \quad \sigma_1 = \sigma, \quad \rho_1 = \rho - \int_0^{\sigma} D(\sigma') d\sigma'. \quad (2.13)$$

В этом случае ось звукового пучка имеет траекторию, определяемую функцией $D(\sigma)$, но фазовый фронт при этом не поворачивается. В приближении геометрической акустики это означает неколлинеарность фазовой и групповой скоростей.

Уравнения (2.6, 2.7) решались численно с использованием метода разделения по физическим факторам и комбинации временного и спектрального подходов (см. А3). Для задания случайного поля скоростей среды (векторных неоднородностей) использовался метод случайно ориентированных Фурье мод [116]:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{J_{\max}} \vec{U}(\vec{K}_j) \cos(\vec{K}_j \cdot \vec{r} + \phi_j), \quad \vec{U}(\vec{K}_j) \cdot \vec{K}_j = 0. \quad (2.14)$$

Здесь \vec{K}_j - волновой вектор, ϕ_j - фаза j -ой Фурье моды. Случайный угол θ_j между \vec{K}_j и осью x и значения фазы ϕ_j для каждой моды выбирались из независимых равномерных распределений на интервале $[0, 2\pi]$. Второе уравнение в (2.14) соответствует условию несжимаемости результирующего поля скорости. Амплитуда скорости каждой моды $|\vec{U}(\vec{K}_j)|$ определяется спектром кинетической энергии $E(K)$ рассматриваемой модели турбулентного поля: $|\vec{U}(\vec{K}_j)| \sim \sqrt{E(K)}$, $K = |\vec{K}|$. Рассматривались две модели случайной среды. Первая модель спектра $E(K)$ соответствует одномасштабной гауссовой корреляционной функции и для двумерной турбулентности имеет вид:

$$E(K) = \frac{1}{8} u_{rms}^2 K^3 \cdot L^4 \exp\left(-\frac{K^2 \cdot L^2}{4}\right), \quad (2.15)$$

где u_{rms}^2 - средний квадрат флуктуаций скорости и L - характерный масштаб неоднородности. Вторая модель - спектр Кармана, который описывает распределение энергии турбулентных пульсаций в интервале между внешним L_0 и внутренним l_0 масштабами и по своим свойствам близок к свойствам спектра турбулентной атмосферы:

$$E(K) = 8 u_{rms}^2 L_0^{-2/3} K^3 \left(K^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-14/6} \exp\left(-\frac{K^2}{K_m^2}\right), \quad (2.16)$$

где $K_m=5.92/l_0$. Инерционная зона, описываемая спектром Кармана, находится в хорошем согласии с законом Колмогорова «пять третей»: $E(K) \sim K^{-5/3}$

Если в уравнении (2.14) рассматривается достаточно большое число мод с равномерно распределенными θ_j и ϕ_j , то итоговое поле скорости $\vec{u}(\vec{x})$ является статистически однородным и изотропным и имеет заданный энергетический спектр [117]. Для моделирования турбулентности с гауссовым спектром использовалось 300 Фурье мод, равномерно распределённых между $0.01/L$ и $9.0/L$. В случае спектра Кармана для лучшей дискретизации затянутого инерционного интервала использовалось 600 Фурье мод, распределенных логарифмически между $K_{min}=0.1$ и $K_{max}=35$.

При моделировании акустического поля с $N=0.05$ и $A=0.00034$ были выбраны следующие параметры численной сетки: $h_\sigma = 2.5 \cdot 10^{-2}$ и $h_\rho = 4 \cdot 10^{-2}$ - шаги сетки в продольном и поперечном направлениях, которые определялись из условия устойчивости алгоритма и из условия достаточно точного описания мелкомасштабных структур акустического поля. Число узлов сетки по времени на профиль волны $n = 1024$ было выбрано с запасом, чтобы описать структуру ударного фронта волны в случайных фокусах. При уменьшении указанных шагов сетки в два раза полученное решение по своим характеристикам изменялось не более чем на 3%. Для того, чтобы избежать отражения от границ пространственной сетки, окно интегрирования в поперечном направлении выбиралось вдвое больше области рассмотрения.

2.6. Нелинейные и дифракционные эффекты при распространении N -волн в случайно-неоднородной движущейся среде. Численный эксперимент

Рассмотрим результаты численного расчета распространения нелинейных акустических импульсов в виде N -волны в неоднородной движущейся среде. Получаемые решения для временных профилей и пространственных распределений акустического поля в неоднородной среде, статистических распределений, пиковых и средних характеристик волны позволяют проанализировать влияние нелинейных и дифракционных эффектов на формирование структуры акустического поля и образование случайных каустик.

Типичный пример случайных реализаций (2.14) для двух компонент скорости среды для случайно-неоднородного поля с гауссовым энергетическим спектром (2.15) представлен на рис. 2.9.

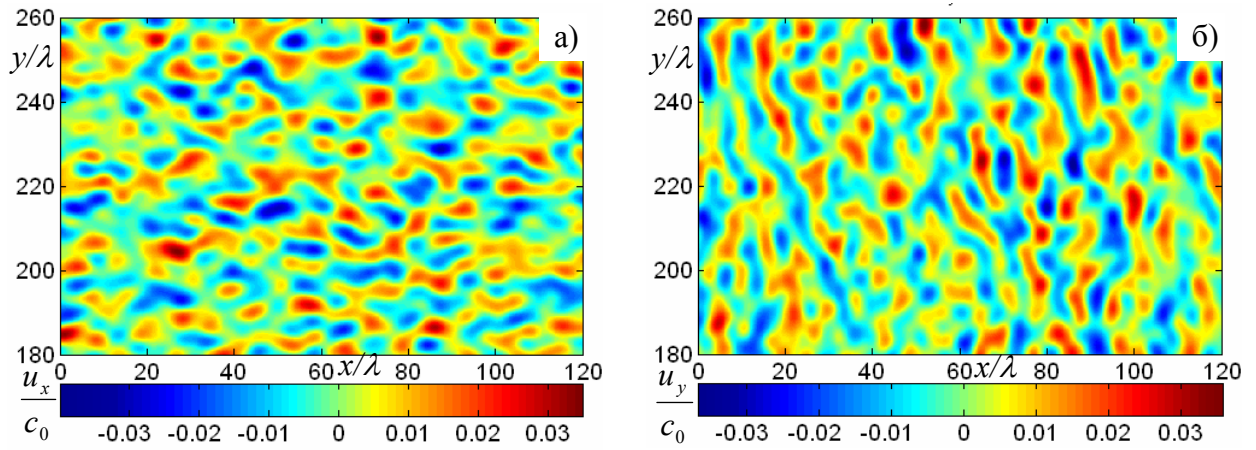


Рис. 2.9 Продольная а) и поперечная б) компоненты случайного поля скорости среды с гауссовым энергетическим спектром. Характерный масштаб флуктуаций $L=4\lambda$, средняя квадратичная скорость $u_{rms} = 3$ м/с.

На рисунке 2.10 (а) показано распределение акустических лучей - решение уравнения эйконала системы уравнений геометрической акустики в рассматриваемой неоднородной среде [16]:

$$(\nabla \psi)^2 = \left(\frac{c_0}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u}}{c_0} \nabla \psi \right)^2, \quad (2.17)$$

Видно образование множественных областей сгущения акустических лучей, что говорит о сужении сечений лучевых трубок и соответствующем формировании областей повышенного акустического давления. Соответствующее пространственное распределение пикового положительного давления в поле распространяющейся N -волны (решение уравнения (2.7)) представлено на рис. 2.10 (б) вместе с линиями уровня продольных флуктуаций скорости среды (рис. 2.9а). Видно, что энергия звуковой волны перераспределяется в пространстве, образуя области повышенного и пониженного давления. При этом области повышенного пикового положительного давления формируются сразу после прохождения волной участков неоднородной среды, где эффективная скорость звука $c_0 + u_x$ меньше, чем ее невозмущенное значение c_0 (флуктуации скорости среды отрицательны): такие участки среды воздействуют на волну как фокусирующие линзы. Несмотря на сильное нелинейное поглощение волновой энергии, пиковое положительное давление в поле N -волны в областях фокусировки может более чем в три раза превышать амплитуду падающего импульса.

Области случайных фокусировок для N -волны образуются в основном на сравнительно малых расстояниях от источника, $\sigma = x/\lambda < 60$. Этот результат является отличительной особенностью распространения импульсов и обусловлен возрастающей с расстоянием разностью хода, которая приводит к удлинению импульса, уширению ударного фронта и соответствующему уменьшению пикового давления. В поле

гармонической волны области интенсивной фокусировки образуются на всей длине распространения волны, поскольку, несмотря на большую разницу во времени прихода волны из разных геометрических мест, является возможной конструктивная фокусировка. При распространении N -волны формирование уровней высокого давления вдали от источника является редким явлением. Но все же, даже на больших расстояниях (рис. 2.10 (б), $\sigma = x/\lambda = 110$), возможно наблюдение областей фокусировки с относительно высоким уровнем звукового давления.

На рис. 2.10 (в) представлено увеличенное изображение фокальной области, обозначенной черным прямоугольником на рис. 2.10 (б). На пространственное распределение пикового положительного давления наложены траектории лучей (серые линии) и геометрические места первых (серые точки) и вторых (красные точки) каустик, полученные решением уравнения эйконала геометрической акустики (2.17). Лучевые траектории показывают формирование каустик, положения которых качественно согласуются с положением областей повышенного давления, рассчитанных на основе нелинейного эволюционного уравнения (2.7). Тем не менее, положение каустик не совпадает с положениями максимальных уровней давления акустического поля. Более того, из-за пренебрежения эффектами дифракции некоторые каустики,

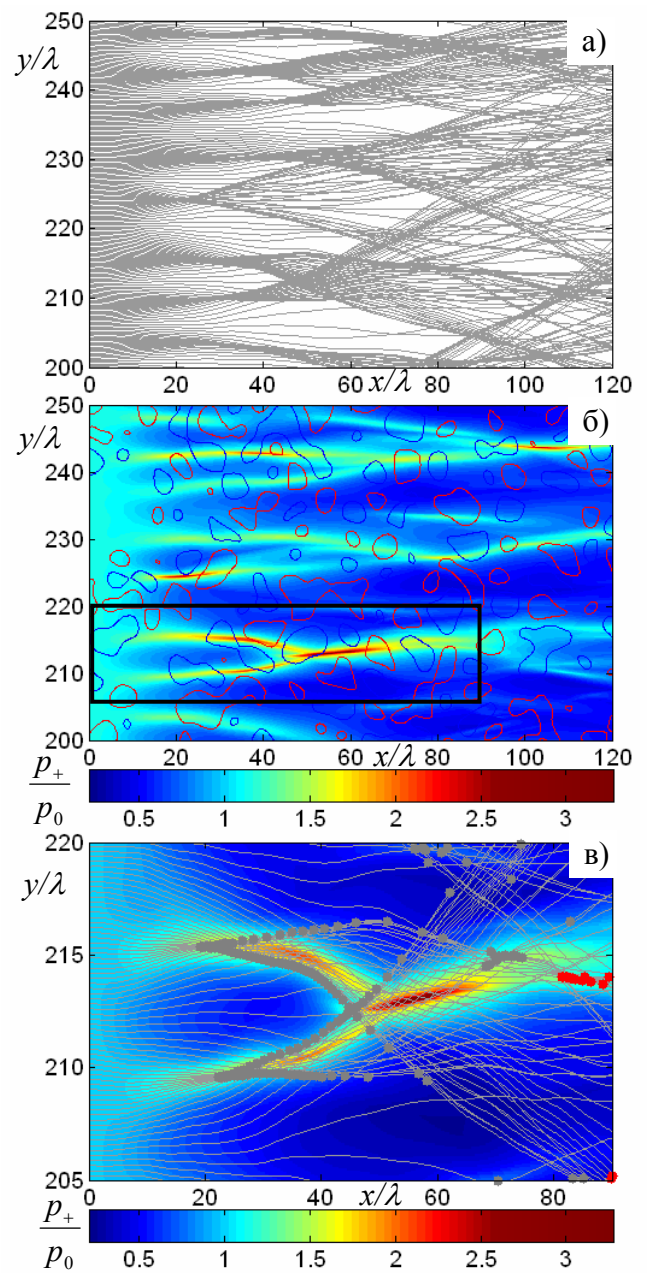


Рис. 2.10 а) – распределение лучей (ГА) в неоднородной движущейся среде с гауссовым энергетическим спектром, б) – соответствующая картина дифрагирующего акустического поля при $N = 0.05$ (пиковое положительное давление) с отмеченными на ней уровнями флуктуаций скорости среды $u_x/c_0 = \pm 0.009$ (красные – положительные, синие – отрицательные), в) увеличенное изображение области фокусировки вместе с распределением лучевых траекторий и геометрических мест каустик (серые точки – первые каустики, красные точки – вторые каустики). Область увеличения отмечена черным прямоугольником на среднем графике (б).

полученные в рамках геометрической акустики, формируются в областях, где амплитуда звукового давления на самом деле мала. В целом хорошее согласование положений областей фокусировки достигается в основном для первых каустик, в то время как для вторых каустик (красные точки) и каустик более высокого порядка (на больших расстояниях) геометрическая акустика дает неверное положение уровней повышенного давления. Таким образом, дифракционные эффекты играют важную роль в формировании акустического поля, и для получения реалистичных результатов их необходимо учитывать в модельных расчетах.

В рассматриваемом ниже лабораторном эксперименте ширина турбулентного слоя составляет около 1-1.5 м, а длина N -волны - 1.2 см, т.е. при прямолинейном распространении волна проходит расстояние через турбулентный слой равное примерно 100 - 120 длинам волн. Таким образом, наибольший интерес при численном моделировании в условиях лабораторного эксперимента представляют данные, находящиеся на расстоянии до 100 - 120 длин волн.

При распространении N -волны через турбулентную среду форма волны изменяется из-за совместного влияния нелинейных и дифракционных эффектов, эффектов поглощения и эффектов, связанных с присутствием неоднородностей среды. Например, на рис. 2.11 представлены измеренные на различных расстояниях от источника вдоль линии $y/\lambda = 212$ профили волны. Видно, как изначально «идеальная» N -волна изменяет свою форму при прохождении через каустику (фокальную область). Искажения импульса приводят к формированию волн различной формы со сложной структурой профиля: волны с закругленным положительным полупериодом, волны с несколькими ударными фронтами и длинными дифракционными хвостами. Волны с закругленным положительным

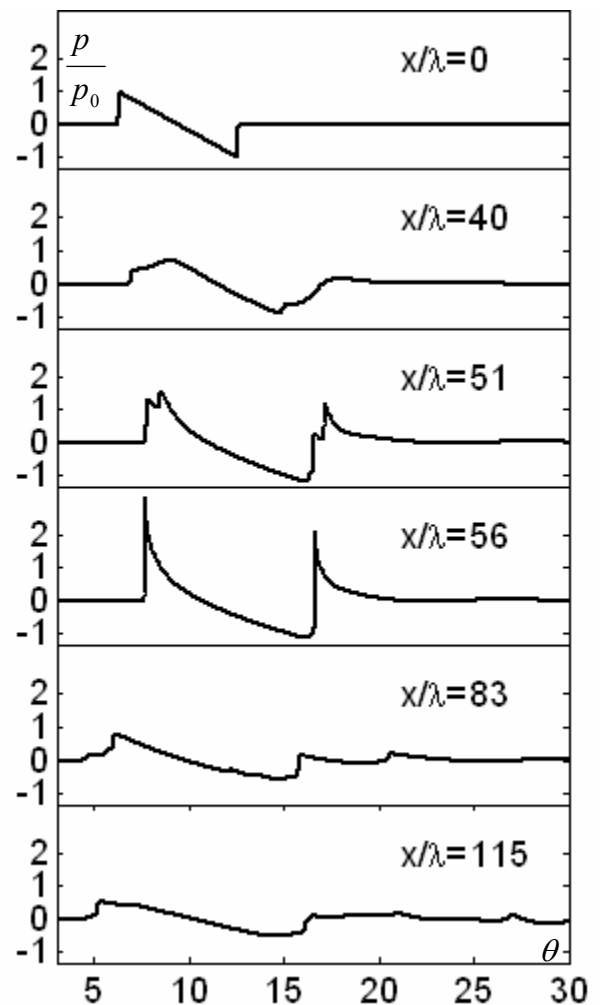


Рис. 2.11 Формы импульсов ($N = 0.05$), рассчитанные на различных расстояниях от источника вдоль линии $y/\lambda = 212$, при прохождении через каустику (рис. 2.10б).

полупериодом ($x/\lambda = 40$), волны с двумя ударными фронтами ($x/\lambda = 83$) и волны с длинными хвостами ($x/\lambda = 115$) формируются с наибольшей вероятностью в областях с пониженным уровнем пикового положительного давления (области дефокусировки). В областях же с повышенным уровнем звукового давления (области фокусировки) наблюдаются формы волн с несколькими пиками ($x/\lambda = 51$), и классические U -волны ($x/\lambda = 56$). Наиболее крутые ударные фронты наблюдаются в областях фокусировки. Тем не менее, нелинейное искажение волны проявляется также и в областях пониженного звукового давления за счет рассеяния высших гармоник на каустиках. Чем дальше распространяется импульс в неоднородной среде, тем длиннее он становится из-за наличия сильной вариации в траекториях распространения волн (разностях хода), приходящих и интерферирующих в одной точке. Такое удлинение импульса делает маловероятными эффективную фокусировку волны и образование волн большой амплитуды на больших расстояниях от источника.

Рисунок 2.12 иллюстрирует роль нелинейных эффектов в формировании акустического поля в турбулентной среде. На рисунке представлены пространственные распределения пикового положительного давления для линейного ($N=0$, а) и нелинейного ($N=0.05$, б) распространения исходно плоской N -волны в неоднородной среде (рис. 2.9). Как видно, нелинейные эффекты приводят к увеличению пикового положительного давления в фокальных областях. Давление в случайных фокусах в нелинейной волне может превышать амплитуду давления в линейном случае более чем на 30% даже на больших расстояниях (до 5 нелинейных длин $x_s = 20\lambda$).

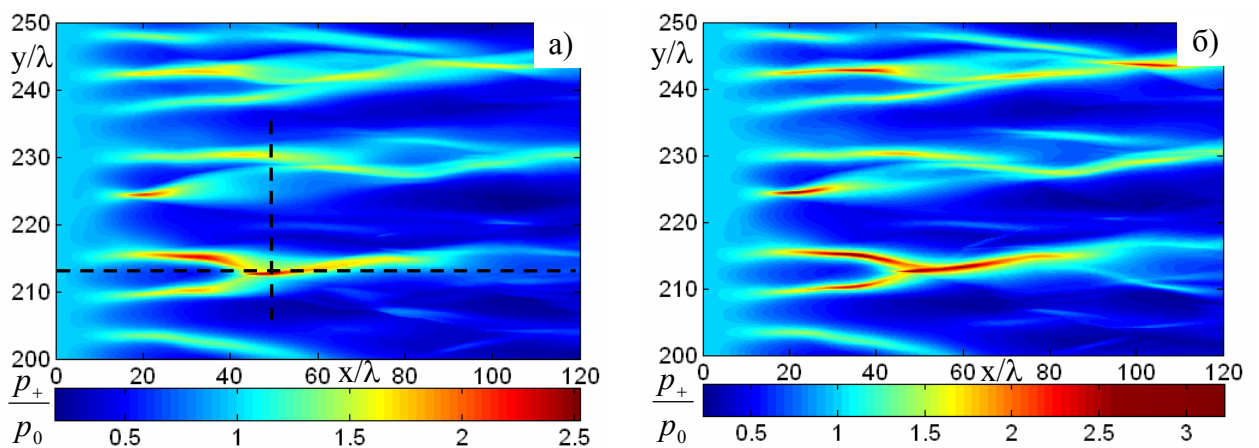


Рис. 2.12. Пространственные картины пикового положительного давления, соответствующие а) линейному ($N=0$) и б) нелинейному ($N=0.05$) распространению исходно плоской N -волны в случайно-неоднородной движущейся среде (рис. 2.9).

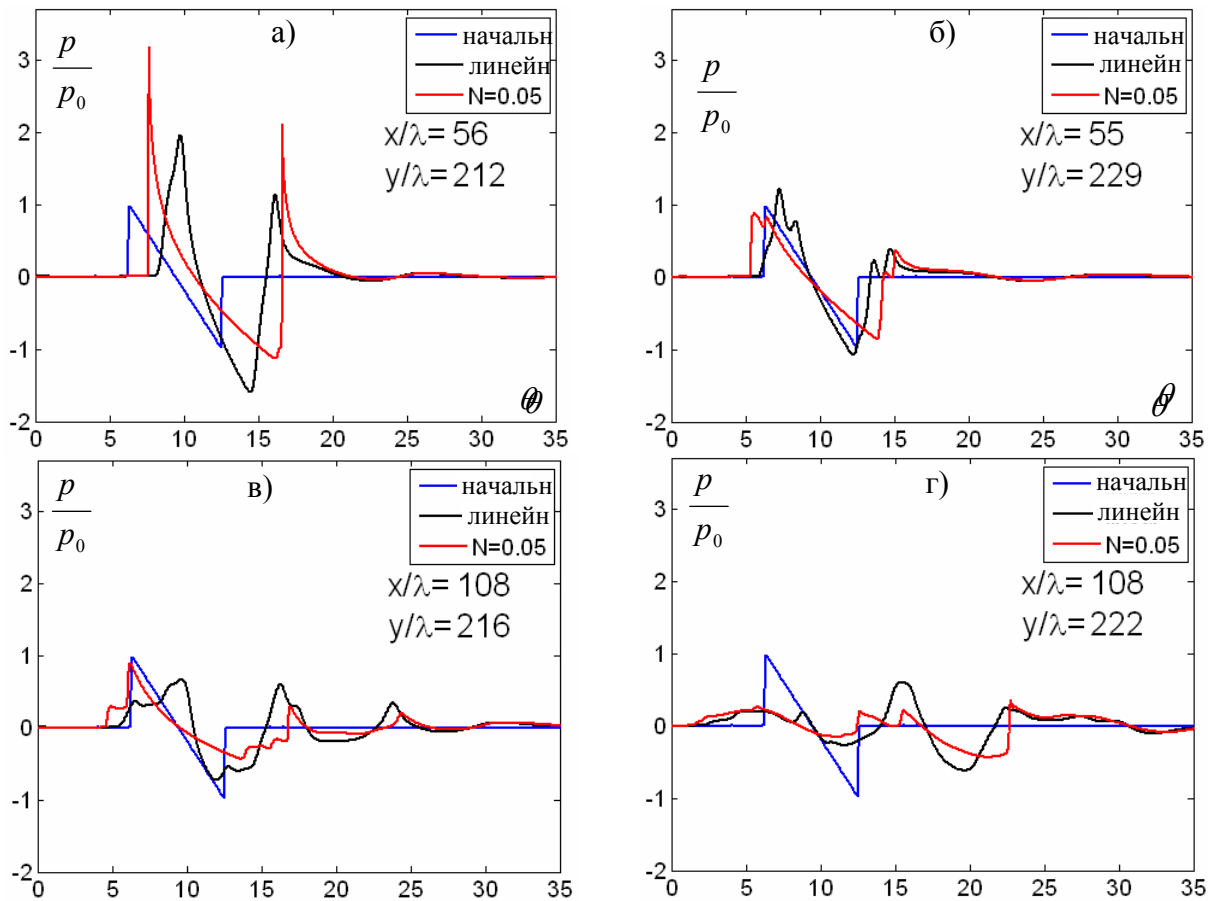


Рис. 2.13 Характерные профили линейной ($N=0$) и нелинейной ($N=0.05$) волн в различных точках, случайного фокуса (а) и зоны тени (б - г). Синяя кривая - исходный профиль N -волны.

Для исследования влияния нелинейности среды на искажения формы волны при ее распространении на рис. 2.13 представлены линейные ($N=0.0$) и нелинейные ($N=0.05$) профили волн, рассчитанные в различных точках поля акустического давления. Классическая трансформация N -импульса в U -волну происходит в фокальной области (а). Амплитуда U -волны больше, чем амплитуда начальной N -волны, и зависит от ширины ее ударного фронта. В случае нелинейного распространения пиковое положительное давление U -волны на 50% выше, ширина ударного фронта уже, а длительность импульса больше по сравнению с линейной волной. В некоторых точках зоны тени, или в переходных областях (в, г) даже на небольших расстояниях от источника можно наблюдать, что нелинейные формы волн имеют меньшую амплитуду, чем в линейном случае, из-за деструктивного влияния нелинейной диссипации.

Другой интересный эффект связан с тем, что даже в зонах тени, из-за рассеяния высших гармоник на каустиках, можно наблюдать волны с достаточно крутыми ударными фронтами (в). И линейные, и нелинейные формы волн имеют длинные хвосты, так как неоднородность является причиной распространения волны по множественным трассам и, следовательно, в одну точку приходят волны с различной временной задержкой, интерференция которых приводит к образованию столь сложной структуры. В целом

хвост импульсов будет длинным вне областей фокусировки, в то время как внутри фокальных зон, куда рассеянные на неоднородностях волны приходят в фазе, импульс более короткий. Во всех приведенных случаях нелинейные эффекты приводят к укрупнению фронта и удлинению волны. Тем не менее, несмотря на нелинейное укрупнение, предсказанные в зонах геометрической тени формы волн всегда имеют более широкие фронты, чем у начального импульса.

Рассмотрим теперь влияние энергетического спектра турбулентности на изменение параметров N -волны при распространении через случайную неоднородность. Сравним случаи турбулентности с гауссовским спектром (одномасштабной) (2.15) и со спектром Кармана (2.16), описывающим многомасштабные турбулентные флуктуации скорости среды. Внешний размер неоднородности и интенсивность кармановского турбулентного поля выбраны в соответствии с параметрами гауссова спектра, рассмотренного ранее: $L_0 = 4\lambda$ и $u_{rms} = 3$ м/с. Внутренний масштаб неоднородности равен $l = 2.4\lambda$ в соответствии с ограничениями параболического приближения теории дифракции.

Поскольку случайное поле скорости с энергетическим спектром Кармана имеет более сложную и изрезанную структуру, картина пикового положительного давления также приобретает тонкую структуру, что является следствием рассеяния импульса на неоднородностях малого масштаба (рис. 2.14) [118]. Кроме того, области фокусировки волны появляются на более близких расстояниях от источника, чем в случае распространения волны через неоднородность с гауссовым спектром. Наиболее сильное отличие в результатах наблюдается для средних значений ширины ударного фронта

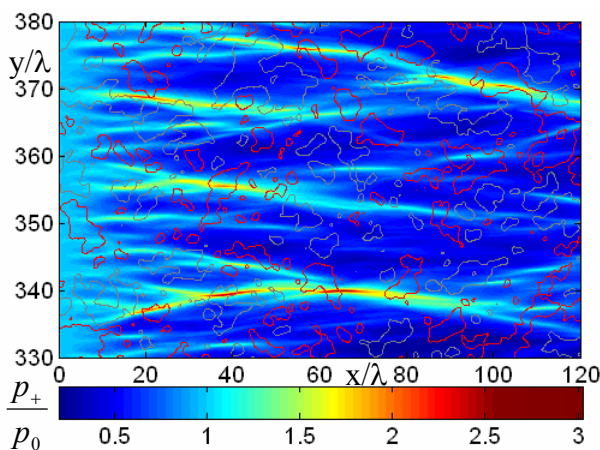


Рис. 2.14 Распределение пикового положительного давления в турбулентном поле с энергетическим спектром Кармана ($N=0.05$). Уровни интенсивности флуктуаций отмечены красными – положительными и серыми – отрицательными контурами. ($u_x / c_0 = \pm 0.009$).

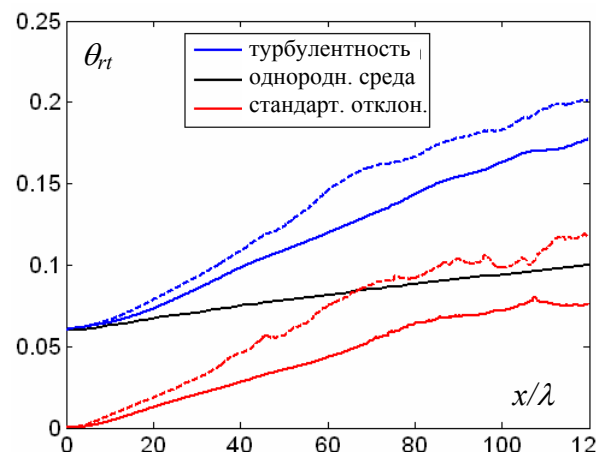


Рис. 2.15 Зависимость средней ширины ударного фронта вдоль координаты распространения в нелинейной ($N=0.05$) случайной среде с гауссовым (сплошные линии) и кармановым (пунктирные линии) энергетическими спектрами.

волны (рис. 2.15). Видно, что размытие ударного фронта волны происходит эффективнее в случае её распространения через турбулентное поле со многими масштабами, т.е. ширина фронта в турбулентной среде во многом определяется мелкомасштабными структурами.

Влияние поперечных составляющих случайного поля скорости среды иллюстрирует рис. 2.16 на котором представлены распределения максимальных по x (а) и по y (б) значений пикового положительного давления, рассчитанных с учетом обеих компонент скорости случайного поля и с учетом только продольной составляющей. Видно, что присутствие поперечных флуктуаций скорости среды смещает фокальные области, как в поперечном, так и в продольном направлении, изменяя при этом их амплитуду. Более того, могут образоваться и новые области фокусировки, а существовавшие ранее – исчезнуть (рис. 2.16 (б), $y/\lambda = 372$). Таким образом, для корректного предсказания пиковых характеристик акустической волны при ее распространении в случайно-неоднородной среде с энергетическим спектром Кармана необходимо учитывать поперечную составляющую флуктуаций случайного поля.

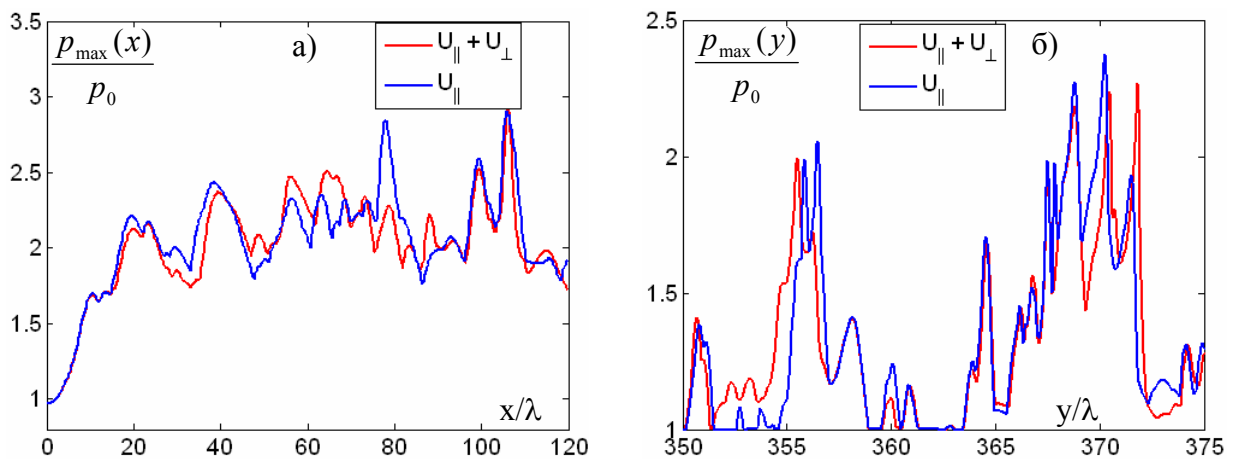


Рис. 2.16. Максимальное пиковое положительное давление, рассчитанное с учетом или без учета флуктуаций скорости среды в поперечном направлении. (а) – максимальное по y распределение. (б) – максимальное по x распределение. $N=0.05$

2.7. Сравнение результатов численного моделирования и эксперимента

Экспериментальная установка (рис. 2.17) состояла из плоского сопла ($L = 160$ мм по ширине и 1400 мм по длине) [119], двух деревянных щитов, установленных по краям сопла и воздушной турбины (до 160 м/с, 15 кг/с, 350 кВт), используемой для формирования воздушного потока. Поток воздуха распространялся между двумя экранами (2000 мм в высоту, ось z , и 3100 мм в длину, ось x), необходимыми для уменьшения потерь энергии потока за счет его уширения в свободном пространстве. Скорость потока воздуха на выходе из сопла варьировалась от 0 до 50 м/с. Интегральные

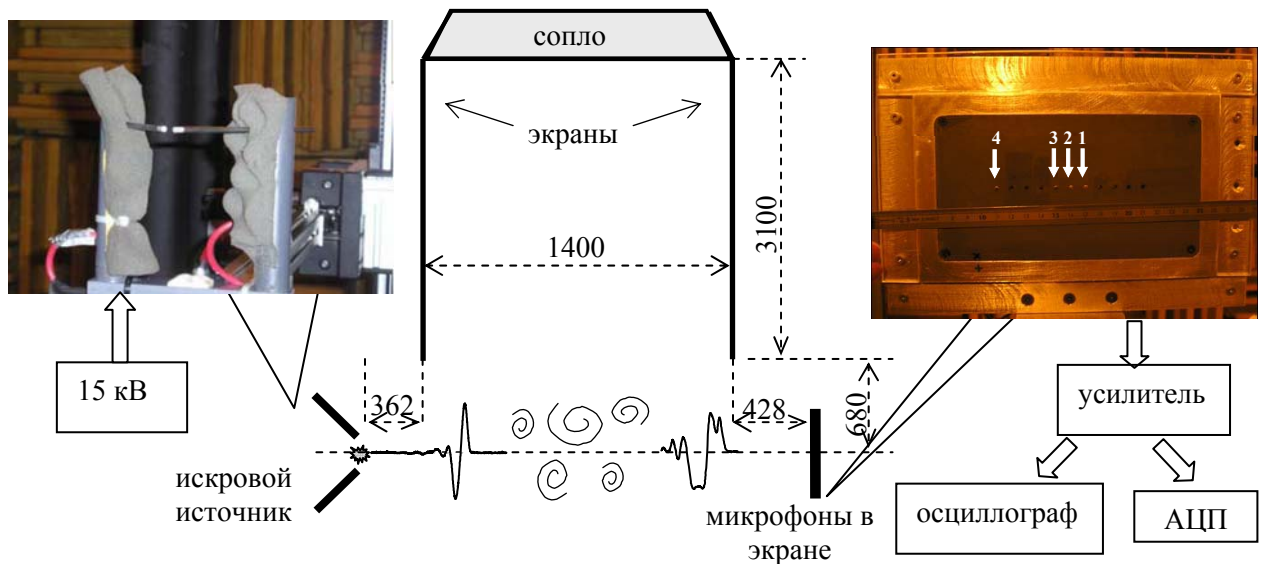


Рис. 2.17 Схема экспериментальной установки (вид сверху). Все расстояния даны в миллиметрах.

характеристики турбулентного поля измерялись с помощью трубки Пито, а флуктуационные - методом простого и перекрестного термоанемометра (DANTEC 55P51), позволяющими одновременно измерять две компоненты скорости потока.

Акустические измерения проводились в плоскости, перпендикулярной потоку на расстоянии $X = 3780$ мм от сопла, где средняя скорость потока U_{mean} и средняя квадратичная скорость турбулентных флуктуаций u_{rms} среды были неизменными практически по всей ширине и высоте потока и также выполнялось условие для уровня турбулентного перемешивания среды, при котором турбулентность можно считать полностью развитой $u_{rms} / U_{mean} = 20\%$ [119]. Пространственный спектр $E_{11}(K) = E(f)U_{mean} / (2\pi)$, где $K = 2\pi f / U_{mean}$ (рис. 2.18), и характерные масштабы флуктуаций турбулентного поля в плоскости измерений определялись путем измерения временного профиля скорости и нахождения его частотного спектра. Далее, для перехода к пространственному спектру, использовалась гипотеза Тэйлора о переносе турбулентных структур средним потоком [120].

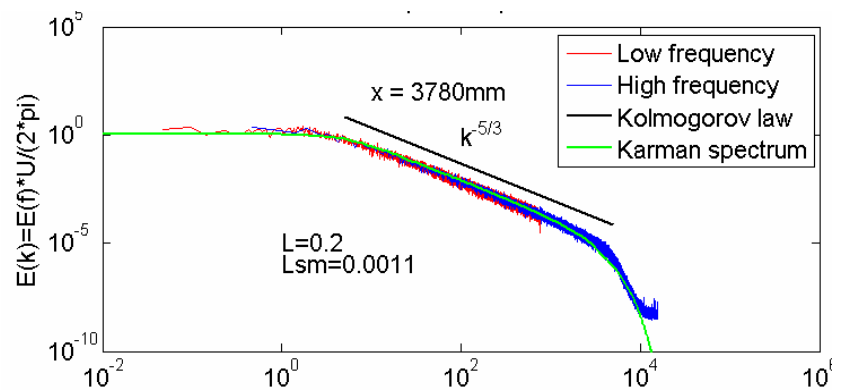


Рис. 2.18. Энергетического спектр турбулентных пульсаций, полученный в эксперименте, спектр Кармана и закон «-5/3» Колмогорова для инерционного интервала. Измерения проводились на оси сопла на расстоянии $X = 3780$ мм от него.

Как видно из рисунка, полученный в эксперименте пространственный спектр имеет характерный для развитой турбулентности инерционный интервал «-5/3» Колмогорова и также хорошо аппроксимируется аналитическим выражением для одномерного спектра Кармана при значениях внешнего и внутреннего масштабов флуктуаций: $L_0 = 220$ мм, $l_0 \in 1.1$ мм.

Акустические измерения проводились на расстояниях от 15 см до 2 м от источника N -волн (рис. 2.17). Характерное максимальное давление в импульсе на расстоянии одного метра от источника P_{\max} составляло 85 Па, половинная длительность T – 14.55 мкс, а ширина ударного фронта $t_{0.1-0.9}$, - около 3 мкс. Микрофоны (4 шт.) устанавливались в жесткий экран и располагались на расстоянии ~ 40 см от границы, задаваемой деревянным щитом для уменьшения влияния турбулентных пульсаций на измерения акустического поля. Проводилась запись большого числа профилей N -волны, которые генерировались источником в последовательные моменты времени при фиксированной геометрии и изменяемой интенсивности турбулентных пульсаций.

Характерные профили акустических волн, измеренные после прохождения

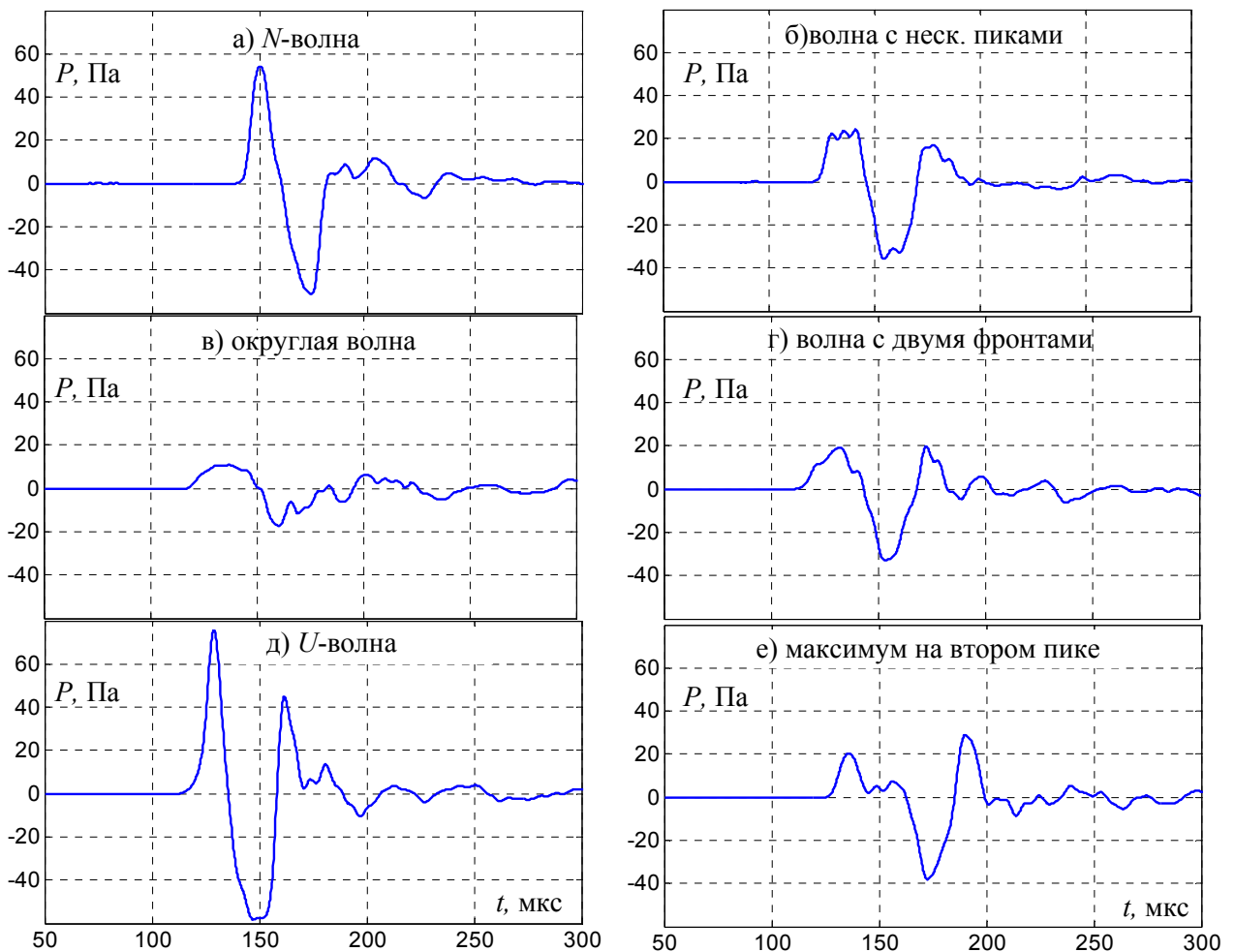


Рис. 2.19 Характерные профили волн, измеренные на расстоянии 2.19 метра от источника после прохождения турбулентного слоя. $U_{jet} = 30$ м/с

турбулентного слоя, показаны на рис. 2.19 соответствуют полученным ранее в численной модели (рис. 2.11): импульсы с формой U или N -волны (а, д) большой амплитуды и узким ударным фронтом, волны с округлым положительным полупериодом (в), волны с несколькими пиками (б) или несколькими ударными фронтами (г). Большинство импульсов имеют длинный «амплитудный хвост», а максимум давления может наблюдаться не только на переднем фронте волны, но и в середине импульса (е).

Для моделирования условий данного эксперимента, в уравнении (2.6) были выбраны следующие параметры среды: $\varepsilon = 1.21$, $b = 4.86 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\rho_0 = 1.29$ кг/м³, $c_0 = 335$ м/с. Релаксационные коэффициенты вычислялись при относительной влажности 85%, температуре 278 К и равновесном давлении 1 атм.: $c_1 = 0.1174$ м/с, $\tau_1 = 6.9$ мкс (O_2), $c_2 = 0.0214$ м/с, $\tau_2 = 641$ мкс (N_2) [4]. В качестве граничного условия задавалась плоская N -волна с амплитудой $p_0 = 950$ Па и длительностью $T_0 = 25$ мкс на расстоянии $r_0 = 15$ см от источника. Энергетический спектр случайно-неоднородного поля скорости задавался в виде спектра Кармана с измеренным внутренним масштабом $l_0 = 2$ см = 2.4λ , и внешним масштабом $L_0 = 19.3$ см = 23λ (рис. 2.20).

Как видно из рисунка, основная энергия турбулентных пульсаций ($K \in [2, 40]$ м⁻¹) лежит левее основной энергии в спектре акустической волны, поэтому параболическое приближение достаточно хорошо описывало поставленную задачу. Среднее квадратичное значение флуктуаций скорости среды изменялось от $u_{rms} = 0$ м/с до $u_{rms} = 4.0$ м/с, что соответствует скорости $U_{jet} = 10 u_{rms} = 40$ м/с на выходе из сопла в эксперименте.

Получаемые в численном эксперименте результаты позволяют проанализировать статистику различных параметров N -волны в турбулентной среде и проверить

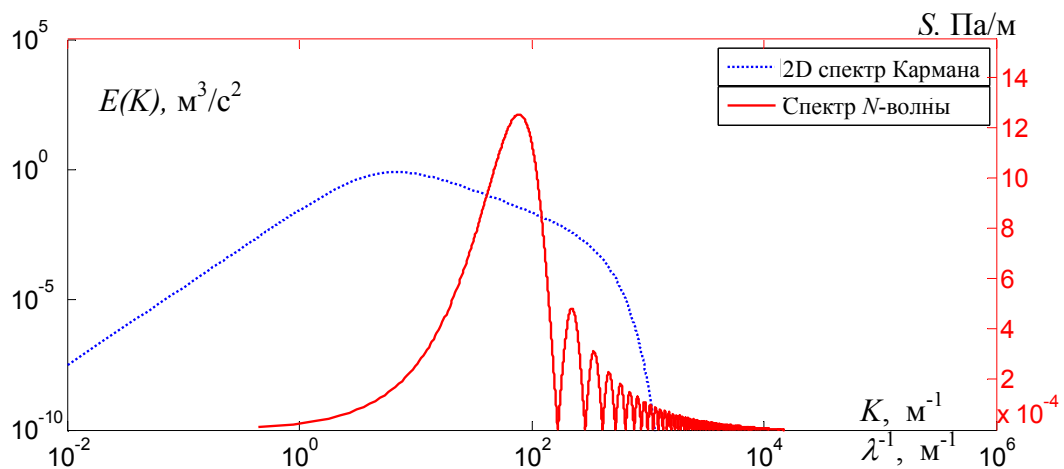


Рис. 2.20 Сравнение характерных масштабов в энергетическом спектре турбулентной среды, используемом при моделировании ($L_0 = 19.3$ см, $l_0 = 2$ см, синяя линия) с характерными масштабами в спектре начальной N -волны ($\lambda = 0.85$ см, красная кривая, красная у - ось).

состоятельность модели. Для примера на рис. 2.21 представлены экспериментальные (а) и рассчитанные (б) гистограммы распределений относительного пикового положительного давления $\langle p_+ \rangle / \langle p_+^0 \rangle$ в поле N -волны на расстоянии 2.19 м от источника при разных интенсивностях турбулентных флуктуаций [99].

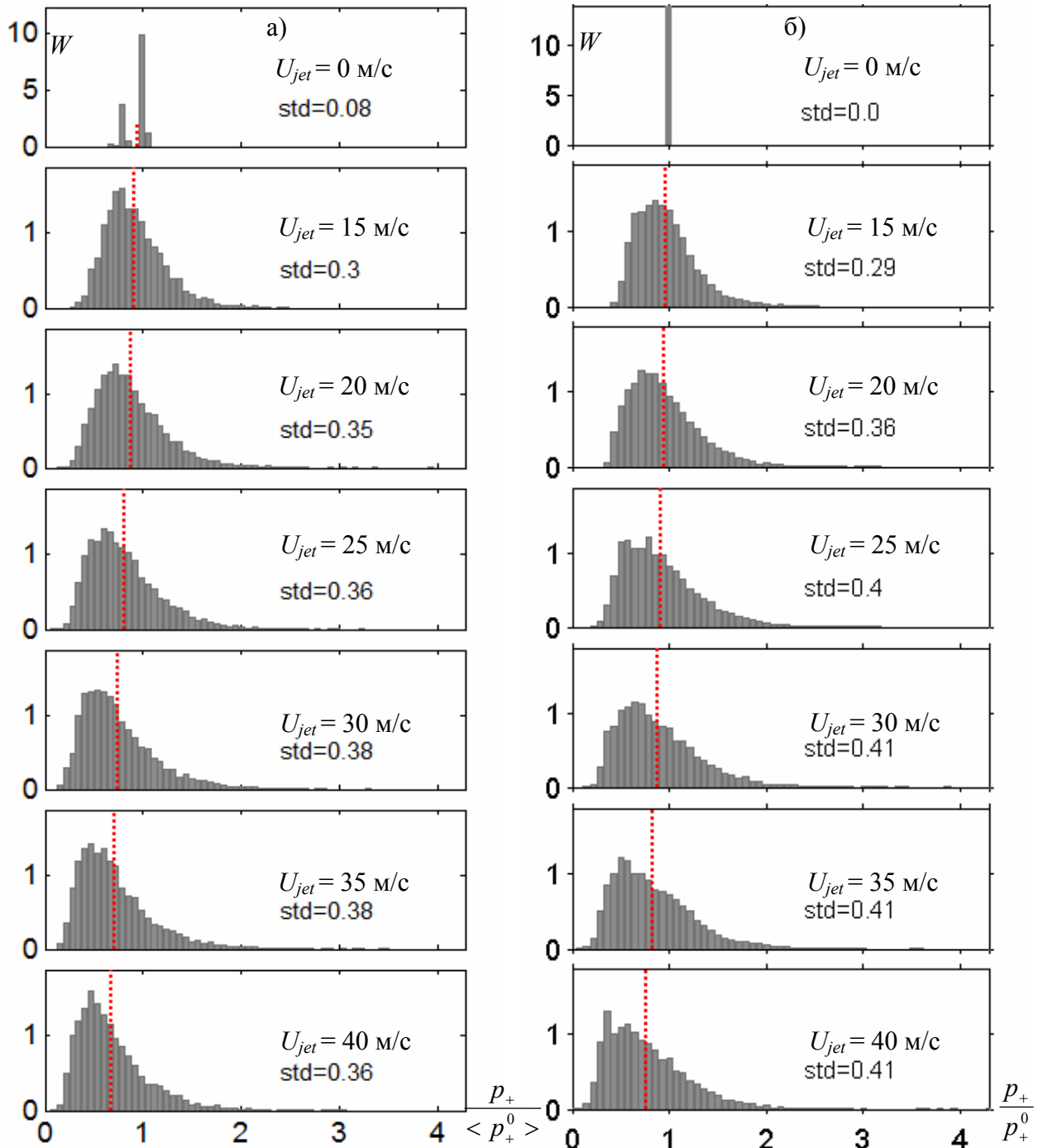


Рис. 2.21. Экспериментальные а) и рассчитанные б) гистограммы распределений пикового положительного давления $p_+ / \langle p_+^0 \rangle$ на расстоянии 2,19м от источника при разной интенсивности турбулентных флуктуаций (разных скоростях потока U_{jet} вблизи сопла). $\langle p_+^0 \rangle$ - среднее значение пикового положительного давления в отсутствие турбулентных флуктуаций. Красные пунктирные линии соответствуют среднему значению пикового положительного давления. Обозначение std – стандартное отклонение.

Здесь $\langle p_+^0 \rangle$ - среднее значение пикового положительного давления в отсутствие турбулентных флуктуаций. Красными пунктирными линиями отмечены средние значения пикового положительного давления, а стандартное отклонение представлено для каждого рассматриваемого случая в числовом виде (на рисунках - обозначение *std*). Несмотря на то, что физический эксперимент представлял собой 3D модель распространения акустических сигналов, а численный эксперимент являлся 2D представлением, полученные результаты для пикового положительного давления качественно хорошо согласуются. В обоих случаях гистограммы распределений пикового положительного давления имеют колоколообразную форму с вытянутым хвостом в сторону увеличения значения относительного давления $\langle p_+ \rangle / \langle p_+^0 \rangle$. По мере увеличения интенсивности турбулентных флуктуаций максимум распределений смещается в сторону уменьшения давления. В то же время наблюдаются значения пикового положительного давления до 4 раз превышающего давление в однородной среде. Эти значения соответствуют областям фокусировки акустической волны. Как в физическом, так и в численном экспериментах проявлялась одинаковая закономерность наблюдения профилей определенной формы в соответствии с положением на гистограмме распределения пикового положительного давления. Так, при $p_+ / \langle p_+^0 \rangle \in [0, 1]$ формируются волны с закругленными положительными полупериодами и очень длинными хвостами давления, а также волны с несколькими ударными фронтами. При $p_+ / \langle p_+^0 \rangle \in [1, 2]$ наблюдаются *N*-волны и волны с двумя ударными фронтами, которые также имеют длинные хвосты давления. При $p_+ / \langle p_+^0 \rangle \in [2, 3]$ наблюдаются формы волн большой амплитуды с несколькими пиками, что говорит о близости к фокальной области. В фокальной области (при $p_+ / \langle p_+^0 \rangle \in [3, 4]$) формируются классические *U*-волны с большой амплитудой и узким ударным фронтом. Такое согласие результатов 3D лабораторного эксперимента и 2D численного моделирования указывает на справедливость полученной эволюционной модели (2.6) и развитого численного алгоритма для описания распространения нелинейных акустических сигналов в неоднородных движущихся средах. Полученные статистические распределения позволяют оценить вероятности выбросов амплитуд давления в турбулентной среде. К примеру, максимальная вероятность двукратного увеличения амплитуды по сравнению со случаем распространения в однородной среде достигается для наиболее интенсивной турбулентности и равна примерно 4%.

2.8. Заключительные замечания

Предложенное в данной главе работы модифицированное нелинейное эволюционное уравнение типа Хохлова - Заболотской – Кузнецова, развитая численная модель распространения нелинейных акустических сигналов в неоднородной движущейся среде и полученные результаты, подтвержденные в эксперименте, открывают новые возможности в исследовании статистических задач физики нелинейных волн. Развитый подход позволяет получать по данным моделирования одной либо нескольких реализаций случайного поля как вероятностные распределения, кумулятивные вероятности выбросов, так и средние статистические характеристики основных параметров акустического поля в случайно-неоднородной среде. Продемонстрированы преимущества нелинейно-дифракционного подхода по сравнению с приближением геометрической акустики и на больших расстояниях после прохождения множественных случайных каустик.

Впервые удалось учесть влияние поперечной составляющей случайно-неоднородного поля скорости среды на формирование структуры нелинейного акустического поля. Установлено, что поперечные флуктуации приводят к изменению структуры акустического поля как в продольном, так и в поперечном направлении, и их влияние усиливается при увеличении характерных пространственных масштабов турбулентной среды. Экспериментально и численно показано, что наличие случайно-неоднородной турбулентной среды приводит к существенному уменьшению среднего пикового положительного давления, увеличению средней ширины ударного фронта волны и более раннему приходу N -волны (в среднем более чем на 15 мкс) по сравнению с теми же параметрами в однородной среде. Установлено, что в областях фокусировки возможна регистрация акустических импульсов с более чем четырехкратным увеличением амплитуды и соответствующим уменьшением ширины ударного фронта. Впервые исследовано совместное влияние нелинейно-дифракционных эффектов на статистику широкополосного акустического поля в случайно-неоднородной движущейся среде. Показано, что нелинейные эффекты уменьшают величину относительного изменения средних характеристик волны в турбулентной среде по отношению к однородной среде.

При выполнении работы был предложен, обоснован и реализован новый экспериментальный метод калибровки микрофона по нелинейному удлинению N -волны в поглощающей среде (воздухе) с использованием определения длительности импульса по положениям нулей в его спектре. На основе численного моделирования модифицированного уравнения Бюргерса показано, что в условиях эксперимента и для характерных параметров N -волны уменьшение амплитуды в равной степени зависит от

нелинейных, релаксационных процессов и эффектов термовязкого поглощения, но при этом удлинение профиля N -волны определяется только нелинейными эффектами.

Полученные результаты по статистике амплитуды и ширины фронта N -волны находятся в согласии с данными модельных экспериментов, выполненными другими авторами [32, 77, 105], а также с измерениями нелинейных акустических сигналов в атмосфере [75, 113 - 115]. Общая тенденция заключается в том, что наличие турбулентности приводит к сильным искажениям исходной N -волны, ослаблению в среднем факторов шумового воздействия на окружающую среду (уменьшение среднего пикового давления и увеличение средней ширины фронта). Однако при этом появляется вероятность измерения профилей с очень большой амплитудой и, соответственно, очень узким фронтом, что является нежелательным. Конкретные значения вероятности зависят от различных факторов, в том числе от интенсивности турбулентных пульсаций и ширины турбулентного слоя.

Развитая модель численного эксперимента позволяет рассмотреть многие задачи фундаментального характера и практически важные проблемы атмосферной акустики. Модель является также перспективной для многих задач медицинской акустики, в которых необходимо учитывать неоднородности биологической ткани и движение крови. С развитием методов параллельного программирования модель можно обобщить на трехмерные нелинейные задачи, более точное описание дифракционных эффектов, учесть эффекты отражения и рассеяния в присутствии границ.

Асимптотический спектральный метод. Разрывные волны в средах с различным частотно-зависимым поглощением

3.1. Вводные замечания. Численные методы интегрирования нелинейных уравнений, допускающих разрывные решения

Исследование нелинейных волновых задач на основе уравнений, допускающих разрывные решения, является одним из активно развивающихся направлений современной физики и математики. При распространении возмущений с разрывами проявляются специфические нелинейные волновые эффекты, такие как поглощение энергии на ударных фронтах, зависимость скорости ударного фронта от его амплитуды, взаимодействие разрывов по типу абсолютно неупругих частиц и другие эффекты, не свойственные линейным и слабо искаженным волнам. Эти явления важны для многих практических приложений. Так, в акустике примерами являются применение мощного ультразвука для неинвазивной хирургии, экстракорпоральная литотрипсия (разрушение почечных камней сфокусированными ударными импульсами), проблема звукового удара в атмосферной акустике, взрывные волны в гидроакустике. Все указанные приложения связаны с распространением разрывных акустических волн в нелинейной среде.

Нелинейные уравнения, описывающие разрывные решения, как правило, не удается решить аналитически и появляется необходимость в численном или приближенном моделировании того или иного физического явления. При описании сильно искаженных, но непрерывных сигналов во временном подходе необходимо выбирать сетку с достаточно мелким (или переменным) шагом, достаточным для описания крутых участков профиля волны, что существенно увеличивает время счета. При образовании в решении математических разрывов, измельчение шага сетки не всегда приводит к устойчивому решению задачи и необходима разработка специальных схем. Например, использующиеся в газовой динамике удароуправляющие схемы основаны на выполнении условия монотонности в гладкой части профиля и известных соотношений между физическими величинами до и после разрыва [121]. Для каждой конкретной задачи такие схемы нуждаются в отдельном математическом исследовании. Помимо построения

непрерывного решения на равномерной сетке, можно напрямую использовать выводы теории слабых ударных волн. В этом случае движение ударного фронта и эволюция непрерывного профиля рассматриваются отдельно, после чего решения сшиваются на разрывах, используя интегральные законы сохранения [122, 123]. Одним из вариантов этого метода можно считать так называемый метод характеристик, разработанный Годуновым [124, 125, 25, 102]. Для описания мощных звуковых пучков этот метод использовался в работах [24]. Решение задачи можно построить и вводя в уравнение малую искусственную вязкость, что равносильно использованию искусственных фильтров, сглаживающих разрывы [21, 126, 78, 127]. Основным недостатком таких схем является размывание либо иное искажение разрывов, то есть применять их можно только тогда, когда структура разрывного фронта не играет существенной роли. Идея другого класса методов состоит в том, что определенные свойства самих разрывных волн или закономерности их распространения можно использовать на этапе постановки задачи и, тем самым, сделать ее решаемой численно за разумное время. Если во временном подходе в задачах газодинамики и акустики широко используются удароуправляющие схемы типа Годунова, то спектральные методы для нахождения разрывных решений развиты гораздо менее полно.

В данной главе диссертации представлен новый асимптотический спектральный метод, позволяющий с высокой точностью описывать распространение нелинейных разрывных волн с помощью небольшого (30 - 50) количества гармоник. В основе этого метода лежит использование асимптотических свойств спектра разрывных функций. Построен алгоритм восстановления профиля волны по известным комплексным амплитудам первого конечного числа гармоник. Получена замкнутая система уравнений, аппроксимирующая уравнение простых волн. Далее проводится обобщение метода для описания волн с особенностями типа разрыв произвольной, двух разрывов на периоде, конечной ширины ударного фронта. Развитый метод позволил исследовать новый широкий круг задач о распространении разрывных волн в средах с частотно-зависимым поглощением. Рассмотрены задачи о распространении интенсивных волн в биологических тканях, где закон поглощения по частоте близок к линейному; в средах с селективным резонансным поглощением. Удалось также построить численные решения, описывающие нелинейные взаимодействия разрывных волн в ограниченных гауссовских пучках. Для этого была проведена дополнительная модификация пространственной сетки, позволяющая уменьшить размеры массивов данных и существенно ускорить вычисления.

Основные результаты данной части диссертации опубликованы в работах [128 - 141].

3.2. Асимптотический спектральный метод восстановления разрывных функций по конечному спектру

При решении дифференциальных уравнений в Фурье-представлении обычно решается система уравнений для первых N гармоник, а амплитуды остальных гармоник с номерами $n > N$ предполагаются равными нулю. Таким методом можно описывать распространение слабо искаженных сигналов с достаточно узким спектром. При образовании в профиле волны участков с большим значением производной (узких ударных фронтов) спектр сигнала расширяется и необходимо учитывать все большее и большее количество гармоник, что непосредственно отражается на времени и точности расчетов. При образовании в решении математических разрывов спектр решения становится бесконечным и медленно убывающим. Неучет высших гармоник приводит к неустойчивости решения, а при восстановлении функции по конечному, даже точно известному, спектру появляются осцилляции Гиббса, также обусловленные пренебрежением высокочастотной частью спектра. Как упоминалось выше, чтобы избежать этого явления, можно использовать различные фильтры или искусственную вязкость, ослабляющие высокочастотные гармоники; но тогда структура ударного фронта искажается, либо размывается, либо содержит осцилляции. Чтобы сохранить общие свойства разрывного решения, нельзя вводить большую вязкость, и при описании разрывных волн все равно приходится удерживать большое количество гармоник ($N \sim 1000$). Естественно, возникает идея использовать универсальные особенности поведения высокочастотных составляющих спектра при построении численного решения.

Известно, что спектр периодической разрывной функции имеет высокочастотную асимптотику ($S(\omega) \sim 1/\omega$). Это свойство разрывных функций использовалось для восстановления разрывного решения в работе [33]. Причем сама задача решалась во временном представлении с введением искусственной вязкости, достаточной для обеспечения устойчивого решения при не очень маленьком шаге, но недостаточной для безосцилляторного восстановления. А знание высокочастотной асимптотики спектра позволяло найти положение и амплитуду разрыва и тем самым восстановить решение без нежелательных осцилляций. Разумеется, эта операция носила чисто косметический характер. Впоследствии был разработан алгоритм восстановления кусочно-непрерывной периодической функции с несколькими разрывами на периоде [142], который затем был обобщен на случай волны, содержащей известное количество как разрывов, так и разрывов производных [143]. В работе [144] был предложен метод решения линейных гиперболических уравнений, допускающих разрывные решения, являющийся развитием

метода восстановления кусочно-непрерывных функций [142, 143], перенесенного на дифференциальные уравнения. При использовании этого метода разделялись части, ответственные за распространение сингулярных возмущений и гладкого профиля. В силу линейности уравнений различные гармоники спектра не взаимодействуют друг с другом, и такое разделение оказывается очень удобным. Позже было предложено использовать и другие асимптотические разложения для проведения косметической процедуры подавления осцилляций на ударном фронте при восстановлении профиля волны [145, 146].

При описании же распространения нелинейных волн в спектральном представлении ситуация сложнее, поскольку все гармоники взаимодействуют, и ошибка, возникающая при определении высокочастотной части, сказывается на всем спектре. Разработанный в данной работе метод позволяет использовать асимптотическое поведение спектра как на этапе восстановления профиля, так и непосредственно при решении связанной нелинейной системы уравнений для коэффициентов Фурье решения.

3.3. Асимптотический метод решения уравнения простых волн

При моделировании распространения нелинейных волн с разрывами в Фурье-представлении необходимо решать две взаимосвязанные проблемы. Первая состоит в нахождении устойчивого решения нелинейной задачи для конечного числа первых гармоник, вторая - в восстановлении разрывного профиля волны по известному ограниченному спектру. Будем описывать распространение нелинейного периодического акустического сигнала конечной амплитуды уравнением простых волн (УПВ):

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \quad (3.1)$$

Здесь $V = p/p_0$ - безразмерное давление, нормированное на амплитудное значение p_0 , $\theta = \omega_0 \tau = \omega_0(t-x/c_0)$ - безразмерное время в сопровождающей системе координат, ω_0 - круговая частота волны, c_0 - скорость звука, $z = x/x_n$ - координата распространения волны, измеряемая в характерных нелинейных длинах $x_n = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon p_0 \omega_0$, ε - коэффициент нелинейности среды. Ищем решение (3.1) в виде Фурье разложения:

$$V(z, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z) \exp(-in\theta). \quad (3.2)$$

Здесь $C_n(z)$ - комплексная амплитуда n -й гармоники в спектре распространяющегося сигнала. Подставляя решение в форме (3.2) в исходное уравнение (3.1), получим следующую связанную систему уравнений для Фурье-компонент

$$\frac{dC_n}{dz} = -\frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} \quad (3.3)$$

Учитывая, что $C_{-k} = C_k^*$, где звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения, приведем систему уравнений (3.3) к следующему виду:

$$\frac{dC_n}{dz} = -\frac{in}{2} \left(2C_0 C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k C_{k-n}^* \right) \quad (3.4)$$

Численное интегрирование бесконечной системы уравнений (3.4) обычно проводится для конечного числа первых N гармоник, при этом величины C_n при $n > N$ полагаются равными нулю и для обеспечения устойчивости численной схемы вводится искусственная вязкость. Требуемое количество N удерживаемых гармоник зависит от ширины спектра волны и для описания волн на стадии развитых разрывов может достигать 500-1000, что существенно увеличивает время расчетов.

Предлагаемый здесь подход основан на априорном знании высокочастотной асимптотики спектра разрывной волны. Представим профиль произвольного периодического возмущения V , содержащий особенность типа разрыва (рис. 3.1 (а)), в виде суммы пилообразной волны V_1 (рис. 3.1 (б))

$$V_1 = \frac{A_s}{2} \begin{cases} -1 - \frac{\theta - \theta_s}{\pi}, & 0 \leq \theta \leq \theta_s \\ 1 - \frac{\theta - \theta_s}{\pi}, & \theta_s \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}, \quad (3.5)$$

с тем же значениями амплитуды A_s и времени появления θ_s ударного фронта и гладкого профиля V_{sm} (рис. 3.1 (в)): $V = V_1 + V_{sm}$. Соответственно, спектр волны C_n (3.2) (правая колонка рис. 3.1), также будет состоять из суммы спектров “пилы”

$$C_n^{(1)} = \frac{iA_s}{2\pi n} \exp(in\theta_s) \quad (3.6)$$

и профиля, не содержащего разрыва: $C_n = C_n^{(1)} + C_n^{(sm)}$. В силу непрерывности функции V_{sm} , коэффициенты Фурье $C_n^{(sm)}$ удовлетворяют следующему соотношению [143, 147]:

$$|\tilde{C}_n^{(sm)}| = O(n^{-2}) \quad (3.7)$$

т.е. спектр непрерывной составляющей профиля убывает с ростом частоты, по крайней мере, на порядок быстрее спектра «пилы». Как видно из рис. 3.1, амплитуды гармоник рассматриваемого профиля (а), начиная с некоторого номера N , мало отличаются от их значений для пилообразной компоненты (б). Уже при $N > 15$ спектр плавной части практически равен нулю, а спектры профиля и “пилы” - неразличимы. Следовательно, при известных параметрах разрыва A_s и θ_s спектральные компоненты C_n для номеров

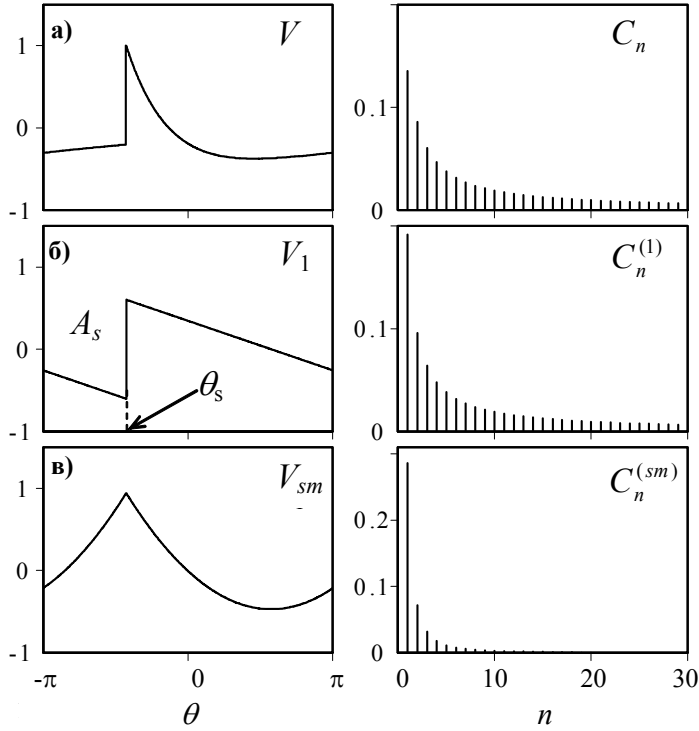


Рис. 3.1. Представление профиля одного периода (слева) и спектра (справа) разрывной волны в виде суммы пилообразной волны и плавного профиля: $V=V_1+V_{sm}$.

шириной спектра плавного профиля.

Заменим в системе (3.4) коэффициенты C_n с номерами большими, чем N , на $\tilde{C}_n = C_n^{(1)}$, определяемые формулой (3.6). Уравнения (3.4) тогда преобразуются к виду:

$$\frac{dC_n}{dz} = -in \left(C_0 C_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + \sum_{k=n+1}^N C_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N+1}^{N+n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* + \sum_{k=n+N+1}^{\infty} \tilde{C}_k C_{k-n}^* \right). \quad (3.8)$$

Все суммы в уравнениях (3.8) конечны, за исключением последней, однако и она может быть вычислена аналитически. Выразим последнее слагаемое в (3.8) в явном виде через известные коэффициенты пилообразной волны (3.6):

$$\sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* = \frac{A_s^2}{(2\pi)^2} \exp(in\theta_s) \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-n)}. \quad (3.9)$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-n)} = \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k-n} - \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n+N} \frac{1}{k}, \quad (3.10)$$

получаем:

$$\sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* = \frac{A_s^2}{(2\pi)^2} \frac{\exp(in\theta_s)}{n} \sum_{k=N+1}^{n+N} \frac{1}{k}. \quad (3.11)$$

$n > N$ могут быть аппроксимированы коэффициентами Фурье $\tilde{C}_n = C_n^{(1)}$ (3.6) соответствующей пилообразной волны. С другой стороны, сами величины A_s и θ_s могут быть определены из значений последних спектральных компонент с номерами $n \leq N$, если учесть, что при $n \sim N$ вид спектра уже мало отличается от его высокочастотной асимптотики. Необходимое количество уравнений N , которое будет необходимо удерживать в системе связанных нелинейных уравнений (3.4), невелико, поскольку оно определяется

С учетом выражения (3.11) система уравнений (3.8) окончательно принимает следующий вид:

$$\frac{dC_n}{dz} = -in \left\{ C_0 C_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + \sum_{k=n+1}^N C_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N+1}^{N+n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* + \left(\frac{A_s}{2\pi} \right)^2 \frac{\exp(in\theta_s)}{n} \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} \right\}. \quad (3.12)$$

Система уравнений (3.12) легко интегрируется методом Рунге-Кутты. Для каждого последующего шага счета по z значения $A_s(z)$ и $\theta_s(z)$ восстанавливаются из рассчитанных на предыдущем шаге значений двух последних спектральных коэффициентов C_{N-1} и C_N , с учетом того, что при $n \sim N$ вид спектра мало отличается от высокочастотной асимптотики $\tilde{C}_n = C_n^{(1)}$ (3.6):

$$A_s = 2\pi N |C_N|, \quad \theta_s = \arg \left(\frac{NC_N}{(N-1)C_{N-1}} \right). \quad (3.13)$$

После интегрирования (3.12), профиль волны на произвольном расстоянии z может быть восстановлен как сумма гладкой и пилообразной составляющих:

$$V(\theta, z) = \sum_{n=-N}^N C_n(z) \exp(-in\theta) - \frac{A_s}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(\theta - \theta_s)}{n} + \frac{A_s}{2} \begin{cases} -1 - \frac{\theta - \theta_s}{\pi}, & 0 \leq \theta \leq \theta_s \\ 1 - \frac{\theta - \theta_s}{\pi}, & \theta_s \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}. \quad (3.14)$$

Замкнутая система уравнений (3.12) аппроксимирует уравнение простых волн (3.1) и учитывает в явном виде асимптотическое поведение спектра. Принципиальной отличительной чертой такого модифицированного спектрального метода является то, что он позволяет с высокой точностью описывать ударные волны при использовании небольшого количества гармоник без введения искусственной вязкости и различных фильтров.

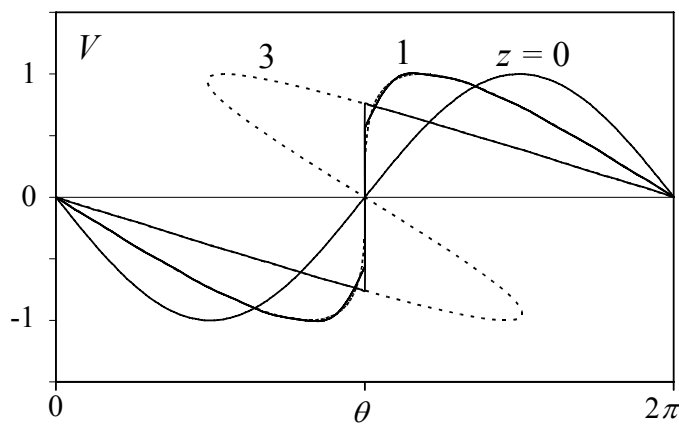


Рис. 3.2. Профили исходной гармонической волны в нелинейной среде на различных расстояниях $z=x/x_n$ (цифры у кривых). Сплошные линии - результаты численного интегрирования системы (3.14) при $N = 10$; штриховые - точное решение УПВ (3.1).

Рассмотрим несколько модельных задач, показывающих эффективность предложенного подхода. На рис. 3.2 изображены профили исходно гармонической волны $V(z=0, \theta) = -\sin(\theta)$ на различных расстояниях z (цифры у кривых). Сплошные кривые - профили волны (3.14), полученные путем численного интегрирования системы (3.12) при $N = 10$, штриховые - точное решение уравнения простых волн (3.1), в

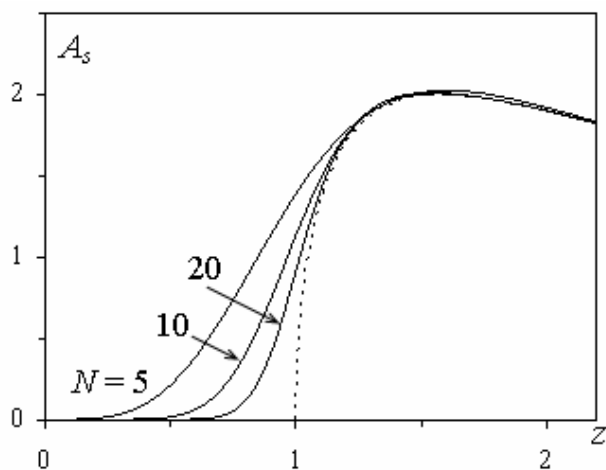


Рис. 3.3 Зависимости амплитуды разрыва от расстояния z для исходно гармонической волны. Сплошные кривые - численное решение системы (3.14) при различном числе гармоник N (цифры у кривых), штриховая кривая - точное решение УПВ.

(штриховая кривая) и для численных решений (сплошные кривые), получаемых при различных значениях N (цифры у кривых). Различия в численных и аналитическом результатах максимальны в области формирования разрыва $z \sim 1$, однако оно быстро уменьшается при увеличении числа N удерживаемых гармоник. Заметим также, что даже при $N=5$ решение устойчиво, т. е. на больших расстояния, на стадии развитых разрывов $z > 1$, численное и аналитическое решения практически совпадают. Временные профили, получаемые численно при использовании, к примеру, 10 гармоник, отличаются от точного решения лишь в очень небольшой окрестности ударного фронта ($z = 1$, рис. 3.2).

Рассмотрим теперь распространение заданных на входе в нелинейную среду импульсных возмущений: гладкого гауссовского импульса: $V(z=0, \theta) = \exp(-(\theta - \pi)^2 / 0.25)$ (рис. 3.4(а)) и исходно разрывного треугольного импульса: $V(z=0, \theta) = 2 - \theta / \pi$ (при $\pi < \theta < 2\pi$) и $V(z=0, \theta) = 0$ (при $0 < \theta < \pi$) (рис. 3.4(б)). Сплошные кривые - результаты численного интегрирования (3.12) при $N=20$ на различных расстояниях z (цифры у кривых). Штриховые кривые - точные решения, в которых ударный фронт проведен по правилу равенства площадей и, как видно из рисунков, профили точного решения и положение фронта практически неотличимы от полученных численно.

Отметим, что в отличие от обычно используемых алгоритмов численного решения системы (3.4), когда система решается для первых N гармоник, а амплитуды высших гармоник с номерами $n > N$ полагаются равными нулю, система (3.12) является замкнутой, т.е. в ней учитывается взаимодействие всех компонент бесконечного спектра разрывной волны. Ошибка, возникающая при использовании развитого асимптотического метода, обусловлена ошибкой аппроксимации высших гармоник реального спектра волны с

котором неоднозначность устранялась проведением разрыва при $\theta = 0$ в соответствии с правилом равенства площадей. Как видно, даже при использовании всего 10 гармоник точное и численное решения практически неразличимы. Наибольшее отличие наблюдалось на расстояниях $z \sim 1$ вблизи области формирования ударного фронта.

На рисунке 3.3 приведены зависимости амплитуды разрыва A_s от расстояния для точного решения

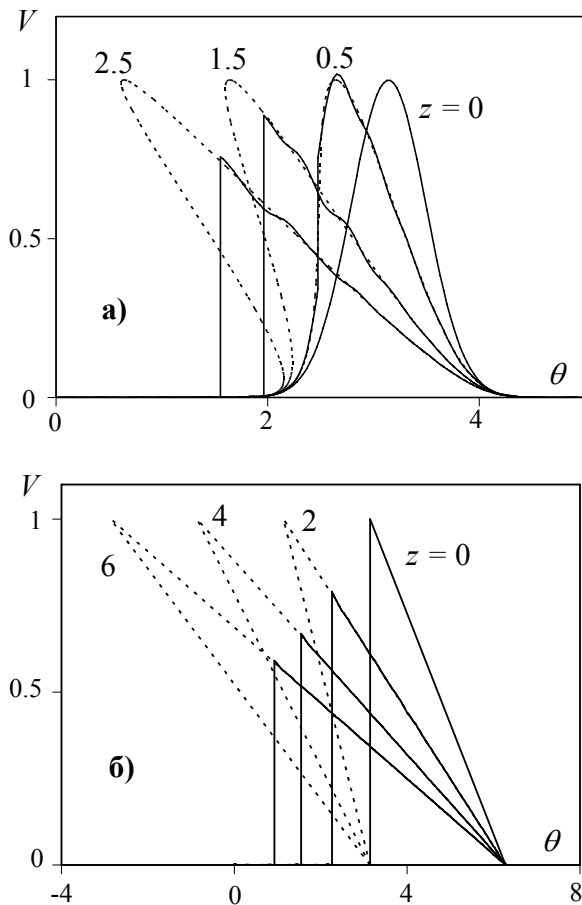


Рис. 3.4 Профили исходно гауссовского (а) и треугольного (б) импульсов в нелинейной среде на различных расстояниях $z=x/x_n$ (цифры у кривых). Сплошные кривые - результаты численного интегрирования при $N = 20$; штриховые - точные решения УПВ.

описании же несимметричных сигналов, характерных для мощных сфокусированных пучков либо одиночных ударных импульсов, около разрыва появлялись осцилляции, и решение в ряде случаев становилось неустойчивым. Из рисунка 3.1 видно, что профиль, остающийся после вычитания пилообразной волны, по-прежнему имеет особенность типа «разрыв производной», которая описывается высокочастотной асимптотикой $1/n^2$.

Рассмотрим здесь алгоритм решения уравнения простых волн (3.1) и восстановления разрывного профиля, учитывающий как особенность типа «разрыв», так и «разрыв производной», когда обе особенности расположены в одной точке. Представим профиль такой волны в виде суммы пилообразной волны V_1 , периодической параболы V_2 с разрывом производной, соответствующим разрыву производной функции, и плавного профиля V_{sm} (рис. 3.5)

$$V(z, \theta) = V_1 + V_2 + V_{sm} , \quad (3.15)$$

где

ударным фронтом спектром симметричной периодической «пилы». Эта ошибка проявляется, к примеру, при описании одиночных импульсов типа N -волны, профиль которых содержит разрывы производной, при формировании двух разрывов на периоде, при моделировании уравнений, решения которых содержат ударный фронт конечной ширины. Обобщения асимптотического метода для решения таких задач приводятся в следующих частях главы.

3.4. Учет разрыва производной в профиле волны

Предложенный асимптотический метод позволил исследовать распространение достаточно симметричных в околоразрывной области волн, то есть волн с небольшим скачком производной до и после разрыва. При

$$V_1 = \frac{A_s}{2} \begin{cases} -1 - (\theta - \theta_s)/\pi, & -\pi < \theta < \theta_s \\ 1 - (\theta - \theta_s)/\pi, & \theta_s < \theta < \pi \end{cases}, \quad V_2 = \frac{\pi A_2}{12} \begin{cases} 3(\theta - \theta_s - \pi)^2/\pi^2 - 1, & -\pi < \theta < \theta_s \\ 3(\theta - \theta_s + \pi)^2/\pi^2 - 1, & \theta_s < \theta < \pi \end{cases}, \quad (3.16)$$

Здесь A_s - амплитуда разрыва, A_2 - амплитуда разрыва производной, θ_s - положение особенностей внутри периода. Если перейти к спектральному представлению (3.2), то спектр сигнала $V(z, \theta)$ будет также состоять из суммы спектров «пилы», «параболы» и плавного профиля:

$$C_n = C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + C_n^{(sm)}, \quad (3.17)$$

где
$$C_n^{(1)} = iA_s e^{in\theta_s} / 2\pi n, \quad C_n^{(2)} = iA_2 e^{in\theta_s} / 2\pi n^2. \quad (3.18)$$

Как видно из рисунка, спектр гладкой составляющей убывает очень быстро и, начиная со сравнительно небольшого номера $N > (20 - 30)$, его вкладом в спектр сигнала $V(z, \theta)$ можно пренебречь и рассматривать только его асимптотическую часть:

$$C_n \approx C_n^{(1)} + C_n^{(2)}, \quad n > N. \quad (3.19)$$

Ошибка, возникающая при таком представлении, хорошо известна [147, 148]. Если периодическая функция $V(\theta)$ m раз дифференцируема, то ее коэффициенты Фурье:

$$|C_n| = O(n^{-m-1}), \quad (3.20)$$

то есть разложение (3.21) можно представить в виде

$$C_n = C_n^{(1)} + C_n^{(2)} + O(1/n^3). \quad (3.21)$$

Предположим, что нам известны первые N коэффициентов C_n в Фурье разложении $V(z, \theta)$ (3.2). Тогда, считая, что последние три из них (C_{N-2} , C_{N-1} и C_N) принадлежат асимптотическому выражению (3.19), можно записать систему уравнений для нахождения трех неизвестных параметров A_s , A_2 и θ_s . Введем следующие обозначения:

$$\hat{C}_n = 2\pi n C_n, \quad \exp(i\theta_s) = X, \quad (3.22)$$

тогда система уравнений для нахождения A_s , A_2 и θ_s , с учетом (3.18), будет иметь вид.

$$\begin{cases} \hat{C}_N = X^N \left(iA_0 + \frac{A_1}{N} \right) + O\left(\frac{1}{N^2} \right) \\ \hat{C}_{N-1} = X^{N-1} \left(iA_0 + \frac{A_1}{(N-1)} \right) + O\left(\frac{1}{N^2} \right) \\ \hat{C}_{N-2} = X^{N-2} \left(iA_0 + \frac{A_1}{(N-2)} \right) + O\left(\frac{1}{N^2} \right) \end{cases}. \quad (3.23)$$

Систему (3.23) можно решать различными способами. При решении следует учитывать, что наибольшая точность необходима при определении параметра X (не хуже $O(1/n^3)$). Если точно известно, что функция $V(z, \theta)$ имеет только особенности типа “разрыв” и “разрыв производной”, то плавная составляющая профиля V_{sm} есть бесконечно дифференцируемая функция (рис. 3.5). В этом случае ошибка в правой части системы (3.25) уменьшается с ростом N быстрее, чем $O(1/N^2)$. Домножая первое и второе уравнения

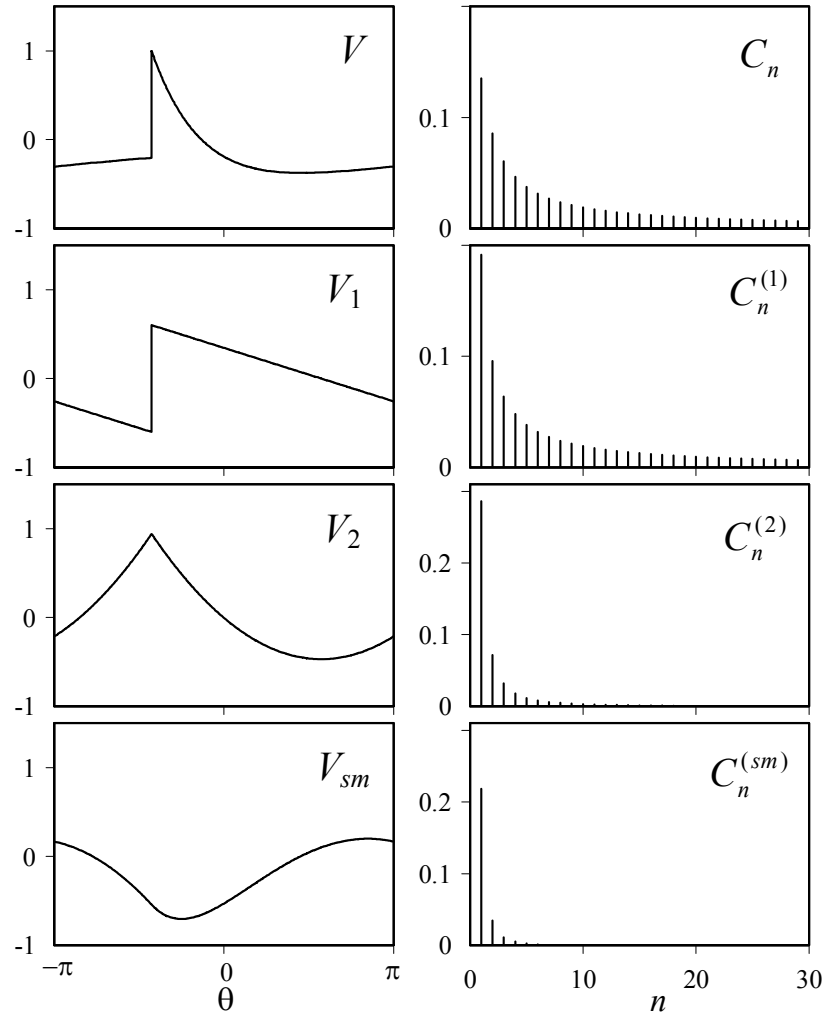


Рис. 3.5. Представление профиля и спектра периодической волны с особенностями типа “разрыв” и “разрыв производной” в виде суммы пилообразной волны, периодической параболы и гладкого профиля.

системы на комплексно сопряженные и, учитывая, что A_0 и A_1 являются действительными величинами, получим:

$$|\hat{C}_N|^2 = A_s^2 + \frac{A_2^2}{N^2}, \quad |\hat{C}_{N-1}|^2 = A_s^2 + \frac{A_2^2}{(N-1)^2}. \quad (3.24)$$

Отсюда легко найти выражения для A_s и A_2 :

$$A_s = \sqrt{\left(N^2|\hat{C}_N|^2 - (N-1)^2|\hat{C}_{N-1}|^2\right)/(2N-1)}, \quad A_2 = N(N-1)\sqrt{\left(|\hat{C}_N|^2 - |\hat{C}_{N-1}|^2\right)/(1-2N)}. \quad (3.25)$$

Параметр X найдем, умножая второе уравнение системы (3.23) на X и исключая X^N :

$$X = \frac{\hat{C}_N N}{\hat{C}_{N-1} (N-1)} \left(1 - \frac{iA_s}{iA_s N + A_2} \right). \quad (3.26)$$

Если же в профиле $V(z, \theta)$ присутствует следующая особенность в виде разрыва второй производной, то решение (3.25, 3.26) приводит к неправильным результатам. Действительно, в этом случае асимптотическое разложение спектра будет иметь вид:

$$C_N = X^N \left(iA_s + \frac{A_2}{N} + \frac{iA_3}{N^2} \right) + O(N^{-3}). \quad (3.27)$$

Здесь A_3 - константа, пропорциональная амплитуде разрыва второй производной. Домножая (3.27) на комплексно сопряженное, получим:

$$|\hat{C}_N|^2 = \left(A_s^2 + \frac{A_2^2 - 2A_s A_3}{N^2} \right) + O(N^{-3}). \quad (3.28)$$

Если $A_3 = 0$, то (3.28) переходит в результат (3.24) и дает решение (3.25). Однако при неизвестном значении A_3 из такого выражения найти A_2 невозможно.

Получим решение системы (3.23), предполагая, что в профиле волны может быть особенность следующего порядка. Разделим первое уравнение системы на второе, а второе на третье, в результате получим

$$\frac{\hat{C}_N}{\hat{C}_{N-1}} = X \left(1 - \frac{A_2}{A_s N (N-1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] \right), \quad \frac{\hat{C}_{N-1}}{\hat{C}_{N-2}} = X \left(1 - \frac{A_2}{A_s (N-1)(N-2)} \left[1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] \right). \quad (3.29)$$

В полученной системе, если умножить первое уравнение на N , второе на $(N-1)$ и вычесть одно из другого, то получается

$$X = \frac{1}{2} \left(\frac{N \hat{C}_N}{\hat{C}_{N-1}} - \frac{(N-2) \hat{C}_{N-1}}{\hat{C}_{N-2}} \right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \quad (3.30)$$

Такое выражение для X получено с необходимой точностью $O(N^{-3})$, что позволяет найти значения действительных параметров, A_s и A_2 :

$$A_s = \text{Im}(\hat{C}_N X^{-N}) + O(1/N^2), \quad A_2 = \text{Re}(N \hat{C}_N X^{-N}) + O(1/N) \quad (3.31)$$

Если становятся существенными особенности следующих порядков, то тогда необходимо использовать более “универсальный” метод, дающий рецепт улучшения точности определения X , но требующий значительно большего количества операций. Перепишем систему (3.23) следующим образом:

$$\begin{cases} X^{-N}\hat{C}_N = \left(iA_s + \frac{A_2}{N} \right) + O\left(\frac{1}{N^2} \right); & X^{-N+1}\hat{C}_{N-1} = \left(iA_s + \frac{A_2}{(N-1)} \right) + O\left(\frac{1}{N^2} \right) \\ X^{-N+2}\hat{C}_{N-2} = \left(iA_s + \frac{A_2}{(N-2)} \right) + O\left(\frac{1}{N^2} \right) \end{cases}, \quad (3.32)$$

и будем решать ее итерационным методом как уравнение степени $(-N+2)$. В частности, в данном случае можно использовать метод Ньютона [148, 149], итерационная схема которого для данной задачи имеет вид:

$$X_{j+1} = X_j \left(1 + \frac{\hat{C}_N - 2\hat{C}_{N-1}X + \hat{C}_{N-2}X^2}{N\hat{C}_N - 2(N-1)\hat{C}_{N-1}X + (N-2)\hat{C}_{N-2}X^2} \right). \quad (3.33)$$

Преимущество такого метода состоит в повышении точности определения значения параметра X . Если предположить, что в профиле есть еще особенности следующих порядков, то есть разрыв второй, третьей, четвертой и т.д. до порядка Q включительно, производных, то уравнения (3.32) будут записываться как [144]:

$$X^{-N} \sum_{j=0}^Q \hat{C}_{N-j} X^j G_Q^j = O(N^{-Q-1}), \quad (3.34)$$

где G_Q^j - биномиальные коэффициенты. Соответствующая итерационная схема тогда преобразуется так:

$$X_{l+1} = X_l \left(1 + \frac{\sum_{j=0}^Q \hat{C}_{N-j} X_l^j G_Q^j}{\sum_{j=0}^Q (N-j)\hat{C}_{N-j} X_l^j G_Q^j} \right), \quad (3.35)$$

где X_0 можно выбрать как решение при $Q = 1$, то есть $X_0 = \hat{C}_{N-1} / \hat{C}_{N-2}$.

Получив с нужной точностью значение X , находим оставшиеся неизвестные из получившейся линейной системы. После того как все параметры разрыва определены одним из вышеописанных способов, профиль волны может быть восстановлен как сумма гладкой составляющей, пилообразной волны и сглаживающей периодической параболы:

$$\begin{aligned} V(z, \theta) = & \sum_{n=-N}^N C_n(z) \exp(-in\theta) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(A_s \sin n(\theta - \theta_s) + \frac{A_2}{n} \cos n(\theta - \theta_s) \right) + \\ & + \frac{A_s}{2} \begin{cases} -1 - (\theta - \theta_s)/\pi & -\pi < \theta < \theta_s \\ 1 - (\theta - \theta_s)/\pi & \theta_s < \theta < \pi \end{cases} + \frac{\pi A_2}{12} \begin{cases} (3(\theta - \theta_s - \pi)^2 / \pi^2 - 1), & -\pi < \theta < \theta_s \\ (3(\theta - \theta_s + \pi)^2 / \pi^2 - 1), & \theta_s < \theta < \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

На рис. 3.6 приведены примеры восстановления разрывных функций с учетом только первой асимптотики (слева) и с учетом разрыва и разрыва производной. Как видно, при больших значениях амплитуды разрыва производной (короткий импульс) восстановление функции без учета этой особенности приводит к неудовлетворительным результатам.

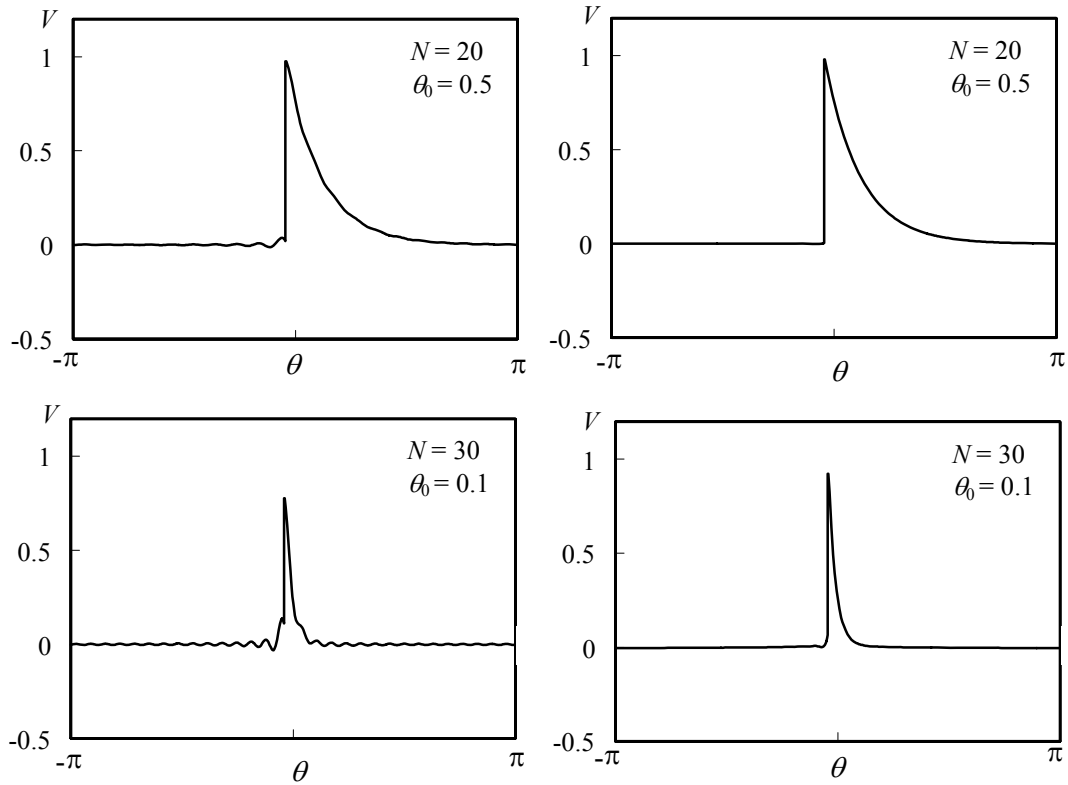


Рис. 3.6. Восстановления разрывных функций методом, учитывающим только особенность типа «разрыв» (слева), и методом, учитывающим особенности типа «разрыв» и «разрыв производной» (справа).

Таким образом, выражения (3.25) и (3.26) позволяют находить параметры разрыва в том случае, если точно известно, что помимо разрыва и разрыва производной никаких других особенностей в профиле волны нет. Если этого точно неизвестно, то выражения (3.30) и (3.31) позволяют найти положение разрыва с точностью $O(1/N^3)$, его амплитуду с точностью $O(1/N^2)$ и амплитуду разрыва производной с точностью $O(1/N)$. Если же необходимо улучшить точность, то это можно сделать, пользуясь выражениями (3.34) и (3.35). Недостатком этого метода является увеличение числа операций, поэтому при построении численного решения уравнения простых волн для определения параметров A_s , A_2 и θ_s далее будем использовать выражения (3.30) и (3.31).

Получим теперь приближенную систему уравнений для амплитуд гармоник C_n , аппроксимирующую бесконечную систему нелинейных связанных уравнений (3.2) с учетом двух асимптотик спектра на высоких частотах. Заменяем в правых частях уравнений амплитуды гармоник с номерами $n > N$ соответствующими асимптотическими выражениями:

$$\frac{dC_n}{dz} = -in \left(C_0 C_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + \sum_{k=n+1}^N C_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N+1}^{N+n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* \right), \quad (3.37)$$

где

$$\tilde{C}_k = \frac{\exp(ik\theta_s)}{2\pi k} \left(iA_s + \frac{A_2}{k} \right), \quad \tilde{C}_{k-n}^* = \frac{\exp(-i(k-n)\theta_s)}{2\pi(k-n)} \left(-iA_s + \frac{A_2}{(k-n)} \right), \quad (3.38)$$

- коэффициенты Фурье асимптотической части спектра, т.е. суммы «пилы» и «параболы» с параметрами, рассчитываемыми на каждом шаге по z по формулам (3.30) и (3.31).

Оценим погрешность такой замены. Рассмотрим третью сумму в выражении (3.37) и обозначим ее S_3 .

$$S_3 = \sum_{k=N+1}^{N+n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* \quad (3.39)$$

Если функция $V(\theta)$ в точке θ_s имеет разрыв, разрыв производной, разрыв второй производной и т.д. до порядка Q включительно, то ее можно представить в виде [143]:

$$V(\theta) = f(\theta) + \sum_{j=0}^Q V_{j+1}, \quad (3.40)$$

где V_j - функции соответствующие разрывам различного порядка, $f(\theta)$ - бесконечно дифференцируемая функция. Спектр $V(\theta)$ тогда примет вид:

$$C_n = \hat{f}_n + \frac{\exp(in\theta_s)}{2\pi} \sum_{j=0}^Q \frac{A'_{j+1}}{n^{j+1}}, \quad (3.41)$$

где A'_{j+1} - амплитуды разрыва j -ых производных; в случае четных j они чисто мнимые, в случае нечетных - действительные. Для оценки погрешности суммы в выражении (3.39) вместо асимптотических коэффициентов (3.38) подставим коэффициенты, учитывающие разрыв второй производной. Тогда выражение для S_3 примет вид.

$$S_3 = \sum_{k=N+1}^{N+n} \left\{ \frac{\exp(ik\theta_s)}{2\pi} \left(\frac{iA_s}{k} + \frac{A_2}{k^2} + \frac{iA_3}{k^3} \right) \hat{f}_{k-n}^* + \frac{\exp(in\theta_s)}{(2\pi)^2} \left(\frac{iA_s}{k} + \frac{A_2}{k^2} + \frac{iA_3}{k^3} \right) \sum_{j=0}^Q \frac{A'_{j+1}}{(k-n)^{j+1}} \right\}. \quad (3.42)$$

При $n \cong N$ первое слагаемое имеет порядок $O(1)$, тем самым является главным членом погрешности аппроксимации. В этом случае очевидно, что общая ошибка в определении суммы будет порядка $O(N^{-2})$:

$$S_3 = \sum_{k=N+1}^{N+n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* + O(N^{-2}) \quad (3.43)$$

Перейдем к рассмотрению последней суммы в (3.37), она бесконечна, но состоит только из асимптотических коэффициентов. Обозначим эту сумму как S_n и для ее оценки поступим аналогично предыдущему случаю, то есть подставим в нее коэффициенты, содержащие члены порядка $1/k^3$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \left[\frac{\exp(in\theta_s)}{(2\pi)^2} \left(\frac{iA_s}{k} + \frac{A_2}{k^2} + \frac{iA_3}{k^3} + O(k^{-4}) \right) \cdot \left(-\frac{iA_s}{k-n} + \frac{A_2}{(k-n)^2} - \frac{iA_3}{(k-n)^3} + O(k^{-4}) \right) \right] = \\
&= \frac{\exp(in\theta_s)}{(2\pi)^2} \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \left[\frac{A_s^2}{k(k-n)} + \frac{inA_sA_2}{k^2(k-n)^2} + \frac{A_2^2}{k^2(k-n)^2} + A_sA_3 \frac{2k^2 - 2kn + n^2}{k^3(k-n)^3} + O(k^{-5}) \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

В последнем выражении вклад в ошибку дают члены порядка $1/k^4$. Более того, слагаемое, содержащее A_3 , имеет тот же порядок по k , что и слагаемые, содержащие A_2^2 , поэтому удерживать его в сумме при расчете не имеет смысла. Слагаемое, содержащее произведение A_sA_2 при $n \cong N$ после суммирования по k будет иметь порядок $O(N^{-2})$, т.е. его тоже учитывать не надо, так как ошибка в определении суммы S_3 имеет такой же порядок. Таким образом, для оценки последней суммы имеем следующее выражение:

$$\sum_{k=N+n+1}^{\infty} C_k C_{k-n}^* = \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* + O(N^{-2}), \tag{3.45}$$

и сумма S_n принимает вид:

$$S_n = \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* = \frac{\exp(in\theta_s)}{4\pi^2} \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \left[\frac{A_s^2}{k(k-n)} \right]. \tag{3.46}$$

Выражение (3.46) может быть вычислено аналитически:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-n)} &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k-n} - \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \right\} = \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} \equiv K(N, n)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Тогда окончательное выражение для S_n принимает вид:

$$S_n = \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* = \frac{\exp(in\theta_s)}{4\pi^2} \sum_{k=N+n+1}^{\infty} \left[\frac{A_s^2}{k(k-n)} \right]. \tag{3.48}$$

Таким образом, получаем замкнутую систему конечного числа уравнений, аппроксимирующую уравнение простых волн с учетом асимптотик разрыва и разрыва производной (3.43) и (3.45).

$$\frac{dC_n}{dz} = \left\{ -\frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{k-n} \right\} = -in \left(C_0 C_n + \frac{1}{2} S_1 + S_2 + S_3 + S_n \right) + O(N^{-2}), \tag{3.49}$$

где $S_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$, $S_2 = \sum_{k=n+1}^N C_k C_{k-n}^*$, а S_3 и S_n определены выражениями (3.39) и (3.48).

Для иллюстрации приведем результаты моделирования распространения одиночных ударных импульсов различной формы в нелинейной среде. Интегрирование системы уравнений (3.47) проводилось численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка для первых $N = 30$ гармоник. На рис. 3.7 (б) показана эволюция профиля короткого импульса сжатия

$$\begin{cases} V(z=0, \theta) = \frac{\exp(-(\theta - \theta_s + 2\pi)/\theta_0)}{1 - \exp(-2\pi/\theta_0)}, & -\pi < \theta < \theta_s \\ V(z=0, \theta) = \frac{\exp(-(\theta - \theta_s)/\theta_0)}{1 - \exp(-2\pi/\theta_0)}, & \theta_s < \theta < \pi \end{cases}, \quad C_n(z=0) = \frac{\exp(in\theta_s)}{2\pi(1/\theta_0 - in)}, \quad (3.50)$$

на различных расстояниях z (цифры у кривых). Для сравнения на рис. 3.7 (а) приведены результаты моделирования распространения такого импульса с использованием системы уравнений (3.12), где учитывалась только одна асимптотика пилообразной волны. Как видно из рисунка, без учета разрыва производной, распространение такого импульса описать не удастся. Учет более точной асимптотики для аппроксимации высокочастотной части спектра импульса обеспечивает устойчивость численного решения задачи, а также улучшает качество восстановления профиля сигнала по рассчитанному ограниченному спектру. Эволюция разрывного импульса с отрицательной фазой

$$\begin{cases} V(z=0, \theta) = 2 \exp((\theta - \theta_s + 2\pi)/\theta_0) \cos\left(\frac{\theta - \theta_s}{\sqrt{3}\theta_0} + \frac{\pi}{3}\right), & -\pi < \theta < \theta_s \\ V(z=0, \theta) = 2 \exp((\theta - \theta_s)/\theta_0) \cos\left(\frac{\theta - \theta_s}{\sqrt{3}\theta_0} + \frac{\pi}{3}\right), & \theta_s < \theta < \pi \end{cases}, \quad (3.51)$$

профиль которого характерен для ударных импульсов, используемых в литотрипсии, показана на рис. 3.8. Для сравнения представлены решения для импульсов, полученные с использованием одной асимптотики (слева, $\theta_0 = 1$) и двух асимптотик (в середине $\theta_0 = 1$ и справа, $\theta_0 = 0.5$). Как видно, использование одной асимптотики не позволяет получить

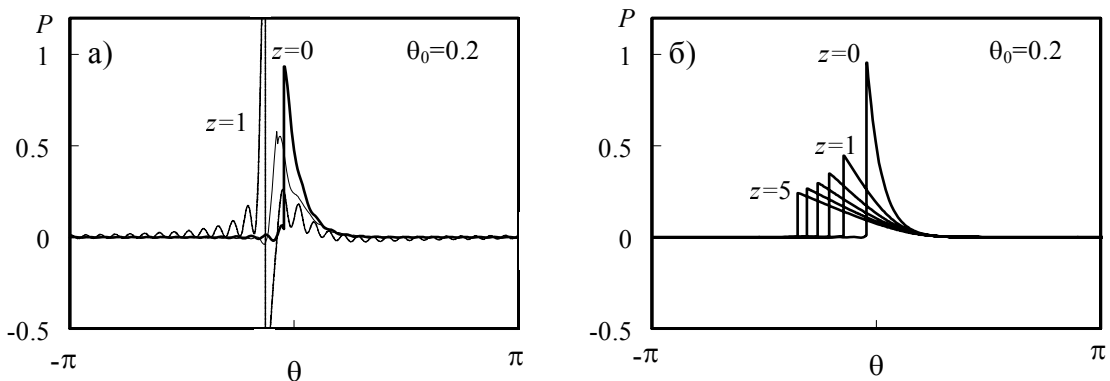


Рис. 3.7 Эволюция профиля импульса сжатия при распространении в нелинейной среде.

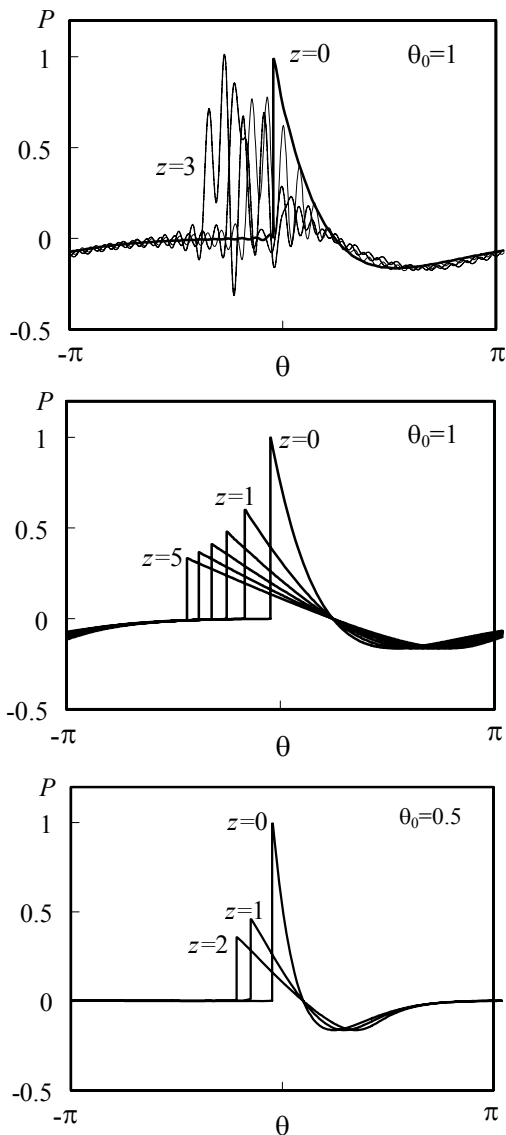


Рис. 3.8. Нелинейная эволюция профиля импульса с отрицательной фазой.

примером является N - волна с двумя разрывами – импульс звукового удара.

Пусть периодическая функция $V(\theta)$ содержит два разрыва на каждом из периодов длительностью 2π . Представим ее в виде суммы непрерывной функции V_{sm} и двух пилообразных функций V_1 и V_2 с соответствующими амплитудами и положением разрывов:

$$V(\theta) = V_{sm} + V_1 + V_2, \quad (3.52)$$

$$V_1 = \frac{A_{s1}}{2} \begin{cases} -1 - (\theta - \theta_{s1})/\pi, & -\pi < \theta < \theta_{s1} \\ 1 - (\theta - \theta_{s1})/\pi, & \theta_{s1} < \theta < \pi \end{cases}, \quad V_2 = \frac{A_{s2}}{2} \begin{cases} -1 - (\theta - \theta_{s2})/\pi, & -\pi < \theta < \theta_{s2} \\ 1 - (\theta - \theta_{s2})/\pi, & \theta_{s2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Здесь θ_{s1} , θ_{s2} - положения, A_{s1} , A_{s2} - амплитуды разрывов. Спектр функции

$V = \sum C_n \exp(-in\theta)$ также будет суммой спектров непрерывной и пилообразных функций:

устойчивого решения, при этом решение с двумя асимптотиками устойчиво и для более короткого импульса, $\theta_0 = 0.5$, с большей величиной разрыва производной до и после фронта. Таким образом, использование двух высокочастотных асимптотик, соответствующих спектру волны с особенностями типа "разрыв" и "разрыв производной", для моделирования распространения разрывных волн и восстановления профиля по ограниченному спектру позволяет улучшить устойчивость и точность модифицированного спектрального подхода и расширить круг возможных для численного решения задач.

3.5. Формирование двух разрывов на периоде волны

Представляется интересным обобщить развитый асимптотический подход на случаи, когда в профиле волны образуются несколько ударных фронтов. Важным для практики

$$C_n = C_n^{(sm)} + \tilde{C}_n, \quad \tilde{C}_n = iA_{s1}e^{in\theta_{s1}}/2\pi n + iA_{s2}e^{in\theta_{s2}}/2\pi n. \quad (3.53)$$

На высоких частотах спектр волны представим в асимптотическом виде

$$C_n = \tilde{C}_n + O(1/n^2) \approx \tilde{C}_n. \quad (3.54)$$

Как видно из выражения (3.53), спектр волны с двумя разрывами (3.54) на высоких частотах определяется четырьмя параметрами θ_{s1} , θ_{s2} , A_{s1} , A_{s2} , значения которых можно определить, если известны первые N гармоник и мы полагаем, что последние четыре из них принадлежат асимптотическому выражению (3.54):

$$\begin{cases} \hat{C}_N = i(A_{s1}e^{iN\theta_{s1}} + A_{s2}e^{iN\theta_{s2}}); & \hat{C}_{N-1} = i(A_{s1}e^{i(N-1)\theta_{s1}} + A_{s2}e^{i(N-1)\theta_{s2}}) \\ \hat{C}_{N-2} = i(A_{s1}e^{i(N-2)\theta_{s1}} + A_{s2}e^{i(N-2)\theta_{s2}}); & \hat{C}_{N-3} = i(A_{s1}e^{i(N-3)\theta_{s1}} + A_{s2}e^{i(N-3)\theta_{s2}}) \end{cases}, \quad (3.55)$$

где введено обозначение $\hat{C}_n = 2\pi n C_n$.

Домножим второе уравнение системы (3.55) на $(X_1 + X_2)$, а третье на $(X_1 X_2)$, где $X_1 = \exp(i\theta_{s1})$, $X_2 = \exp(i\theta_{s2})$. Сложим первое уравнение получившейся системы с третьим и вычтем второе. Проводя аналогичную процедуру для второго, третьего и четвертого уравнений системы (3.55), получим систему уравнений относительно X_1 и X_2 :

$$\hat{C}_{n-2}X_1X_2 - \hat{C}_{n-1}(X_1 + X_2) + \hat{C}_n = 0; \quad \hat{C}_{n-3}X_1X_2 - \hat{C}_{n-2}(X_1 + X_2) + \hat{C}_{n-1} = 0. \quad (3.56)$$

Из системы (3.56) и исходных уравнений (3.55) можно найти неизвестные параметры высокочастотной асимптотики

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{C}_{n-1}\hat{C}_{n-2} - \hat{C}_n\hat{C}_{n-3}}{\hat{C}_n^2 - \hat{C}_{n-1}\hat{C}_{n-3}} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{C}_{n-1}\hat{C}_{n-2} - \hat{C}_n\hat{C}_{n-3}}{\hat{C}_n^2 - \hat{C}_{n-1}\hat{C}_{n-3}} \right)^2 - 4 \frac{\hat{C}_{n-1}^2 - \hat{C}_n\hat{C}_{n-2}}{\hat{C}_{n-2}^2 - \hat{C}_{n-1}\hat{C}_{n-3}}} \right) \\ A_{s1} &= \text{Im} \left(\frac{\hat{C}_n - \hat{C}_{n-1}X_2}{X_1^n - X_1^{n-1}X_2} \right); \quad A_{s2} = \text{Im} \left(\frac{\hat{C}_n - \hat{C}_{n-1}X_1}{X_2^n - X_2^{n-1}X_1} \right), \end{aligned} \quad (3.57)$$

и восстановить функцию V как сумму непрерывной составляющей и пилообразных функций:

$$\begin{aligned} V(z, \theta) &= \sum_{n=-N}^N (C_n - \tilde{C}_n) \exp(-in\theta) + \\ &+ \frac{A_{s1}}{2} \begin{cases} -1 - (\theta - \theta_{s1})/\pi, & -\pi < \theta < \theta_{s1} \\ 1 - (\theta - \theta_{s1})/\pi, & \theta_{s1} < \theta < \pi \end{cases} + \frac{A_{s2}}{2} \begin{cases} -1 - (\theta - \theta_{s2})/\pi, & -\pi < \theta < \theta_{s2} \\ 1 - (\theta - \theta_{s2})/\pi, & \theta_{s2} < \theta < \pi \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

На рис. 3.9 изображен один период функции с двумя разрывами, восстановленный по заданным первым $N = 50$ гармоникам в соответствии с (3.57, 3.58). Как видно из рисунка,

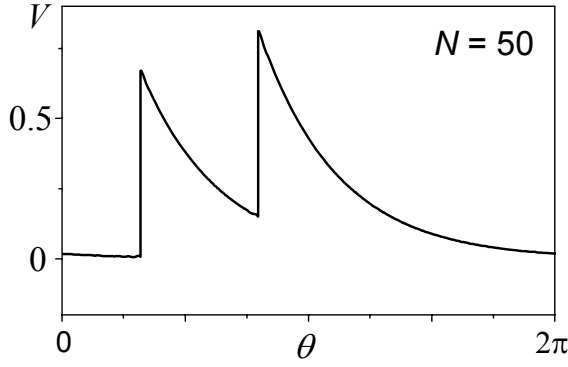


Рис. 3.9. Восстановление профиля волны с двумя разрывами по первым $N = 50$ гармоникам спектра.

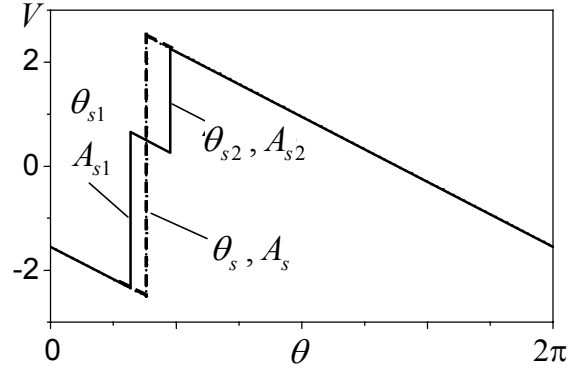


Рис. 3.10. Иллюстрация перехода от двух разрывов к одному при их сближении.

предложенный алгоритм позволяет с хорошей точностью восстанавливать профиль разрывной функции по заданному конечному спектру.

Используем теперь полученные результаты для решения уравнения простых волн (3.1), предполагая, что в профиле волны возможно образование двух ударных фронтов. В общем случае разрывы в профиле волны движутся с различными скоростями, приводя к их слиянию, при котором необходимо осуществить переход от алгоритма восстановления профиля с двумя разрывами к ранее разработанному алгоритму, учитывающему наличие одного разрыва (§3.2). Если расстояние между разрывами $\theta_{s1}, \theta_{s2}, A_{s1}, A_{s2}$ достаточно мало, то околоразрывную область будем аппроксимировать одной пилообразной функцией θ_s, A_s (рис. 3.10). Положение и амплитуда разрыва в этом случае рассчитываются аналитически таким образом, чтобы профили волн с одним и с двумя разрывами на расстоянии слияния разрывов совпадали [143]:

$$\theta_s = (A_{s1}\theta_{s1} + A_{s2}\theta_{s2}) / (A_{s1} + A_{s2}), \quad A_s = A_{s1} + A_{s2} \quad (3.59)$$

С учетом асимптотического поведения спектра (3.54) для гармоник с номерами $n > N$ последняя сумма в системе (3.8), состоящая только из асимптотических коэффициентов, может быть вычислена аналитически:

$$\sum_{k=n+N+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* = \frac{1}{n(2\pi)^2} \left[(A_{s1}^2 \exp(in\theta_{s1}) + A_{s2}^2 \exp(in\theta_{s2})) \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} + A_{s1}A_{s2} \exp\left(\frac{in(\theta_{s1} + \theta_{s2})}{2}\right) \left(\sum_{k=1}^{N+n} \frac{\cos(\Delta(2k-n)/2)}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{\cos(\Delta(2k+n)/2)}{k} - \sin(n\Delta/2)(\pi - \Delta) \right) \right], \quad (3.60)$$

где $\Delta = \tau_{s2} - \tau_{s1}$. Получаемая при этом конечная замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений для гармоник может быть использована для численного моделирования нелинейных волн с двумя разрывами на периоде.

3.6. Использование асимптотики в виде решения Фея для описания ударных фронтов конечной ширины

Если распространение волны описывается уравнением Бюргера с малой, но конечной вязкостью, то ударный фронт будет иметь конечную ширину. Покажем здесь, что развитый асимптотический метод можно обобщить и для описания таких волн. Запишем уравнение Бюргера в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \quad (3.61)$$

где $\Gamma = b\omega/2\varepsilon\rho_0$ - параметр поглощения, b - коэффициент вязкости среды. Для исходной гармонической волны $V(z=0, \theta) = \sin \theta$ профиль волны на стадии развитых разрывов при $\Gamma \ll 1$ описывается решением Хохлова [1, 2]:

$$V(z, \theta)_{kh} = \frac{1}{1+z} \left(-\theta + \pi \tanh \left(\frac{\pi \theta}{2\Gamma(1+z)} \right) \right), \quad (3.62)$$

разложение которого в ряд Фурье дает решение Фея:

$$V(z, \theta)_F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Gamma}{\sinh(n\Gamma(1+z))} \sin n\theta, \quad (3.63)$$

где $A_s = 2\pi/(1+z)$ - амплитуда скачка давления на разрыве. Будем использовать решение Фея в качестве высокочастотной асимптотики для аппроксимации спектра решения (3.61). Запишем решения (3.62) и (3.63) для периодической волны с амплитудой разрыва A_s , расположенного при θ_s :

$$V_{kh}(A_s, \theta_s) = \frac{A_s}{2} \left(-\frac{\theta - \theta_s}{\pi} + \text{th} \left(\frac{A_s(\theta - \theta_s)}{4\Gamma} \right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{-in\theta}, \quad \tilde{C}_n = i\Gamma \cdot \text{sh}^{-1} \left(\frac{2\pi\Gamma}{A_s} n \right) \cdot e^{in\theta_s}. \quad (3.64)$$

Заметим, что при $\Gamma \rightarrow 0$ решение (3.62) переходит в пилу (3.5) с математическим разрывом, а решение Фея (3.63) - в соответствующий спектр (3.6): $\tilde{C}_n \rightarrow \frac{iA_s}{2\pi n} e^{in\theta_s}$.

Используем теперь в двух последних суммах системы уравнений для гармоник (3.7) вместо спектра пилы асимптотику (3.64). Бесконечную последнюю сумму также удастся привести к конечному виду:

$$\sum_{k=n+N+1}^{\infty} \tilde{C}_k \tilde{C}_{k-n}^* = -\Gamma^2 e^{in\theta_s} \sum_{k=n+N+1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}(\gamma k) \text{sh}(\gamma(n-k))} = \frac{\Gamma^2 e^{in\theta_s}}{\text{sh}(\gamma n)} \sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{e^{-\gamma k}}{\text{sh}(\gamma k)} \quad (3.65)$$

где введено обозначение $\gamma = 2\pi\Gamma/A_s$. При $\Gamma \rightarrow 0$ приходим к формуле (3.8).

Значения параметров A_s и θ_s находятся из последних двух коэффициентов спектра волны, предполагая, что они принадлежат асимптотике (3.64):

$$A_s = \frac{2\pi\Gamma N}{\operatorname{arcsch}(\Gamma/|C_n|)}, \quad \theta_s = \arg\left(\frac{C_N \operatorname{sh}(\gamma N)}{C_{N-1} \operatorname{sh}(\gamma(N-1))}\right) \quad (3.66)$$

Для восстановления профиля вместо формулы (3.14) нужно использовать комбинацию решений Хохлова и Фея (3.64):

$$V(z, \theta) = \sum_{n=-N}^N C_n(z) e^{-in\theta} + V_{Kh}(A_s, \theta_s) - 2\Gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\theta - \theta_s)}{\operatorname{sh}(\gamma n)} \quad (3.67)$$

3.7. Разрывные волны в средах со степенным частотным законом поглощения, близким к линейному

Уравнение простых волн (3.3) и уравнение Бюргерса (3.61) являются частными случаями более широкого класса эволюционных уравнений нелинейной акустики, также допускающих разрывные решения:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = L(V), \quad (3.68)$$

где $L(V)$ - линейный оператор, описывающий, например, эффекты частотно-зависимого поглощения, отличающегося от квадратичного. Рассмотрим здесь особенности нелинейного распространения акустических возмущений в средах со степенным законом поглощения, близким к линейному. Такая зависимость характерна для многих акустических сред, например, биологических тканей [6] и морских осадков [150].

Если коэффициент поглощения в среде изменяется с частотой по степенному закону

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 (\omega / \omega_0)^n, \quad (3.69)$$

то однозначным образом реконструировать вид правой части $L(p)$ уравнения (3.68) с соблюдением принципа причинности не удастся. Это обусловлено тем, что зависимость вида (3.69) не может выполняться во всем бесконечном диапазоне частот; в частности, на высоких частотах зависимость $\alpha(\omega)$ имеет тенденцию к насыщению [151]. Таким образом, неоднозначность выбора оператора $L(p)$, отвечающего закону поглощения (3.69) и принципу причинности, связана с различным поведением коэффициента поглощения на высоких частотах. Известно несколько наиболее часто используемых интегральных форм $L(p)$ [150, 152 - 155]. Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (3.68) является весьма сложной задачей. Даже при численном моделировании необходимо проведение операции свертки на каждом шаге схемы, что существенно затрудняет и

замедляет расчеты [36]; приближенные аналитические решения удается получить лишь в некоторых частных случаях [155]. Использование спектрального подхода является более эффективным и позволяет моделировать нелинейное распространение волны без реконструирования эволюционного уравнения.

Запишем связанную систему нелинейных уравнений для Фурье-компонент спектра (3.2) решения уравнения (3.68):

$$\frac{dC_n}{dz} = -\frac{in}{2} N \left(2C_0 C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k C_{k-n}^* \right) + iK'(n)C_n - K''(n)C_n. \quad (3.70)$$

Здесь удобнее было нормировать координату распространения на характерную длину поглощения, $z=x/x_{\text{пл}}$, где $x_{\text{ногл}}=1/\alpha_0$, α_0 - коэффициент поглощения на частоте основной частоте ω_0 , $x_n = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon \rho_0 \omega_0$ - нелинейная длина, параметр $N = x_{\text{ногл}}/x_{\text{нел}}$ характеризует относительную роль нелинейных эффектов и на длине поглощения.

Система уравнений (3.70) отличается о ранее рассмотренной системы (3.4) присутствием двух последних дополнительных слагаемых, отвечающих за эффекты поглощения и дисперсии. Действительная и мнимая части безразмерного волнового числа $K(n) = K' + iK''$ и в сопровождающей временной системе координат имеют вид:

$$K''(n) = \alpha(n\omega_0)/\alpha_0, \quad K'(n) = n\omega_0(1/c(n\omega_0) - 1/c_0)/\alpha_0, \quad (3.71)$$

и описывают, соответственно, дисперсию (K') и поглощение (K'') звука n -й гармоники волны. Для близкой к линейной по частоте зависимости коэффициента поглощения K'' рассчитывая дисперсию скорости звука K' с использованием локальных дисперсионных соотношений [151, 156]:

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi\omega^2}{2c_0^2} \frac{dc(\omega)}{d\omega}, \quad \Delta c = c(\omega) - c_0 = \frac{2c_0^2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\alpha(\omega')}{(\omega')^2} d\omega', \quad (3.72)$$

получим:

$$\frac{\Delta c}{c_0} = \frac{c(\omega) - c_0}{c_0} = \frac{2c_0\alpha_0}{\pi(\eta-1)\alpha_0} \cdot \begin{cases} ((\omega/\omega_0)^\eta - 1), & \eta \neq 1 \\ \ln(\omega/\omega_0), & \eta = 1 \end{cases}. \quad (3.73)$$

Выберем теперь параметры, задающие закон поглощения, близкими к параметрам биологических сред и фантому биологической ткани 1.3 бутандиолу [157]. На рис. 3.11 (а) представлены зависимости коэффициента поглощения, нормированного на его величину α_0 при 1 МГц, от частоты. Кривые построены для крови ($\eta = 1.42$, $\alpha_0 = 0.025 \text{ см}^{-1}$, $c_0 = 1570 \text{ м/с}$), печени ($\eta = 1.2$, $\alpha_0 = 0.082 \text{ см}^{-1}$, $c_0 = 1600 \text{ м/с}$) [6]; воды ($\eta = 2$, $\alpha_0 = 0.0003 \text{ см}^{-1}$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$) и бутандиола ($\eta = 1$, $\alpha_0 = 0.038 \text{ см}^{-1}$, $c_0 = 1546 \text{ м/с}$).

Рассчитанные по этим данным кривые дисперсии скорости звука (3.73) показаны на рис. 3.11 (б). Как видно из рисунка, бутандиол является близким по своим дисперсионным характеристикам к крови. Приведенные теоретические кривые дисперсии хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [6], согласно которым величина дисперсии скорости звука в мягких тканях не превышает 1% в диапазоне 1-10 МГц.

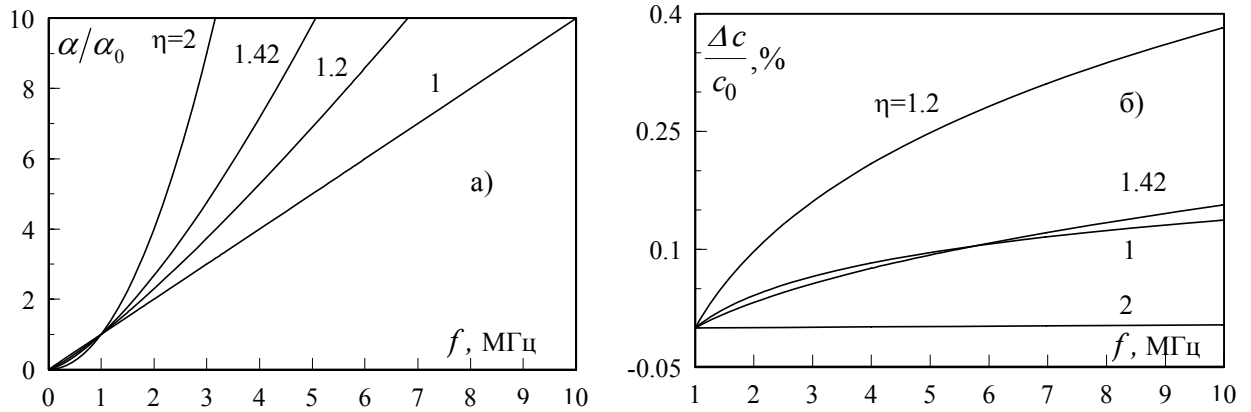


Рис. 3.11. Зависимости коэффициента поглощения (а) и дисперсии скорости звука (б) от частоты для различных показателей степени в законе поглощения: $\eta=2$ (вода), 1.42 (кровь), 1.2 (печень), 1 (бутандиол).

Среднюю интенсивность волны $I(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^2(z, \theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n(z)|^2$, с учетом

асимптотического поведения гармоник на высоких частотах $n > N_{\max}$ (3.6), можно записать в виде конечной суммы:

$$I(z) = C_0^2 + \sum_{n=1}^{N_{\max}} \left(2|C_n(z)|^2 - \frac{A_s^2}{2\pi^2 n^2} \right) + \frac{A_s^2}{12}. \quad (3.74)$$

В качестве исходного акустического сигнала рассмотрим гармоническую волну

$$p(\tau, x=0) = p_0 \sin(\omega_0 \tau), \quad (3.75)$$

с частотой 1 МГц и амплитудой 0.5-7 МПа, характерными для медицинского ультразвука, а также ударный импульс с экспоненциальным профилем за ударным фронтом

$$p(\tau, x=0) = 0 \text{ при } \tau < \tau_s \text{ и } p_0 \exp\left(-\frac{\tau - \tau_s}{t_0}\right) \text{ при } \tau > \tau_s. \quad (3.76)$$

Здесь τ_s - время появления ударного фронта импульса. Начальная амплитуда $p_0 = 3$ МПа и длительность $t_0 = 300$ нс импульса были выбраны близкими к параметрам импульсов в электроразрядных литотриптерах на выходе параболического отражателя [158] или генерируемых оптоакустическим способом в режиме плоской волны [159].

Как было показано выше (рис. 3.11), дисперсия скорости звука невелика, однако она оказывает заметное влияние на искажение профиля акустического возмущения. На

рис. 3.12 (а) представлены результаты расчета эволюции профиля исходно гармонической волны (3.75) в среде с линейным частотным законом поглощения $\eta=1$, соответствующим по параметрам бутандиолу (рис. 3.11). Кривая 1 - исходный профиль волны, кривая 2 - профиль волны на расстоянии $z = 0.3$ (8 см) в случае линейного распространения $N = 0$. Профили 3 и 4 рассчитаны на том же расстоянии в случае нелинейного распространения $N = 10$ ($p_0=4.5$ МПа) с учетом либо без учета дисперсии скорости звука. Видно, что влияние дисперсии проявляется в несимметричном искажении профиля волны: отрицательный полупериод становится более острым, положительный, напротив, «затягивается», положение максимума волны сильнее отстает от фронта. Такая несимметрия профиля характерна для сред с дисперсией, например, для среды с релаксацией [1,159,103]. Ударный фронт в диспергирующей среде смещается за счет более быстрого распространения высоких частот, формирующих разрыв.

Аналогичное влияние эффекты дисперсии оказывают и на искажение профиля ударного импульса. На рис. 3.12 (б) представлены профиль исходного импульса (3.76) (кривая 1) и профили этого импульса на расстоянии $z = 0.23$ (6 см), на котором отчетливо проявляется влияние как нелинейных, так и диссипативных эффектов. В случае линейного распространения (кривая 2) ударный фронт расплывается, что обусловлено

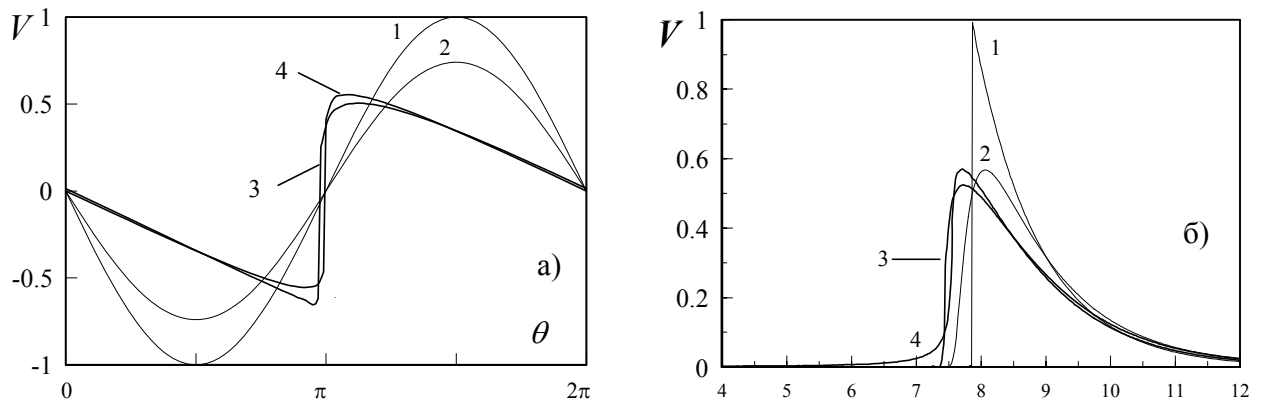


Рис. 3.12. Влияние нелинейных, диссипативных и дисперсионных эффектов на эволюцию профиля волны в среде с линейным по частоте законом поглощения, $\eta = 1$.

а) Исходная волна - гармоническая (кривая 1); кривые 2-4 соответствуют $z = 0.3$. При расчете профиля 2 учитывалось только поглощение ($N = 0$), 3 - поглощение, нелинейность ($N = 10$) и дисперсия, 4 - поглощение и нелинейность ($N = 10$).

б) Исходная волна - импульс с ударным фронтом (кривая 1); кривые 2-4 соответствуют $z = 0.23$: 2 - профиль в линейной среде ($N=0$) при учете поглощения и дисперсии; 3 - профиль в нелинейной среде ($N = 3.3$) при учете поглощения и дисперсии, 4 - профиль в нелинейной среде ($N = 3.3$) при учете лишь поглощения.

поглощением высокочастотных компонент. В случае нелинейного распространения (кривая 3) фронт импульса распространяется быстрее, чем в линейном случае. Кривые 2 и 3 рассчитаны с учетом дисперсии; для иллюстрации роли дисперсии показан также профиль нелинейного импульса, рассчитанный при учете лишь поглощения (кривая 4). Из сравнения профилей 3 и 4 видно, что пренебрежение дисперсией приводит к появлению протяженного «предвестника», распространяющегося быстрее ударного фронта, что обусловлено несоблюдением принципа причинности. Кроме того, в модели без дисперсии несколько завышается пиковое давление сигнала и уменьшается скорость движения ударного фронта.

Биологические ткани имеют зависимость коэффициента поглощения от частоты в диапазоне от линейной до почти квадратичной. Показатель степени в этом законе также является одним из параметров, оказывающих влияние на особенности нелинейной эволюции профиля акустического сигнала. Это влияние иллюстрирует рис. 3.13, на котором сравниваются профили исходно гармонической волны на различных расстояниях

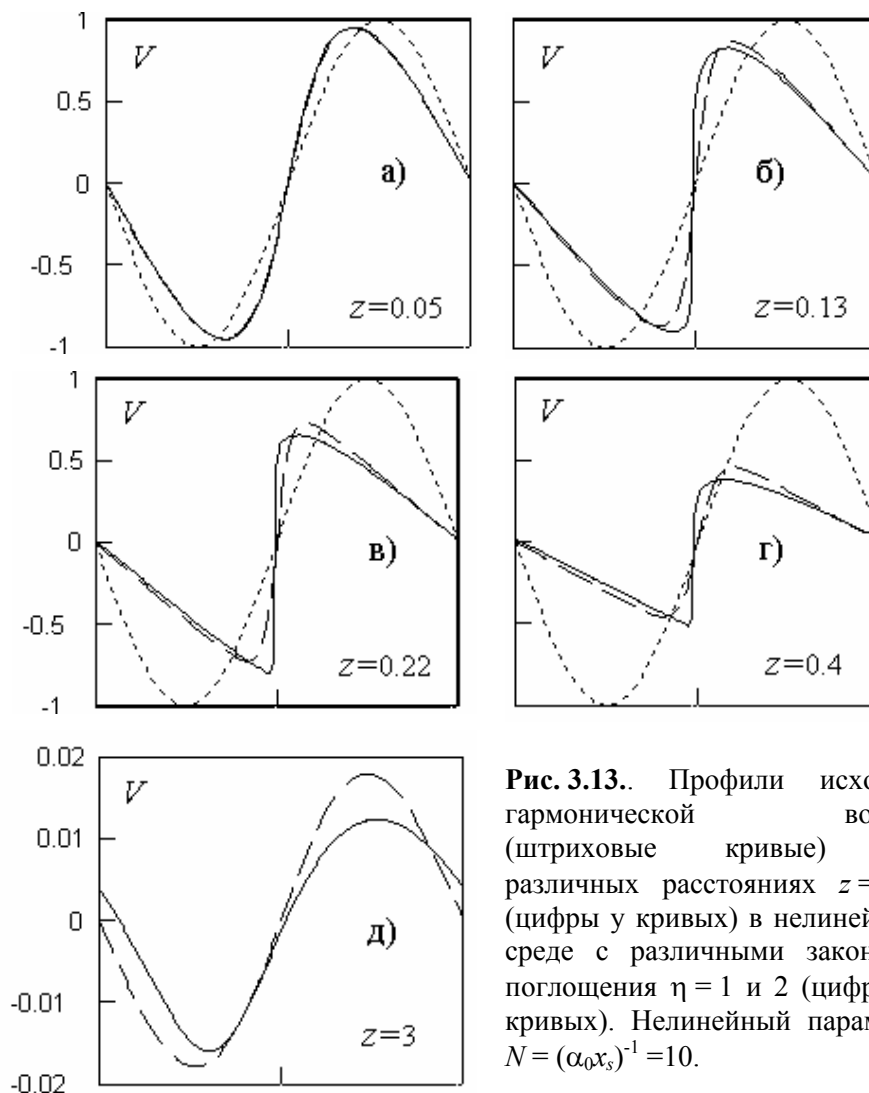


Рис. 3.13. Профили исходно гармонической волны (штриховые кривые) на различных расстояниях $z = \alpha_0 x$ (цифры у кривых) в нелинейной среде с различными законами поглощения $\eta = 1$ и 2 (цифры у кривых). Нелинейный параметр $N = (\alpha_0 x_s)^{-1} = 10$.

в среде с линейной ($\eta = 1$) и квадратичной ($\eta = 2$) зависимостями коэффициента поглощения от частоты. Как видно, в среде с линейным законом ($\eta = 1$) ударный фронт образуется раньше, имеет более узкую структуру и сохраняется дольше, чем в среде с квадратичным законом ($\eta = 2$). Это объясняется тем, что в среде с квадратичным законом сильнее поглощаются высокочастотные гармоники спектра.

На больших расстояниях $x \gg x_n$ (рис. 3.13 (г)), где волна вновь становится гармонической, амплитуда пикового давления в среде с $\eta = 1$ становится меньше, чем в среде с $\eta = 2$. Это кажется на первый взгляд необычным, поскольку все высшие гармоники в среде с квадратичным законом имеют больший коэффициент поглощения по сравнению со случаем линейного закона. Такое явление обусловлено менее интенсивной генерацией высокочастотных компонент спектра в более диссипативной среде и, соответственно, меньшим поглощением на образующихся ударных фронтах.

Подобное явление ограничения эффективности перераспределения энергии волны в высокочастотную область спектра при усилении поглощения гармоник исходного сигнала может быть использовано для управления нелинейными волновыми взаимодействиями. Наиболее ярко оно проявляется в среде с резонансным поглощением на второй гармонике, в которой ограничивается переход энергии вверх по спектру и волна может распространяться, практически не искажаясь [31]. Этот случай, с учетом формирования разрывов, будет подробно рассмотрен в следующем параграфе работы.

Для исходно гармонической волны изменение закона поглощения от линейного к квадратичному приводит к уширению ударного фронта, что показано на рис. 3.14 (а). Здесь представлены профили волны, рассчитанные на расстоянии $z = 0.5$ при $N = 15$ для сред с различными значениями показателя степени η (цифры у кривых) и соответствующей дисперсией скорости звука. Видно, что увеличение степени η практически не изменяет амплитудные значения волны, однако приводит к заметному уширению ударного фронта. Длительность фронта увеличивается в несколько раз при изменении закона поглощения от линейного до квадратичного.

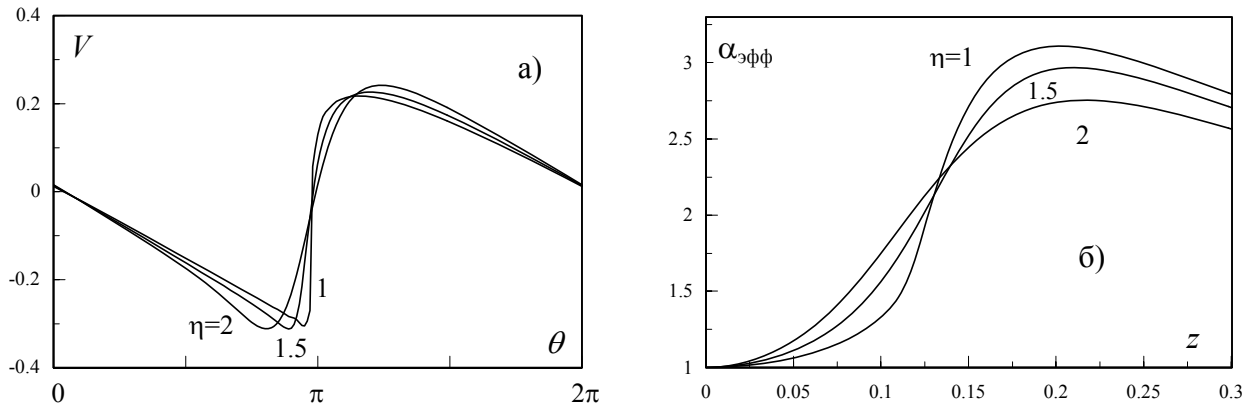


Рис. 3.14. Иллюстрация влияния показателя степени η на эволюцию волны в нелинейной среде. На входе задана гармоническая волна частоты 1 МГц, $\alpha_0=0.038 \text{ см}^{-1}$, нелинейный параметр $N = 15$. а) профиль волны на расстоянии $z = 0.5$. б) зависимость эффективного коэффициента поглощения от расстояния.

Показатель степени в законе поглощения существенно влияет также на поглощение полной энергии волны в нелинейной среде. На рис. 3.14 (б) показано изменение с расстоянием эффективного коэффициента поглощения $\alpha_{\text{эфф}}$, рассчитанного по изменению интенсивности (3.74)

$$\alpha_{\text{эфф}} = -\frac{dI/dx}{2I}. \quad (3.77)$$

Различные кривые соответствуют средам с одинаковым значением коэффициента поглощения α_0 на основной частоте, но различным показателем степени в законе поглощения $\eta = 1, 1.5, 2$. Видно, что на небольших расстояниях эффективный коэффициент поглощения больше для квадратичного закона за счет более сильных диссипативных эффектов на высоких частотах. Однако после образования крутых участков в профиле волны поглощение становится сильнее для среды с линейным законом, как следствие более эффективного нелинейного режима поглощения. Кривые, приведенные на рис. 3.14 (б), рассчитывались с учетом дисперсии. Однако те же зависимости, рассчитанные без учета дисперсии, оказались практически неотличимыми. Таким образом, несмотря на то, что дисперсия меняет волновой профиль, она не оказывает заметного влияния на поглощение энергии волны.

Покажем, что два параметра, α_0 и η , в законе поглощения (3.69) оказывают различное влияние на нелинейную эволюцию акустического сигнала. На рис. 3.15 (а) показаны профили импульса (3.76) на расстоянии $x = 6$ см для сред с различными показателями степени в законе поглощения при фиксированном параметре α_0 , который соответствует поглощению в бутандиоле на частоте 1 МГц. Из рисунка видно, что увеличение показателя степени приводит к заметному уширению ударного фронта, однако не оказывает сильного влияния на величину пикового давления. Напротив, изменение

второго параметра в законе поглощения, α_0 , приводит к изменению амплитуды импульса. На рисунке 3.15 (б) показаны профили импульса на том же расстоянии $x = 6$ см в средах с линейной зависимостью коэффициента поглощения от частоты, но различными значениями α_0 (цифры у кривых). Видно, что с увеличением α_0 пиковое давление падает, а ширина и положение ударного фронта меняются незначительно.

Таким образом, нелинейные взаимодействия как в периодических волнах, так и в импульсных полях зависят от параметров степенного закона поглощения, особенно для сильно нелинейных волн с разрывами. Даже небольшая дисперсия скорости звука приводит к заметным искажениям профиля волны по сравнению со случаем квадратичного закона поглощения и отсутствия дисперсии. При этом дисперсия среды практически не влияет на диссипацию энергии нелинейной волны. Параметры степенного закона поглощения оказывают различное влияние на характер искажения профиля распространяющегося сигнала, особенно в случае ударного импульса: показатель степени оказывает большее влияние на ширину ударного фронта импульса, а значение коэффициента поглощения на величину его пикового давления. Это позволяет говорить о принципиальной возможности диагностики параметров поглощения среды по виду прошедшего через нее ударноволнового импульса.

В заключение обсудим важную проблему об устойчивости разрывного фронта волны, распространяющейся в среде со степенным частотным законом поглощения $\alpha(\omega) \sim \omega^\eta$. Как известно, ударный фронт волны в среде с квадратичным законом

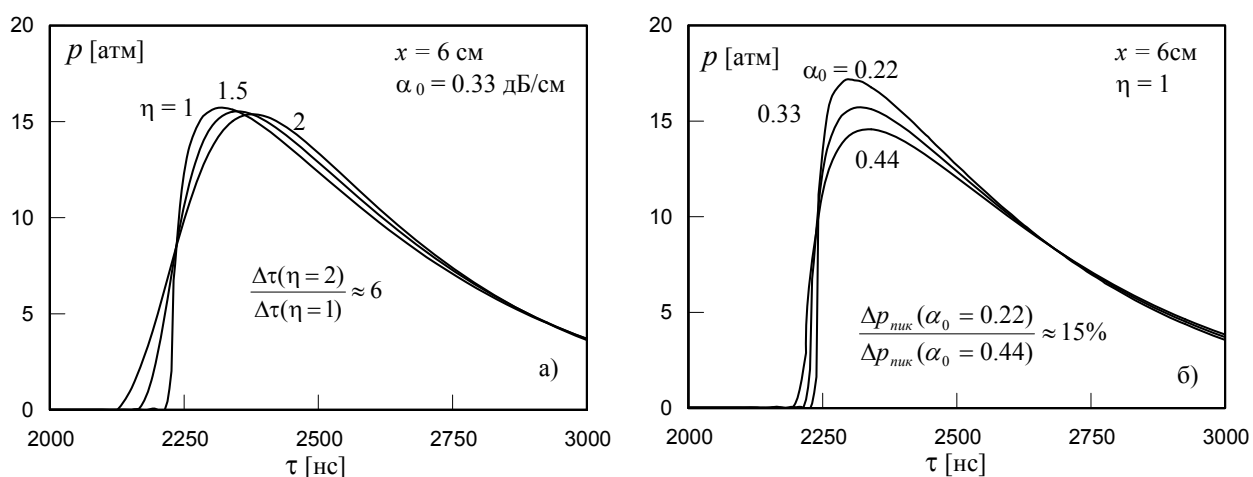


Рис. 3.15. Влияние параметров закона поглощения α_0 и η на искажение ударного импульса, прошедшего слой нелинейной поглощающей среды. Параметры импульса на входе $p_0=30$ атм, $t_0=0.3$ мкс, расстояние в среде $x=6$ см.

а) Профили импульса в средах с одинаковым коэффициентом поглощения $\alpha_0=\alpha(1 \text{ МГц})=0.038 \text{ см}^{-1}$ и различными показателями степени $\eta = 1, 1.5, 2$.

б) Профили импульса в средах с одинаковым показателем степени $\eta = 1$, но различными значениями $\alpha_0=0.025, 0.038, 0.05 \text{ см}^{-1}$

поглощения $\eta = 2$ не является математическим разрывом, а имеет конечную ширину, определяемую вязкостью среды и амплитудой волны [1]. С другой стороны, в средах с постоянным с частотой поглощением $\eta = 0$. диссипативные эффекты не препятствуют существованию разрывов в профиле волны [21]. Разрывные решения устойчивы также в релаксирующих средах. Такие среды характеризуются постоянным значением коэффициента поглощения на высоких частотах [103]. В случае произвольного степенного закона (3.69) вопрос об устойчивости разрыва, насколько известно из литературы, не исследовался. Покажем, что критическим является показатель степени $\eta = 1$, а именно, что разрыв будет неустойчив при $\eta \geq 1$.

Пусть на входе в среду задана плоская волна с разрывным профилем. Без ограничения общности в рассматриваемых рассуждениях можно считать ее периодической. Диссипация энергии волны описывается выражением $dI/dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n I_n$, где $I_n \sim |C_n|^2$ и $\alpha_n = \alpha(n\omega_0) \sim n^\eta$ - соответственно, интенсивность и коэффициент поглощения n -й гармоники. Спектр разрывной волны на высоких частотах имеет асимптотический вид (3.6), т.е. $|C_n| \sim n^{-1}$. Поэтому убыль энергии волны с расстоянием определяется рядом, члены которого для больших n ведут себя как n^{-2} . При $\eta \geq 1$ ряд является расходящимся, т.е. величина dI/dx является бесконечной. Предположив существование высокочастотной асимптотики спектра (3.6) в любом сколь угодно малом интервале расстояний, получим бесконечную величину поглощенной энергии, что невозможно в силу ограниченности интенсивности исходной волны. Таким образом, бесконечно узкий разрыв в этом случае будет неустойчивым. При $\eta < 1$, напротив, ряд сходится и существование разрыва возможно.

В качестве иллюстрации на рис. 3.16 приведены рассчитанные численно зависимости интенсивности исходно разрывной волны от расстояния z (а) и профиль волны в области ударного перехода в нелинейной среде при $z = 0.005$ для различных показателей степени закона поглощения $\eta = 0.5, 0.9, 1.5, \text{ и } 2$. Исходная форма волны выбрана пилообразной с амплитудой разрыва $A_s = 1$, интенсивность нормирована на свое начальное значение при $z = 0$. Видно, что при $\eta < 1$ производная интенсивности dI/dz при $z = 0$ конечна, а профиль волны при ее распространении остается разрывным. При $\eta > 1$ интенсивность при $z = 0$ убывает бесконечно быстро, исходный разрыв сглаживается. Чем больше величина показателя степени η , тем сильнее проявляется эффект сглаживания.

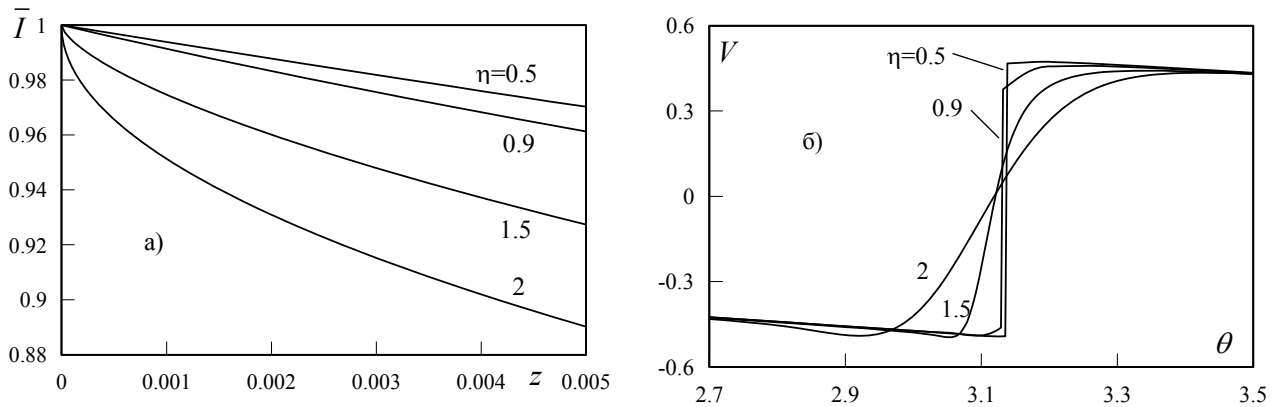


Рис. 3.16. К вопросу об устойчивости ударного фронта в средах с различными показателями степени η в законе поглощения. Исходная волна является пилообразной.

- а) Зависимость нормированной интенсивности $\bar{I} = I(z)/I(z=0)$ от расстояния z ;
 б) Профиль волны в окрестности ударного перехода при $z = 0.005$.

3.8. Разрывные волны в средах с селективным поглощением второй гармоники

Как известно, в слабодиспергирующих акустических средах все частотные составляющие волны распространяются с близкими скоростями и эффективно обмениваются энергией. Для обеспечения взаимодействия выделенных частот, например, неискаженного распространения гармонической волны в нелинейной среде или генерации только второй гармоники, необходимо как-то прервать каскадный процесс перехода энергии вверх по спектру. В 80^х годах широко обсуждался способ регулирования нелинейных процессов в недиспергирующих средах с помощью введения дополнительного поглощения на определенной частоте [160 - 163, 31, 59, 21]. Задача изучалась теоретически, проводились эксперименты в резонаторах с селективными зеркалами [164]. В теоретических работах было показано, что селективное поглощение второй гармоники исходно гармонической волны позволяет повысить амплитуду основной частоты, однако удалось описать лишь доразрывный режим распространения плоских волн.

Задачи о распространении волн с разрывами в присутствии селективного поглощения исследованы не были. В то же время именно такие задачи представляют наибольшую практическую значимость. Для многих современных практических приложений ультразвука является важным избежать или задержать образование

разрыва. Так, при работе термоакустических двигателей образование разрывов является одним из механизмов, ограничивающих эффективность усиления волны в резонаторе [165]. Были предложены различные экспериментальные методы селективного выведения второй гармоники из резонанса, такие как использование резонаторов Гельмгольца, селективные зеркала [164], специальные включения внутри резонатора в области пучности ее скорости [165], создание искусственного сдвига по частоте с использованием труб, составленных из секций различного диаметра [166], создание искусственной дисперсии или разности фаз между гармониками, используя резонаторы различной формы [167]. В связи с ростом практических приложений мощного ультразвука вновь усилился интерес к теоретическому исследованию волн в средах с селективным поглощением, особенно в режиме развитых разрывов.

В работе [168] было получено точное стационарное решение для плоской волны в акустическом резонаторе в случае введения селективного поглощения на второй гармонике. Стационарное решение нелинейной задачи в этом случае формируется за счет баланса между притоком энергии от источника (осциллирующая стенка) и потерями трех видов: вязкое, нелинейное и селективное поглощение. Однако описать эволюцию процесса в указанной работе аналитически не удалось. Использование асимптотического спектрального метода позволяет решить подобные задачи.

Рассмотрим характерные эффекты при распространении нелинейной волны в среде селективным поглощением на второй гармонике. Пусть профиль волны при $z = 0$ имеет гармонический вид $V(z = 0, \theta) = \sin(\theta)$. Для представления полученных

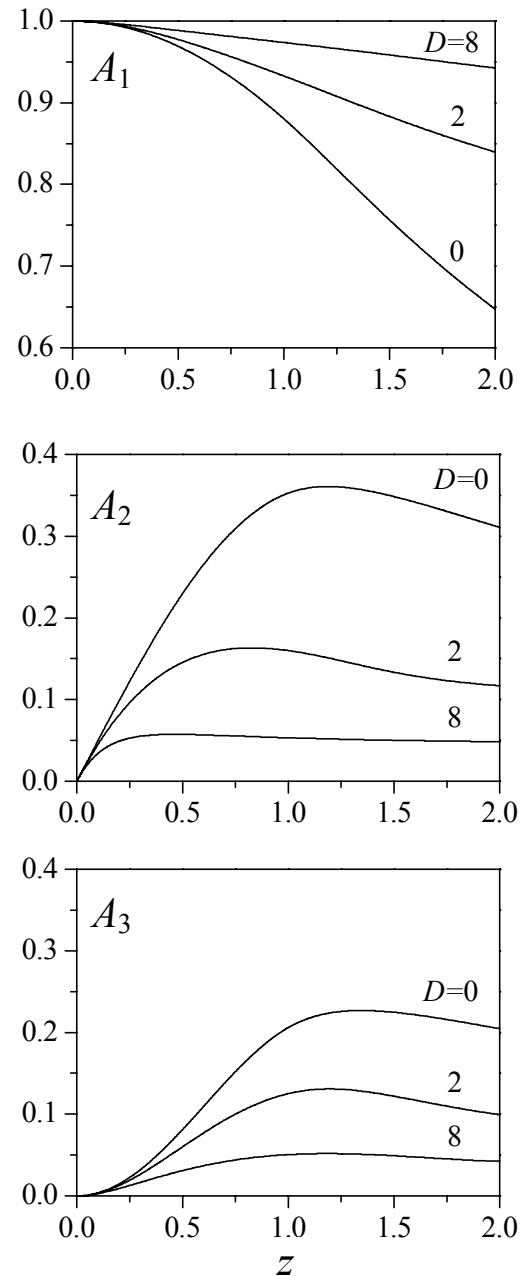


Рис. 3.17. Зависимость амплитуд первых трех гармоник от расстояния для различных значений параметра селективного поглощения D .

численных результатов нормируем координату распространения на длину образования разрыва $z = x/x_n$. Формально такая нормировка соответствует значению параметра $N = 1$ в системе уравнений (3.70). Безразмерный параметр $D = x_n/x_n = \alpha_0 x_n$ характеризует введенное дополнительное поглощение на второй гармонике: $K''(n = 2) = D$, $K''(n \neq 2) = 0$, $K'(n) = 0$ в (3.71). Численные решения были получены при использовании $N_{max} = 30$ гармоник.

На рис. 3.17 представлены зависимости амплитуд первых трех гармоник $A_n = 2|C_n|$ от расстояния z при введении селективного поглощения различной величины $D = 0, 2, 8$. Видно, что дополнительное поглощение обеспечивает сохранение значения амплитуды основной частоты и значительно снижает уровень следующих гармоник. Так, на расстоянии двух длин образования разрыва ($z = 2$) введение селективного поглощения $D = 8$ повышает уровень первой гармоники до $\approx 94\%$ от исходной амплитуды волны и снижает уровень второй и третьей соответственно в 6 и 4 раза по сравнению со случаем без селективного поглощения $D = 0$.

На рис. 3.18 представлены зависимости амплитуды разрывного фронта A_s от расстояния z для тех же значений параметра поглощения $D = 0, 2, 8$. Видно, что введение селективного поглощения не только снижает амплитуду образующегося разрыва, но и задерживает его появление, тем самым увеличивая область доразрывного распространения волны.

Рисунок 3.19 иллюстрирует характерные особенности искажения профиля нелинейной волны на расстояниях $z = 0.5, 1, 2$ для значений параметра поглощения $D = 0, 2, 8$. Как видно из рисунка, формирование ударного фронта происходит позднее при селективном поглощении, амплитуда разрыва меньше, а ударный фронт и положение пикового давления сильно разнесены во времени. На небольших расстояниях, $z = 0.5$, пиковое давление меньше в волне, распространяющейся в среде с дополнительным селективным поглощением. Напротив, на больших расстояниях, $z = 2$, после образования разрыва, пиковое давление в волне, распространяющейся в среде с большим селективным поглощением, существенно выше, чем в среде без него.

Этот необычный на первый взгляд эффект детально проиллюстрирован на рис. 3.20. Здесь показаны зависимости безразмерного пикового давления в волне P_p от расстояния z (а) при трех значениях параметра поглощения $D = 0, 2, 8$ и зависимости

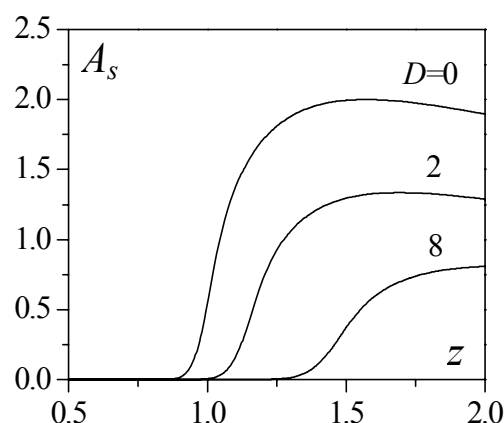


Рис. 3.18. Изменение амплитуды разрыва A_s с расстоянием для различных значений параметра D .

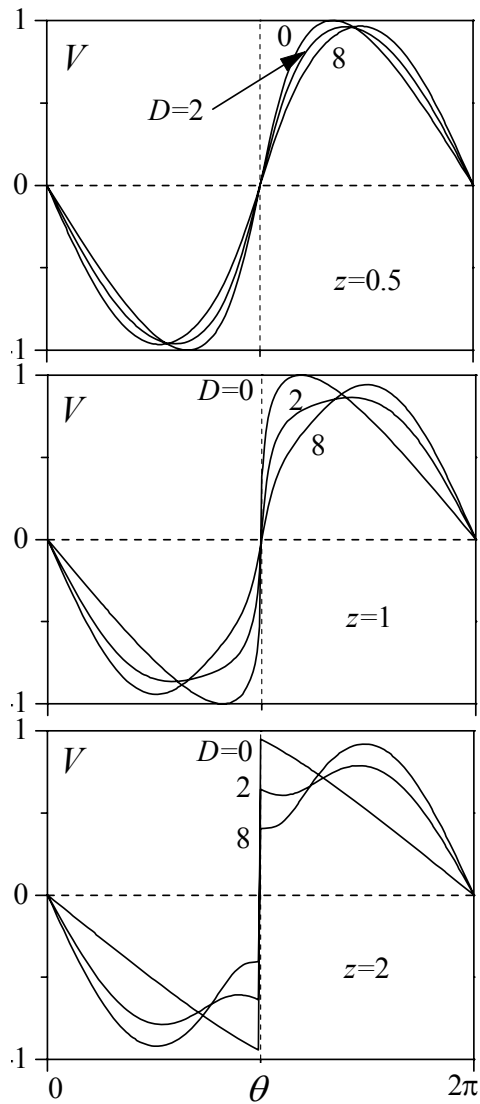


Рис. 3.19. Профили волны на различных расстояниях z и для различных значений параметра D .

испытывает дополнительное поглощение, и амплитуда пикового давления падает, однако по мере увеличения величины селективное поглощения, значение пикового давления в волне все больше приближается к своему начальному значению в силу подавления нелинейного поглощения на разрыве. Образование разрыва на больших расстояниях и с меньшей амплитудой приводит к меньшим потерям энергии, чем в случае распространения волны в среде без дополнительного селективного поглощения.

пикового давления от величины введенного поглощения D (б), рассчитанные на трех расстояниях $z = 0.5, 1, 2$. В области до формирования ударного фронта селективное поглощение второй гармоники вносит лишь дополнительное поглощение, тем самым уменьшая значение пикового давления p_p . В разрывной области распространения, напротив, селективное поглощение приводит к большим значениям

пикового давления P_p по сравнению со случаем его отсутствия ($D = 0$). При введении небольшого селективного поглощения волна

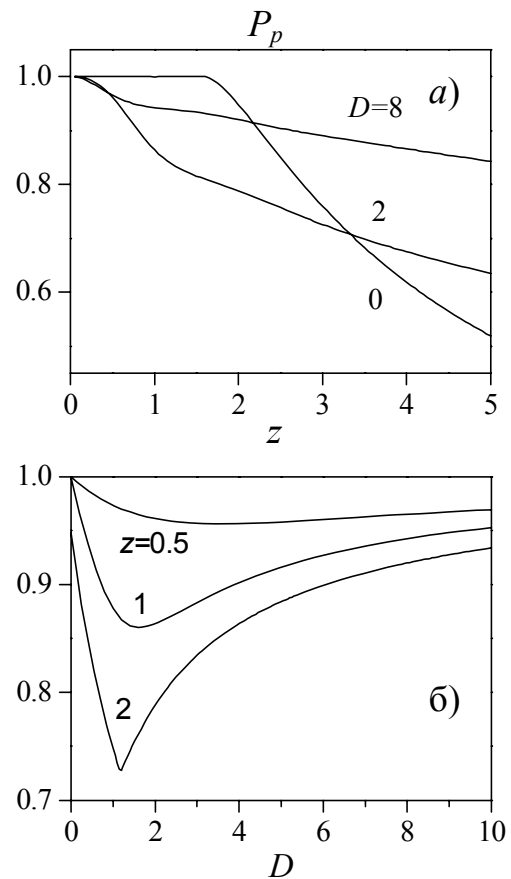


Рис. 3.20. Зависимости пикового давления p_{peak} от расстояния z при различных значениях D (а) и от величины селективного поглощения D при различных значениях z (б).

На рис. 3.21 слева показаны рассчитанные по формуле (3.74) зависимости безразмерной средней интенсивности волны (а) и эффективного коэффициента поглощения волны α_{eff} (б) (3.77) от расстояния z для различных значений параметра поглощения $D = 0, 2, 8$. В среде без селективного поглощения ($D = 0$) средняя интенсивность остается неизменной до расстояния образования разрыва $z < 1$, а затем резко уменьшается после образования ударного фронта, $z > 1$. При введении селективного поглощения, напротив, средняя интенсивность медленно снижается на протяжении всего пути распространения, формирующийся разрыв образуется позже и его амплитуда меньше. В случае сильного поглощения второй гармоники ($D = 8$) эффективный коэффициент поглощения остается практически неизменным как до расстояния образования разрыва, так и на больших расстояниях. Зависимости средней интенсивности (а) и α_{eff} (б) от величины селективного поглощения D на расстояниях $z = 0.5, 1, 2$ представлены на рис. 3.21 справа. На небольших расстояниях ($z = 0.5$) присутствие селективного поглощения выражается в снижении средней интенсивности волны. С другой стороны, на больших расстояниях ($z = 2$), в разрывном режиме распространения

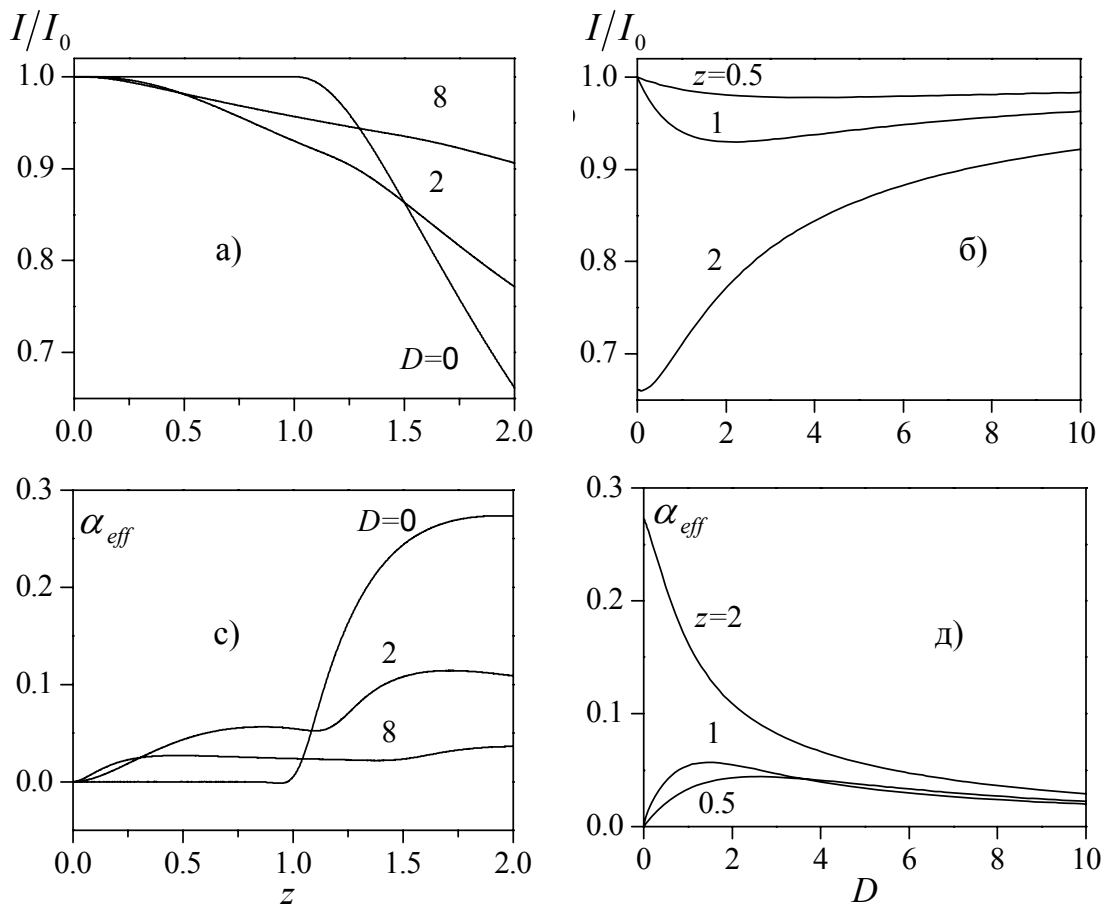


Рис. 3.21. Зависимости безразмерной интенсивности волны (а) и эффективного коэффициента поглощения α_{eff} (б) от расстояния для различных значений параметра $D = 0, 2, 8$ (слева) и от величины селективного поглощения D на различных расстояниях $z = 0.5, 1, 2$.

волны, даже небольшой уровень введенного дополнительного поглощения дает значительное снижение α_{eff} и потерь средней энергии.

3.9. Нелинейное насыщение в среде с частотно - зависимым усилением

Рассмотрим теперь задачу о распространении мощных акустических волн в активных средах и влиянии частотной зависимости усиления волны и дисперсии на установившиеся параметры акустического поля. В работе [34] было получено нелинейное эволюционное уравнение, описывающее быстрые процессы в стоячих волнах в термоакустическом двигателе. Уравнение предсказывает, что в термоакустическом двигателе, в зависимости от различных условий его работы, частотный закон усиления звука состоит из комбинации независимого от частоты усиления и пропорционального корню из частоты усиления или поглощения. Оно справедливо для описания режима квазиadiaбатического взаимодействия между тепловыми и акустическими волнами внутри термоакустического двигателя, т.е. в случае, когда тепловые и вязкие граничные слои меньше, чем пространство внутри неоднородно нагретого акустически тонкого термоакустического стэка. В безразмерных переменных это уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial t'} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{1+A} \left(\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial V(t', \theta')}{\partial \theta'} \frac{d\theta'}{\sqrt{\theta - \theta'}} - \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{V}{1+A} + \delta \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (3.78)$$

Здесь V - безразмерное акустическое давление, $t' = t / T$ - « медленное » время, нормированное на характерное время T стабилизации поля при частотно независимом усилении, $\theta = 2\pi f t$ - « быстрое » время, f - частота исходной волны. Первое слагаемое в правой части уравнения (3.78) описывает усиление ($A > 0$) или поглощение ($A < 0$) акустической волны, пропорциональное квадратному корню из частоты, и соответствующую дисперсию скорости звука в соответствии с принципом причинности. Второе слагаемое описывает не зависящее от частоты усиление. Третье слагаемое описывает дополнительное поглощение, соответствующее поглощению звука в воздухе.

Значение параметра A характеризует относительный вклад частотно - зависимого усиления (либо поглощения) и частотно независимого усиления. Параметр A введен таким образом, что при фиксированном значении поглощения на определенной выбранной частоте (резонансной для данной установки) отрицательные значения параметра A соответствуют дополнительному поглощению на высоких частотах, положительные значения A – дополнительному усилению по сравнению с фиксированным

усилением резонансной частоты. Значение параметра $A = 0$ соответствует одинаковому усилению всех частот. Аналитическое решение уравнения (3.78) возможно только в случае частотно независимого усиления $A = 0$ [34].

Система уравнений для гармоник имеет вид:

$$\frac{dC_n}{dt'} = -\frac{in}{2} \left(2C_0 C_n + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k C_{k-n}^* \right) - i \frac{A}{1+A} (\sqrt{n} - n) C_n + \frac{A\sqrt{n}+1}{1+A} C_n - \delta n^2 C_n. \quad (3.79)$$

Зависимость коэффициента усиления от частоты, соответствующая линеаризованной системе (3.79), может быть представлена в следующей форме:

$$\alpha(n=f/f_0) = \frac{A\sqrt{n}+1}{1+A} - \delta n^2, \quad \delta \ll 1, \quad \alpha(n=1) = 1 + \delta. \quad (3.80)$$

Как видно из выражения (3.80), при фиксированном усилении резонансной частоты $\alpha(n=1) = 1 + \delta$ усиление или поглощение образующихся гармоник определяется значением параметра A , характеризующим относительный вклад частотно - зависимого усиления

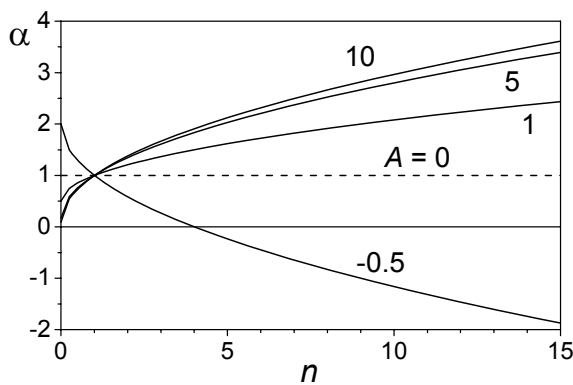


Рис. 3.22. Частотная зависимость коэффициента усиления (поглощения) для различных значений параметра A (цифры у кривых).

(поглощения) и частотно независимого усиления (рис. 3.22). Отрицательные значения параметра A соответствуют дополнительному поглощению на высоких частотах, положительные значения A – дополнительному усилению по сравнению с фиксированным усилением резонансной частоты. При $A = 0$ усиление является частотно независимым. В этом случае ($A = 0$) уравнение (3.78) имеет аналитическое решение, которое для исходно

гармонической волны $V(t' = 0, \theta) = V_0 \sin(\theta)$ имеет вид:

$$V(t', \theta) = \exp(t') V_0 \sin(\theta + V - V \exp(-t')) \quad (3.81)$$

Это решение использовалось для проверки точности численной схемы.

На рис. 3.23(a) представлены формы волны для различных значений параметра A , которые соответствуют квадратичному частотно - зависимому поглощению ($A = -0.5$) и усилению ($A = 10$) дополнительно к усилению, не зависящему от частоты. Усиление резонансной частоты остается неизменным для различных значений A , тогда как усиление высоких частот изменяется (рис. 3.22). Формы волны представлены для различных моментов времени, указанных рядом с кривыми. Видно, что из-за комбинации эффектов нелинейности и дисперсии волна становится несимметричной. В случае частотно -

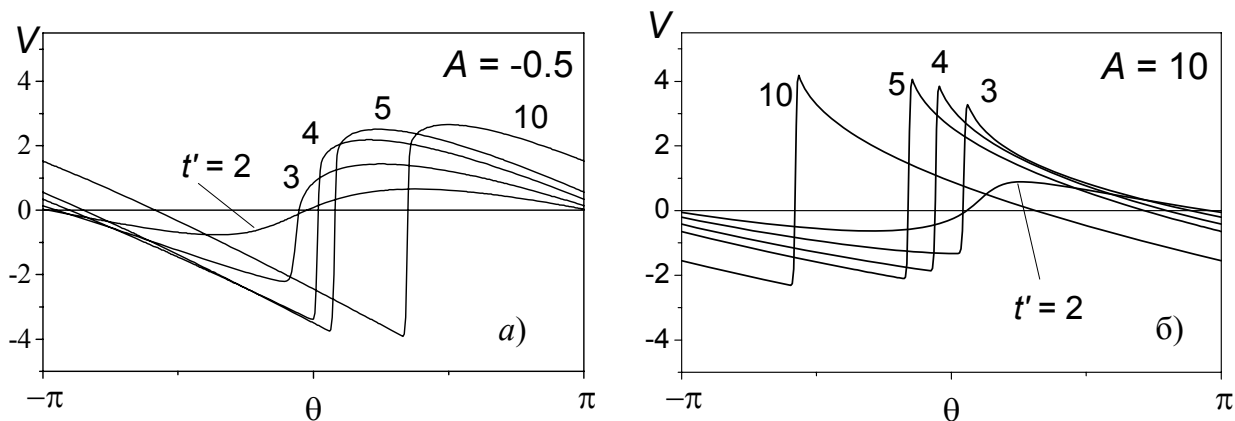


Рис. 3.23. Эволюция исходно гармонической волны малой амплитуды для (а) частотно - зависимого поглощения ($A = -0.5$) и (б) частотно - зависимого усиления ($A = 10$).

зависимого поглощения ($A = -0.5$) скорость звука медленнее для высоких частот, а формирование ударного фронта задержано по времени по сравнению со случаем без дисперсии $A = 0$.

Установившиеся характеристики поля также существенно зависят от величины параметра A и присутствия дисперсии. На рис. 3.24 представлены профили волны при $t' \gg 1$, рассчитанные для различных значений параметра A . При частотно независимом усилении и отсутствии дисперсии, $A = 0$, волна имеет характерную симметричную пилообразную форму. В случае дополнительного поглощения на высоких частотах ($A < 0$) положительная фаза волны имеет сглаженный вид, тогда как отрицательная преобразуется в классическую треугольную форму, при этом отрицательное пиковое давление превышает положительное пиковое давление.

Как уже обсуждалось выше, указанные особенности искажения формы волны характерны также и для пассивных диспергирующих сред с релаксацией или с произвольным степенным законом поглощения [103,132]. Усиление высших гармоник (случай $A > 0$), напротив, выражается в более острой форме положительной фазы волны и превышении значения положительного пикового давления над отрицательным.

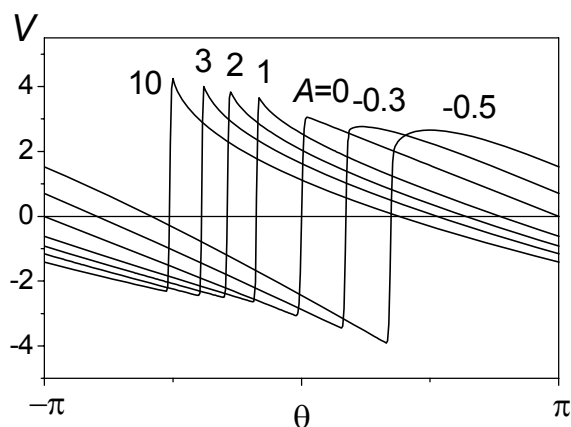


Рис. 3.24. Профили волны в режиме насыщения для различных значений параметра A (цифры у кривых).

На рис. 3.25. представлены зависимости установившихся значений пикового положительного V_+ , отрицательного V_- давлений, амплитуды давления $V_{pp} = V_- + V_+$ и полной интенсивности $I = 2\langle V^2 \rangle$ волны от величины параметра A . Кривые рассчитаны с учетом (сплошные линии) и без учета дисперсии (штриховые линии). Видно, что дополнительное усиление высоких частот ($A > 0$) приводит к снижению уровня установившегося значения интенсивности волны и отрицательного пикового давления. Положительное пиковое давление и амплитуда волны, однако, слегка увеличиваются. Дополнительное поглощение на высоких частотах, ($A < 0$), выражается в гораздо большем значении уровней большинства характеристик волны, однако минимум положительного пикового давления наблюдается для $A = -0.5$. Наличие дисперсии снижает эффективность нелинейных взаимодействий и приводит к повышению установившегося уровня интенсивности. Этот механизм уменьшения нелинейных потерь и увеличения амплитуды волны за счет предотвращения каскадных процессов перехода энергии в высокочастотную часть спектра хорошо согласуется с уже рассмотренными выше механизмами дополнительного поглощения высоких частот и селективного поглощения.

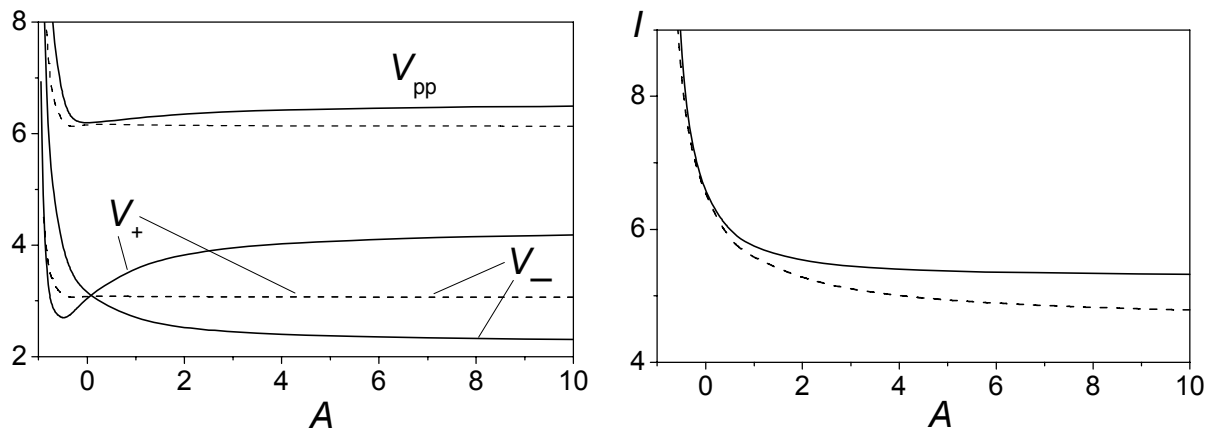


Рис. 3.25. Зависимости установившихся значений положительного V_+ , отрицательного V_- , реакто-реак V_{pp} давлений в профиле волны (слева) и интенсивности I (справа), рассчитанные с учетом (штриховые линии) и без учета (сплошные линии) дисперсии, от величины параметра A .

3.10. Асимптотический подход для моделирования ограниченных пучков разрывных волн с использованием неоднородной пространственной сетки

Дальнейшим логическим развитием асимптотического метода было его обобщение для описания разрывных волн в ограниченных пучках, описываемых уравнением ХЗ, что требует гораздо больших затрат компьютерного времени и памяти по сравнению с

моделированием одномерных волн. Для уменьшения количества узлов численной сетки по поперечной пространственной координате уравнение было преобразовано к новым координатам, соответствующим геометрии либо фокусированного, либо нефокусированного линейного гауссовского пучка [137, 138, 139]. В дополнении к асимптотическому методу, использование предложенного преобразования позволило существенно сократить время расчетов и сделало возможным решение нелинейных дифракционных задач. Данные расчетов использовались в учебном процессе для разработки задачи акустического практикума «Численное моделирование нелинейных и дифракционных эффектов в звуковых пучках» [141]. Были получены первые результаты для новых задач ультразвуковой хирургии с использованием мощного фокусированного ультразвука [140]. Позже, с развитием компьютерных мощностей, эти задачи были рассмотрены более подробно и доведены до уровня численного эксперимента, дополняющего, а во многом и заменяющего физический эксперимент (см. гл. 4-7).

Рассмотрим здесь основные детали предложенной модификации алгоритма. Запишем уравнение ХЗ для аксиально-симметричного пучка в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial z} - NV \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{4G} \Delta_{\perp} V, \quad (3.82)$$

и граничное условие, заданное на плоскости $z = 0$ в виде фокусированной гармонической волны с исходно гауссовским распределением амплитуды:

$$V(z = 0) = \exp(-R^2) \sin(\theta + GR^2). \quad (3.83)$$

Здесь $V = p/p_0$ - давление, нормированное на амплитуду волны p_0 ; $z = x/F$ - координата вдоль оси пучка, нормированная на фокусное расстояние F ; $R = r/a$ - поперечная координата, нормированная на радиус источника a ; $\theta = \omega_0 \tau = \omega_0(t - x/c_0)$ - время в сопровождающей системе координат. В уравнение (3.83) входят два безразмерных параметра, характеризующие нелинейность $N = F/x_n$ (отношение фокальной длины и длины образования разрыва $x_n = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon p_0 \omega_0$ в плоской волне) и дифракцию $G = x_d / F$ (отношение дифракционной $x_d = ka^2 / 2$ и фокусной длин, $k = \omega_0 / c_0$ - волновое число). Фокусировка пучка обеспечивается путем введения дополнительной задержки фазового фронта в параболическом приближении: $GR^2 = kr^2 / 2F$.

Аналитическое решение уравнения (3.82) с граничным условием (3.83) в случае линейной фокусировки осесимметричного пучка имеет следующий вид [2, 137, 138]:

$$V = \exp\left(-\frac{R^2}{f^2}\right) \frac{1}{f} \sin\left[\theta - \frac{R^2}{f^2} \left(G(1-z) + \frac{z}{G}\right) + \arctan \frac{z}{G(1-z)}\right], \quad (3.84)$$

где $f(z)$ - ширина пучка (рис. 3.26):

$$f(z) = \sqrt{(1-z)^2 + z^2/G^2}. \quad (3.85)$$

Следуя идее метода геометрической акустики, введем функцию эйконала $\Psi(z, R)$, описывающую искривление волнового фронта

$$\Psi = \frac{R^2}{f^2} \left(G(1-z) + \frac{z}{G} \right) + \arctan \frac{z}{G(1-z)}. \quad (3.86)$$

Учитывая, что $f' = (1-z + z/G^2)/f$, и записывая выражение для арктангенса в интегральной форме, преобразуем выражение (3.86) к удобному для расчетов виду:

$$\Psi = R^2 G f' / f - \int dz' / f^2. \quad \text{Далее перейдем в}$$

уравнении (3.82) к новым переменным:

$$V(z, R, \theta) \rightarrow U(\sigma, R_1, \theta_1) = Vf(z), \quad \text{где } \theta_1 = \theta - \Psi(z, R), \quad R_1 = R/f(z), \quad \sigma = \int_0^z dz' / f(z). \quad (3.87)$$

Выполним преобразования (3.87) последовательно в четыре этапа. Первым шагом осуществим преобразование временной координаты θ к θ_1 : $V(\theta, z, R) \rightarrow V_1(\theta_1 = \theta - \Psi(z, R), z, R)$. Уравнение (3.82) тогда примет форму:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{\partial V_1}{\partial z} - N V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \theta_1} + \frac{1}{4G} \left(V_1 \Delta_{\perp} \Psi + 2 \frac{\partial V_1}{\partial R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) - \frac{\partial V_1}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{4G} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)^2 \right) \right] = \frac{1}{4G} [\Delta_{\perp} V_1]. \quad (3.88)$$

Представляя в явном виде выражения для частных производных функции Ψ через ширину пучка f , получим:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = R^2 G \left(\frac{1/G^2 - 1}{f^2} - \frac{2(f')^2}{f^2} \right) - \frac{1}{Gf^2}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 2GR \frac{f'}{f}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} = 2G \frac{f'}{f}; \quad \Delta_{\perp} \Psi = 4G \frac{f'}{f}$$

Уравнение (3.88) тогда запишется в более короткой форме:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{\partial V_1}{\partial z} - N V_1 \frac{\partial V_1}{\partial \theta_1} + \frac{f'}{f} \left(V_1 + 2R \frac{\partial V_1}{\partial R} \right) + \frac{1}{Gf^2} \left(1 - \frac{R^2}{f^2} \right) \frac{\partial V_1}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{4G} [\Delta_{\perp} V_1]. \quad (3.89)$$

Вторым шагом преобразуем поперечные координаты, вводя переменную $R_1 = R/f(z)$ и переходя в уравнении (3.89) от координат $V_1(\theta_1 = \theta - \Psi(z, R), z, R)$ к $V_2(\theta_1 = \theta - \Psi(z, R), z, R_1)$. Выражения для необходимых частных производных имеют вид:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} - R \frac{f'}{f^2} \frac{\partial V_2}{\partial R}; \quad \frac{\partial V_1}{\partial R} = \frac{1}{f} \frac{\partial V_2}{\partial R_1}; \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial R^2} = \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial R_1^2}.$$

и, соответственно, уравнение (3.89) с учетом, что $R = R_1 f$, приобретает вид:

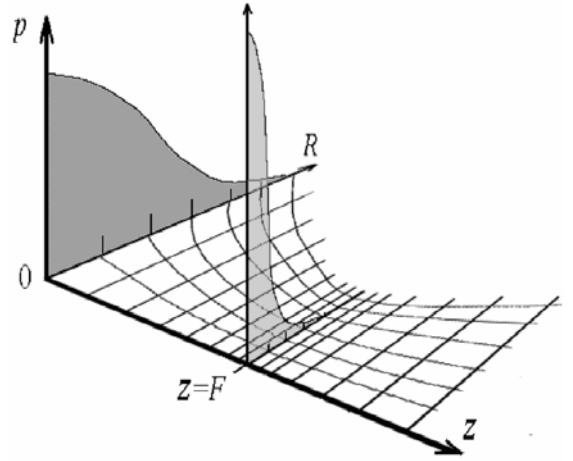


Рис. 3.26. Преобразование координат для построения неоднородной сходящейся пространственной сетки.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{\partial V_2}{\partial z} - R_1 \frac{f'}{f} \frac{\partial V_2}{\partial R_1} - NV_2 \frac{\partial V_2}{\partial \theta_1} + \frac{f'}{f} \left(V_2 + R_1 \frac{\partial V_2}{\partial R_1} \right) + \frac{1}{Gf^2} (1 - R_1^2) \frac{\partial V_2}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{4Gf^2} [\Delta_{\perp} V_2]. \quad (3.90)$$

Третьим шагом выполним замену переменной V_2 на $V_3 = V_2 f(z)$. Учитывая, что $\partial V_2 / \partial z = 1/f \partial V_3 / \partial z - V f' / f^2$, уравнение (3.90) переписывается как:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{\partial V_3}{\partial z} - \frac{NV_3}{f} \frac{\partial V_3}{\partial \theta_1} + \frac{1}{Gf^2} (1 - R_1^2) \frac{\partial V_3}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{4Gf^2} [\Delta_{\perp} V_3]. \quad (3.91)$$

Наконец, вводя новую координату распространения $\sigma = \int_0^z dz' / f(z)$, преобразуем

уравнение (3.91) и граничное условие (3.83) к окончательным переменным $U(\sigma, R_1, \theta_1)$ (3.88), соответствующим неоднородной сходящейся пространственно сетке (рис. 3.26):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial U}{\partial \sigma} - NU \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{Gf} (1 - R_1^2) \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{4Gf} [\Delta_{\perp} U]; \quad U(\sigma = 0) = \exp(-R_1^2) \sin(\theta_1) \quad (3.92)$$

Окончательная нелинейная система связанных дифференциальных уравнений для

Фурье-компонент решения $U = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\sigma, R_1) \exp(-in\theta_1)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial C_n}{\partial \sigma} = -\frac{in}{2} N \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} + \frac{i}{4nG} \left[\frac{\partial^2 C_n}{\partial R_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial C_n}{\partial R_1} \right] + \frac{in(1 - R_1^2)}{Gf} C_n. \quad (3.93)$$

В правой части системы (3.93) второе слагаемое представляет собой дифракционный оператор, а третье (последнее слагаемое) - описывает дополнительный фазовый набег, возникающий после преобразования координат. Преобразования координат в случае нефокусированного пучка легко получить, формально устремляя $F \rightarrow \infty$, полагая $G = 1$ и перенормируя координату распространения на длину дифракции $z = x_d / x_n$. Тогда $N = x_d / x_n$ - это отношение дифракционной длины к длине образования разрыва.

Полученная система (3.93) и использование асимптотического метода позволили исследовать различные задачи нелинейной акустики ограниченных пучков [140]. Рассмотрим здесь в качестве иллюстрации результаты моделирования исходно нефокусированного гауссового пучка гармонических волн (рис. 3.27), которые использовались при разработке задачи акустического практикума кафедры акустики МГУ [141]. В задаче рассматриваются дифракционные явления в пучках малой амплитуды, нелинейные эффекты в плоских волнах и нелинейно-дифракционные явления в мощных звуковых пучках. Ниже приведены графические материалы, иллюстрирующие основные исследуемые явления: несимметричное искажение профиля волны, образование и эволюция ударного фронта (рис. 3.28 – 3.30), поведение энергетических характеристик пучка. Анализируется эффект сужения размеров пучка с увеличением номера гармоники,

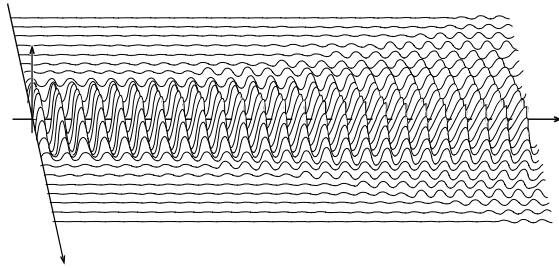


Рис. 3.27. Наглядное представление нелинейного дифрагирующего звукового пучка

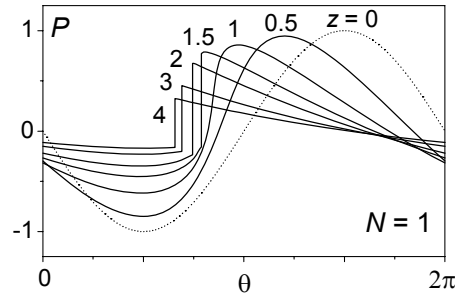


Рис. 3.28. Профили волн на различных расстояниях вдоль оси пучка.

а также эффект «изотропизации» (сглаживания) пучка за счет образования разрывов и более быстрого поглощения акустической энергии вблизи оси (рис. 3.31).

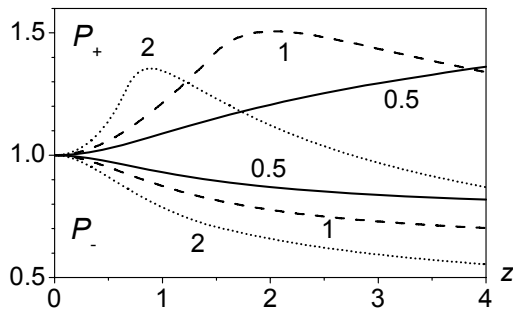


Рис. 3.29. Показатели асимметрии профиля волны на оси пучка: зависимости положительных и отрицательных пиковых давлений $P_{+,-} = p_{+,-}(z)/p_{+,-,лин}(z)$, $p_{+,-,лин}(z) = p_0/f(z)$ для различных значений параметра N (цифры у кривых).

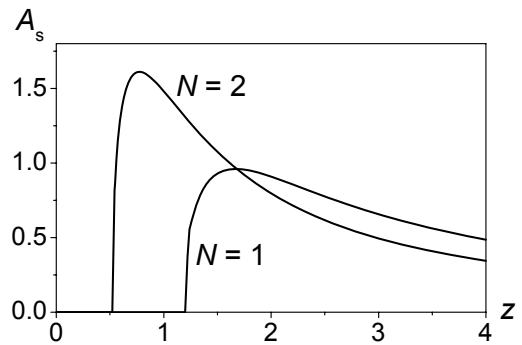


Рис. 3.30. Амплитуда ударного фронта $A_s = a_s/p_0$ на оси пучка для различных значений параметра N (цифры у кривых).

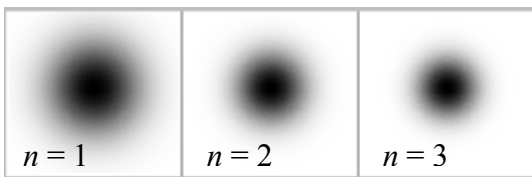
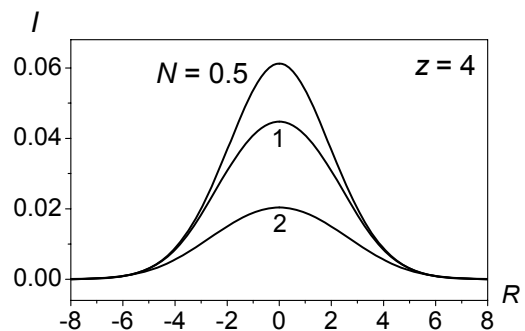
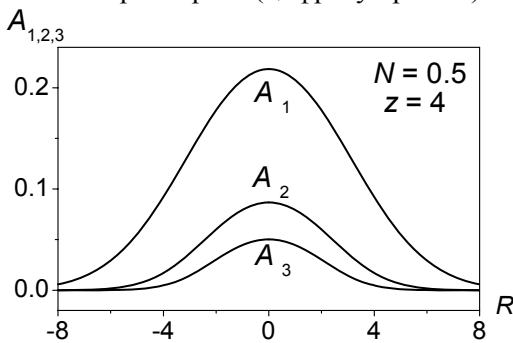


Рис. 3.31. Поперечные распределения амплитуд первых трех гармоник (слева) и полной интенсивности волны (справа) на расстоянии $z = 4$ от источника для различных значений параметра N .

3.11. Заключительные замечания

Основным результатом данной главы стало развитие нового асимптотического спектрального метода решения нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих разрывные решения. Метод основан на использовании в численном алгоритме известных высокочастотных асимптотик разрывных функций, содержащих особенности типа «разрыв» (пилообразная волна), «разрыв производной» (периодическая сглаживающая парабола), либо асимптотики спектра разрыва конечной ширины. В случае распространения сигнала в среде с частотно-зависимыми линейными характеристиками либо при учете дифракционных эффектов, полученная система связанных уравнений для гармоник легко обобщается добавлением в правую часть новых слагаемых, описывающих соответствующие эффекты. Получение замкнутой системы связанных нелинейных уравнений для конечного числа гармоник, описывающей решения с разрывами, является самостоятельным важным результатом. В плане практической значимости развитый метод позволил исследовать численными методами широкий круг задач о распространение волн с ударными фронтами в нелинейных средах без дисперсии.

Разработка метода позволила значительно сократить время численных расчетов при описании нелинейных акустических эффектов в спектральном представлении. Количество операций при расчете нелинейного оператора в этом случае пропорционально квадрату числа гармоник, поскольку решаются N_{\max} уравнений с $\sim N_{\max}$ слагаемыми в правой части каждого из них (3.4). Уменьшение удерживаемого количества гармоник в алгоритме в 10 раз по сравнению с традиционными схемами моделирования волн с узкими ударными фронтами (600 – 1000), привела к уменьшению времени расчетов нелинейного оператора в 100 раз. Модификация алгоритма для решения дифракционных задач на неоднородной пространственной сетке также позволила существенно сократить время расчетов. Так, в фокусированном пучке сходящаяся сетка уменьшает количество точек по поперечной координате в G раз при характерных значениях $G = 10 - 40$.

Исследованы особенности проявления нелинейных эффектов в средах с частотным законом поглощения близким к линейному. Показано, что в среде с линейным законом разрыв образуется раньше, является более узким и сохраняет ударную структуру дольше, чем в среде с классическим термовязким поглощением, квадратичным по частоте. Меняется также ширина и время образования разрыва, амплитуда пикового давления в профиле волны. При распространении одиночного импульса с ударным фронтом параметры закона поглощения по-разному влияют на изменение его формы: величина коэффициента поглощения на некоторой характерной частоте оказывает большее влияние

на изменение пикового давления в импульсе, а показатель степени - на ширину ударного фронта. Тем самым можно говорить о принципиальной возможности использования нелинейных импульсных сигналов с ударным фронтом для диагностики параметров степенного закона поглощения среды. Исследована устойчивость бесконечно узкого ударного фронта (разрыва) для нелинейных волн в средах с различными степенными законами поглощения. Показано, что разрыв устойчив, если коэффициент поглощения на высоких частотах растет не быстрее, чем по линейному закону.

Исследовано влияние селективного поглощения на второй гармонике на протекание нелинейных эффектов при распространении плоских волн в режиме развитых ударных фронтов. Показано, что в доразрывном режиме распространения введение селективного поглощения проявляется в дополнительном поглощении энергии волны. Селективное поглощение не предотвращает, но задерживает образование ударного фронта. В разрывном режиме введение селективного поглощения приводит к характерному искажению формы волны: положение пикового давления заметно удалено от положения ударного фронта. Амплитуда фронта меньше, чем в отсутствие селективного поглощения, что приводит к меньшему нелинейному поглощению энергии волны и обеспечивает большие амплитуды и интенсивности на больших расстояниях.

Исследованы эффекты нелинейной стабилизации акустической волны в активных средах с характерным для термоакустических установок усилением: постоянным по частоте и пропорциональным корню из частоты. Показано, что эффективность усиления и амплитуда установившейся волны увеличиваются при более сильном поглощении и дисперсии на высоких частотах спектра волны.

С использованием метода получены численные решения для нелинейных фокусированных и нефокусированных пучков периодических волн с исходной гауссовской аподизацией амплитуды. Исследованы процессы насыщения параметров акустического поля в фокусе. Однако при рассмотрении нелинейных дифрагирующих полей, создаваемых реальными источниками мощного ультразвука, для которых начальное распределение амплитуды близко к равномерному, численное решение при наличии разрывов становилось неустойчивым. Как будет показано в следующей главе диссертации, причиной этого являлось новое физическое явление – образование двух разрывов на периоде исходно гармонической волны в ближнем поле поршневого излучателя.

Аналогичные попытки учесть асимптотические свойства разрывных волн при моделировании нелинейного уравнения стали применяться лишь недавно [169].

4

Нелинейные взаимодействия разрывных волн в ближнем поле ультразвукового излучателя

4.1 Вводные замечания

Классическое явление нелинейной акустики состоит в том, что при распространении плоской гармонической волны в нелинейной среде происходит ее трансформация в пилообразную волну, содержащую один разрыв на периоде [1, 2]. В первых экспериментах наблюдалось такое преобразование исходно гармонической волны в пилообразную и был сделан вывод, что результаты экспериментов хорошо согласуются с классической теорией [170 - 172]. Позднее было показано, что дифракционные эффекты, проявляющиеся в ограниченных пучках, приводят к асимметрии профиля нелинейной волны [1, 24, 173, 174]. Тем не менее, основные особенности искажения профиля в нелинейном дифрагирующем пучке и при распространении плоской волны были близки. В частности, пиковое давление в волне в процессе образования разрыва было приблизительно таким же, что и исходная амплитуда волны, формировался один разрыв на периоде. Большая часть теоретических результатов была получена для гауссовских источников.

Эволюция профиля волны, однако, может быть совсем иной в ближнем поле поршневых излучателей с резкими границами. Как будет показано в данной главе, за счет сильного проявления дифракционных эффектов, в этом случае возможно формирование двух разрывов на периоде волны. Более того, форма волны становится настолько асимметричной, что может наблюдаться четырехкратное превышение локального давления по сравнению с амплитудой волны на излучателе. Эти новые нелинейно-дифракционные эффекты были предсказаны в данной работе при проведении численного моделирования и затем подтверждены в физическом эксперименте.

Первоначальной целью проведения исследований данной главы было подтвердить возможность обобщения нового асимптотического спектрального метода (гл. 3), разработанного для одномерных волн и гауссовских пучков, на более сложный круг задач описания полей реальных источников нелинейных дифрагирующих пучков. К тому времени асимптотический метод уже успешно применялся для моделирования мощных пучков, создаваемых источниками с гауссовским распределением амплитуды и имеющих

плавную пространственную структуру поля как вдоль, так и поперек оси [175, 60]. Реальные источники ультразвука, однако, всегда имеют конечный размер и создают поля с более сложной дифракционной структурой. Характерным примером является ближнее поле поршневого излучателя.

Эта классическая задача была детально исследована в различных работах, но при слабом проявлении нелинейных эффектов, без формирования разрывов в профиле волны [176 - 179]. Также были известны данные измерений и моделирования для первых нескольких гармоник в случае, когда разрыв образуется в ближней зоне излучателя [35]. Эти исследования проводились в лаборатории INSERM в Лионе и были опубликованы в 1995 году. Позднее, одновременно с разработкой асимптотического алгоритма в МГУ, в лаборатории INSERM была разработана новая численная модель для описания импульсных нелинейных пучков, в которой эффекты дифракции описываются на основе интеграла Рэлея, без использования параболического приближения [36]. Эффекты дифракции, нелинейности и частотно-зависимого поглощения рассчитывались в этой модели на основе эволюционного подхода с использованием метода расщепления по физическим факторам. Новая временная модель была удобна для описания импульсных полей, однако она еще не была опробована для периодических волн. Возникла идея провести совместный численный эксперимент, соответствующий условиям реального физического эксперимента, используя обе модели. Согласие между численными результатами и существующими данными измерений послужило бы подтверждением адекватности двух новых моделей эксперименту и позволило бы сравнить точность и расчетное время для соответствующих алгоритмов. Поскольку в рамках асимптотического подхода можно было описывать распространение разрывных волн при учете небольшого количества гармоник (30 - 50), то его использование, безусловно, дало бы немалый выигрыш при решении дифракционных задач.

Экспериментальные данные работы [35] были взяты за основу для тестовых расчетов. Однако уже первые предварительные расчеты на основе асимптотического метода показали неожиданные трудности его применения. Если в доразрывном режиме численные решения прекрасно соответствовали друг другу и данным измерений, то по мере увеличения амплитуды давления на излучателе численное решение, получаемое на основе асимптотического метода, становилось неустойчивым. Причина неустойчивости, как стало ясно при анализе результатов, заключалась в формировании двух разрывов на периоде волны, что противоречило идее асимптотического метода в его первоначальной постановке. Хотя принципиальная возможность обобщения метода с учетом образования двух разрывов на периоде волны, была показана для одномерных волн, переход к прямому

моделированию уравнения ХЗК в спектральном представлении оказался более удобным. Тем не менее, такой переход потребовал резкого увеличения числа гармоник для описания разрывных решений (~ 1000); соответственно, увеличилось расчетное время, и возникла необходимость дополнительной оптимизации алгоритма.

Дальнейшие исследования проводились согласно исходно намеченному плану, структуру которого повторяют материалы данной главы. Глава состоит из четырех основных частей, и ее структура соответствует этапам проведенных исследований. В первой части кратко описаны основные параметры и особенности развитого спектрального метода. Далее приводятся результаты сравнительных расчетов с использованием обоих алгоритмов и известных данных измерений для гармоник. В третьей части развитый в данной работе спектральный алгоритм используется для детального исследования особенностей нелинейно-дифракционных явлений в пучке, когда ударные фронты образуются в ближней зоне излучателя. Как будет показано в этой части, наряду с известными данными о поведении амплитуд первых гармоник, гораздо больший физический интерес представляет собой анализ искажения профиля волны, образования и эволюции разрывных фронтов. Также были исследованы важные метрологические характеристики акустического поля, такие как пиковые значения давления в профиле волны, интенсивность и полная мощность пучка. Для подтверждения полученных новых результатов, предсказанных в численном моделировании, были проведены измерения, которые описаны в четвертой части главы.

Основные результаты, полученные в данной главе диссертации, опубликованы в статьях [180, 181].

4.2. Спектральный алгоритм расчета ближнего поля мощного поршневого излучателя

Приведем здесь кратко основные уравнения, обозначения, величины основных физических параметров и параметров частотного алгоритма, которые будут использоваться далее при описании результатов. Моделирование проводилось в соответствии с данными работы [35] для круглого плоского источника с радиусом $a = 2.35$ см, рабочей частотой $f_0 = 1$ МГц и амплитудой давления на излучателе $p_0 = 2, 6.4$ и 14.3 атм. Амплитуды первых пяти гармоник, рассчитанные в численном эксперименте, сравнивались с результатами измерений в воде, полученными с помощью широкополосного ПВДФ гидрофона на оси пучка на расстояниях 5 см - 40 см от излучателя и на расстояниях до 5 см от его оси [35]. При расчетах использовались

следующие параметры воды: скорость звука $c_0 = 1500$ м/с, равновесная плотность $\rho_0 = 1$ г/см³, параметр акустической нелинейности $\varepsilon = 3.5$, коэффициент поглощения на частоте 1 МГц $\alpha_0 = b\omega_0^2/2c_0^3\rho_0 = 2.533 \cdot 10^{-4}$ см⁻¹, где $\omega_0 = 2\pi f_0$ - круговая частота, что соответствует величине диссипативного параметра $b = 4.33 \times 10^{-2}$ г·с⁻¹·см⁻¹.

Акустическое поле, создаваемое поршневым излучателем, описывалось уравнением ХЗК в следующих безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} P. \quad (4.1)$$

Здесь $P = p/p_0$ - давление, нормированное на характерную начальную амплитуду волны p_0 ; время $\theta = \omega_0 \tau$; $Z = z/z_d$ - координата распространения вдоль оси пучка, нормированная на длину дифракции для основной частоты $z_d = ka^2/2$, где $k = \omega_0/c_0$ - волновой вектор. $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial R^2 + R^{-1} \partial/\partial R$ - Лапласиан по поперечной координате $R = r/a$, нормированной на радиус излучателя. Граничное условие для гармонической волны задавалось на поверхности излучателя при $Z = 0$ как

$$P(Z = 0, R, \theta) = -\sin(\theta) \text{ при } 0 < R < 1 \text{ и } P(Z = 0, R, \theta) = 0 \text{ при } R > 1. \quad (4.2)$$

Два безразмерных параметра задачи N (нелинейность) и A (поглощение) определялись как отношение характерных пространственных масштабов:

$$N = \frac{z_d}{z_n} = \frac{\beta \omega_0^2 a^2 p_0}{2c_0^4 \rho_0} \quad \text{и} \quad A = \frac{z_d}{z_n} = \frac{b \omega_0^3 a^2}{4c_0^4 \rho_0}. \quad (4.3)$$

Величина параметра N (отношение длины дифракции z_d к расстоянию образования разрыва в плоской волне $z_n = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon \omega_0 p_0$) характеризует степень проявления нелинейных эффектов, величина параметра A (отношение z_d к длине поглощения основной частоты $z_n = \alpha_0^{-1}$) характеризует диссипативные процессы. В соответствии с данными эксперимента [35], длина дифракции $z_d = ka^2/2 = 115$ см, длина поглощения $z_n = 39.5$ м, величина параметра поглощения была равна $A = 0.0293$, а значения безразмерного нелинейного параметра $N = 1.5, 4.8$ и 10.8 для амплитуд давления на излучателе $p_0 = 2, 6.4$ и 14.3 атм (длина образования разрыва $z_n = 76.7, 24$ и 10.7 см).

Решение уравнения (4.1) представлялось в виде разложения в ряд Фурье:

$$P(Z, R, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(Z, R) \exp(-in\theta), \quad (4.4)$$

где $C_n(Z, R)$ - комплексная амплитуда гармоники с номером n ($-\infty < n < \infty$). Подставляя решение в форме (4.4) в уравнение (4.1), получим систему нелинейных связанных уравнений для амплитуд гармоник C_n :

$$\frac{\partial C_n}{\partial Z} = -\frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} - An^2 C_n + \frac{i}{4n} \Delta_{\perp} C_n, \quad (4.5)$$

где $C_{-n} = C_n^*$, и C_n^* - величина, комплексно сопряженная C_n . Уравнения (4.5) решались численно, краткое описание алгоритма расчетов приводится в приложении 4.

Безразмерный профиль волны в каждом узле пространственной сетки восстанавливался, используя формулу (4.4), где суммирование проводится для гармоник с номерами $|n| \leq n_{\max}^{(m)}$. Полная интенсивность волны в приближении квазиплоского распространения равна $I = \langle p^2 \rangle / c_0 \rho_0$; после нормировки на интенсивность гармонической волны на излучателе, $I_0 = p_0^2 / 2c_0 \rho_0$, безразмерная интенсивность $\tilde{I} = I / I_0$ в m -узле поперечной сетки рассчитывалась как сумма интенсивностей всех гармоник:

$$\tilde{I}^{(m)} = 4 \sum_{n=1}^{n_{\max}^{(m)}} |C_n^m|^2. \quad (4.6)$$

Полная мощность пучка на расстоянии z от излучателя рассчитывалась как интеграл вдоль поверхности соответствующей плоскости: $W(z) = 2\pi \int_0^{\infty} I(z, r) r dr$, или в безразмерных переменных:

$$\tilde{W}(Z) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{I}(Z, R) R dR = \frac{\Delta R^2}{2} \sum_{m=1}^{m_{\max}} (2m-1) \cdot (\tilde{I}^{(m-1)} + \tilde{I}^{(m)}), \quad (4.7)$$

где $\tilde{W} = W / W_0$, $W_0 = \pi a^2 I_0$ - полная мощность излучателя; суммирование проводилось для $m_{\max} = \max(m_{\max}^{(n)})$. Размерные амплитуды гармоник для сравнения с данными эксперимента рассчитывались как $A_n = 2p_0 |C_n|$.

Шаг по поперечной координате в расчетах был выбран $\Delta R = 2.5 \times 10^{-3}$, что соответствовало 400 узлам сетки на радиусе излучателя. Размер пространственного окна по поперечной координате $R_{\max}^{(n)} = m_{\max}^{(n)} \Delta R$ выбирался в зависимости от номера гармоники n следующим образом:

$$R_{\max}^{(n)} = \begin{cases} 5, & 1 \leq n \leq 30 \\ 4, & 31 \leq n \leq 100 \\ 3, & 101 \leq n \leq 300 \\ 2, & 301 \leq n \leq 800 \\ 1, & 801 \leq n \leq 1000 \end{cases} \quad (4.8)$$

В расчетах для больших значений параметра N , чтобы обеспечить устойчивость и точность получаемых решений, шаг сетки по координате Z уменьшался; минимальный шаг в вычислениях составлял $\Delta Z = 2.5 \times 10^{-5}$. Расчеты проводились до расстояний $Z_{\max} = 0.35$, в соответствии с имеющимися экспериментальными данными. Начальное количество гармоник в вычислениях было $n_{\max}^{(m)}(0) = 30$ независимо от номера индекса m . Далее количество гармоник последовательно увеличивалось на $\Delta n = 100$, когда амплитуда последней из учитываемых в расчетах гармоник превышала порог 2×10^{-4} . Максимальное количество гармоник $\tilde{n}_{\max}^{(m)}$ на заданном расстоянии от оси пучка R_m соответствовало условиям (4.8), т.е. $\tilde{n}_{\max}^{(m)} = 1000$ ($0 \leq m \leq 400$), 800 ($401 \leq m \leq 800$), 300 ($801 \leq m \leq 1200$), 100 ($1201 \leq m \leq 1600$) и 30 ($1601 \leq m \leq 2000$). Граничный слой на краю пространственного окна вдоль координаты R , на котором вводилось увеличенное поглощение, состоял из $\Delta m = 50$ узлов, параметр поглощения $\alpha_* = 500$.

Параллельно проводился численный эксперимент с использованием модели, разработанной в лаборатории INSERM в Лионе, Франция. В данной модели, как уже упоминалось во введении к главе, также применяется эволюционный подход, т.е. акустическое поле рассчитывается последовательно, по мере удаления от излучателя, на плоскостях, перпендикулярных его оси. Моделирование проводится во временном представлении, на каждом шаге сетки в направлении распространения волны учет дифракционных эффектов проводится на основе интеграла Рэлея (без параболического приближения), а нелинейный оператор и поглощение моделируются в приближении квазиплоского распространения, как и в данной работе. Подробное описание алгоритма приведено в работах [180, 36]. Расчеты с использованием данной временной модели требовали гораздо большего времени, что было обусловлено, в основном, двумя причинами. При временном описании периодических волн в пучке, чтобы обеспечить выход решения на стационарный уровень, необходимо большое окно по времени. Кроме того, расчет дифракционного интеграла для каждого из узлов пространственной сетки также является очень громоздким. Время расчетов, соответственно, составляло 18.7 часов, 14.6 дней и около 45 дней для $N = 1.5$, $N = 4.8$ и $N = 10.8$ на рабочей станции Compaq XP-1000 (Digital Alpha 21264 533 MHz chip). Развитый в данной работе частотный алгоритм,

оптимизированный под конкретную задачу, был гораздо быстрее и точнее для описания периодического во времени поля. Время расчетов изменялось от 7.5 минут для $N = 1.5$ до 12.5 часов для $N = 4.8$ и 32.5 часов для $N = 10.8$ на рабочей станции Compaq XP-1000.

4.3. Сравнение численного решения с известными данными измерений и моделирования

Для проверки соответствия численных решений реальному эксперименту, приведем здесь результаты моделирования с использованием двух новых численных схем и данные измерений [35]. На рисунке (4.1) представлены распределения амплитуд A_n первых трех гармоник ($n = 1, 2, 3$) вдоль оси пучка для различных начальных амплитуд давлений $p_0 = 2, 6.4$ и 14.3 атм на излучателе.

Распределения для первой гармоники (рис. 4.1 (а)) хорошо согласуются между собой для всех уровней начального давления. Некоторые различия наблюдаются на небольших расстояниях от излучателя вследствие использования различных подходов для расчета дифракционных эффектов. В то же время, уже начиная с расстояний $z \sim 60$ мм,

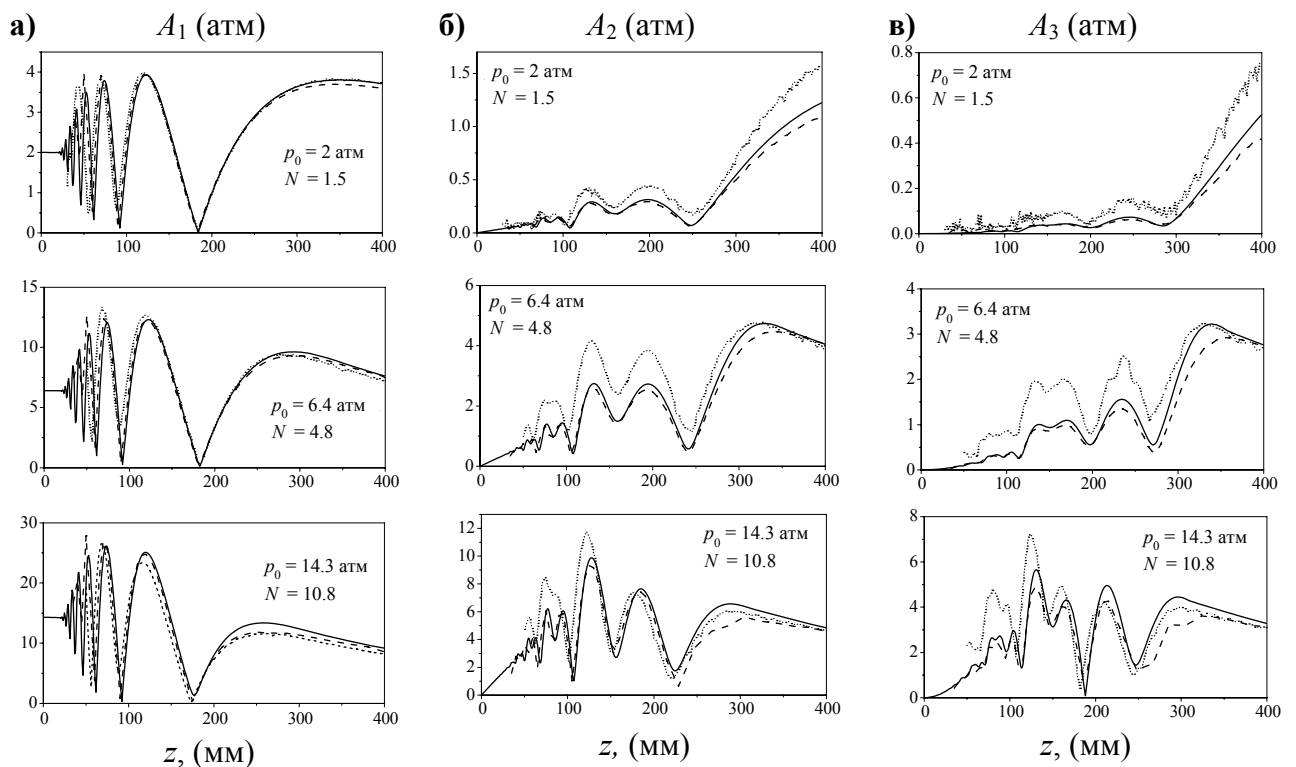


Рис. 4.1. Распределения амплитуд первых трех гармоник A_1 (а), A_2 (б), и A_3 (в) на оси пучка для различных значений амплитуды давления $p_0 = 2, 6.4$ и 14.3 атм на излучателе.

Сравнение численных решений, полученных с помощью спектрального (—) и временного (- - -) алгоритмов, с экспериментальными данными (·····) [35].

осциллирующая структура поля хорошо описывается численными решениями. Последний максимум амплитуды A_1 расположен на расстоянии 35 см от излучателя при $p_0 = 2$ атм и смещается ближе к излучателю при увеличении начального давления. Предыдущий дифракционный минимум расположен на расстоянии 18.5 см и также смещается в сторону излучателя, примерно на 1 см при $p_0 = 14.3$ атм.

Распределения амплитуд второй и третьей гармоник вдоль оси пучка, рис. 4.1 (б) и (в), также имеют осциллирующую структуру. Для каждой из гармоник осцилляции имеют примерно одинаковую структуру для всех уровней начального давления p_0 . Положения максимумов и минимумов, особенно последних, слегка смещаются в сторону излучателя при увеличении p_0 . Амплитуда осцилляций существенно больше, когда нелинейные эффекты выражены сильнее. Численные решения хорошо согласуются между собой, но наблюдаются небольшие отличия между измеренными и рассчитанными амплитудами гармоник. Это отличие наблюдалось ранее, и ему было дано объяснение в работе [35].

На рисунке 4.2 показаны поперечные профили пучка, измеренные и рассчитанные численно на наибольшем расстоянии от излучателя $z = 400$ мм. Как видно, здесь также наблюдается хорошее согласие данных расчетов помощью двух разных алгоритмов и

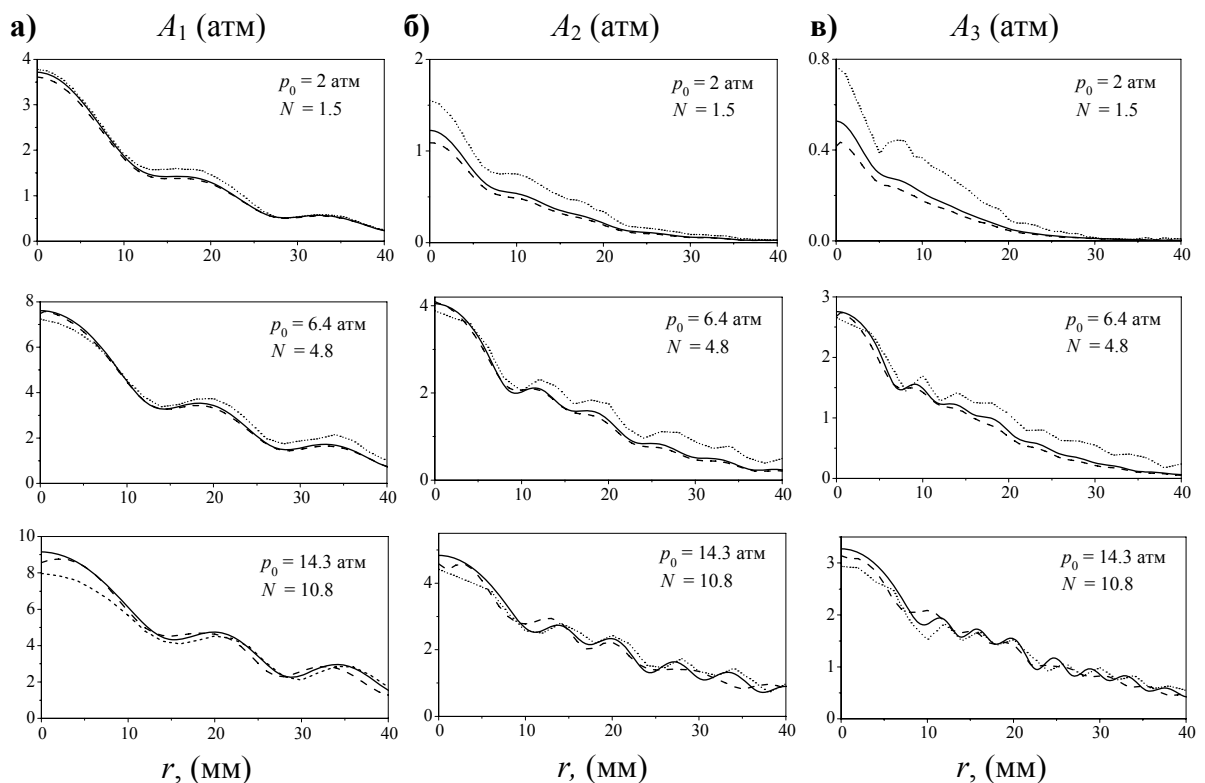


Рис. 4.2. Поперечные пространственные распределения амплитуд первых трех гармоник A_1 (а), A_2 (б), и A_3 (в) на расстоянии $z = 400$ мм от излучателя для различных значений амплитуды давления $p_0 = 2, 6.4$ и 14.3 атм. Сравнение численных решений, полученных с помощью спектрального (—) и временного (---) алгоритмов, с экспериментальными данными (.....) работы [35].

измерений. Это согласие показывает достоверность и точность развитых численных схем для моделирования первых гармоник в ближнем поле плоского поршневого излучателя как для квазилинейного, так и сильно нелинейного режимов распространения. Тем не менее, спектр нелинейной волны, особенно содержащей разрыв, является широким, и неточности моделирования будут проявляться сильнее для высших гармоник. Хотя результаты моделирования и близки друг к другу для первых нескольких гармоник, высокочастотная часть может сильно отличаться. Для сравнения алгоритмов более информативными являются временные профили волны, полученные путем прямого моделирования во временном представлении или восстановленные по результатам расчета полного спектра в частотном представлении. В предыдущей работе [35] не имеется данных об измерениях разрывных профилей волны, поэтому рассмотрим сначала здесь результаты расчетов с использованием двух новых схем.

На рисунке 4.3 показаны временные профили давления, рассчитанные по двум алгоритмам на различных расстояниях z от излучателя и для различных значений нелинейного параметра N , пропорционального начальной амплитуде давления p_0 . Как было указано выше, характерная длина образования разрыва для выбранных трех уровней z (мм)

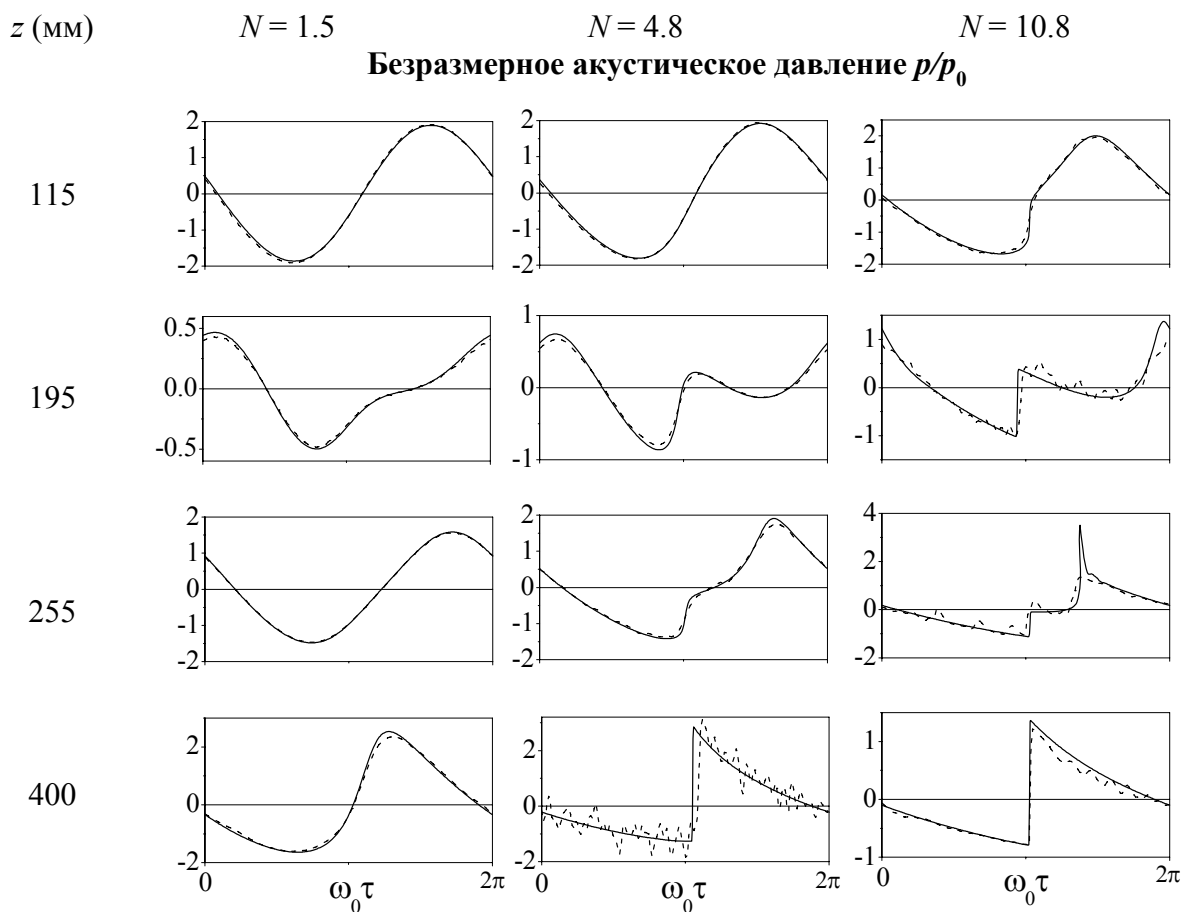


Рис. 4.3. Профили волны на оси пучка, рассчитанные с использованием частотного (—) и временного (- - -) алгоритмов на различных расстояниях z от излучателя и для различных значений начальной амплитуды давления p_0 .

работы излучателя равна $z_n = 76.7, 24$ и 10.7 см. В первом случае малой амплитуды нелинейные эффекты в ближнем поле выражены слабо, и разрыв формируется в дальней зоне пучка с плавной пространственной структурой. В двух последних случаях разрыв образуется внутри ближнего поля излучателя. Как видно из рисунка, численные решения, полученные с помощью двух различных алгоритмов, хорошо согласуются между собой. Разрывные профили, рассчитанные с помощью временной схемы, содержат шум, но, тем не менее, в среднем формы профилей близки друг к другу. Два интересных новых явления можно увидеть в решении для $N = 10.8$ на расстоянии $z = 255$ мм. Форма профиля, рассчитанная по частотному алгоритму, содержит два узких фронта на одном периоде волны, а пиковое положительное давление почти в два раза больше, чем при квазилинейном распространении, $N = 1.5$. Эффекты формирования двух разрывов на периоде волны и сильного увеличения пикового положительного давления ранее в нелинейных пучках не наблюдались и являются новыми интересными нелинейно-дифракционными волновыми явлениями.

Таким образом, сравнение результатов расчетов показало, что нелинейное искажение профиля волны и образование разрыва в осциллирующем ближнем поле пучка происходит существенно иным образом по сравнению со случаем распространения плоской волны либо дальним полем слабо нелинейного пучка. Эти эффекты будут рассмотрены далее более подробно.

4.4. Основные характеристики нелинейного поля. Эффект формирования двух разрывов на периоде волны

На рис. 4.4 показаны профили волны, рассчитанные на различных расстояниях $Z = z/z_0$ от излучателя для максимальной начальной амплитуды $p_0 = 14.3$ атм ($N = 10.8$). Расчеты проводились для ограниченного пучка (сплошные кривые) и для плоской волны (пунктирные кривые). В первой колонке представлены профили волны на оси, $R = 0$. Вторая и третья колонки соответствуют профилям на безразмерных расстояниях от оси, измеряемых в масштабах радиуса излучателя, $R = 0.5$ и 1 .

На оси пучка наблюдается последовательное образование двух разрывов. Первый разрыв образуется практически на том же расстоянии, $Z \sim 0.1$, и с той же фазой во времени, $\theta_p = \omega_0 \tau = \pi$, что и в плоской волне с той же начальной амплитудой. Асимметрия в положении разрыва относительно нулевого уровня давления $p/p_0 = 0$, которая обусловлена дифракционными эффектами, приводит к перемещению разрыва внутри периода волны относительно его стационарного положения в случае плоской

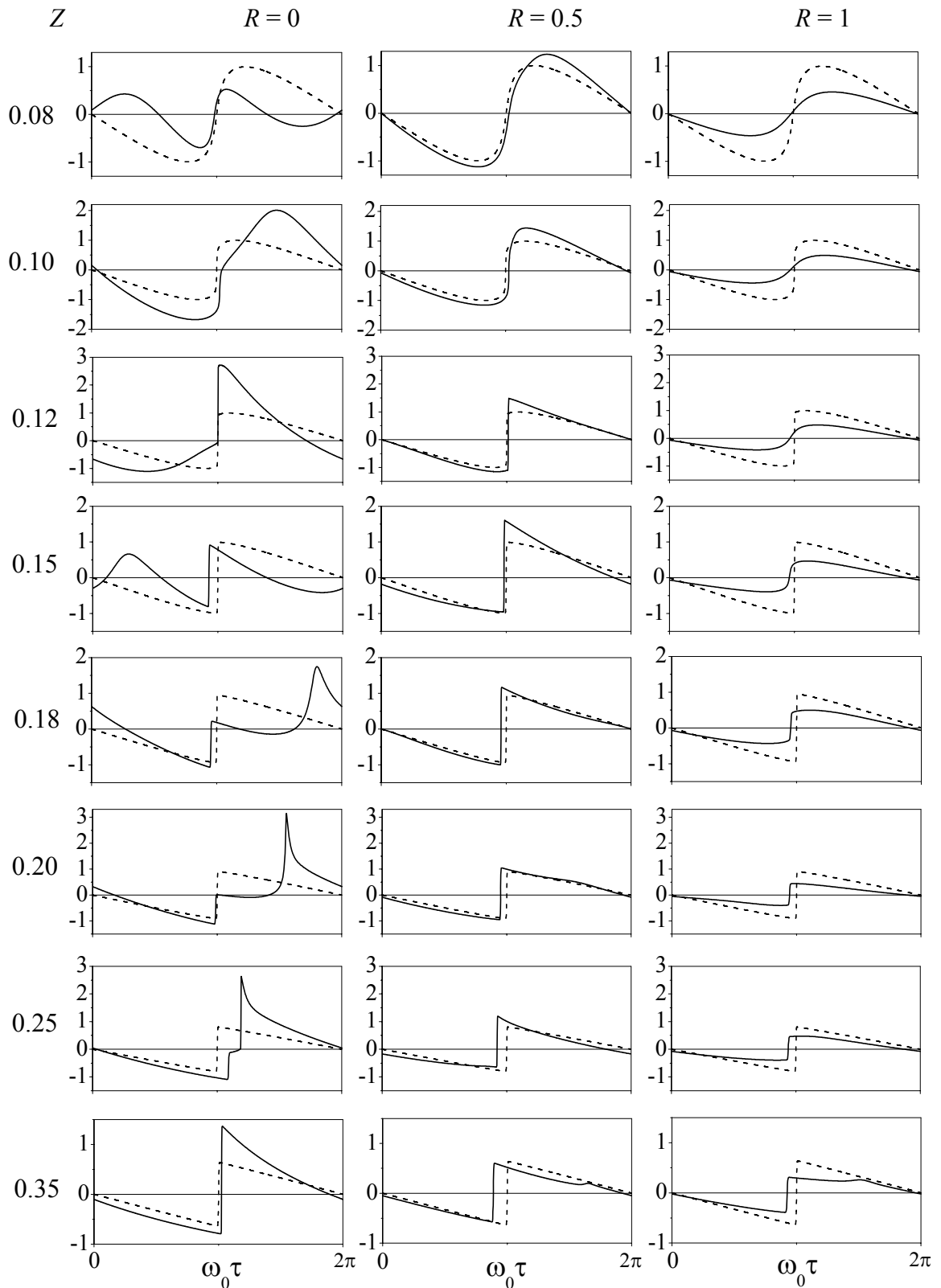


Рис. 4.4. Профили волны в пучке (сплошные кривые) и при распространении плоской волны (пунктирные кривые) на различных расстояниях $Z = z/z_0$ от излучателя на оси пучка, $R = 0$, и при $R = 0.5$, $R = 1$ радиусов излучателя от оси для начальной амплитуды $p_0 = 14.3$ атм ($N = 10.8$).

волны. Расстояние $Z = 0.15$ соответствует положению последнего минимума первой гармоники и максимума второй, при этом один период волны содержит две осцилляции различной формы. Одна из них плавная, а другая – разрывная. При дальнейшем

распространении плавный максимум увеличивается по величине, двигается быстрее и появляется в правой части временного окна ($Z = 0.18$). Далее происходит образование второго разрыва с узким пиком вблизи фронта ($Z = 0.20$), сближение разрывов ($Z = 0.25$), их столкновение и формирование пилообразной волны ($Z = 0.35$). Профили вне оси пучка содержат только один разрыв и похожи на профили нелинейной плоской волны. Внутри пучка ($R = 0.5$) отличия малы. Вблизи края пучка ($R = 1$) дифракционные эффекты сглаживают его структуру, уровни давления становятся меньше, чем в плоской волне. При этом нелинейные эффекты проявляются слабее, разрыв образуется на больших расстояниях от излучателя и имеет меньшую амплитуду.

Относительное движение и взаимодействие двух разрывов внутри одного периода волны более детально показано на рис. 4.5. В левой колонке представлены профили волны на оси на различных расстояниях для $N = 10.8$ (сплошные кривые) и для линейного пучка, $N = 0$ (пунктирные кривые). Видно, что на расстояниях, где формируются два разрыва, наблюдается максимальная асимметрия профиля. Величина пикового положительного давления более чем в 3.5 раза превышает начальную амплитуду давления p_0 на излучателе ($Z = 0.22$) по сравнению с двукратным превышением в линейном пучке, $N = 0$. Пиковое отрицательное давление, напротив, заметно меньше, чем в линейном случае. Форма профиля вблизи разрыва (между штриховыми вертикальными линиями) в увеличенном масштабе показана в правой колонке рисунка на оси и на малых расстояниях вблизи оси пучка, $r = 0.15, 0.3$ и 0.45 мм. Структура этого участка профиля сильно различается для расстояний $Z = 0.2$ и 0.22 . Сильное превышение пикового положительного давления в остром максимуме наблюдается только очень близко к оси пучка, затем, при увеличении расстояния от оси, пиковое значение давления быстро убывает. Когда острый пик сглаживается за счет нелинейного поглощения на разрыве ($Z = 0.24$ и 0.26), профили волны на оси и рядом становятся близки и практически совпадают после столкновения разрывов, при $Z = 0.28$. Таким образом, нелинейно-дифракционный эффект увеличения пикового положительного давления сильно локализован в пространстве как вдоль, так и поперек оси пучка.

Необычный характер нелинейной эволюции профиля акустической волны в ближнем поле поршневого источника по сравнению с классическим поведением профиля плоской волны либо профиля волны на оси гауссовского пучка можно объяснить интерференцией прямой и краевой волны. Разложение волны на эти две компоненты

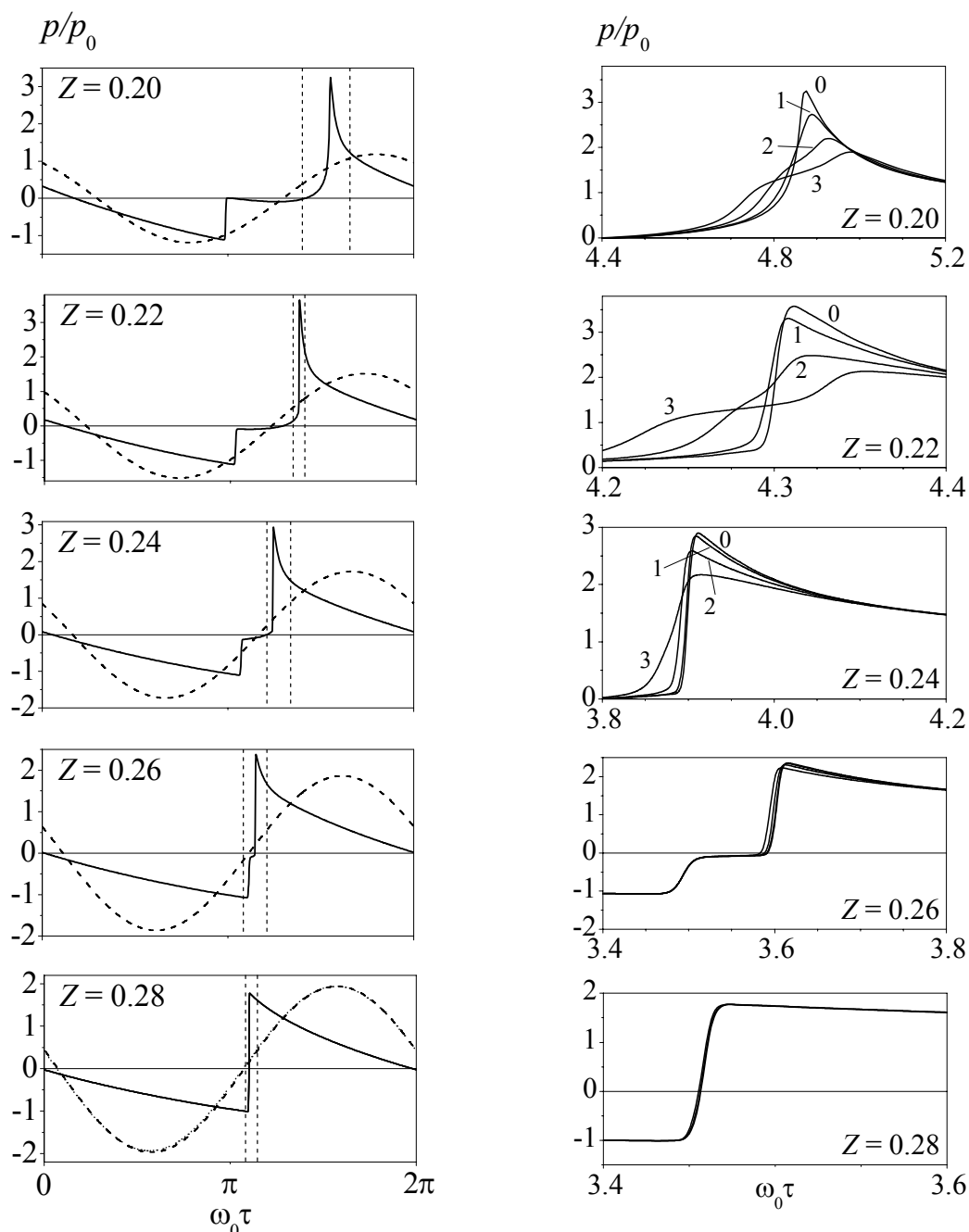


Рис. 4.5. Профили волны на оси пучка (слева) для нелинейного ($N = 10.8$, сплошные кривые) и линейного ($N = 0$, пунктирные кривые) пучка на различных расстояниях $Z = z/z_0$ от излучателя. Справа показаны в увеличенном масштабе участки профиля вблизи разрыва внутри временного окна (штриховые вертикальные линии слева) на оси и вблизи оси пучка при $r = 0$ (0), $r = 0.15$ мм (1), $r = 0.3$ мм (2) и $r = 0.45$ мм (3).

часто используется при анализе импульсного излучения поршневого преобразователя [182]. Прямая волна – это волна, распространяющаяся вдоль оси пучка. Краевая волна приходит от границы излучателя и имеет тороидальный фронт. В нелинейном режиме принцип суперпозиции несправедлив, поэтому прямая и краевая волны не могут рассматриваться независимо. С другой стороны, в ближнем поле эти две волны неколлинеарны и поэтому их взаимодействие не будет эффективным. Более того, амплитуда краевой волны на пути от границы излучателя до его оси гораздо меньше, чем

прямой. Только вблизи оси краевая и прямая волны сравниваются по амплитуде за счет одновременного прихода краевой волны с полной окружности границ излучателя. Поэтому, в некотором приближении, ближнее поле может быть представлено как суперпозиция нелинейной плоской и линейной краевой волны:

$$p = p_{\Pi} + p_K. \quad (4.9)$$

Аналогичная трактовка наблюдаемого в эксперименте сигнала была использована ранее при исследовании фокусированных пучков, где краевая волна рассматривалась как линейный «фон» для прямой волны с ударным фронтом [183]. При этом, однако, не была предсказана возможность образования второго разрыва, обусловленного приходом краевой волны.

Распространение плоской нелинейной волны (прямой) может быть описано уравнением Бюргерса:

$$\frac{\partial p_{\Pi}}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c^2 \rho} p_{\Pi} \frac{\partial p_{\Pi}}{\partial \tau} = \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p_{\Pi}}{\partial \tau^2}, \quad (4.10)$$

с граничным условием при $z = 0$: $p_{\Pi} = -p_0 \cdot \sin(2\pi f \tau)$. Уравнение (4.10) легко решается численно, используя конечно-разностный частотный алгоритм для плоской нелинейной задачи. Краевая волна на оси является инвертированным сигналом излучателя с задержкой, соответствующей времени распространения от края излучателя до оси пучка:

$$p_E = -p_0 \cdot \sin \left[2\pi f \left(\tau - \frac{\sqrt{z^2 + a^2} - z}{c} \right) \right]. \quad (4.11)$$

На рисунке 4.6 представлены профили волны, полученные при прямом моделировании уравнения ХЗК, а также как суперпозиция прямой и краевой волн (4.9 – 4.11). Как видно из рисунка, профили волны практически неотличимы на небольших расстояниях от источника ($z \leq 150$ мм), даже когда в профиле волны уже образовался разрыв. Это подтверждает использованное

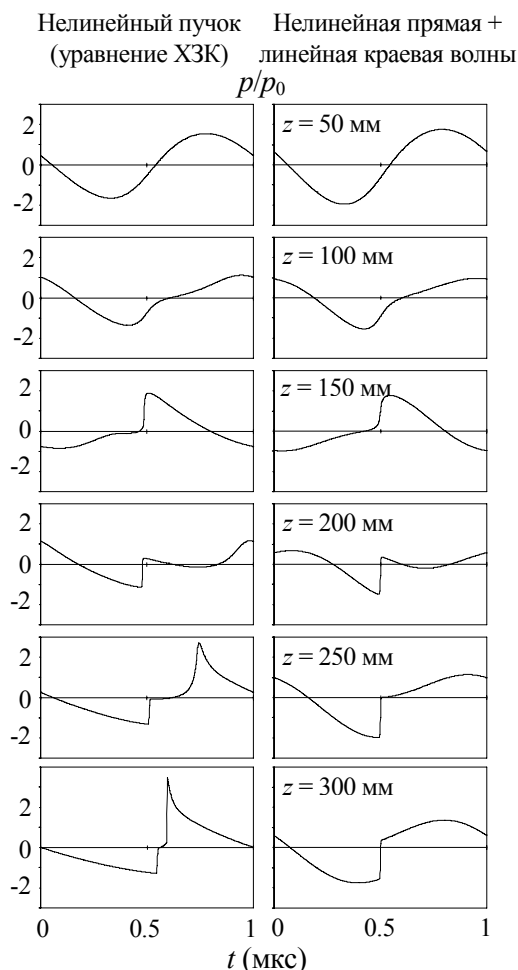


Рис. 4.6. Эволюция профиля волны на оси нелинейного пучка, рассчитанная в рамках двух моделей: прямой расчет уравнения ХЗК (слева) и суперпозиция нелинейной прямой и линейной краевой волн (4.9-4.11) (справа). Результаты двух моделей хорошо согласуются на расстояниях <250 мм.

предположение о суперпозиции прямой и краевой волн. На больших расстояниях нелинейные эффекты начинают влиять и на распространение краевой волны, и появляется отличие между результатами двух моделей, особенно в структуре фазы сжатия профиля (рис. 4.6.) Рост пикового положительного давления в «точном» решении объясняется нелинейной фокусировкой краевой волны вблизи оси пучка. Дальнейшее распространение волны уже не может рассматриваться как суперпозиция двух независимых волн, и

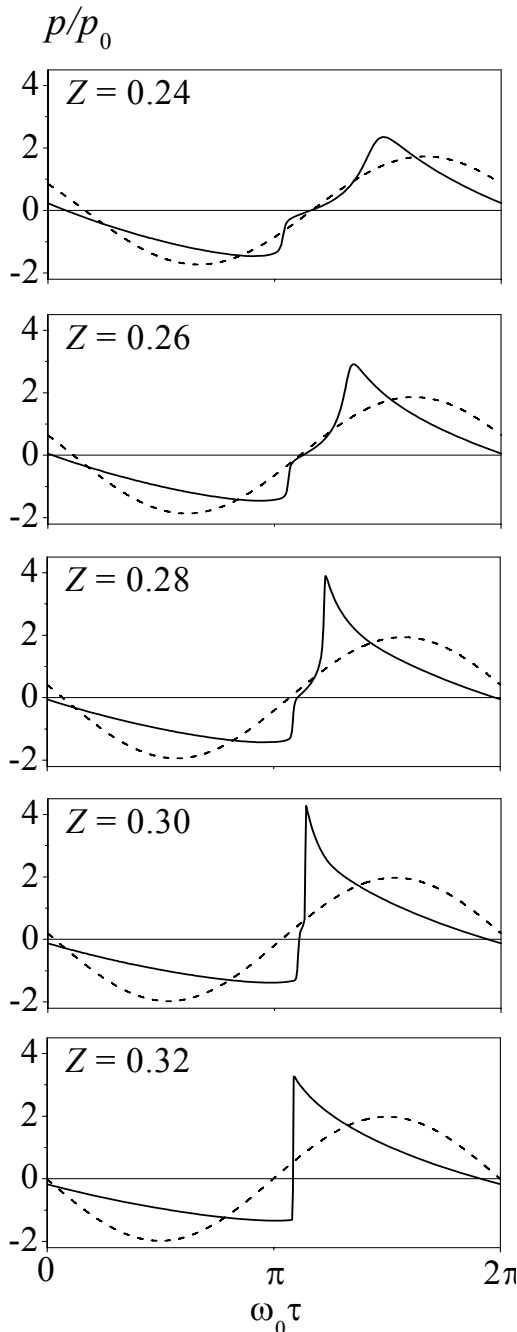


Рис. 4.7. Профили волны на оси пучка на различных расстояниях $Z = z/z_d$ от излучателя в нелинейном ($N = 4.8$, сплошные кривые) и линейном ($N = 0$, пунктирные кривые) пучках.

эволюция профиля больше похожа на нелинейную плоскую волну. Ударный фронт разрежения бежит медленнее ударного фронта сжатия, что приводит к их столкновению и образованию одного разрыва.

Эффект последовательного формирования двух разрывов проявляется лишь для максимальной амплитуды $p_0 = 14.3$ атм ($N = 10.8$), что соответствует расстоянию образования разрыва в плоской волне $z_p = 10.7$ см. В этом случае первый разрыв уже образуется внутри предпоследнего аксиального лепестка основной частоты (рис. 4.1 (а)), затем, после прохождения минимума, амплитуда первой гармоники на оси начинает вновь увеличиваться уже с другой фазой и формируется второй разрыв. При меньшей начальной амплитуде волны, например, $N = 4.8$, расстояние образования разрыва $z_n = 24$ см, т.е. уже внутри последнего аксиального лепестка, за последним минимумом основной частоты. Профиль волны на расстояниях $Z = 0.24$ и 0.26 также содержит два искаженных крутых участка, однако, в отличие от случая $N = 10.8$, разрывы еще не сформировались (рис. 4.7). Оба разрыва образуются практически одновременно внутри интервала $Z = 0.28$ и

0.30. Время задержки между разрывами мало и они быстро сталкиваются уже при $Z = 0.32$.

На рисунке 4.8 изображены зависимости нормированных пиковых давлений P_+ и P_- , размаха давления в профиле от пика до пика P_{pp} и интенсивности волны (4.10) на оси пучка для различных значений параметра нелинейности N . При линейном распространении, $N = 0$, профиль симметричен, величины P_+ , P_- и $0.5P_{pp}$

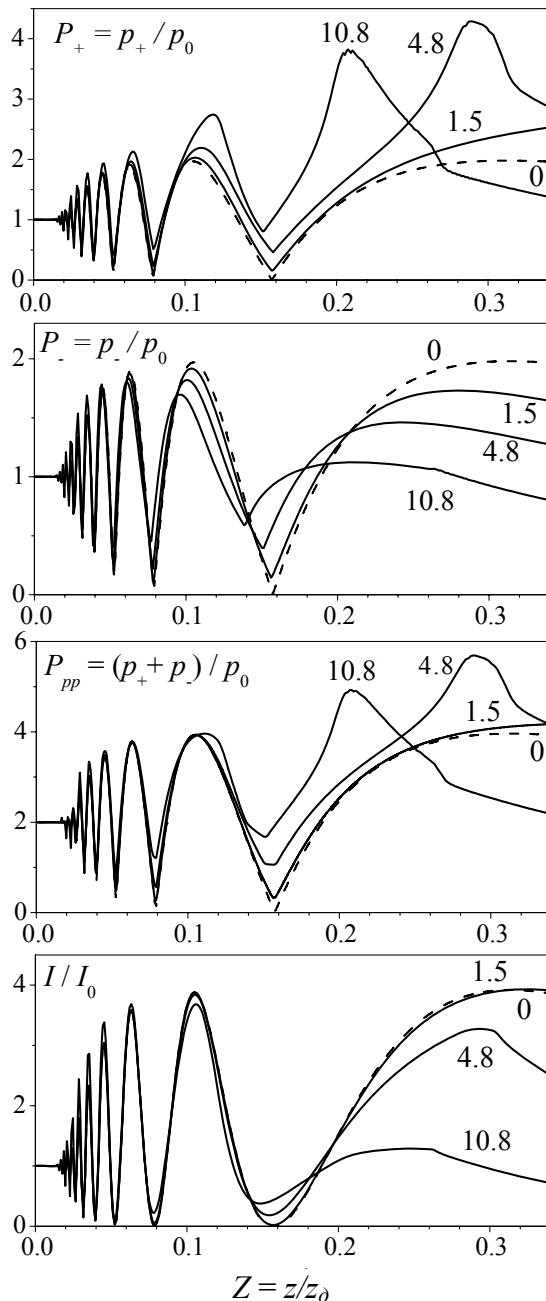


Рис. 4.8. Распределения нормированных пиковых давлений P_+ , P_- , размаха давления от пика до пика P_{pp} и интенсивности I/I_0 на оси пучка для различных значений параметра N (числа у кривых).

одинаковы (пунктирные кривые) и совпадают с осевыми распределениями амплитуды основной частоты (рис. 4.1 (а)).

Основные отличия между линейным и нелинейным распространением выражены в двух последних дифракционных лепестках. Давление в последнем минимуме P_+ , P_- и P_{pp} не достигает нуля, и положение минимума на оси смещается в сторону излучателя при увеличении его амплитуды. Нелинейно-дифракционные эффекты приводят к несимметрии профиля таким образом, что пиковое положительное давление увеличивается, а пиковое отрицательное — уменьшается по сравнению с линейным случаем. Если при слабом проявлении нелинейных эффектов, $N = 1.5$, наблюдается слабое превышение P_+ и уменьшение P_- , а величина размаха давления P_{pp} практически не изменяется, то при усилении нелинейных эффектов, $N = 4.8$ и 10.8 , различия весьма существенны. Как уже упоминалось выше, наблюдается четырехкратное превышение давления P_+ над уровнем начального давления в отличие от двукратного превышения в линейном пучке при $N = 0$. Также видно, что максимум превышения

достигается на различных расстояниях вдоль оси, соответствующих образованию острого пика второго разрыва (рис. 4.5 для $N = 10.8$ и рис. 7 для $N = 4.8$). Поведение пикового отрицательного давления меняется более плавно. Положение последних минимума и максимума P_- вдоль оси смещается в сторону излучателя, а величина максимума уменьшается с ростом параметра нелинейности N . Структура распределений для размаха давления P_{pp} примерно повторяет структуру P_+ , однако более плавно, и отличия от линейного случая выражены меньше.

Полная интенсивность волны на оси в линейном, $N = 0$, и слабо нелинейном, $N = 1.5$, пучках практически одинаковы, хотя профили волны и пиковые значения уже заметно различаются. Образование разрывов и соответствующее эффективное поглощение энергии волны при $N = 4.8$ и 10.8 приводят к уменьшению интенсивности по сравнению со случаем линейного пучка. Столкновение двух разрывов ($N = 4.8, 10.8$) приводит к интересному эффекту: излому в распределении интенсивности. Положение излома соответствует расстоянию, на котором сталкиваются два фронта (см. рис. 4.5 и 4.7). Как известно, скорость поглощения энергии волны на разрыве пропорциональна кубу его амплитуды A_p [1, 3]. Когда в профиле волны содержатся два разрыва, поглощение пропорционально сумме кубов их амплитуд, $A_{p,1}^3 + A_{p,2}^3$. Сразу после столкновения поглощение пропорционально кубу суммы амплитуд разрывов $(A_{p,1} + A_{p,2})^3$, что превышает сумму $A_{p,1}^3 + A_{p,2}^3$ и приводит к резкому увеличению поглощения. Интенсивность волны начинает быстро уменьшаться и появляется излом на зависимости интенсивности от расстояния.

Различия в пространственной структуре линейного и нелинейного пучков иллюстрируются на рис. 4.9, где приведены двумерные пространственные распределения нормированного пикового положительного давления и интенсивности волны для различных значений параметра N . Нелинейно-дифракционное превышение максимума P_+ по сравнению с двукратным превышением в линейном пучке ($N = 0$) проявляется уже при слабой нелинейности ($N = 1.5$) вблизи оси пучка в последнем дифракционном лепестке (сплошная кривая). В то же время область превышения в 1.5 раза практически такая же, как в линейном пучке. При $N = 4.8$, области превышения в 1.5 и 2 раза в последнем дифракционном лепестке становятся уже по поперечной координате и смещаются в сторону излучателя. Небольшая область двукратного превышения появляется в предпоследнем лепестке вблизи оси, и дополнительные области превышения в 1.5 раза образуются вне оси, что не наблюдалось в линейном и слабо нелинейном пучках. Наконец, при наиболее сильном проявлении нелинейных эффектов, $N = 10.8$, области

превышения вблизи оси уменьшаются по площади, формируется несколько областей превышения вне оси. Сильное нелинейное поглощение энергии волны на разрывах приводит к уменьшению пикового давления на больших расстояниях $Z > 0.25$ по сравнению с линейным и слабо нелинейным распространением.

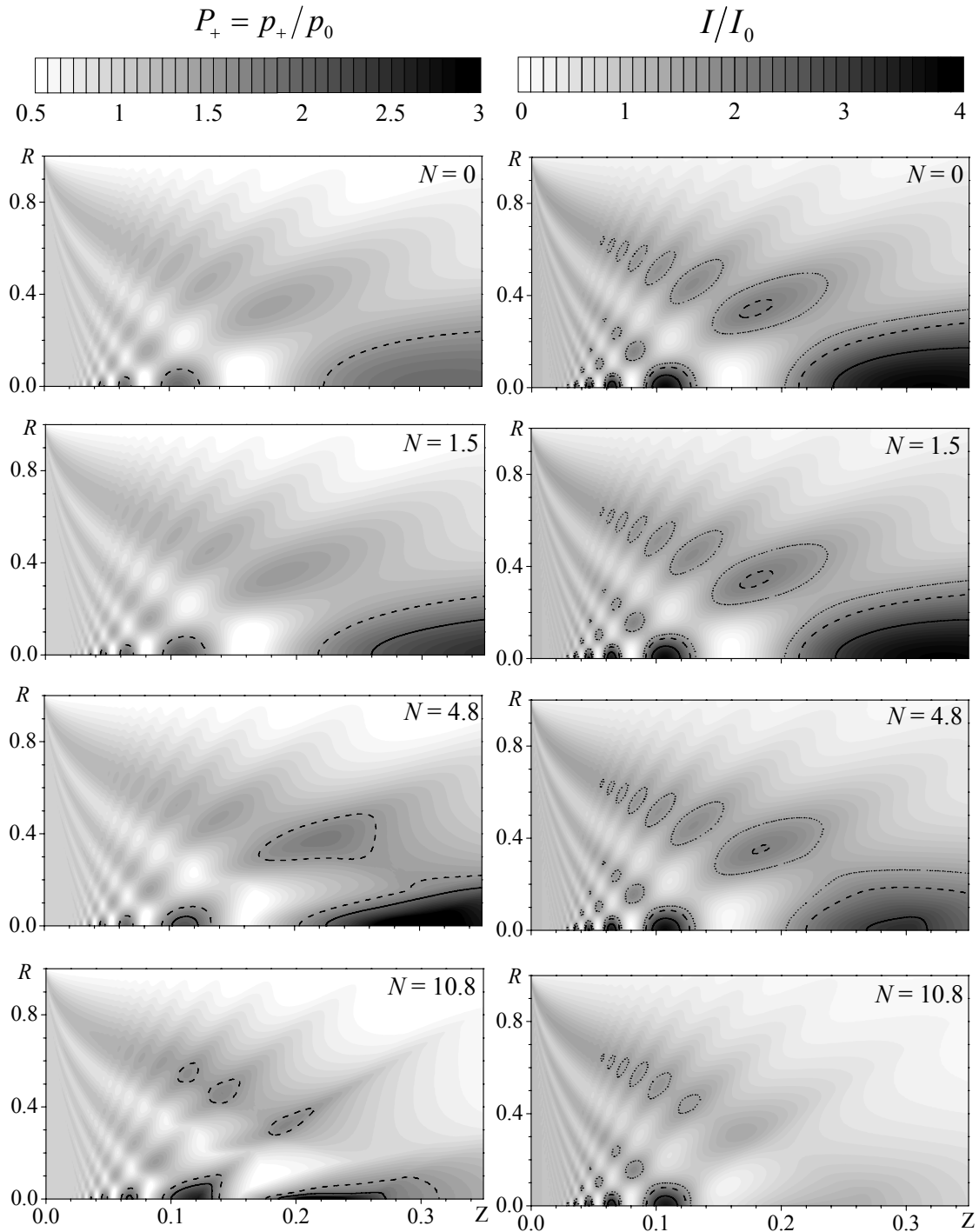


Рис. 4.8. Двумерные пространственные распределения пикового положительного давления $P_+ = p_+/p_0$ и интенсивности волны I/I_0 для различных значений параметра $N = 0, 1.5, 4.8, 10.8$. Контурсы на распределениях показывают области превышения для пикового давления в 1.5 (штриховые) и 2 (сплошные) раза по сравнению с p_0 ; для интенсивности - в 1.5 (пунктирная), 2 (штриховая) и 3 (сплошные) раза по сравнению с I_0 .

Распределение интенсивности в ближнем поле линейного пучка, $N = 0$, имеет пятнистую структуру с минимумами распределения (до нулевого уровня) и областями превышения (до 4-х раз) по сравнению с постоянным значением $I/I_0 = 1$ при распространении плоской волны. Области превышения в 1.5, 2 и 3 раза показаны на рисунках соответствующими линиями. Видно, что на расстояниях до образования разрывов, т.е. $Z < 0.28$ для $N = 4.8$ и $Z < 0.11$ для $N = 10.8$, распределения практически неотличимы для всех значений N . Поглощение на разрывах проявляется в сглаживании распределений при $N = 4.8$. При наиболее сильном проявлении нелинейных эффектов, $N = 10.8$, значение интенсивности не достигает в последнем лепестке на оси и последнем пятне вне оси даже полуторного уровня превышения.

Ясно, что, в среднем, потери энергии нелинейного пучка в присутствии разрывов будут отличны от случая плоской волны. В областях превышения нелинейные эффекты

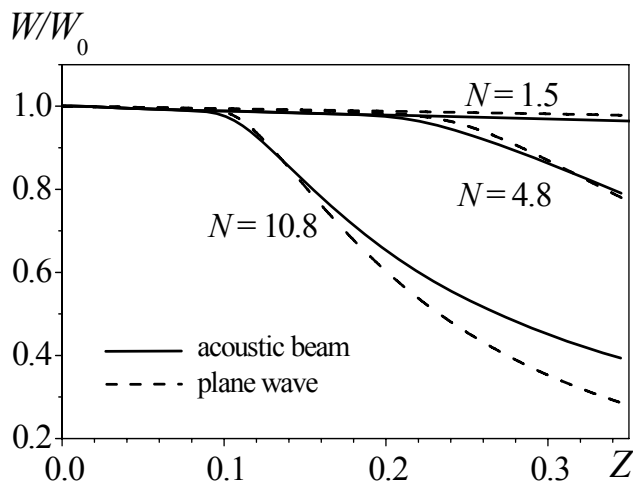


Рис. 4.10. Зависимости полной мощности пучка W/W_0 (сплошные кривые) и интенсивности плоской волны I/I_0 (штриховые кривые) от расстояния для различных значений начальной амплитуды давления $p_0 = 2, 6.4, 14.3$ атм ($N = 1.5, 4.8, 10.8$). Кривые нормированы на значения соответствующих величин при $Z = 0$.

будут сильнее, амплитуда разрывов и потери энергии будут больше. В областях минимумов, напротив, меньше. Усредненный эффект нелинейного затухания для пучка и плоской волны иллюстрируется на рис. 4.10, где показаны зависимости полной энергии (4.7) пучка (сплошные кривые) и интенсивности в плоской волне (штриховые кривые) от расстояния Z для начальных амплитуд давления $p_0 = 2, 6.4$ и 14.3 атм. Как видно, до образования разрыва (на всех расстояниях для $N = 1.5$ и на малых расстояниях для

$N = 4.8$ и 10.8) скорость уменьшения энергии волны в пучке слегка выше. Это небольшое отличие обусловлено искусственной вязкостью, которая использовалась в численном алгоритме на слое вблизи края пространственного окна по радиальной координате для того, чтобы избежать отражений от границы. Образование разрывов при $N = 4.8$ и 10.8 и начало поглощения энергии происходят в пучке на меньших расстояниях от излучателя, поскольку высокоамплитудные выбросы амплитуды волны на оси усиливают нелинейные эффекты. Полная мощность пучка, соответственно, начинает резко уменьшаться, начиная с меньших расстояний, чем интенсивность в плоской волне. На больших расстояниях,

однако, эффекты нелинейного поглощения более выражены в плоской волне, поскольку дифракционные явления сглаживают пространственную структуру пучка и замедляют образование разрыва на его периферии. Даже в случае $N = 10.8$ (рис. 4.4), на расстоянии $R = 1$ от оси пучка разрыв формируется позже и его амплитуда меньше, чем в плоской волне.

4.5. Сравнение результатов моделирования и данных эксперимента для разрывного профиля волны

Для подтверждения новых эффектов, предсказанных в моделировании, была собрана экспериментальная установка для проведения акустических измерений. Измерения также позволили уточнить параметры излучателя для определения граничных условий в моделировании. Схема установки показана на рис. 4.11. Измерения проводились при сотрудничестве с лабораторией INSERM в Лионе. Плоский круглый преобразователь с диаметром 47 мм и рабочей частотой 1.0 МГц был изготовлен из пьезокерамики с акустическим импедансом 31 МР (P762, Quartz et Silice, Франция). Его

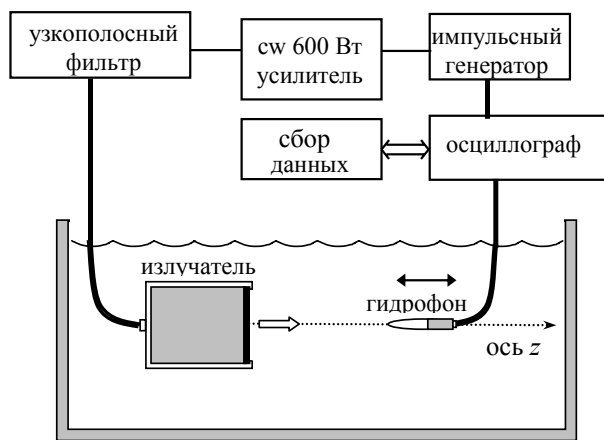


Рис. 4.11. Схема экспериментальной установки.

конструкция была аналогична представленной в деталях в работе [35]. Лицевая поверхность преобразователя была покрыта четвертьволновым согласующим слоем с импедансом 3.4 МР, тыльная нагрузка из эпоксидной смолы имела импеданс 4.5 МР. Наличие тыльной нагрузки обеспечивало подавление паразитных упругих мод колебаний, которые возникают в пьезокерамической пластине наряду с

основной толщинной модой [184, 185]. Это было необходимо, чтобы структура колебаний излучателя была максимально равномерной вдоль его поверхности и соответствовала модели идеального поршневого источника.

Излучатель помещался в бассейн с размерами 0.75x0.6x0.5-м, заполненный дегазированной дистиллированной водой. Для моделирования непрерывного режима излучения на излучатель подавался сигнал в виде длинного импульса (30 периодов) от генератора (8116А, Hewlett-Packard). Напряжение от генератора подавалось на преобразователь через усилитель (600 Вт, Ampar 1004, Prana, Франция). Чтобы уменьшить

нелинейные искажения электрического сигнала после его усиления использовался узкополосный фильтр с центральной частотой 1 МГц. Акустическое давление измерялось широкополосным калиброванным ПВДФ гидрофоном с размером активного элемента 0.3 мм (GL049, SEA, США). Форма волны записывалась во временном окне 10 мкс, начиная после 20 мкс от времени прихода начала импульса. Сигнал гидрофона усиливался с помощью широкополосного предусилителя (A17DB, SEA), для записи цифрового сигнала использовался осциллограф (Tektronix 2430A), после чего данные поступали на компьютер. Система координат x-y-z автоматизированной системы позиционирования (Micro-Contrôle, France) использовалась для перемещения гидрофона вдоль оси пучка, точность перемещения составляла 0.01 мм. Процедура нахождения оси симметрии пучка в эксперименте подробно описана в работах [35, 185].

Сигнал гидрофона обрабатывался с учетом его амплитудной и фазовой частотной характеристики, которая определялась как отношение спектров измеренного и промоделированного сигналов на достаточно большом расстоянии от излучателя, где форма волны имела пилообразную форму с одним разрывом на периоде. Полученные частотные характеристики чувствительности гидрофона представлены на рис. (4.12). Кружки соответствуют чувствительности для гармоник основной частоты 1 МГц, эти значения использовались для корректировки измеренной формы волны. Сплошные

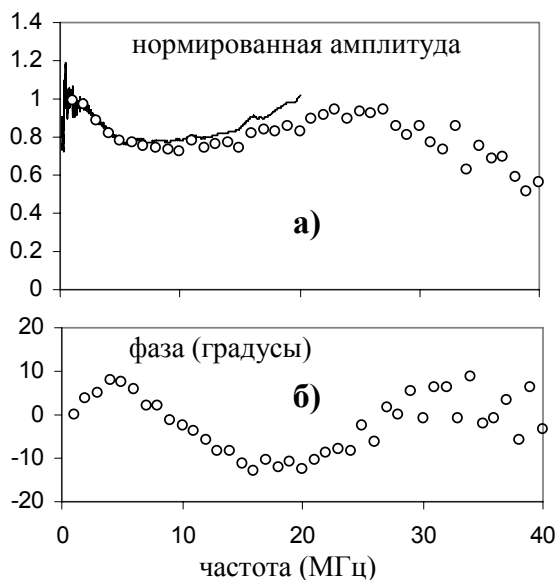


Рис. 4.12. Амплитудная (а) и фазовая (б) частотные характеристики гидрофона. Амплитудная кривая нормирована на чувствительность при 1 МГц. Сплошная кривая – данные производителя (без предусилителя), кружки – данные измерений (с предусилителем).

кривые соответствуют калибровочным данным в диапазоне от 0.2 до 20 МГц, которые были предоставлены компанией SEA. Как видно из рисунка, результаты предложенного нами метода (кружки) практически совпадают с калибровочной кривой производителя. Некоторое уменьшение чувствительности гидрофона на высоких частотах можно объяснить дополнительным поглощением, вносимым предусилителем. Амплитудная частотная характеристика, показанная на рис. (4.12), нормирована на чувствительность гидрофона при 1 МГц, которая была равна 61.7 мВ/МПа по данным производителя. Отметим, что

полученный в эксперименте частотный отклик гидрофона имеет большой разброс значений на частотах выше 25 МГц, что говорит о возможной неточности измерений на этих частотах. Однако соответствующие компоненты в спектре сигнала были невелики даже в профилях, содержащих разрывы, поэтому эта неточность не влияла существенным образом на форму профиля волны.

Параметры, необходимые в моделировании для постановки граничных условий при $z = 0$, определялись следующим образом. Круглый поршневой излучатель может быть описан тремя параметрами: частота f , радиус a , и амплитуда нормальной компоненты колебательной скорости на его поверхности u_n . При моделировании, вместо амплитуды скорости u_n , удобнее было задавать амплитуду эффективного акустического давления $p_0 = \rho c u_n$, где ρ и c_0 – равновесные значения плотности и скорости звука в среде. При линейном распространении можно выписать точное решение для акустического давления на оси пучка:

$$p = 2p_0 \left| \sin \left[\frac{\pi f}{c_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - z \right) \right] \right|, \quad (4.12)$$

где p_0 – амплитуда и z – расстояние от излучателя вдоль оси [4]. Экспериментальные значения для частоты и скорости были $f=1$ МГц и $c_0 = 1490$ м/с.

Величина эффективного радиуса излучателя, a , определялась путем сравнения измеренных распределений давления вдоль оси с аналитическим решением (4.12) для линейной волны. На рис. 4.13 показаны распределения размаха сигнала гидрофона (reacto-reak) и теоретически рассчитанной амплитуды давления на оси пучка (4.12) для источника с радиусом $a = 23.2$ мм, при котором наблюдалось наилучшее согласие расчетов и измерений. Значение радиуса a подбиралось таким образом, чтобы координата

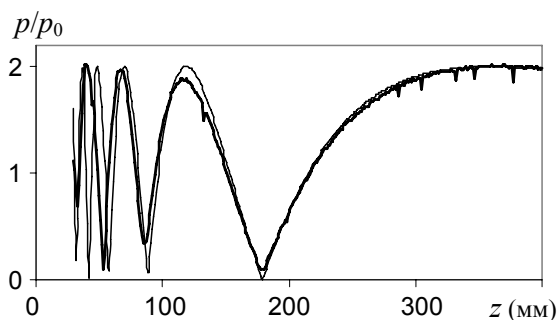


Рис. 4.13. Нормированные распределения амплитуды давления, p/p_0 , вдоль оси линейного пучка. Жирная кривая – результаты измерений, тонкая – аналитическое решение для поршневого источника с радиусом $a = 23.2$ мм.

последнего минимума в рассчитанном распределении совпадала с экспериментом. Кривые нормировались на соответствующие значения в последнем максимуме на оси пучка. Как видно из рисунка, измеренная и рассчитанная кривые практически совпадают, начиная с расстояния 60 мм от источника. Ближе к излучателю наблюдаются небольшие различия,

обусловленные конечным размером гидрофона и неидеальностью равномерного распределения скорости на излучателе в эксперименте [184, 185].

Эффективная амплитуда давления p_0 на излучателе определялась на основе сравнения абсолютных значений давления в максимуме последнего пика распределения давления на оси пучка (рис. 4.13), измеренных гидрофоном и полученных при моделировании линейного пучка, т.е. при малых уровнях возбуждения источника. Далее, при больших уровнях, амплитуда волны на излучателе увеличивалась линейно пропорционально подаваемому напряжению. Линейность зависимости амплитуды давления от напряжения проверялась путем сравнения пиковых давлений, измеренных гидрофоном на небольшом расстоянии от излучателя (40 мм), где форма волны даже на больших мощностях еще не успевала исказиться за счет эффектов нелинейного распространения. Рисунок 4.14 более подробно иллюстрирует необходимые шаги для корректного задания p_0 . На рисунке показаны профили давления, измеренные при низком (верхний ряд, $U_{\text{пик}}=13$ В peak-to-peak) и при максимально высоком (нижний ряд, $U_{\text{пик}}=516$ В peak-to-peak) уровнях напряжения, подаваемого на излучатель.

Профили справа соответствуют измерениям в последнем максимуме поля на оси, $z = 370$ мм. При низком напряжении (ряд сверху) форма волны гармоническая, поэтому при известной чувствительности гидрофона и известном решении на оси пучка в модели можно определить эффективную величину амплитуды давления на источнике p_0 . При высоком напряжении (ряд внизу) форма волны в последнем максимуме сильно искажена, поэтому линейное решение нельзя использовать для определения p_0 .

Профили слева соответствуют измерениям при $z = 40$ мм. Как видно, даже при максимальном напряжении на излучателе форма волны остается гармонической. Тогда

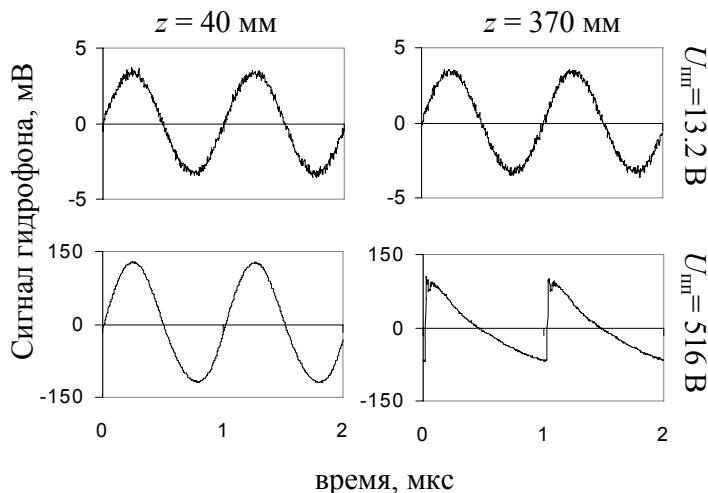


Рис. 4.14. Профили волны, измеренные на расстоянии 40 мм и 370 мм, при двух уровнях напряжения (peak-to-peak), подаваемого на излучатель $U_{\text{пик}}= 13.2$ и 516 В.

отношение между амплитудами сигналов, измеренными при разных уровнях напряжений, можно считать равным соответствующему отношению давлений на излучателе и, таким образом, определить p_0 для больших напряжений. Подобные измерения были проведены для различных напряжений и получено, что величина p_0 была

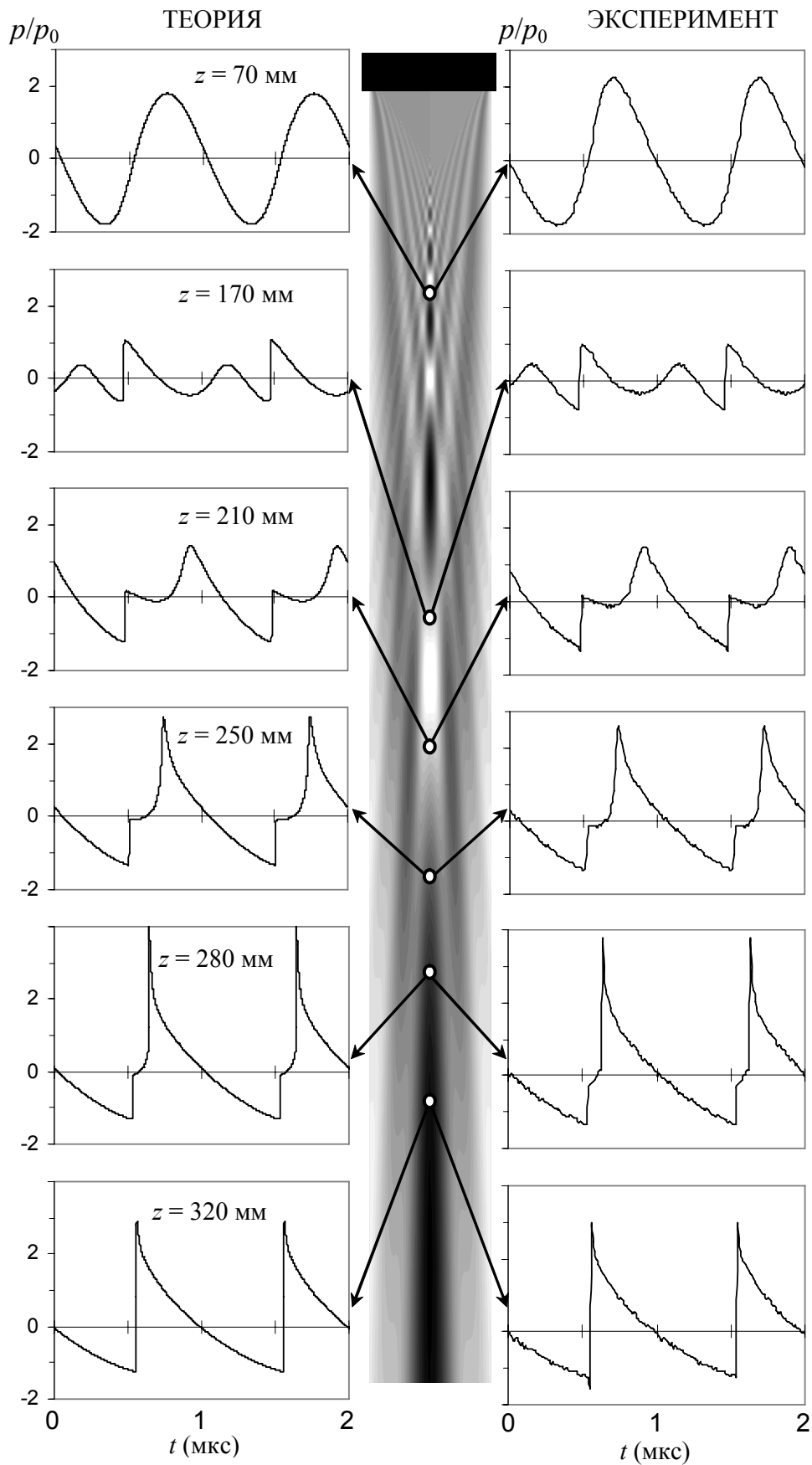


Рис. 4.15. Сравнение рассчитанных (слева) и измеренных (справа) профилей волны на оси пучка на различных расстояниях от излучателя. В середине показаны 2D распределения амплитуды давления в линейном пучке (темные области соответствуют более высоким давлениям).

пропорциональна напряжению во всем диапазоне используемых уровней. Максимальное напряжение $U_{\text{max}}=516$ В соответствовало амплитуде давления $p_0 = 1.01$ МПа.

Измерения и численный эксперимент проводились для различных значений амплитуды давления p_0 на излучателе. Для давлений $p_0 > 0.5$ МПа, на оси пучка наблюдалось образование двух разрывов на периоде волны за последним минимумом

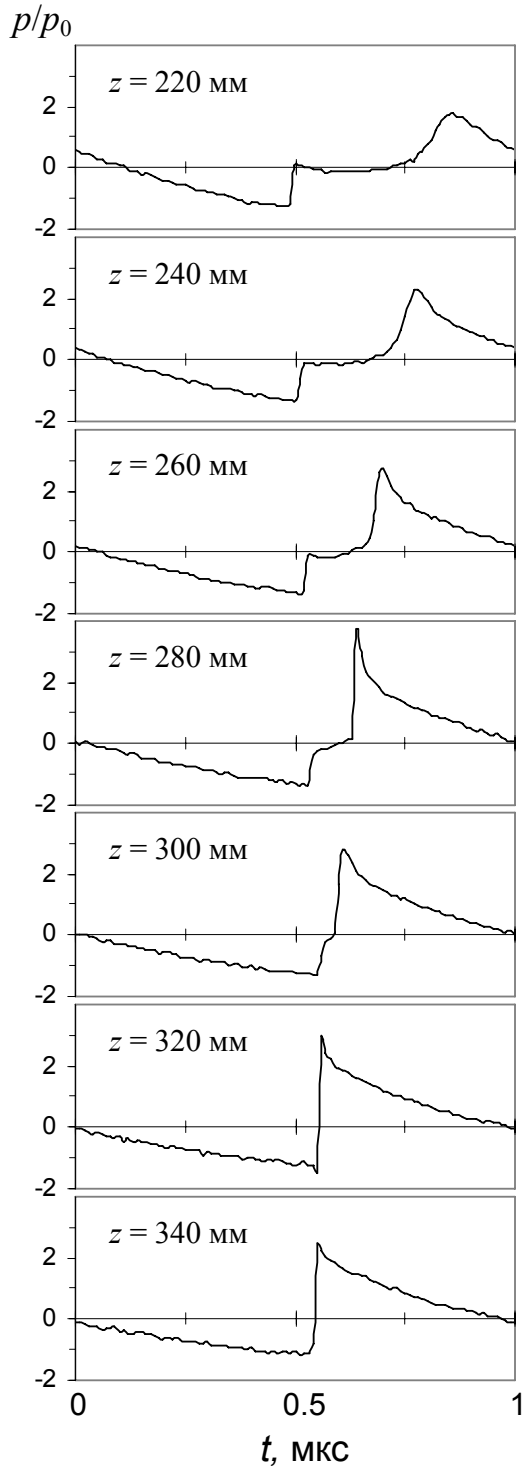


Рис. 16. Профили волны, измеренные на оси пучка, иллюстрирующие процесс взаимодействия двух разрывов.

давления на основной частоте. На рисунке 4.15 представлены результаты измерений и моделирования профиля нелинейной волны на различных расстояниях от излучателя при максимальной начальной амплитуде $p_0 = 1.01$ МПа, когда эффект был выражен наиболее сильно. Профили волны показаны внутри временного окна 2 мкс, т.е. для двух периодов основной частоты 1 МГц. Для иллюстрации сложной пространственной структуры ближнего поля в середине рисунка показаны двумерные распределения амплитуды давления, рассчитанные для линейного распространения волны. Кружками помечены расстояния, на которых проводились измерения. Как видно из рисунка, профили волны, полученные в реальном физическом и численном экспериментах, практически неотличимы. На относительно малом расстоянии $z = 70$ мм профиль волны искажен аналогично известному случаю распространения плоской волны. На больших расстояниях искажение становится существенно иным. Так, к примеру, при $z = 170$ мм каждый из периодов волны содержит разрыв, однако, в отличие от плоской волны, в профиле наблюдается второй локальный максимум, т.е. форма волны не является монотонной между разрывами. Это явление можно

объяснить тем, что на расстоянии $z = 170$ мм в линейном пучке амплитуда волны основной частоты близка к нулю (рис. 4.8), амплитуда второй гармоники превышает амплитуду первой, и волна выглядит как удвоенная по частоте. На больших расстояниях величина плавного локального максимума между разрывами возрастает ($z = 210$ мм) и образуется второй разрыв на каждом из периодов ($z = 250$ мм). При дальнейшем распространении волны разрывы сближаются, происходит их столкновение и далее существует только один разрыв ($z = 280$ и 320 мм). Процесс формирования второго разрыва и последующего взаимодействия двух разрывов иллюстрируется на рис. 4.16. Первый разрыв формируется на расстоянии примерно $z = 130$ мм; далее, как показано на рисунке, разрыв расположен в фазе разрежения ($z = 220$ мм) и поэтому его скорость распространения медленнее, чем равновесная скорость звука, т.е. в сопровождающей системе координат разрыв смещается слева направо. Пик давления в фазе сжатия увеличивается по величине и постепенно формирует второй ударный фронт ($z = 260$ мм), который распространяется быстрее скорости звука и смещается справа налево (рис. 4.5, $z = 260-300$ мм) в соответствии со свойствами плоских нелинейных волн. Поскольку второй разрыв распространяется быстрее первого ($z = 260-300$ мм), расстояние между ними уменьшается, и разрывы сталкиваются ($z = 320$ мм). После столкновения остается лишь один разрыв на периоде волны, который распространяется со сверхзвуковой скоростью ($z = 320$ и 340 мм). При этом форма волны остается несимметричной: фаза сжатия больше по амплитуде и короче по длительности, чем фаза разрежения, что характерно для дифрагирующих волновых пучков.

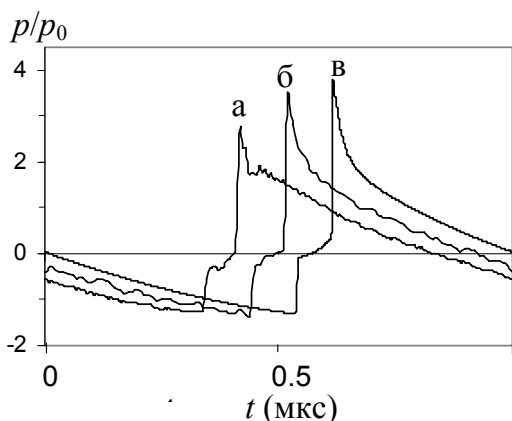


Рис. 4.17. Эффект нелинейного увеличения положительного пикового давления. а) сигнал гидрофона б) скорректированный сигнал гидрофона с использованием частотного отклика в) численно рассчитанный. Профили (а) и (б) смещены внутри окна для удобства сравнения.

Как было показано ранее, эффект резкого увеличения пикового положительного давления сильно локализован как во времени ($0.05-0.1$ мкс, $z = 280$ мм на рис. 4.5) и в пространстве по поперечным координатам (0.5 мм на рис. 4.8). Экспериментальное наблюдение данного эффекта поэтому возможно при использовании широкополосного гидрофона с малым размером активной области. Кроме того, необходимо точное позиционирование гидрофона на оси пучка.

На рис. 4.17 показано влияние ширины частотной характеристики

гидрофона на искажение формы нелинейного сигнала. Измеренный сигнал гидрофона (а) дает более низкий пик по сравнению с сигналом после амплитудной и фазовой коррекции с помощью рассчитанной частотной характеристики (рис. 4.12) гидрофона (б). Численно рассчитанная форма волны (в) хорошо согласуется с обработанным сигналом. Для большей наглядности экспериментальные профили смещены внутри окна на 0.4 мкс (а) и 0.2 мкс (б). Видно, что без коррекции формы измеренного сигнала пиковые давления в профиле волны занижены. Нелинейно-дифракционный эффект, в соответствии с которым пиковое давление может на 100% превышать линейные предсказания, является важным, особенно для оценок уровней безопасности воздействия волны на среду распространения.

4.6. Заключительные замечания

В данной главе исследованы нелинейно-дифракционные эффекты в ближнем поле круглого поршневого преобразователя. Показано, что дифракция играет важную роль в процессе образования ударных фронтов в профиле волны. Используя методы численного моделирования, предсказаны и затем подтверждены экспериментально новые эффекты формирования двух разрывов на периоде волны, дальнейшее слияние разрывов и формирование пилообразного профиля. Такая нелинейная эволюция волны в ближнем поле пучка существенно отличается от случая плоской волны и объясняется интерференцией прямой и краевой волн. Также предсказано двукратное увеличение уровня пикового давления в поле нелинейной разрывной волны по сравнению с максимальной величиной давления в ближнем поле линейного пучка. Исследовано уменьшение полной энергии пучка за счет поглощения на разрывах по сравнению со случаем распространения плоской волны. Показано, что в пучке разрывных волн уменьшение энергии акустического поля начинается на меньших расстояниях, но уменьшается медленнее на больших расстояниях по сравнению с плоской волной.

Формирование двух разрывов на периоде волны не позволило напрямую использовать в данной задаче развитый ранее асимптотический метод описания полей разрывных волн при использовании небольшого числа гармоник, поскольку в его основе лежит предположение, что на периоде волны может присутствовать лишь один разрывной фронт [186]. Несмотря на то, что была показана принципиальная возможность обобщения асимптотического метода на случай присутствия двух разрывов на периоде волны (§3.5), использование такой модификации для дифрагирующего пучка, в различных областях которого реализуется ситуация либо без разрыва, либо с одним разрывом, либо, возможно и с большим количеством разрывов на периоде волны, сделало бы алгоритм неразумно

громоздким для практического применения. Необходимо было бы обеспечить устранение неустойчивости при слиянии разрывов и «сшивке» двух асимптотических решений. В этой ситуации более прозрачной в плане технической реализации представлялась разработка и оптимизация прямого, без упрощающих предположений, спектрального алгоритма расчета разрывных решений уравнения ХЗК. Разработанный в данной главе для плоского пучка и подтвержденный в измерениях спектральный алгоритм послужил в дальнейшем основой для дальнейшего развития численных методов нелинейной акустики звуковых пучков и инструментом для решения многих практически важных задач в области медицинской акустики и аэроакустики.

Развитый в данной главе комплексный метод исследования нелинейных ультразвуковых полей, создаваемых современными мощными преобразователями ультразвука, показал эффективность сочетания взаимодополняющих друг друга численного и физического экспериментов. Детальные измерения линейного поля при малых амплитудах излучателя позволили определить граничные условия для численной модели таким образом, что результаты моделирования с высокой точностью соответствовали экспериментальным данным. Далее, расчеты нелинейных полей в широком диапазоне амплитуд источника позволили выявить основные физические эффекты, которые были пропущены в эксперименте вследствие ограничений измерительных методов и трудоемкости измерений. На основе численных решений также выявлены ограничивающие факторы в измерениях, которые могут искажать реальные характеристики поля. И, наконец, предсказания моделирования в режиме развитых разрывов были подтверждены в тестовых измерениях для наиболее интересных условий эксперимента на примере характеристики поля мощного плоского излучателя. Этот метод в дальнейшем получил развитие и с успехом используется для исследования полей мощных фокусирующих излучателей терапевтического ультразвука (гл. 6).

5

Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусирующих излучателей диагностического ультразвука

5.1. Вводные замечания. Нелинейные методы современной ультразвуковой медицинской диагностики и проблема калибровки высокоамплитудных полей диагностических датчиков

Сегодняшний интерес к исследованию трехмерных импульсных пучков во многом связан с успешным внедрением в медицинской диагностике нелинейных методов визуализации биологических тканей [187]. В этой области существует два основных метода. Первый из них основан на использовании так называемых контрастных агентов – микропузырьков газа в оболочке, нелинейный отклик которых при облучении ультразвуком содержит гармоники диагностического импульса [188]. Принцип построения изображения здесь основан на линейности распространения ультразвука в ткани и нелинейного рассеяния на сосредоточенных в кровеносных сосудах микропузырьках. При разработке этого метода было замечено, что уровень регистрируемой второй гармоники превышает ожидаемый. Как оказалось, это было связано с генерацией высших гармоник за счет нелинейного распространения импульса в ткани от излучателя к фокусу. Классический эффект нелинейной акустики, замеченный вначале как артефакт другого приложения, получил позднее быстрое развитие, особенно в ультразвуковой диагностике сердечных заболеваний у проблемных пациентов с повышенным весом [189].

Параллельно стали изучаться особенности формирования второй гармоники в нелинейных импульсных полях. При этом возникла необходимость обобщения численных алгоритмов описания нелинейных импульсных пучков, которые были развиты к тому времени лишь для аксиально-симметричной геометрии [190, 37, 38]. Дело в том, что излучатели, используемые в диагностических сканерах, имеют, как правило, прямоугольную форму с возможностью изменять фокусное расстояние в одной из плоскостей излучателя путем введения соответствующей временной задержки между элементами решетки. В другой плоскости фокусировка обычно создается с помощью

постоянной линзы [10, 191]. Исследование импульсных полей, создаваемых такими источниками, представляет несомненный интерес для более глубокого понимания особенностей, обусловленных сложной пространственной геометрией поля, и для оптимизации методов нелинейного звуковидения. Моделирование нелинейных ультразвуковых пучков, создаваемых прямоугольными излучателями, используется также организациями по контролю и сертификации медицинского оборудования, например управлением по контролю за продуктами и лекарствами США (FDA), для оценки параметров излучения ультразвуковых диагностических машин [192]. Такие измерения обычно проводятся в воде, где из-за малого поглощения нелинейные эффекты становятся ярко выраженными.

Расчет нелинейно-дифракционных эффектов в импульсных звуковых пучках является достаточно сложной задачей, и возможности аналитических методов здесь сильно ограничены. В большинстве работ используется обобщение нелинейного параболического уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК). В этом случае аксиально-симметричных полей имеется лишь одна поперечная координата (радиальная), что позволяет существенно сократить время расчетов и необходимые ресурсы оперативной памяти. Отметим, что случай сильно фокусированных мощных импульсов в условиях аксиальной симметрии исследовался также с использованием интеграла Рэлея [36]. Задачи, связанные с описанием нелинейных акустических пучков без аксиальной симметрии, были исследованы гораздо менее полно. Основные результаты здесь связаны с описанием полей, создаваемых прямоугольными излучателями, работающими в непрерывном режиме. В этом случае при слабом проявлении нелинейных эффектов, использование спектрального подхода позволяет численно решать задачу для небольшого числа гармоник исходного гармонического сигнала [193 - 196]. Задача описания импульсных полей является более сложной с точки зрения численного моделирования, поскольку требует гораздо больших компьютерных ресурсов даже при описании линейных пучков. Стоит также отметить, что для импульсных полей, при моделировании которых обычно используется временной подход, отдельной проблемой является описание произвольного частотно-зависимого поглощения, учет которого связан в общем случае с необходимостью решения интегро-дифференциального уравнения и требует специальных методов. В данной части диссертации впервые была численно решена трехмерная задача и исследованы особенности фокусировки нелинейных импульсов в биологической ткани с линейным по частоте законом поглощения; близкий алгоритм чуть позже был разработан в работе [197]. Результаты, полученные в данной главе, опубликованы в работах [192, 198 - 202].

5.2. Постановка задачи для численного моделирования

В данной части главы ставится задача для численного моделирования трехмерных импульсных акустических пучков в нелинейных средах с произвольным частотным законом поглощения. Предлагаемая модель и развитый алгоритм, описание которого дано в приложении 1, используются для исследования особенностей временной и пространственной структуры фокусированных акустических полей, создаваемых медицинскими диагностическими преобразователями в режимах построения изображения по второй гармонике. Исследуемый излучатель является фазовой решеткой с фиксированным фокусным расстоянием F_y в одной плоскости и переменным фокусным расстоянием F_x в другой плоскости, что достигается путем введения соответствующего фазового сдвига между элементами решетки. Геометрия задачи приведена на рис. 5.1.

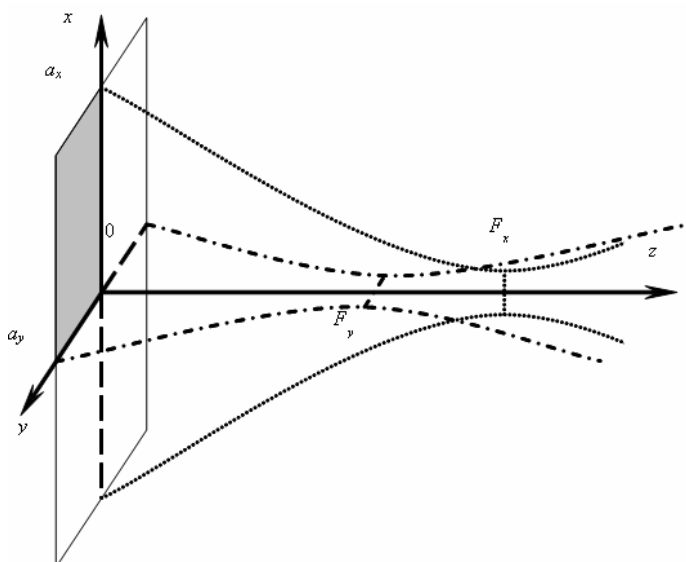


Рис. 5.1. Геометрия задачи. Источник фокусированного ультразвука задан на плоскости xu при $z = 0$. В плоскости сканирования xz фокус F_x может перемещаться вдоль оси z , а в плоскости yz положение фокуса F_y фиксировано.

Численная модель основана на решении уравнения ХЗК, модифицированном для случая произвольной частотной зависимости коэффициента поглощения волны в среде.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \tilde{L}(p) \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (5.1)$$

Диссипативные свойства среды в уравнении (5.1) задаются линейным оператором $\tilde{L}(p)$ [132, 203]. Указанное уравнение может быть использовано для описания распространения звука в биологической ткани. Для численного моделирования уравнение (5.1) удобно переписать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - L(P) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\theta} \left(\frac{1}{G_x} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{f_{xy}}{G_y} \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} \right) d\theta'. \quad (5.2)$$

Здесь $P = p/p_0$ – акустическое давление, нормированное на исходную амплитуду p_0 , $\sigma = z/F_x$ – координата вдоль оси пучка, нормированная на фокусное расстояние в плоскости сканирования, $X = x/a_x$ – поперечная координата в плоскости сканирования zx и $Y = y/a_y$ – перпендикулярная ей поперечная координата, нормированные на соответствующие полуапертуры источника a_x и a_y (рис. 5.1), $\theta = 2\pi f_0(t - z/c_0)$ – время в бегущей системе координат, f_0 – основная частота сигнала, c_0 – скорость звука, $L(P) = \tilde{L}(p) \cdot F_x/p_0$. Модель описывается пятью безразмерными параметрами:

$$N = \frac{F_x 2\pi f_0 \varepsilon p_0}{c_0^3 \rho_0}, \quad G_{x,y} = \frac{\pi f_0 a_{x,y}^2}{c_0 F_{x,y}}, \quad A = \alpha_0 F_x \quad \text{и} \quad f_{xy} = \frac{F_x}{F_y}. \quad (5.3)$$

Нелинейный параметр N – это отношение фокальной длины в плоскости сканирования к длине образования разрыва в плоской гармонической волне амплитуды p_0 , G_x и G_y – параметры линейного усиления в фокусах плоскостей zx и zy , A – параметр поглощения, α_0 – коэффициент поглощения на основной частоте, f_{xy} – отношение фокусных расстояний в плоскости сканирования и перпендикулярной ей плоскости.

Для большинства мягких тканей зависимость коэффициента поглощения от частоты близка к линейной, в отличие от квадратичного по частоте поглощения в классических жидкостях, обусловленного процессами вязкости и теплопроводности [6]. Однако в большинстве предшествующих работ по нелинейному моделированию импульсных ультразвуковых пучков медицинских датчиков для упрощения расчетов использовался квадратичный закон поглощения [49, 187, 38]. Чтобы выяснить, как дифрагирующий импульс «чувствует» конкретный вид закона поглощения, в настоящей работе потери акустической энергии в среде моделировались с использованием как квадратичной, так и линейной зависимости коэффициента поглощения от частоты (рис. 5.2):

$$\alpha(\tilde{f} = f/f_0) = \alpha_0 (\tilde{f})^\eta, \quad \eta = 1, 2. \quad (5.4)$$

Для линейного закона ($\eta = 1$) в модели учитывалось также влияние дисперсии скорости звука:

$$\Delta c(\tilde{f}) = c(f) - c(f_0) = \alpha_0 c_0^2 \ln(\tilde{f}) / \pi^2 f_0, \quad (5.5)$$

которая рассчитывалась по локальным дисперсионным соотношениям [6, 156]. Здесь для удобства дальнейших спектральных преобразований введена безразмерная частота $\tilde{f} = f/f_0$, измеряемая в единицах основной частоты.

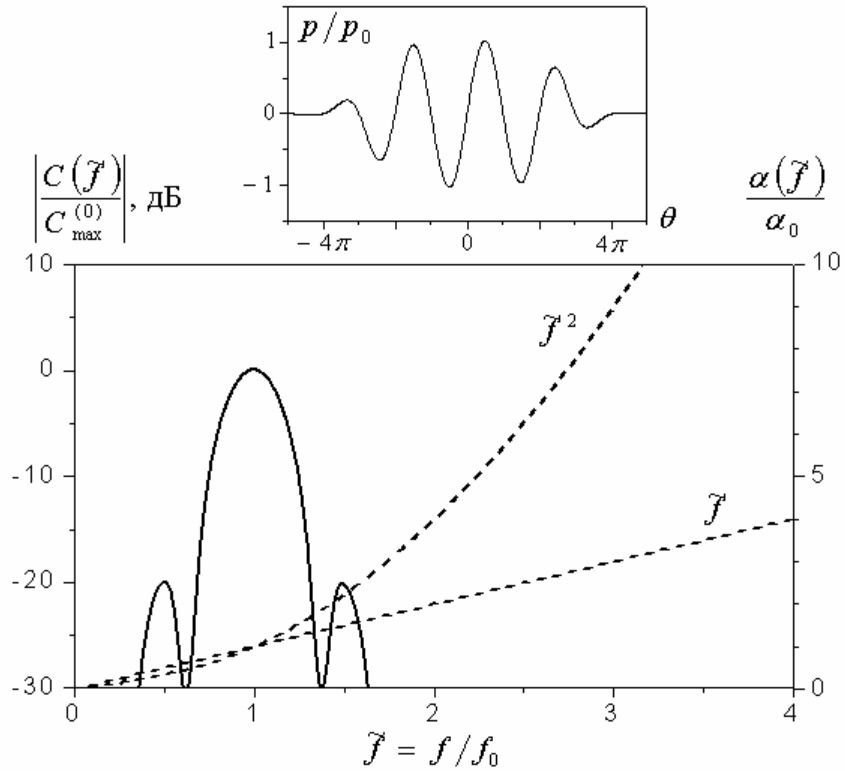


Рис. 5.2. Профиль исходного импульса $p(\sigma = 0, \theta)/p_0$ на поверхности излучателя (верхний график) и его спектр $20\log\left(\left|C(\tilde{f})/C_{\max}^{(0)}\right|\right)$ (нижний график). Штриховыми кривыми изображены линейная и квадратичная зависимости коэффициента поглощения от частоты.

Исходный профиль акустической волны в безразмерном виде запишем в виде:

$$V(\theta) = \exp\left[-(\theta/N_c\pi)^4\right] \sin \theta. \quad (5.6)$$

В выписанной гипергауссовой огибающей число $N_c = 3$ равно количеству периодов в импульсе (рис. 5.2). Поскольку далее при численном моделировании будут рассматриваться случаи перемещения фокуса F_x в плоскости сканирования лишь вдоль оси z , то излучаемое поле является симметричным относительно плоскостей xz и yz . Такая симметрия задачи позволяет провести моделирование только для одной четверти пространства: $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq Y \leq 1$, что в четыре раза сокращает время расчетов и объем необходимой оперативной памяти. Нужно заметить, что поля без какой-либо симметрии также могут быть рассчитаны с помощью представленного алгоритма.

Граничное условие при $\sigma = 0$ и профиля (5.6) можно записать следующим образом:

$$P(\sigma = 0, \theta, X, Y) = V(\theta + G_x X^2 + G_y Y^2) H(1 - X) H(1 - Y), \quad (5.7)$$

где H – функция Хевисайда. Отметим, что при таком описании дискретная структура решетки аппроксимируется непрерывным распределением амплитуды и фазы вдоль поверхности излучателя.

Следует отметить, что, используя свойства симметрии уравнения (5.2) относительно поворота системы координат, построенные решения при положении фокуса F_x вдоль координаты σ для граничных условий (5.7) легко обобщаются для случаев смещения фокуса от направления σ (поворота оси излучателя в плоскости сканирования): если $P(\sigma, \theta, X, Y)$ есть решение уравнения (5.2) при положении фокусов на оси излучателя, то:

$$P\left(\sigma, \theta - 2\lambda X + \frac{\lambda^2}{G_x} \sigma, X - \frac{\lambda}{G_x} \sigma, Y\right), \quad (5.8)$$

также будет решением [204], в чем можно убедиться прямой подстановкой выражения (5.8) в уравнение (5.2). Таким образом, численное интегрирование можно проводить для более простых симметричных случаев (5.7) и далее с помощью преобразования (5.8) получить целый класс новых решений. Безразмерный параметр λ в (5.8) пропорционален углу поворота α оси излучателя: $\lambda = \alpha(\pi f_0 a_x / c_0)$. Этот результат является точным в рамках применимости параболического уравнения ХЗ, т.е. при малых углах α , а также при условии, что фаза изменяется непрерывно вдоль координаты X . Для реальных диагностических решеток, в которых фаза изменяется дискретным образом от элемента к элементу, использование преобразования (5.8) будет приводить лишь к приближенным решениям.

Уравнение (5.2) решалось численно. Был разработан новый разностный алгоритм, детали которого приведены в приложении 5. Для учета произвольной зависимости коэффициента поглощения и дисперсии скорости звука от частоты использовалась комбинация временного и спектрального представлений решения.

5.3. Результаты моделирования, сравнение с экспериментом

В данной работе моделирование нелинейного импульсного поля проводилось для фазовой решетки марки Р4-2, используемой в ультразвуковой системе Philips HDI-5000 в режиме визуализации на второй гармонике [187, 197]. Как отмечалось ранее, $f_0 = 1.55$ МГц, $2a_x = 20.16$ мм, $2a_y = 13$ мм, F_x изменяется от 60 до 120 мм; $F_y = 80$ мм является фиксированным. Максимальное давление на преобразователе $p_0 = 0.45$ МПа, плотность биоткани $\rho_0 = 1000$ кг/м³, скорость звука $c_0 = 1540$ м/с, коэффициент нелинейности $\varepsilon = 5$ и коэффициент поглощения в ткани составляет 0.3 дБ/см/МГц. Данным характеристикам излучателя и среды соответствуют следующие безразмерные параметры в уравнении (5.2) при $F_x = 80$ мм: $G_x = 4.02$, $G_y = 1.65$, $f_{xy} = 1$, $A = 0.43$, и $N = 0.48$.

Моделирование проводилось при следующих параметрах численной схемы (см. приложение 1): временное окно $\theta_{min} = -40$ и $\theta_{max} = 60$ при 128 отсчетах на периоде сигнала 2π , что дает общее количество точек по времени $M_\theta = 2048$ и временной шаг $h_\theta = 0.05$; пространственное окно $X_{max} = 3.8$ при 85 отсчетах на половине апертуры излучателя ($X = 1$), т.е. общее количество узлов $M_X = 324$ и шаг $h_X = 0.012$; $Y_{max} = 4.8$ при 55 интервалах на половине апертуры ($Y = 1$), $M_Y = 264$ и шаг $h_Y = 0.018$. Абсолютно неявная схема с шагом $\Delta\sigma = 0.5 \cdot 10^{-3}$ использовалась на расстояниях $\sigma < 0.1$, продольно-поперечная – с шагом $\Delta\sigma = 2.0 \cdot 10^{-3}$ при $\sigma > 0.1$. Окончательные параметры расчета, приведенные выше, выбирались с помощью следующей методики: относительная разница в получаемых решениях при увеличении шагов сетки в два раза составляла не более 4% для всех интересующих нас величин: профиля и спектра сигнала, пространственных распределений амплитуд первой и второй гармоник. Наиболее чувствительна система была к количеству временных шагов на периоде сигнала.

Рассмотрим теперь полученные результаты моделирования, иллюстрирующие основные особенности генерации высших гармоник в ткани коротким импульсным сигналом, особенности пространственной структуры первых двух гармоник при различных фокусных расстояниях в плоскости сканирования излучателя, а также различные нелинейные режимы фокусировки [187], использующиеся для улучшения качества изображения диагностического ультразвука.

Влияние частотного закона поглощения на нелинейное искажение профиля волны и на эффективность генерации гармоник на оси пучка $X = Y = 0$ показано на рис. 5.3. Сплошные линии соответствуют результатам для среды с линейной зависимостью коэффициента поглощения от частоты, а пунктирные линии - с квадратичной. Фокусные расстояния в плоскостях xz и yz совпадали $F_x = F_y = 80$ мм. На верхнем графике рис. 5.3(а) приведены зависимости амплитуд первой $|C_1| = |C(\tilde{f} = 1)|$ и второй $|C_2| = |C(\tilde{f} = 2)|$ гармоник от расстояния z вдоль оси пучка, на нижних графиках рис. 5.3(б) и (в) показаны профили и спектры сигналов на расстоянии $z = 64$ мм ($\sigma = 0.8$), соответствующем максимуму второй гармоники. Поскольку величина поглощения на основной частоте были одинаковы для двух различных законов поглощения (рис. 5.1), то распределения амплитуд первой гармоники для обоих законов поглощения (рис. 5.2 (а)) оказались практически совпадающими. Уменьшение амплитуды $|C_1|$ для линейного по частоте поглощения обусловлено более эффективным каскадным переходом энергии волны вверх по спектру при более слабом поглощении высших гармоник [132].

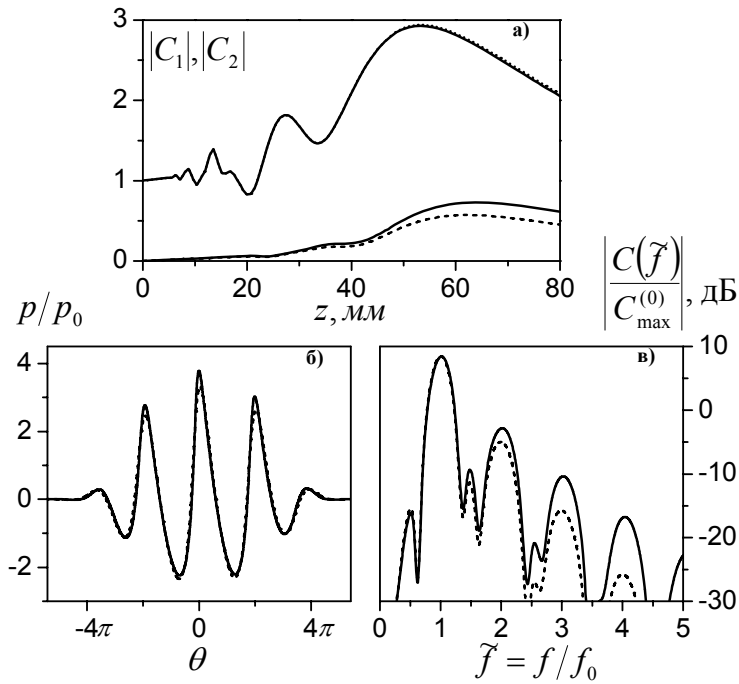


Рис. 5.3. Зависимости амплитуд первой и второй гармоник от расстояния вдоль оси пучка z (верхний график); профили и спектры волны, рассчитанные на расстоянии $z = 64$ мм, для линейной (сплошные линии) и квадратичной (пунктирные линии) зависимостей поглощения от частоты. Фокусные расстояния $F_x = F_y = 80$ мм.

Отличия в результатах для амплитуды второй гармоники $|C_2|$ более заметны: для линейного по частоте поглощения величина $|C_2|$ в фокальной области на 20% больше, чем для квадратичного, и отличие между ними увеличивается с расстоянием за счет разницы в величине соответствующих коэффициентов поглощения на удвоенной частоте. Более эффективная генерация и меньшее поглощение высших гармоник для линейного по частоте закона проявляется в профиле и спектре сигнала. Заметны различия в крутизне фронта и асимметрии профиля импульса (рис. 5.3(б)). Разница в амплитуде спектральных линий увеличивается для более высоких гармоник (рис. 5.3(в)). Таким образом, для предсказания структуры поля гармоник нелинейного импульсного поля выбор соответствующей модели поглощения является важным, особенно, если высшие гармоники используются для формирования изображения (как, например, в обсуждаемом ниже методе амплитудной модуляции). Результаты для линейного по частоте поглощения, приведенные рис. 5.3, были получены без учета дисперсии скорости звука (5.5). Моделирование проводилось также с учетом дисперсии, однако полученные результаты были практически неотличимы, т.е. влияние дисперсии было пренебрежимо малым. Дальнейшие результаты, представленные в данной работе, получены для линейного по частоте поглощения, характерного для большинства мягких биологических тканей, и без учета дисперсии.

Особенности нелинейного поля второй гармоники (рис. 5.3 (а)), иллюстрируют преимущества ее использования для построения изображения по сравнению с основной частотой. Как видно, распределение второй гармоники существенно более плавное, чем распределение основной частоты, для которой характерно изрезанное

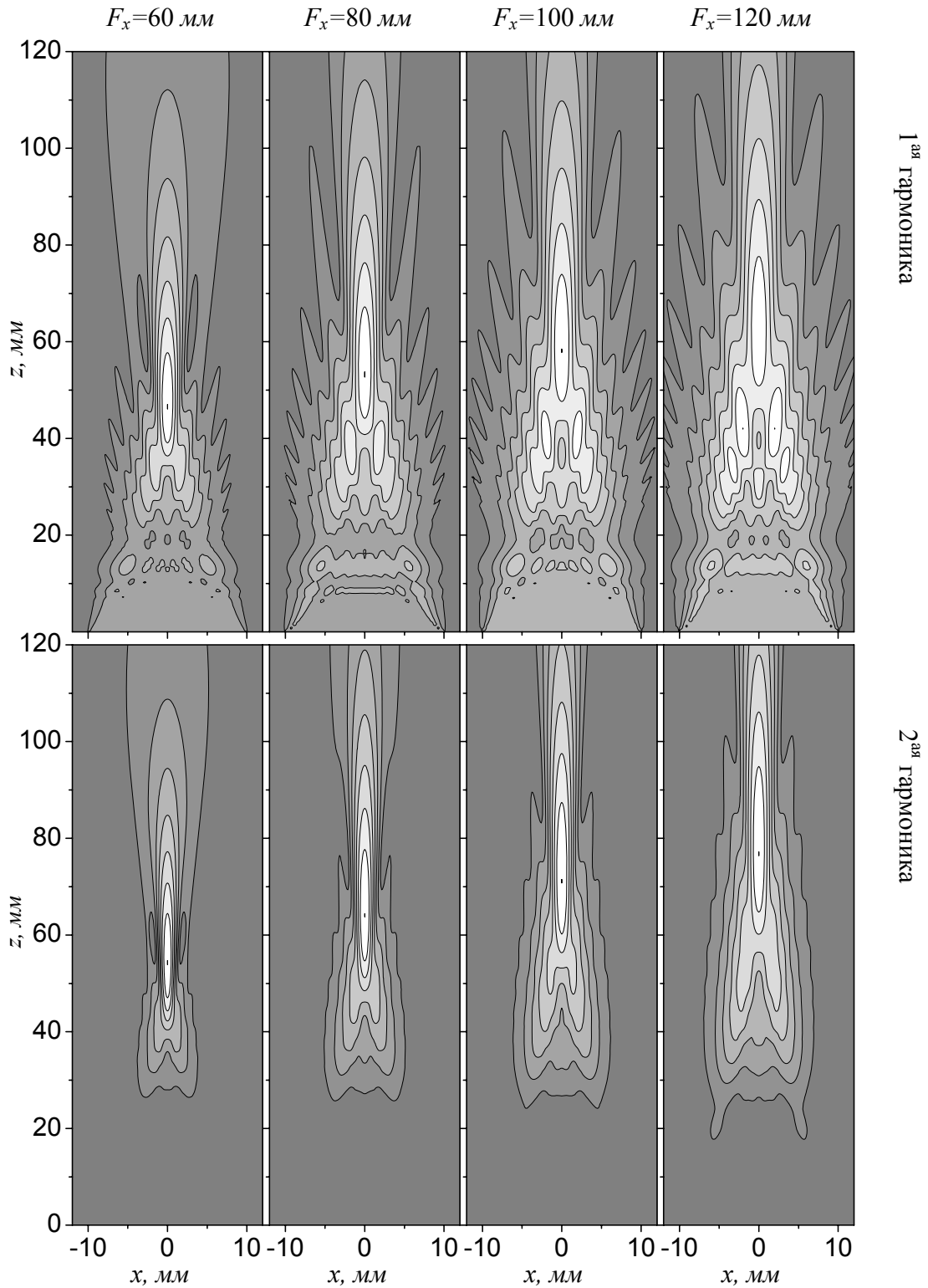


Рис. 5.4. Пространственные распределения первой и второй гармоник в плоскости сканирования для различных значений фокусного расстояния $F_x = 60, 80, 100,$ и 120 мм. Линейный масштаб с восемью равными уровнями.

ближнее поле. Максимум первой гармоники достигается ближе к излучателю ($z = 55$ мм) по сравнению со второй ($z = 64$ мм) и имеет более резкий фокальный пик. Одной из проблем звуковидения являются артефакты в ближнем поле, связанные с акустическими окнами или неоднородностями слоев ткани у некоторых пациентов. Поскольку вторая и более высокие гармоники практически не образуются до достижения фокальной области, артефакты ближнего поля уменьшаются при построении изображения с использованием высших гармоник. На рис. 5.4 приведены пространственные распределения акустического поля первой и второй гармоник, рассчитанные в плоскости сканирования при различных положениях фокуса $F_x = 60, 80, 100,$ и 120 мм. Графики представлены в линейном масштабе с восемью равными уровнями, изменяющимися от нуля до максимума амплитуды соответствующей гармоники. На графиках для основной частоты хорошо видны осцилляции в ближнем поле и сильные боковые лепестки. Вторая гармоника имеет более плавное пространственное распределение амплитуды, более узкую фокальную область и при этом практически такой же ее размер вдоль оси. Это еще раз подтверждает преимущества использования второй гармоники для целей визуализации.

Представляет интерес также рассмотреть различия в пространственной структуре полей второй гармоники при нелинейном распространении импульса основной частоты (рис. 5.5(б)) и при непосредственном излучении источником импульса удвоенной частоты (рис. 5.5 (а)), амплитуды которых в фокальной области сравнимы. Данный вопрос естественно возникает при обсуждении преимуществ нелинейной визуализации по второй гармонике. Как видно на рис. 5.5, акустическое поле второй гармоники, возникающей за счет нелинейности рис. 5.5 (б), существенно отличается от поля излучаемой второй гармоники (рис. 5.5 (а)). Из-за меньшей длины волны дифракционная структура линейного поля (рис. 5 (а)) имеет более сложную структуру. Особенно это заметно при существенном различии в фокусных расстояниях излучателя ($F_x = 120$ мм, $F_y = 80$ мм). В случае излучения удвоенной частоты (рис. 5 (а)) наблюдается появление двух максимумов давления на оси (в областях фокусов в плоскости xz и yz), в то время как поле нелинейной второй гармоники имеет только один максимум. Наблюдается появление побочных максимумов в предфокальной области, амплитуда которых сравнима с максимальной амплитудой поля в фокальной области. Поперечное распределение также имеет ряд существенных отличий для излучаемого и нелинейного пучков. Хотя частота источника в два раза больше и могло бы показаться, что пучок должен быть уже в случае непосредственного излучения второй гармоники, нелинейный пучок имеет меньшую ширину, измеренную по уровню 6 дБ.

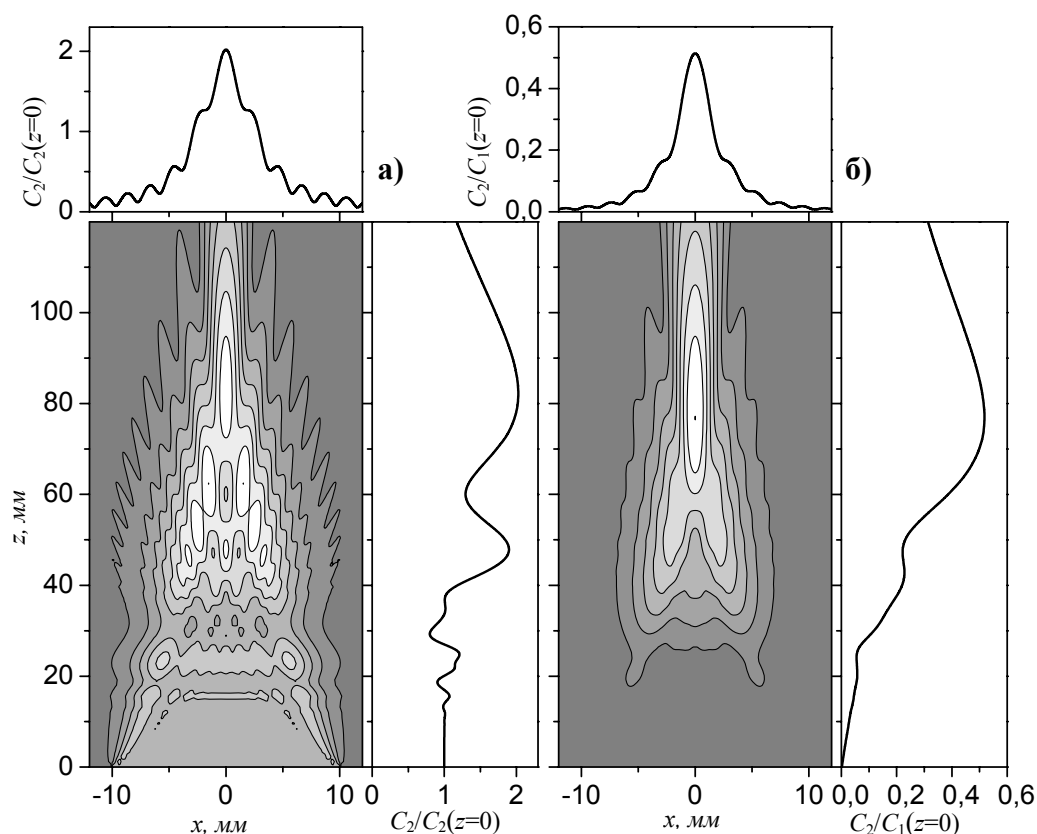


Рис. 5.5. Пространственные распределения второй гармоники в случае излучения импульса удвоенной частоты (а) и возникающей в среде при нелинейном распространении импульса основной частоты (б). Справа и сверху от каждого распределения приведены соответствующие зависимости амплитуды второй гармоники вдоль и перпендикулярно оси излучателя на расстоянии $z = 80$ мм ($F_x = 120$ мм, $F_y = 80$ мм). Линейный масштаб с восемью равными уровнями.

При построении изображений помимо фильтрации второй гармоники в рассеянном нелинейном сигнале используются более сложные методы, позволяющие подчеркнуть преимущества нелинейного звуковидения. Один из таких методов, предложенный первоначально для использования с контрастными агентами, получил название метода инвертирования импульса [205]. В ткань последовательно посылаются два импульса одинаковой амплитуды p_0 , но противоположной полярности, а изображение формируется из суммы рассеянных назад сигналов.

На рис. 5.6 изображены профили прямого и инвертированного импульсов на оси пучка на расстоянии $z = 64$ мм ($F_x = 80$ мм), суммарный сигнал и соответствующие спектры на том же расстоянии. Как видно из рисунка, спектры прямого и инвертированного импульса очень близки по абсолютной величине, а в спектре разностного сигнала практически отсутствуют нечетные гармоники. Легко показать, что для исходно гармонического сигнала $V(\sigma = 0, \theta) = \sin(\theta)$ применение данного метода приводило бы к полной компенсации нечетных компонент спектра. Действительно, в этом случае изменение полярности исходного сигнала соответствует сдвигу фазы исходной волны на π : $-V(\sigma = 0, \theta) = -\sin(\theta) = \sin(\theta' = \theta + \pi)$. Тогда решение уравнения

(5.2) для инвертированного сигнала получается из решения (5.2) для прямого сигнала заменой $\theta \rightarrow \theta'$, что соответствует появлению в разложении решения в ряд по гармоникам дополнительных фазовых сдвигов πn : $\sin(n\theta') = \sin(n\theta + \pi n) = (-1)^n \sin(n\theta)$.

Таким образом, четные гармоники прямого и инвертированного сигналов будут совпадать, а нечетные гармоники будут иметь противоположные знаки, т.е. при сложении сигналов спектр на четных гармониках будет удваиваться, а нечетные полностью пропадут. При распространении короткого импульса спектры гармоник частично перекрываются, поэтому полной компенсации нечетных гармоник не происходит, однако они сильно подавлены. Использование метода инвертирования импульса позволяет получить лучшее разделение между частотными компонентами спектра (рис. 5.6). Таким

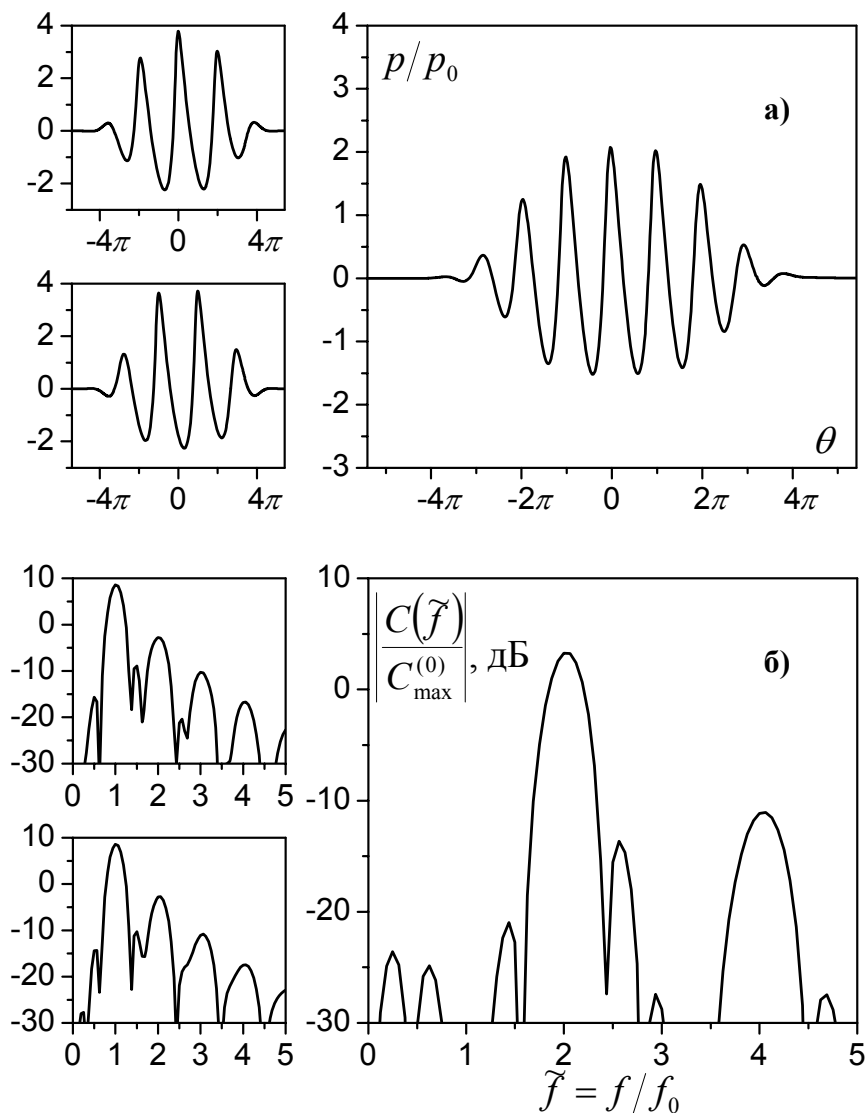


Рис. 5.6. Профили (а) и спектры волны (б) при инвертировании импульса: прямой и инвертированный сигналы (слева) и их сумма (справа), рассчитанные на расстоянии $z = 64$ мм на оси излучателя.

образом, можно использовать более короткие импульсы, что дает лучшее разрешение вдоль оси при формировании изображения по второй гармонике.

Идея другого метода, используемого для выделения полного нелинейного отклика среды, состоит в модуляции амплитуды последовательности импульсов [206 - 208]. Это так называемый метод амплитудной модуляции, в котором два последовательных импульса большой амплитуды $p_1 = p_0$ и малой амплитуды $p_2 = k \cdot p_0$ ($k < 1$), посылаются в ткань и изображение формируется из рассеянных назад сигналов как $p_1 - p_2/k$. На рис. 5.7 изображены профили импульсов большой и малой амплитуды ($k = 0.25$) на расстоянии $z = 64$ мм на оси пучка ($F_x = 80$ мм), их разность и соответствующие спектры. Как видно, профиль и спектр импульса малой амплитуды практически не искажен. В разностном

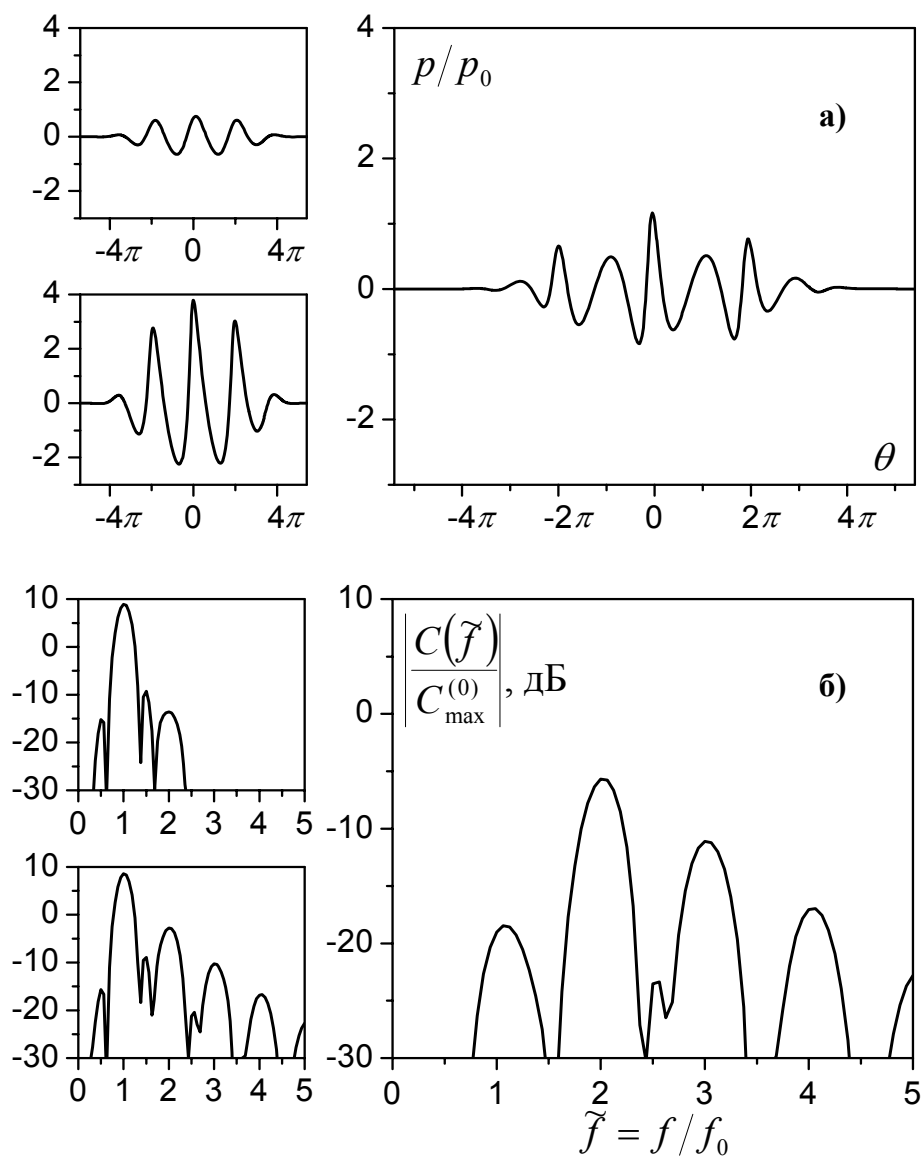


Рис. 5.7. Профили (а) и спектры волны (б) при амплитудной модуляции: сигналы большой p_1 и малой p_2 (25% от p_1) амплитуды (слева), и их разность $p_1 - 4 p_2$ (справа), рассчитанные на расстоянии $z = 64$ мм на оси излучателя.

сигнале основная частота сильно подавлена, а совокупность остальных компонент спектра представляет собой полный нелинейный отклик ткани.

Как уже было отмечено, нелинейное моделирование импульсных акустических пучков может быть также использовано для расчета уровней излучения ультразвуковых машин для их сертификации в FDA. Так называемый «механический индекс» определяется как отношение пикового отрицательного давления в МПа к корню из основной частоты в МГц: $MI = p_- (MПа) / \sqrt{f (MГц)}$. Данный индекс предназначен для оценки вероятности возникновения кавитации [209]. На рис. 5.8 показаны рассчитанная и измеренная зависимости механического индекса от расстояния вдоль оси для диагностической решетки со следующими параметрами: половины апертуры решетки $a_x = 11$ мм и $a_y = 7$ мм, фокусные расстояния $F_x = 100$ мм и $F_y = 62$ мм, основная частота $f = 3.2$ МГц. Измерения проводились сотрудником компании ATL-Philips M. Averkiou. Видно, что результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Таким образом, моделирование может быть использовано как эффективный инструмент, заменяющий долгие и дорогостоящие измерения по калибровке диагностических решеток.

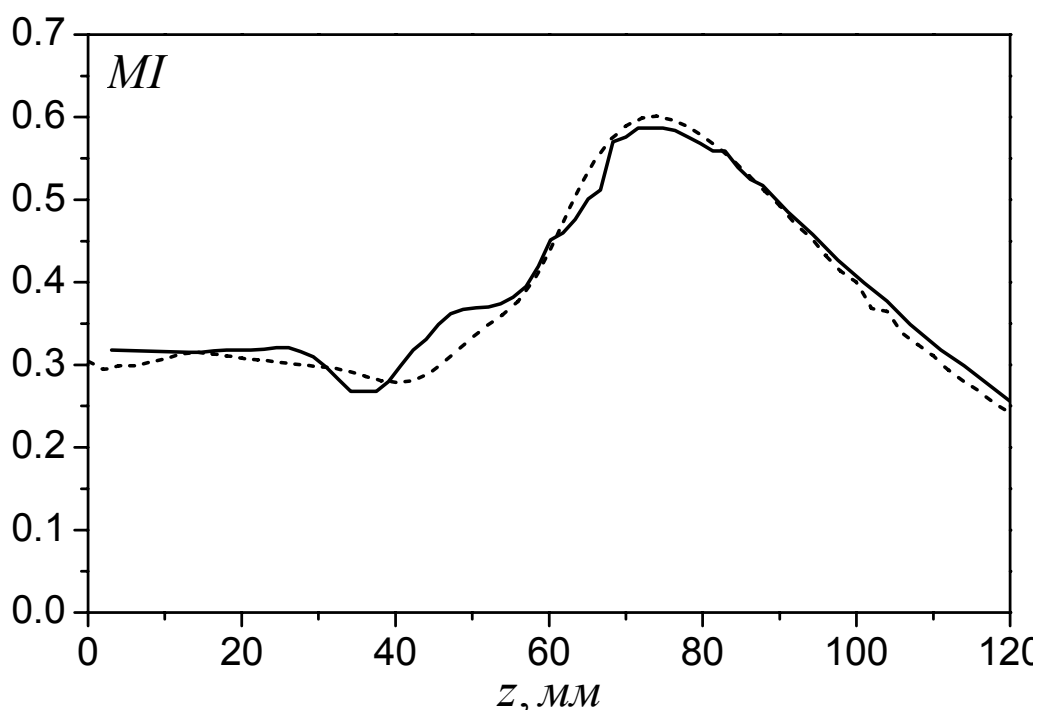


Рис. 5.8. Зависимость «механического индекса» от расстояния: эксперимент (пунктирная линия), расчет (сплошная линия)

5.4. Заключительные замечания

Развитая в данной главе новая численная модель позволяет исследовать трехмерные поля нелинейных импульсных пучков современных диагностических ультразвуковых преобразователей. Особенностью модели также является возможность легко адаптировать ее для сред с произвольной зависимостью поглощения и скорости звука от частоты. Свойства симметрии параболического уравнения позволяют по полученным численным решениям для поля, когда фокус находится на оси излучателя, построить решения при повороте оси пучка электронным образом в плоскости сканирования.

С использованием созданного пакета программ исследованы особенности нелинейных взаимодействий в импульсных полях прямоугольной геометрии в средах с линейным и квадратичным по частоте поглощением. Показано, что выбор модели поглощения существенно влияет на величину генерируемых в ткани гармоник, при этом учет дисперсии скорости звука несущественен. При этом расчёты с использованием квадратичного закона поглощения для используемых на практике режимов диагностических устройств приводят к занижению уровня второй гармоники более чем на 20%, а уровни высших гармоник могут быть недооценены в несколько раз, т.е. правильный учёт закона поглощения является принципиально важным при моделировании нелинейных эффектов в диагностике. Проиллюстрированы преимущества использования высших гармоник для визуализации тканей, которые заключаются в отсутствии сигналов ближнего поля, снижении уровня боковых лепестков, а также в образовании более узкой, плавной и длинной фокальной области. Кроме того, структура поля второй гармоники, возникающей в среде в результате нелинейного распространения импульса основной частоты, имеет существенные достоинства при ультразвуковой диагностике как по сравнению с полем первой гармоники, так с полем источников с исходно удвоенной частотой.

Численно исследованы поля широко применяемых в медицинской практике диагностических ультразвуковых сканеров с прямоугольной излучающей областью, работающих в режиме визуализации по второй гармонике. Рассчитанные параметры ультразвуковых полей в воде с высокой точностью совпадают с результатами калибровочных экспериментов, проведенных разработчиками фирмы Philips. Разработанная модель уже используется для расчета параметров безопасности при сертификации диагностических ультразвуковых машин. Лишь недавно были предложены новые алгоритмы численного описания полей без аксиальной симметрии, основанные на решении уравнения Вестервельта, и получены первые результаты [210].

6

Численный и физический эксперименты в задачах характеристики нелинейных полей источников ультразвуковой хирургии

6.1. Вводные замечания

В последнее десятилетие происходит быстрое развитие различных приложений мощного фокусированного ультразвука (или HIFU - общепринятое сокращение от словосочетания High Intensity Focused Ultrasound) для разрушения опухолей, остановки внутренних кровотечений, адресной доставки лекарств и даже коррекции фигуры [6, 9, 211 - 213]. Общая схема применения HIFU показана на

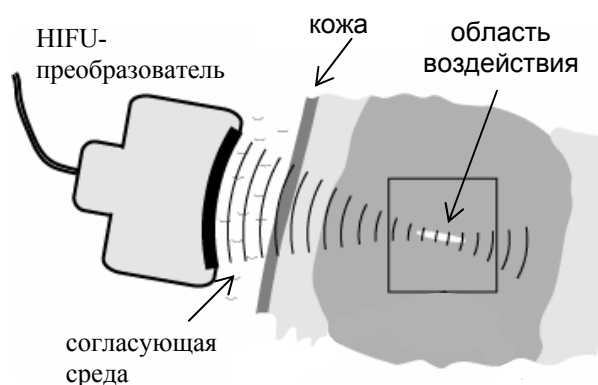


Рис. 6.1. Схема применения HIFU для локализованного разрушения опухолей без повреждения окружающей ткани. Энергия ультразвукового пучка концентрируется в фокальной области, диаметр которой составляет для частоты 1 МГц приблизительно 2 мм, а длина 10 мм.

рис. 6.1. Несмотря на то, что многие HIFU-устройства уже используются в клиниках, до сих пор еще не разработано общепринятых стандартов того, какие параметры HIFU-полей и какими методами необходимо измерять и предоставлять при сертификации прибора для клинического использования [214]. Эта задача на сегодняшний день является, безусловно, актуальной для успешного развития новых HIFU-технологий. Проблемам метрологии в HIFU посвящаются специальные конференции, организуются специальные секции на международных ультразвуковых сессиях Акустического общества Америки (ASA), Международного общества терапевтического ультразвука (ISTU), Фонда по применению фокусированного ультразвука в хирургии (FUSF), Всемирной федерации по применению ультразвука в медицине и биологии (WFUMB). В рамках Международной электротехнической комиссии (IEC) созданы две рабочие группы (High Intensity Therapeutic Ultrasound (HITU) и Therapy Equipment) для разработки первого международного стандарта измерений полей HIFU-преобразователей [215, 216].

Калибровочные измерения параметров HIFU-полей обычно проводятся в воде при малой мощности излучателя и затем линейно экстраполируются на более высокие мощности, которые используются в медицинских процедурах. Ясно, что такой подход, предполагающий линейность распространения волны, будет приводить к ошибкам принципиального характера для мощных излучателей HIFU. Кроме того, если все акустические характеристики линейного пучка однозначно определяются по известной интенсивности, то в нелинейных пучках использование интенсивности ультразвука в качестве основной характеристики является недостаточным. Различные параметры нелинейного поля, такие как пиковые давления, полная интенсивность и мощность тепловыделения, уже не связаны между собой простыми соотношениями и имеют свою характерную пространственную структуру, изменяющуюся различным образом по мере увеличения мощности излучателя, т.е. усиления нелинейных эффектов. Нелинейно-дифракционные эффекты приводят к асимметричному искажению профиля волны и формированию разрывов в области фокуса пучка [217, 3, 218]. При увеличении мощности излучателя изменяется коэффициент концентрации фокусирующей системы, причем различным образом для различных акустических параметров пучка [219]. На больших мощностях, когда разрыв в профиле волны образуется в предфокальной области, нелинейное поглощение энергии на разрывах приводит к насыщению параметров поля в фокусе [220, 221]. Помимо практической значимости, исследование предельных значений акустических параметров, достижимых в нелинейных полях фокусирующих систем, – важная задача с общефизической точки зрения.

К настоящему времени развиты стандартные методы характеристики нелинейных полей диагностических преобразователей [222 - 224, 174] и литотриптеров [225]. Однако эти методы не могут напрямую быть перенесены для измерений HIFU-полей. В ультразвуковой хирургии уровни давления в фокусе составляют десятки МПа, что на два порядка выше, чем в диагностике, поэтому нелинейные эффекты проявляются гораздо сильнее [226]. Для измерения нелинейно-искаженных профилей давления в HIFU, как и в литотрипсии, необходимы гидрофоны, устойчивые к механическим повреждениям за счет кавитации и обладающие широкой полосой пропускания для разрешения узких ударных фронтов. Однако для HIFU, в отличие от литотрипсии, необходима точность в оценке тепловых эффектов. Для этого важна точность измерения амплитуды разрыва, поскольку поглощение энергии волны пропорционально кубу его амплитуды. Это накладывает особенно жесткие условия на широкополосность используемых датчиков. Дополнительная сложность состоит в том, что размеры фокальной области пучка в HIFU примерно на порядок меньше, чем в литотрипсии, поэтому необходимы датчики с очень

малой зоной чувствительности. Важным шагом на пути повышения точности измерений ударноволновых HIFU-полей стала разработка оптоволоконных гидрофонов (FOPH – fiber optic probe hydrophone) [227]. FOPH-гидрофоны обладают преимуществами по сравнению с мембранными ПВДФ гидрофонами, такими как абсолютная калибровка, малый размер, широкополосность и простота замены чувствительного участка [228].

Альтернативой дорогостоящим и занимающим длительное время измерениям полей медицинских преобразователей в последнее время является численный эксперимент. Преимущество моделирования состоит в том, что оно может с одинаковой точностью проводиться как в воде, так и в ткани. Модели, основанные на нелинейных уравнениях типа ХЗК, применяются для исследования полей литотриптеров [229], плоских поршневых источников [35,180], диагностических преобразователей, работающих в режиме тканевой гармонии [197, 202], фокусирующих импульсных излучателей [38] и HIFU-источников [230, 231]. Для сильно фокусированных полей и полей диагностических фазированных решеток используются нелинейные модели типа уравнения Вестервельта, более точно учитывающие дифракционные эффекты [36, 127, 210, 232 - 234]. Еще более сложные модели основаны на решении полного нелинейного волнового уравнения [235, 236]. Основные полученные в численном эксперименте результаты связаны с описанием слабо-нелинейных полей диагностических датчиков и разрывных полей, создаваемых одиночными источниками простой геометрии. Исследовать нелинейные эффекты в трехмерных полях, создаваемых многоэлементными HIFU-решетками, при учете формирования разрывов до сих пор не удавалось.

Таким образом, несмотря на существенное развитие экспериментальных и численных методов описания нелинейных полей фокусирующих ультразвуковых излучателей, до сих пор еще не существует общего подхода к определению параметров полей источников ультразвуковой хирургии, необходимых для оценки эффективности и безопасности терапевтического воздействия. В данной главе развивается такой подход, совмещающий преимущества физического и численного эксперимента. Рассматриваются поля, создаваемые как одиночными излучателями ультразвуковой хирургии, так и более сложные поля двумерных терапевтических решеток. Численно решается задача о предельно параметрах ультразвукового поля, достижимых при фокусировке для излучателей с различной пространственной аподизацией. Развивается модель эквивалентного источника, позволяющая упростить задачу характеристики полей излучателей сложной геометрии. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [9,237 - 243].

6.2. Основные уравнения для моделирования полей НIFU-излучателей в воде

Напомним вначале кратко основные уравнения, обозначения, граничные условия и аналитические решения, которые использовались в численном моделировании задач данной главы. При описании нелинейных фокусированных пучков, создаваемых НIFU-источниками в воде, рассматривались две модели. Первая модель - это уравнение ХЗК, в котором дифракционные эффекты учитываются в параболическом приближении:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (6.1)$$

Здесь p – акустическое давление, z – выделенное направление вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$ время в бегущей системе координат, x и y – поперечные к z пространственные координаты; ρ_0 , c_0 и ε – плотность, скорость звука и коэффициент нелинейности воды; Δ_{\perp} – лапласиан по поперечным координатам, $\Delta_{\perp} = 1/r \partial/\partial r (r \partial/\partial r)$ в случае аксиально-симметричного пучка, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ для трехмерного пучка; $b = \xi + 4/3 \cdot \eta$ – коэффициент вязкости воды, который является малым.

Граничное условие для круглого фокусирующего излучателя с равномерным распределением амплитуды в параболическом приближении записывается как:

$$p(z=0, r, \tau) = \begin{cases} -p_0 \sin[\omega_0(\tau + r^2/2c_0 F)] & r \leq a_0 \\ 0, & r \geq a_0 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Вторая модель - это более точная дифракционная модель уравнения Вестервельта (УВ), которое удобно также переписать в бегущей системе координат:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p + \frac{\varepsilon}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}. \quad (6.3)$$

В уравнении Вестервельта (3), в отличие от уравнения ХЗК, в правой части стоит полный лапласиан по пространственным координатам $\Delta p = \partial^2 p/\partial z^2 + \partial^2 p/\partial y^2 + \partial^2 p/\partial x^2$. Граничное условие в модели УВ задается для колебательной скорости на поверхности излучателя. Так, в самом простом случае одиночного фокусирующего элемента, в сопровождающей системе координат $\tau = t - z/c_0$ условие для колебательной скорости v на поверхности излучателя сферической формы будет иметь вид:

$$v(x, y, \tau) = -p_0 \sin \left[\omega_0 \left(\tau + \left(F - \sqrt{F^2 - r^2} \right) / c_0 \right) \right], \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (6.4)$$

В безразмерных переменных уравнение ХЗК (1) и граничные условия (2) имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{4G} \Delta_{\perp} P, \quad (6.5)$$

$$P(\sigma = 0, R, \theta) = -\sin(\theta + GR^2), \quad R \leq 1; 0, R > 1$$

Здесь $P = p/p_0$; $\theta = \omega_0 \tau$; $\sigma = z/F$, $R = r/a_0$. Уравнения (5) содержат три безразмерных параметра: $N = F/x_p$ – параметр нелинейности, $G = x_0/F$ – коэффициент усиления линейного поля в фокусе (параметр дифракции) и $A = F/x_n$ – параметр поглощения, где $x_0 = ka_0^2/2$ – характерный дифракционный масштаб задачи, $x_p = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon p_0 \omega_0$ – длина образования разрыва в плоской волне, $x_n = 2\rho_0 c_0^3 / b \omega_0^2$ – длина поглощения линейной волны:

$$N = F/x_p, \quad G = x_0/F, \quad A = F/x_n. \quad (6.6)$$

Для проверки точности разработанных алгоритмов при линейной фокусировке пучков численные решения сравнивались с известными аналитическими решениями для одиночных аксиально-симметричных элементов на оси пучка и в фокальной плоскости. Ниже приведены основные аналитические выражения, которые использовались для такого сравнения; результаты приводятся далее в тексте главы для каждого из рассмотренных случаев. Так, для параболического уравнения решения для амплитуды давления A имеют вид:

$$A(z) = \frac{2p_0}{1-z/F} \sin\left(G \frac{1-z/F}{2z/F}\right), \quad (6.7)$$

$$A(r) = p_0 G \frac{2J_1(2Gr/a_0)}{2Gr/a_0}. \quad (6.8)$$

Для уравнения Вестервельта:

$$A(z) = \frac{2p_0}{1-z/F} \sin\left(k \frac{z-R_{\max}}{2}\right), \quad (6.9)$$

$$A(r) = p_0 k F (1 - \sqrt{1 - (a/F)^2}) \frac{2J_1(\sin \alpha_0 kr)}{\sin \alpha_0 kr}. \quad (6.10)$$

Здесь $k = \omega_0 / c_0$ – волновое число, $\sin \alpha_0 = a_0 / F$ – половина угла фокусировки излучателя, $R_{\max} = F \sqrt{1 + (1 - z/F)^2 - 2(1 - z/F) \cos \alpha_0}$ – расстояние от точки наблюдения до края излучателя.

6.3. Метод определения параметров нелинейных фокусированных полей HIFU-излучателей в воде

В данной части работы предложен новый метод описания полей HIFU в воде, который описывается на примере работы типичного для HIFU одноэлементного излучателя. Суть метода заключается в комплексном использовании данных измерений и моделирования и кратко состоит в следующем. Вначале проводится измерение давления на малых амплитудах возбуждения излучателя, т.е. в линейном режиме фокусировки, с использованием гидрофона малых размеров. Амплитуда давления измеряется вдоль оси пучка и поперек оси в фокальной плоскости. Далее находится соотношение между напряжением, подаваемым на излучатель, и амплитудой давления в фокусе, которое измеряется с помощью калиброванного гидрофона. Полученные экспериментальные данные используются для постановки граничных условий в численной модели фокусированного пучка, построенной на основе уравнения ХЗК. В качестве излучателя в модели используется поршневой фокусирующий преобразователь, апертура, фокусное расстояние и давление на котором задаются таким образом, чтобы результаты линейного моделирования наилучшим образом аппроксимировали пространственную структуру и абсолютные величины давления, измеренные в фокальной области пучка. Далее проводится серия расчетов нелинейного поля в широком диапазоне уровней возбуждения излучателя, учитывая, что давление на излучателе пропорционально подаваемому напряжению. Результаты моделирования позволяют получить необходимые параметры фокусированного поля для любого режима работы излучателя. Точность численного

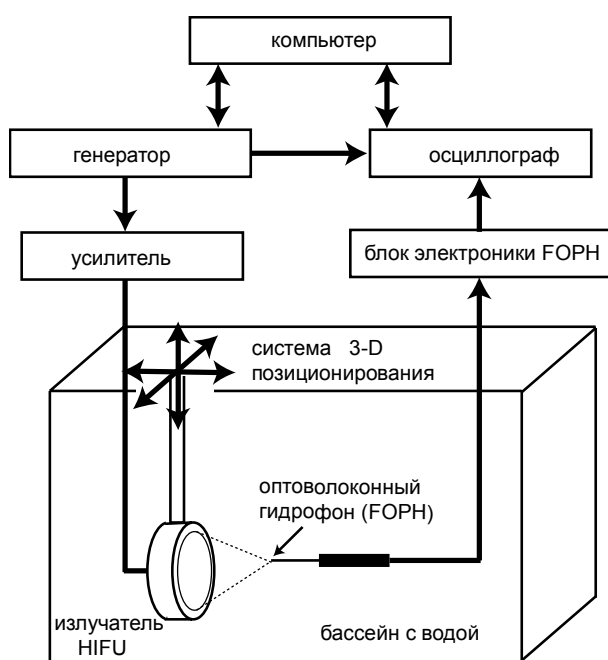


Рис. 6.2. Схема экспериментальной установки для измерения акустического давления в воде.

эксперимента может быть подтверждена путем сравнения рассчитанных и измеренных профилей волны в фокусе при различном проявлении нелинейных эффектов: квазилинейной фокусировке, формировании разрывов в профиле волны и развитых разрывов.

Рассмотрим здесь предлагаемый метод на примере характерного HIFU излучателя. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 6.2. В качестве источника ультразвука использовался пьезокерамический элемент (PZ 26, Ferroperm Piezoceramics,

Denmark) с резонансной частотой 2.158 МГц, номинальной апертурой и фокусным расстоянием 44.5 мм. Сигнал на излучатель подавался с генератора (Agilent 33250A, Palo Alto, CA) через линейный усилитель мощности (ENI A-300, Rochester, NY). Напряжение на излучателе контролировалось с помощью подсоединенного параллельно датчика высокого напряжения. Использовался импульсный режим излучения, длительность импульса была равна 30-40 периодам основной частоты. Профили сигналов, подаваемые на излучатель и измеренные гидрофоном, записывались с помощью цифрового осциллографа (LT344, Lecroy, Chestnut Ridge, NY). Уровни интенсивности в фокусе в эксперименте по линейной оценке достигали $24\ 000\ \text{Вт/см}^2$, что соответствует уровням, используемым в современных клинических HIFU-устройствах [244]. Для улучшения отношения сигнал/шум проводилось усреднение профилей волны от нескольких импульсов. Положение гидрофона устанавливалось с помощью системы позиционирования (Velmex Inc., Bloomfield, NY). Работа генератора, осциллографа и системы позиционирования была автоматизирована и контролировалась с помощью программы LABVIEW (National Instruments, Austin, TX). Измерения проводились в воде при комнатной температуре 20°C. Для того чтобы избежать кавитации при высоких уровнях давления, использовалась дистиллированная дегазированная вода. Концентрация растворенного в воде кислорода измерялась соответствующим датчиком (WTW Oxi 330i, Weilheim, Germany) и составляла менее 25% от уровня насыщения.

В измерениях линейного поля, необходимых для постановки граничного условия в численной модели, использовались два гидрофона. Игольчатый пьезоэлектрический некалиброванный гидрофон (Specialty Engineering Associates, Soquel, CA, модель GL-150-1A) с диаметром чувствительного участка 150 мкм использовался при сканировании поля вдоль оси излучателя и поперек оси в фокальной плоскости. Калиброванный мембранный ПВДФ гидрофон с диаметром чувствительного участка 200 мкм и чувствительностью 0.168 В/МПа (модель MHA-200, NTR Systems, Seattle, WA) использовался при измерении давления в фокусе с целью установления связи между амплитудой давления в граничном условии модели и напряжением на излучателе в эксперименте.

Далее проводились измерения нелинейных профилей давления в области фокуса при относительно высоких уровнях работы излучателя. Здесь использовались мембранный NTR и два оптоволоконных гидрофона (FOPH 500 и FOPH 2000, RP Acoustics, Germany) с одинаковым диаметром волокна 100 мкм, но различной шириной полосы чувствительности по частоте: 30 МГц для FOPH 500 и 100 МГц для FOPH 2000. Целью измерений являлась проверка правильности калибровки оптоволоконных гидрофонов в сравнении с эталонным мембранным. В измерениях линейных полей

оптоволоконные гидрофоны не использовались из-за высокого уровня шума (2-3 МПа) и недостаточной чувствительности для измерений малых давлений.

При самых высоких уровнях работы излучателя измерения проводились только оптоволоконными гидрофонами; оптоволоконно располагалось параллельно оси, а поверхность его среза, который является областью чувствительности – перпендикулярно оси ультразвукового пучка. Профили давления находились после деконволюции измеренного сигнала и функции импульсного отклика гидрофона. Абсолютные значения давления рассчитывались, используя калибровочные зависимости коэффициента отражения света от торца оптоволоконка при различных давлениях в воде [245].

Номинальные значения радиуса кривизны и диаметра одиночного пьезокерамического элемента излучателя составляли 44.5 мм. Однако ясно, что закрепление краев элемента в корпусе и генерация поверхностных волн искажают идеальную картину колебаний керамики. В численной модели сложная картина колебаний поверхности элемента аппроксимировалась равномерным распределением. Целью измерений линейного поля было определить эффективный диаметр и фокусное расстояние, при которых результаты моделирования будут наиболее точно соответствовать реальному распределению давления в линейном пучке. Измерения

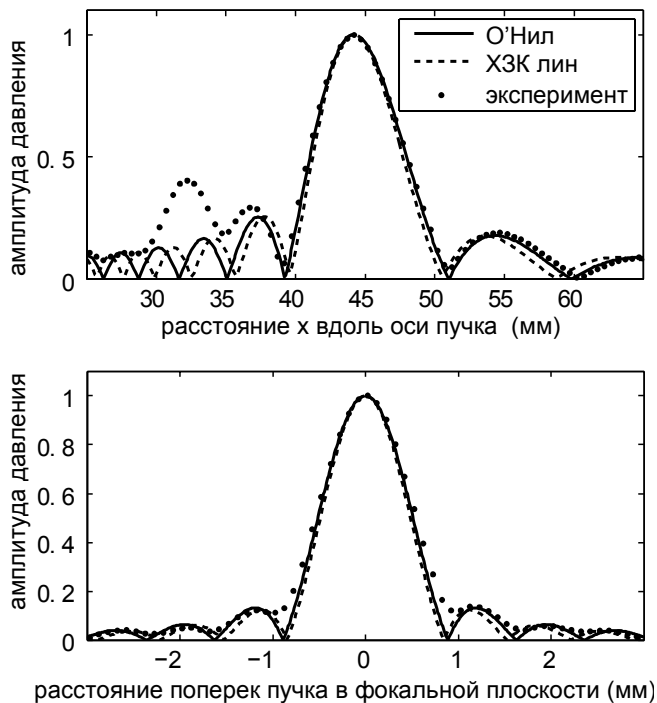


Рис. 6.3. Сравнение осевых и поперечных распределений амплитуды давления в линейном пучке, измеренных в воде и рассчитанных для модели поршневого фокусированного излучателя с использованием параболического приближения (X3K) и аналитического решения О'Нила.

проводились вдоль акустической оси излучателя; ее положение относительно механической оси системы позиционирования определялось, используя методику, описанную в работе [185]. Экспериментальные кривые сравнивались с результатами моделирования линеаризованного уравнения X3 для различных значений апертуры и фокусного расстояния. Наилучшее согласие с данными эксперимента в области фокуса было получено при значениях диаметра источника $2r_0 = 40$ мм и радиуса кривизны $F = 44.4$ мм. На рис. 6.3 показаны распределения амплитуды давления вдоль оси пучка и поперек оси

в фокальной плоскости, полученные в эксперименте и их «наилучшая» аппроксимация теоретическими кривыми для модели поршневого излучателя. Расчеты проводились двумя способами: используя параболическое приближение и аналитическое решение О'Нила полной дифракционной задачи для $2r_0 = 42$ мм и радиуса кривизны $F = 44.4$ мм [246]. Как видно из рисунка, результаты моделирования хорошо согласуются с данными эксперимента в фокальной области излучателя. Таким образом, несмотря на то, что реальное распределение колебательной скорости на поверхности излучателя не являлось равномерным, а угол фокусировки был достаточно большим, численное моделирование с использованием параболического приближения и модели фокусирующего поршня позволило получить количественное согласие с реальным распределением давления внутри фокальной области NIFU источника. Поскольку нелинейные эффекты в основном проявляются в высокоамплитудной области фокуса, где результаты линейных расчетов и измерений практически совпадают, то можно ожидать, что и при больших амплитудах предложенная модель может быть использована для расчета нелинейных профилей давления в фокусе.

Отметим, что в ближней зоне излучателя между результатами моделирования и эксперимента наблюдаются отличия. Для корректного описания ближней зоны необходима постановка более точных граничных условий, соответствующих реальному распределению колебательной скорости на излучателе. Эти данные также могут быть получены из эксперимента на основе метода акустической голографии [81].

После определения эффективных размеров излучателя было установлено соотношение между напряжением, подаваемым на элемент, и исходным давлением на источнике в моделировании, при котором абсолютные величины давления в фокусе в расчетах и измерениях были одинаковы. Для этого с помощью калиброванного мембранного гидрофона измерялась амплитуда давления в пространственном максимуме линейного поля при заданном напряжении на элементе. Линейный коэффициент фокусировки $G = p_0/p_F$ в моделировании при найденных оптимальных параметрах был равен $G = p_0/p_F = 48$. Таким образом, амплитуда p_0 на излучателе в численной модели, соответствующая давлению в фокусе 0.47 МПа, была равна $p_0 = p_F/G = 0.0097$ МПа. Как следует из соотношения (6.7) давление в фокусе 0.47 МПа соответствует интенсивности $I_L = I_N = 7$ Вт/см². Здесь введены обозначения: I_L – интенсивность в фокусе, рассчитываемая в предположении линейной фокусировки, I_N – интенсивность в фокусе, получаемая при численном решении нелинейной задачи. Для других уровней возбуждения излучателя, исходная амплитуда давления, p_0 , предполагалась пропорциональной подаваемому напряжению [35].

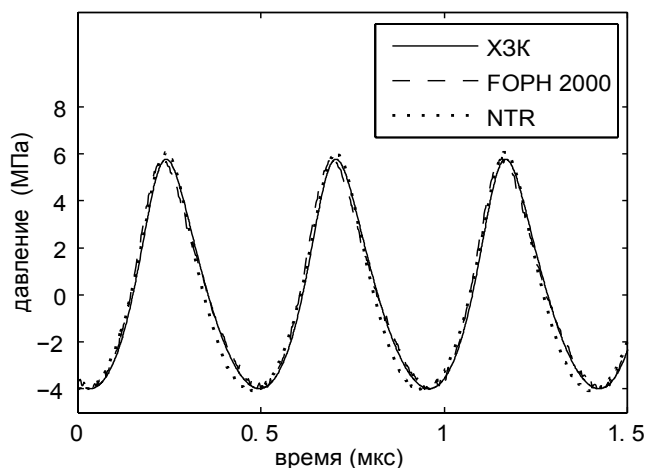


Рис. 6.4. Сравнение волновых профилей в фокусе, рассчитанных численно на основе модели XЗК и измеренных оптоволоконным FOPH 2000 и мембранным NTR гидрофонами в воде при начальной амплитуде давления $p_0 = 0.1$ МПа, $I_L = 700$ Вт/см², $I_N = 720$ Вт/см².

Для сравнения калибровки оптоволоконного (FOPH 2000) гидрофона относительно эталонного мембранного (NTR) профили волны измерялись и рассчитывались в фокусе при более высоких амплитудах возбуждения $p_0 = 0.1$ МПа, $I_L = 700$ Вт/см², $I_N = 720$ Вт/см². При таких уровнях давления было возможным использование обоих калиброванных гидрофонов. Результаты измерений и нелинейного моделирования представлены на рис. 6.4. Как видно, при выбранном

уровне работы излучателя в профиле волны уже наблюдаются характерные нелинейные искажения. Все три полученных профиля хорошо согласуются между собой и по форме, и по значениям пикового положительного (6 МПа) и отрицательного (-4 МПа) давления. Таким образом, было подтверждено соответствие калибровки оптоволоконного гидрофона эталонному мембранному и показано, что в условиях нелинейной фокусировки результаты моделирования соответствуют величинам давлениям в фокусе реального излучателя.

Далее профили волны в области фокуса моделировались и измерялись с помощью FOPH для более высоких начальных давлений до $p_0 = 0.57$ МПа. На рис. 6.5 представлены профили и соответствующие спектры волны в фокусе, полученные в моделировании и эксперименте для $p_0 = 0.29$ МПа ($I_L = 6500$ Вт/см², $I_N = 8200$ Вт/см²), $p_0 = 0.39$ МПа ($I_L = 11000$ Вт/см², $I_N = 16\ 000$ Вт/см²), и $p_0 = 0.57$ МПа ($I_L = 24\ 000$ Вт/см², $I_N = 29000$ Вт/см²). При начальной амплитуде давления $p_0 = 0.29$ МПа, экспериментальные и рассчитанные профили практически не отличаются, наблюдается характерное нелинейно-дифракционное искажение формы профиля, измеренное пиковое положительное давление составляет 35 МПа, пиковое отрицательное давление -10 МПа. При более высоких начальных давлениях по-прежнему наблюдается хорошее согласие моделирования и эксперимента, особенно в плавной области разрежения волнового профиля. Некоторое отличие начинает проявляться в области острого пика сжатия на образующемся ударном фронте. Величина пикового положительного давления, получаемого в моделировании,

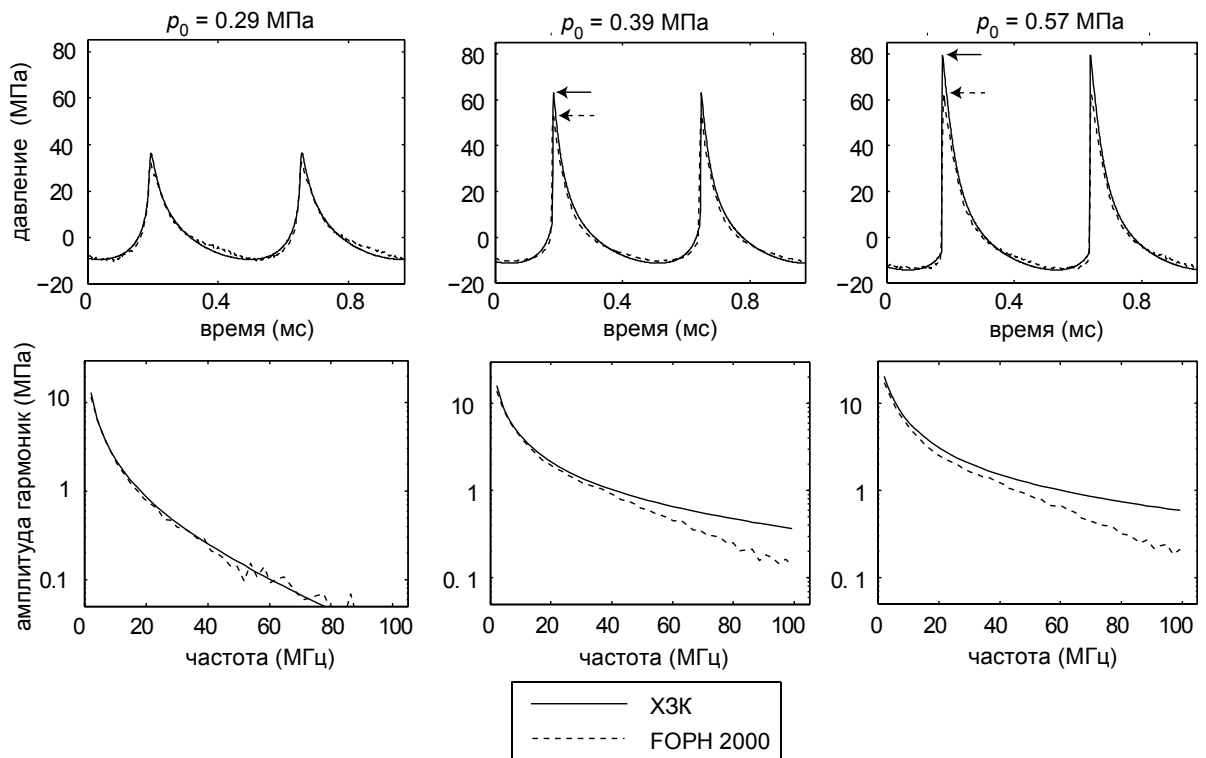


Рис. 6.5. Сравнение нелинейно искаженных профилей волны и соответствующих спектров в фокусе, рассчитанных численно на основе модели ХЗК и измеренных оптоволоконным гидрофоном (FORN 2000) в воде при начальных амплитудах давления $p_0 = 0.29$ МПа, ($I_L = 6500$ Вт/см², $I_N = 8200$ Вт/см²); $p_0 = 0.39$ МПа, ($I_L = 11000$ Вт/см², $I_N = 16000$ Вт/см²) и $p_0 = 0.57$ МПа, ($I_L = 24000$ Вт/см², $I_N = 29000$ Вт/см²). Горизонтальными стрелками показана величина пикового положительного давления в численных и экспериментальных профилях.

превышает экспериментальные значения. Так, для $p_0 = 0.39$ МПа, пиковое положительное давление равно 63 МПа, что на 10 МПа или на 19% выше, чем измеренное значение 53 МПа. Пиковое отрицательное давление одинаково как в расчетах, так и в измерениях и равно -11 МПа. Для $p_0 = 0.57$ МПа, пиковое отрицательное давление равно -14.5 МПа, однако пиковое положительное давление на 25% выше в расчетах (81 МПа), чем в измерениях (65 МПа). Это различие результатов моделирования и эксперимента также очевидно в частотном представлении, где амплитуда высших гармоник меньше для измеренных спектров волны по сравнению с расчетными.

На рисунке 6.6 представлены распределения пикового положительного p_+ и пикового отрицательного p_- давлений, а также амплитуд первых четырех гармоник, измеренных и рассчитанных вдоль оси пучка и поперек оси в фокальной плоскости для начальной амплитуды давления $p_0 = 0.39$ МПа. Как следует из графиков рис. 6.5, для такой амплитуды в профиле волны в фокальной области уже образуется разрыв, а измеренная величина пикового положительного давления несколько меньше, чем полученная в расчетах. Как измерения, так и моделирование показывают, что для пикового положительного давления наблюдается значительное увеличение коэффициента

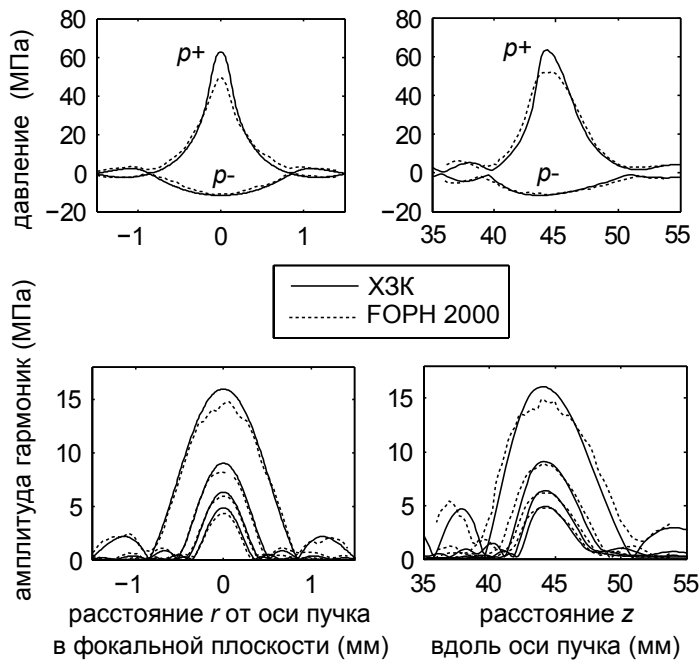


Рис. 6.6. Сравнение пространственных распределений пиковых давлений и амплитуд первых четырех гармоник на оси излучателя и в фокальной плоскости при начальной амплитуде давления $p_0 = 0.39$ МПа, $IL = 11000$ Вт/см², $IN = 16000$ Вт/см².

показывают усиливающуюся с номером гармоники локализацию в пространстве. На рисунке 6.6 представлены распределения только для первых четырех гармоник, тогда как спектр волны содержит более 50 гармоник, т.е. частоты выше 100 МГц (рис. 6.5). Поскольку коэффициент поглощения ультразвука увеличивается с частотой, усиление пространственной локализации высших гармоник будет приводить к локальному увеличению мощности тепловыделения в среде. Эффект локализации эффективного нелинейного тепловыделения существенно возрастает при образовании ударных фронтов в фокусе излучателя. Как видно из рис. 6.5, величина амплитуды разрыва приблизительно равна значению пикового положительного давления в профиле волны. Поскольку поглощение энергии волны на разрыве пропорционально кубу его амплитуды [3], то пространственное распределение тепловыделения в среде за счет поглощения на разрывах будет еще острее, чем распределение p_+ (рис. 6.6). Кроме того, недооценка p_+ и, следовательно, амплитуды разрыва в измерениях может приводить к значительной недооценке мощности тепловыделения в фокусе.

В отличие от пикового положительного давления, кривые для пикового отрицательного давления p_- в нелинейных расчетах и измерениях практически совпадают. Коэффициент фокусировки для p_- в нелинейном пучке уменьшается с ростом амплитуды исходной волны и составляет при $p_0 = 0.39$ МПа $G_{p_-} = 30$; размеры фокальной области

фокусировки по сравнению с линейным случаем $G = 48$: $G_{p_+} = 130$ в эксперименте и $G_{p_+} = 160$ в моделировании. Размеры фокальной области для p_+ , определяемые по уровню -6 дБ, уменьшаются более чем в два раза по сравнению с размерами линейного пучка (рис. 6.3). Ширина перетяжки в фокальной области сужается от 1 мм до 0.4 мм в моделировании, а длина уменьшается от 70 мм до 35 мм.

Распределения для первых гармоник, измеренные и полученные в моделировании, хорошо согласуются между собой и

(1.25 мм ширина и 80 мм длина перетяжки по уровню -6 дБ) больше, чем в линейном пучке. Поскольку пиковое отрицательное давление отвечает за эффекты кавитации, то кавитационное воздействие ультразвука в нелинейном пучке будет гораздо менее локализовано, чем тепловое.

Для того чтобы получить количественные значения отрицательного и положительного пикового давления в нелинейном пучке и избежать переоценки p_- и недооценки p_+ , необходимы либо прямые измерения, либо моделирование профилей волны в фокусе при различных уровнях работы излучателя. На рисунке 6.7 приведены

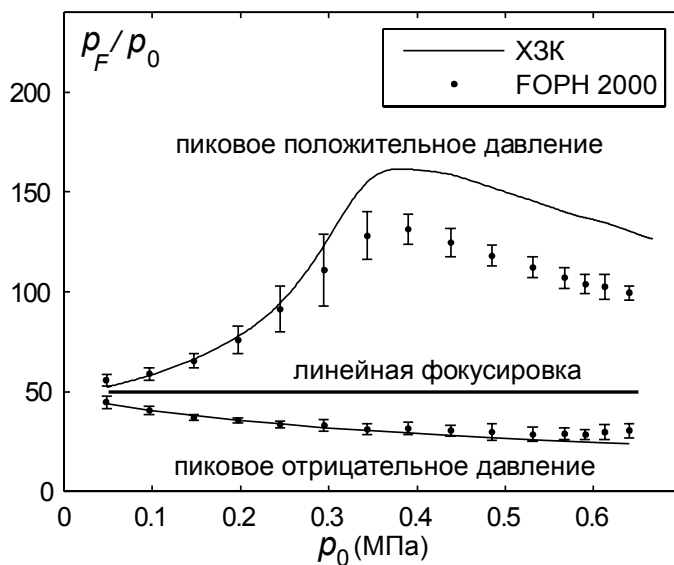


Рис. 6.7. Рассчитанные и измеренные зависимости коэффициента фокусировки в нелинейном пучке от амплитуды давления на излучателе для пикового положительного и отрицательного давлений. На экспериментальных кривых показано стандартное отклонение в данных трех различных измерений.

усиления нелинейных эффектов, коэффициент фокусировки для p_+ возрастает в численном эксперименте до 160, а затем начинает монотонно уменьшаться. Максимум коэффициента фокусировки для пикового положительного давления в фокусе соответствует случаю, когда разрыв в профиле образуется вблизи фокуса, а его дальнейшее убывание связано с более ранним образованием ударного фронта и поглощением энергии волны до фокуса. Для пикового отрицательного давления коэффициент фокусировки монотонно уменьшается с ростом амплитуды давления p_0 на излучателе. Расчетные и экспериментальные кривые для p_- хорошо согласуются для всех режимов работы излучателя, в то время как значения пикового положительного давления ниже в физическом эксперименте, чем в численном.

Точность определения пикового положительного давления и, соответственно, амплитуды разрыва, очень важна для предсказания тепловых эффектов при облучении в

данные таких измерений и расчетов. Пиковые давления нормированы к начальной амплитуде волны p_0 на излучателе, т.е. графики представляют собой зависимость коэффициента фокусировки к его линейному значению от амплитуды волны p_0 . На графиках также показаны стандартные отклонения, полученные для трех независимых серий экспериментов. При низких амплитудах p_0 линейный коэффициент фокусировки одинаков для p_+ и p_- и равен $G = 48$. По мере увеличения амплитуды волны, т.е.

режиме ударных волн. Например, различие между результатами измерений и моделирования p_+ на 25% будет приводить к двукратному различию в эффективности тепловыделения в фокусе за счет поглощения на разрывах. Обсудим здесь возможные причины и ограничения в эксперименте, которые могут приводить к недооценке p_+ .

Одной из причин, влияющих на измерения акустического давления в выбранной точке пространства, является конечный размер активного участка гидрофона [247]. Если акустическое поле в фокусе неравномерно по амплитуде на площади активного участка гидрофона, то усреднение измеряемого давления по площади этого участка даст заниженную величину давления [248 - 250]. Хотя диаметр оптоволоконка FOPH в эксперименте (100 мкм) была существенно меньше размеров фокальной перетяжки линейного пучка (1 мм по уровню -6 дБ), этого могло быть недостаточно при измерениях нелинейного поля. Как было показано выше, размер перетяжки для пикового положительного давления уменьшается по мере увеличения амплитуды на излучателе, поэтому эффект пространственного усреднения мог быть существенным при высокоамплитудных измерениях. Эта гипотеза согласуется с наблюдаемым проявлением отличий в данных измерений и моделирования для больших амплитуд на излучателе.

Чтобы оценить влияние эффекта пространственного усреднения, проводилось моделирование профилей давления в фокальной плоскости и их дальнейшее усреднение для каждого момента времени по площади виртуального гидрофона. Рассмотрим здесь случай наиболее узкой фокальной перетяжки для пикового положительного давления. Эта ситуация соответствует $p_0 = 0.39$ МПа, когда разрыв образуется практически в фокусе (рис. 6.7). При более высоких амплитудах разрыв образуется до фокуса и ширина фокальной перетяжки снова возрастает [218]. На рисунке 6.8. показаны результаты расчетов профилей волны в фокусе, полученные в результате усреднения по площади диаметром 100 мкм (FOPH), 300 мкм и 500 мкм, т.е. характерным размерам гидрофонов, использующихся в измерениях полей излучателей диагностического ультразвука, NIFU и литотриптеров [251]. Как видно из рисунка, величина пикового давления в профиле волны для гидрофона диаметром 100 мкм лишь на 2% ниже, чем при «измерении» идеальным точечным датчиком. Для гидрофона диаметром 500 мкм различие уже значительно. Основным эффектом пространственного усреднения является уменьшение измеренного пикового положительного давления и уширение ударного фронта. Однако в условиях проведенного эксперимента этот эффект не мог дать заметного искажения в измеряемый профиль волны.

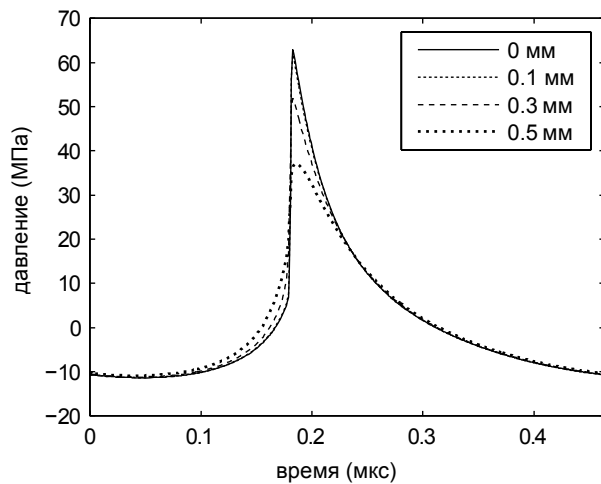


Рис. 6.8. Профили волны в фокусе, рассчитанные для $p_0 = 0.39$ МПа на оси пучка в точке (0 мм) и при усреднении по апертуре виртуального гидрофона с центром на оси и диаметром 0.1, 0.3, и 0.5 мм.

проявляется в различиях между структурой ближнего поля, измеренной и рассчитанной для поршневого источника (рис. 6.3). Поскольку нелинейные эффекты накапливаются по мере распространения волны, то различия в распределении давления в ближнем поле могут повлиять на форму волны в фокусе. Для оценки влияния этого эффекта было измерено реальное распределение колебательной скорости на поверхности излучателя, используя метод акустической голографии [81], и полученное распределение использовано в качестве граничного условия в моделировании.

Голографическое восстановление распределения колебательной скорости проводилось путем измерения игольчатым SEA гидрофоном амплитуды и фазы слабого гармонического сигнала на плоскости, расположенной на расстоянии 30 мм от центра излучателя перпендикулярно акустической оси. Сканирование проводилось в квадратном пространственном окне размером 60 мм с шагом 0.3 мм. На рисунке 6.9 (а) показано двумерное распределение колебательной скорости на плоскости $z = 0$, восстановленное по измеренным данным на основе интеграла Релея. Это распределение было приведено к аксиально-симметричному виду путем усреднения данных по 300 кольцам одинаковой ширины и далее использовалось как новое граничное условие для моделирования (рис. 6.9 (б)). Ширина колец выбиралась равной пространственному шагу сетки в восстановленном распределении. Далее амплитуда давления на излучателе выбиралась таким образом, чтобы давление в фокусе линейного пучка совпадало с измеренным.

На рисунке 6.9 показаны граничные условия с равномерным и неравномерным распределениями (6.9 (б)) и соответствующие рассчитанные распределения давления вдоль оси в линейном пучке (6.9 (в)). Приведены также экспериментальные данные для

Другой причиной различия в измеренных и рассчитанных профилях волны на больших амплитудах могли быть приближенные граничные условия в моделировании. В расчетах предполагалось равномерное распределение колебательной скорости вдоль поверхности излучателя. Реальное распределение отличается от равномерного за счет возбуждения поверхностных волн в керамике [185, 252]. Неоднородность колебаний поверхности излучателя искажает структуру излучаемого поля, что

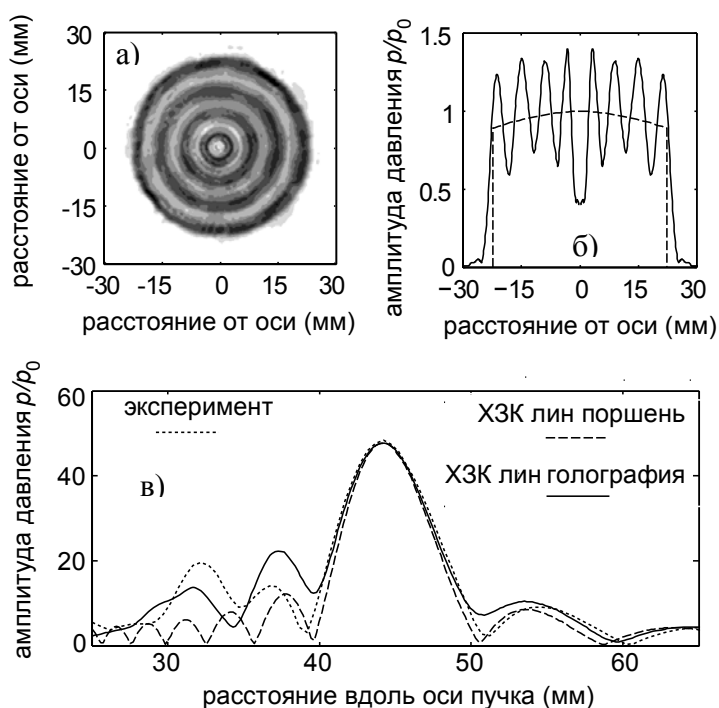


Рис. 6.9. (а) Распределение колебательной скорости на поверхности излучателя, восстановленное методом акустической голографии. (б) Граничные условия для численной модели при $z = 0$: равномерное распределение давления и аксиально-симметричное неравномерное распределение, полученное путем усреднения голографических данных. (в) Сравнение амплитуд давления на оси пучка в эксперименте и рассчитанных для равномерного и неравномерного граничных условий.

различие в распределениях давления в ближней зоне пучка для двух граничных условий, проведенный далее численный эксперимент для нелинейного поля показал, что эти отличия практически не влияют на профиль волны в фокусе (рис. 6.10). Как видно из рисунка, распределения пиковых давлений, положительного и отрицательного, на оси пучка также несильно отличаются для поршневого излучателя и излучателя с неоднородным распределением, восстановленным методом акустической голографии. Это подтверждает предложенную в работе гипотезу, что в пучках с большим коэффициентом усиления нелинейные эффекты накапливаются в основном на коротком расстоянии внутри фокальной области, а их роль при распространении в ближней зоне, хотя и гораздо большего размера – невелика.

Возможной причиной неточности измерений ударноволновых профилей эксперименте могла быть ограниченность полосы пропускания гидрофона, а также недостаточная точность о калибровочной кривой на высоких частотах. Неравномерность частотной характеристики гидрофона обусловлена, в частности, дифракционными эффектами при падении волны на срез оптоволокна, которые приводят к эффективному удвоению давления на частотах выше 10 МГц [253]. При обработке данных эксперимента

распределения амплитуды давления на оси излучателя. Как видно из рисунка, результаты моделирования с различными граничными условиями и данные измерений практически совпадают в фокальной области пучка. В ближней зоне излучателя, как и ожидалось, есть заметные отличия. Расчетные кривые, полученные с использованием восстановленных из эксперимента граничных условий хотя и ближе к данным измерений, но по-прежнему отличаются, поскольку дифракция в модели учитывается в параболическом приближении. Тем не менее, несмотря на

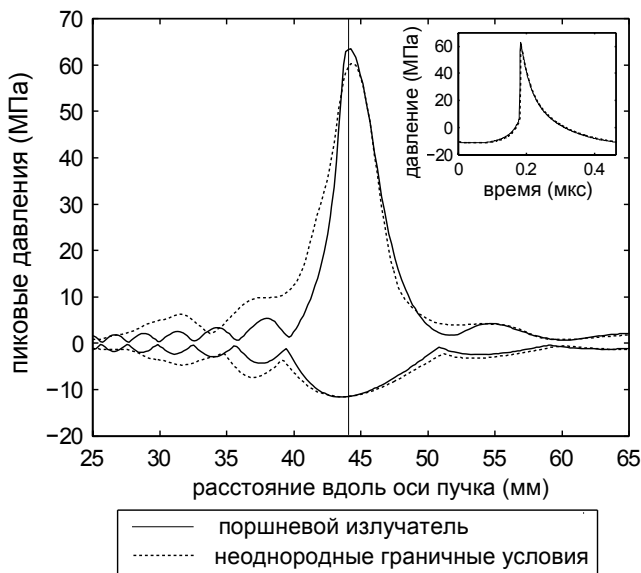


Рис. 6.10. Распределения пикового положительного и отрицательного давлений на оси пучка, рассчитанные для равномерного ($p_0 = 0.39$ МПа) и неравномерного распределений давления на излучателе. Вертикальной линией показано положение фокуса, профили волны в котором представлены на дополнительном графике.

Чтобы оценить, какое влияние оказывает ширина полосы гидрофона на профиль волны, на рис. 6.11 (справа) представлены профили волны, измеренные гидрофонами FOPH с различной шириной полосы пропускания. При измерениях слабо искаженных профилей (малых давлений) получаемые данные практически совпадали. При увеличении амплитуды на излучателе ($p_0 = 0.39$ МПа), когда в профиле образовывался разрыв, величина положительного пикового давления, измеренная FOPH 2000 с более широкой полосой чувствительности (100 МГц), была на 10 МПа выше, чем измеренная FOPH 500 с более узкой шириной полосы (30 МГц), и ближе к результатам численного моделирования (рис. 6.5).

проводилась деконволюция измеренного сигнала с использованием импульсного отклика гидрофона, предоставляемого производителем. Характерные профили сигналов, измеренные FOPH и полученные после деконволюции, показаны на рис. 6.11. Без обработки сигнала пиковое положительное давление сильно завышено и форма волны искажена. Таким образом, точное измерение импульсного отклика измерительной системы и обработка сигнала необходимы для определения параметров ударноволновых профилей.

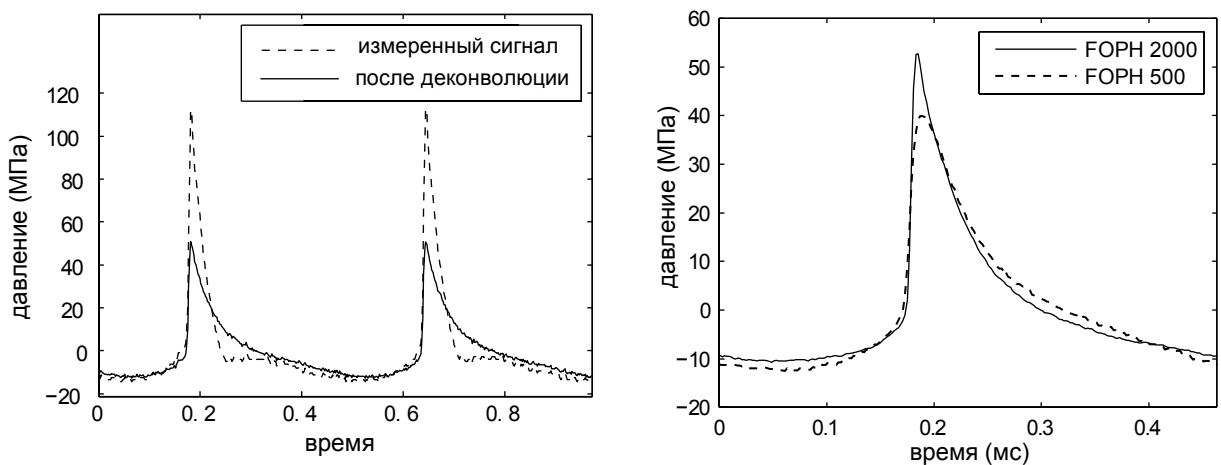


Рис. 6.11. Характерный профиль волны с ударным фронтом в фокусе ($p_0 = 0.39$ МПа), измеренный FOPH 2000 до и после деконволюции (слева); сравнение профилей после деконволюции измерений гидрофонами FOPH 500 и 2000 (справа).

Приведенные выше результаты показывают, что точность измерения величины максимума узкого пика положительного давления, а значит и амплитуда ударного фронта в основном определялись шириной полосы гидрофона. Даже полосы в 100 МГц (50 гармоник основной частоты) оказалось недостаточно. Численный эксперимент позволяет более точно определить амплитуду ударного фронта в фокусе, что было подтверждено позднее экспериментами по наблюдению сверхбыстрого кипения в гелевом фантоме (глава 7). Помимо ограниченности ширины чувствительности гидрофона, важную роль играет также точность ее определения, поскольку предоставляемые производителем кривые импульсного отклика FOPH не ориентированы на измерение узких пиков длительностью в доли микросекунд.

Таким образом, задача определения пространственных распределений и абсолютных значений давления полей источников мощного ультразвука с неравномерным распределением поля на поверхности может быть решена путем моделирования на основе уравнения ХЗК в воде с граничным условием в виде поршневого излучателя. Параметры (радиус, фокусное расстояние и амплитуда) излучателя выбираются, основываясь на данных сканирования поля реального излучателя в линейном режиме фокусировки. При образовании разрывов в профиле волны в фокусе численный эксперимент позволяет достичь большей точности в определении параметров поля по сравнению с реальным экспериментом, точность которого ограничена параметрами измерительной системы. Как будет показано ниже (§6.7), предлагаемый подход справедлив не только для одиночных элементов, но и для излучателей с гораздо более сложной геометрией, например, многоэлементных двумерных фазированных решеток.

Развитый подход имеет важное практическое значение для оценки степени проявления нелинейных эффектов при работе HIFU-устройств. Как было показано, эта задача сводится к численному моделированию уравнения ХЗК с граничным условием в виде поршня. Уравнение ХЗК в слабопоглощающей среде содержит всего два безразмерных параметра G (коэффициент линейной фокусировки) и N (амплитуда на излучателе). Проведение моделирования в широком диапазоне этих параметров, характерном для систем ультразвуковой хирургии, позволяет по полученным данным оценить роль нелинейных эффектов для произвольного излучателя уже без моделирования, возможности для которого есть не во всех исследовательских группах. Численное решение такой двухпараметрической задачи имеет также важное фундаментальное значение, поскольку позволяет получить оценки коэффициентов фокусировки и предельно допустимых ультразвуковых полей в нелинейных пучках. Этой задаче посвящен следующий параграф данной главы.

6.4. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков в воде и предельные значения параметров разрывных волн

В данной главе эта задача решается численно на основе уравнения ХЗК (6.1) в широком диапазоне параметров, характерных для медицинских ультразвуковых преобразователей. Моделирование проводится в слабопоглощающей жидкости (таким образом, $A_B = 0.0052$, $A_T = 0$ в уравнении (6.5) для пучков исходно гармонических волн с равномерным распределением амплитуды давления на источнике (6.2). Рассчитываются временные профили волны, пространственные распределения пиковых давлений, интенсивности, а также мощность тепловыделения, происходящего в рассматриваемом случае в основном за счет поглощения энергии волны на образующихся разрывах. Получены максимальные коэффициенты концентрации фокусирующих систем, работающих в нелинейных режимах, а также предельные значения различных акустических параметров в фокальной области пучка. Проводится сравнение полученных решений с данными экспериментов и известными аналитическими оценками.

Рассмотрим вначале несколько существующих аналитических методов расчета величины давления и уровней его насыщения в фокусе сферического излучателя для исходно гармонических волн с целью дальнейшего сравнения аналитических оценок с полученными в данной работе численными результатами. Один из таких подходов был предложен в работе Наугольных и Романенко [220]. Предполагается, что от поверхности сферического концентратора с фокусным расстоянием F до поверхности сферы радиуса x_ϕ распространяется сходящаяся сферическая волна (рис. 6.12), описываемая одномерным обобщённым уравнением простых волн [254]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0. \quad (6.11)$$

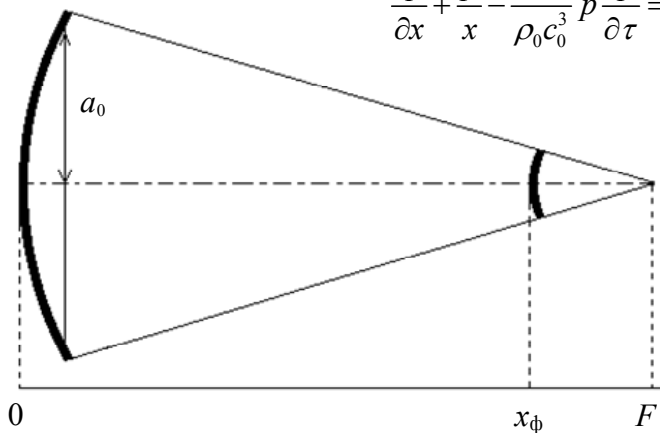


Рис. 6.12. Геометрия задачи.

Расстояние x_ϕ определяется по равенству амплитуды давления в одномерной линейной сферической сходящейся волне в точке x_ϕ и амплитуды давления A в геометрическом фокусе линейного фокусированного пучка, описываемого параболическим

уравнением теории дифракции [1]:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial x} + \Delta_{\perp} A = 0, \quad (6.12)$$

с граничным условием для фокусирующего поршневого излучателя:

$$A(x=0) = \begin{cases} A_0 e^{i(\omega_0 \tau + kr^2/2F)}, & r < a_0 \\ 0, & r > a_0 \end{cases} \quad (6.13)$$

или для гауссовского излучателя $A(x=0) = A_0 e^{i(\omega_0 \tau + kr^2/2F)} e^{-r^2/a_0^2}$. Здесь A_0 – амплитуда давления на излучателе, r – координата поперек оси пучка, a_0 – радиус излучателя (рис. 6.13). Используя точное решение уравнения (3.2) на оси пучка для фокусирующего поршневого излучателя:

$$A(x) = \frac{2A_0}{1-x/F} \sin\left(G \frac{1-x/F}{2x/F}\right), \quad (6.14)$$

или для гауссовского излучателя:

$$A(x) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-x/F)^2 + (x/F)^2/G^2}}, \quad (6.15)$$

получим, что амплитуда поля в геометрическом фокусе пучка $A(x=F)$ равна $A_0 G$, где G –

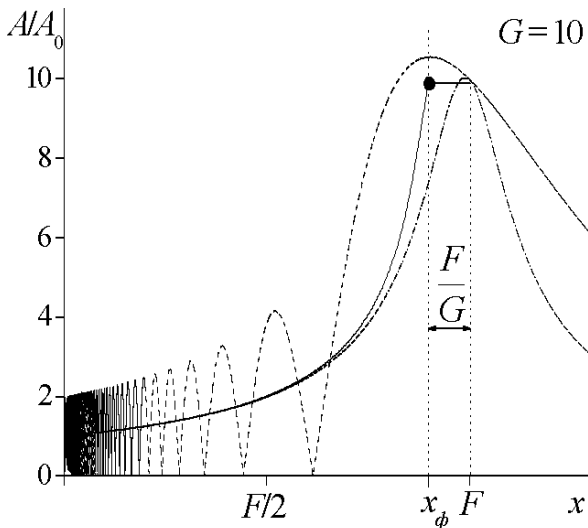


Рис. 6.13. Безразмерная амплитуда гармонической волны вдоль оси излучателя для одномерной сферически сходящейся волны (сплошная кривая) и линейного фокусированного пучка (пунктир – поршневой излучатель, штрихпунктир – гауссовский) с коэффициентом концентрации $G = 10$.

коэффициент усиления поля в фокусе по давлению. Подставляя найденное значение $A_0 G$ в решение линейной задачи для сферически сходящейся волны, получим значение $x_{\phi} = F/G$. На этом расстоянии от фокуса рассчитывается давление волны для одномерной нелинейной задачи (6.11). Для этого вначале с помощью замены

$$\text{переменных} \quad P = -\frac{P}{p_0} \frac{x}{F}, \quad \theta = \omega \tau,$$

$$z = \varepsilon \omega \frac{P_0}{\rho_0 c_0^3} F \ln \frac{F}{x} \quad \text{уравнение} \quad (6.11)$$

переписывается в безразмерном виде:

$$\frac{\partial P}{\partial z} - P \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0. \quad (6.16)$$

Это уравнение простых волн, для которого значение амплитуды пилообразной волны на стадии развитых разрывов [1] равно:

$$P_{раз} \approx \frac{\pi}{1+z} \approx \frac{\pi}{z}. \quad (6.17)$$

Переходя к размерным переменным, получаем следующую зависимость амплитуды нелинейной пилообразной волны от расстояния x :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^3}{2\varepsilon f x} \frac{1}{\ln(F/x)}. \quad (6.18)$$

Тогда на расстоянии $x_\phi = F/G$ амплитуда волны, т.е. давление насыщения, и её интенсивность будут равны

$$p_{нас}(x_\phi) = \frac{\rho_0 c_0^3}{2\varepsilon f_0 x_\phi} \frac{1}{\ln(F/x_\phi)} = \frac{\rho_0 c_0^3}{2\varepsilon f_0 F} \frac{G}{\ln G} = \frac{\pi \rho_0 c_0^2}{2\varepsilon} \left(\frac{a_0}{F}\right)^2 \frac{1}{\ln G}. \quad (6.19)$$

Из полученного решения (6.19) видно, что уровень насыщения давления $p_{нас}$ зависит от геометрии излучателя (угла схождения волны к фокусу $\sin \alpha = a_0/F$), характерного внутреннего давления среды $\rho_0 c_0^2$ и нелинейного параметра среды ε . Считая форму волны пилообразной с давлением в максимуме $p_{нас}$, можно рассчитать предельное значение интенсивности $I_{нас}$ в фокусе пучка:

$$I_{нас}(x_\phi) = \frac{\rho_0 c_0^5}{12\varepsilon^2 F^2 f_0^2} \frac{G^2}{(\ln G)^2} = \frac{\pi^2 \rho_0 c_0^3}{12\varepsilon} \left(\frac{a_0}{F}\right)^4 \frac{1}{(\ln G)^2}. \quad (6.20)$$

При выводе выражения (6.19) существует некоторый произвол в выборе расстояния x_ϕ . Если, к примеру, выбрать x_ϕ как расстояние, на котором достигается максимум поля в линейном фокусированном пучке, то это даст несколько большее значение x_ϕ для поршневого излучателя и, как следует из формулы (6.19), меньшую величину давления насыщения $p_{нас}$. Как видно из рис. 6.13, при одинаковых значениях в геометрическом фокусе максимум амплитуды давления для поршневого излучателя достигается дальше от фокуса в направлении излучателя по сравнению с гауссовским пучком. Следовательно, для поршневого излучателя данный выбор x_ϕ даст меньшую величину давления насыщения в фокусе, чем для гауссова источника, что в дальнейшем подтвердило численное моделирование.

Одной из наиболее важных характеристик фокусирующих систем является коэффициент фокусировки, или коэффициент концентрации, то есть отношение величины какого-либо акустического параметра поля в фокусе $x = F$ к соответствующей величине на излучателе [255]. В случае фокусировки линейной гармонической волны (3.4) коэффициент концентрации для амплитуды давления $G = A_F / A_0 = ka_0^2 / 2F$ однозначно определяет усиление всех акустических параметров поля в фокусе: пиковое положительное и отрицательное давления в профиле увеличиваются в G раз, средняя по периоду интенсивность волны и мощность тепловыделения – в G^2 раз.

Акустические параметры в нелинейном пучке связаны между собой гораздо более сложным образом. Профиль волны становится несимметричным за счет совместного действия нелинейных и дифракционных эффектов, пиковое положительное давление существенно превышает пиковое отрицательное, а для определения интенсивности волны и мощности тепловыделения уже недостаточно амплитудных значений давления – необходим расчет всего временного профиля либо полного спектра волны (4.4). По мере увеличения исходной амплитуды волны, т.е. увеличения параметра N в уравнении (6.5), коэффициенты концентрации будут изменяться, причем различным образом для различных акустических параметров и для различных значений линейного коэффициента фокусировки G .

На рис. 6.14 приведены зависимости поправочных индексов $K = G_{\text{нелин}} / G_{\text{лин}}$ для нелинейной корректировки коэффициентов концентрации поля в фокусе от величины параметра нелинейности N . Кривые рассчитаны для пиковых положительного (а) и отрицательного (б) давлений, а также интенсивности волны (в). Линейный случай фокусировки волны малой амплитуды соответствует значению $N = 0$, при этом поправочный индекс равен единице. Как видно из рисунка, с ростом исходной амплитуды на источнике, т.е. увеличением N , коэффициенты концентрации поля в фокусе заметно возрастают для пикового положительного давления (K_{p_+}) и интенсивности (K_I). Эффект улучшения фокусировки в нелинейном пучке выражен сильнее для больших значений линейного коэффициента концентрации $G = 40$ и 60 , т.е. для более фокусированных излучателей. Концентрация поля по интенсивности возрастает до полутора раз по сравнению с линейным случаем, что связано с лучшей фокусировкой высших гармоник. Для пикового положительного давления наблюдается самое сильное, до 3.5 раз, увеличение коэффициента концентрации, что объясняется в основном дифракционным сдвигом фаз между высшими гармониками, а также их лучшей фокусировкой.

При увеличении линейного коэффициента фокусировки G ударный фронт формируется при меньшей исходной амплитуде волны и, соответственно, максимум

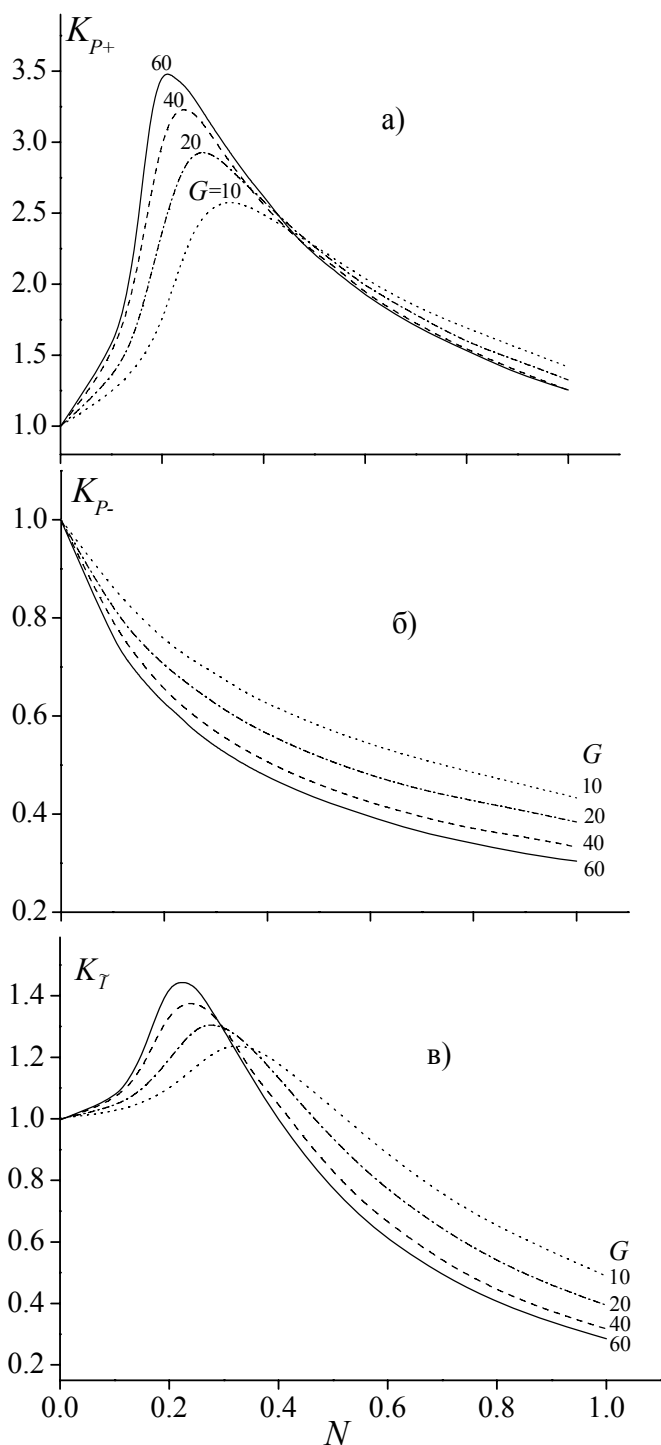


Рис. 6.14. Зависимости поправочных индексов для коррекции коэффициентов концентрации поля в фокусе нелинейного пучка для положительного пикового давления, p_+^F (а); отрицательного пикового давления, p_-^F (б); и интенсивности, I^F (в); от параметра нелинейности N . G – линейный коэффициент концентрации ($G = 10, 20, 40, 60$).

кривых усиления достигается при меньших значениях N . При дальнейшем повышении амплитуды на излучателе ударный фронт образуется в предфокальной области, что приводит к дополнительным потерям энергии волны на пути к фокусу и уменьшению поправочных индексов K_{P+} и K_T . Для пикового отрицательного давления (K_{P-}) коэффициент концентрации монотонно убывает при увеличении N , т.е. значения P_- в фокусе нелинейного пучка всегда меньше, чем рассчитанные в линейном приближении (рис. 6.14 (б)). В области максимумов кривых усиления, когда ударный фронт образуется вблизи фокуса, коэффициент концентрации для P_- составляет около 50% от его линейного значения.

Как показали расчеты, максимумы кривых усиления (рис. 6.14 (а) и (в)) соответствуют таким значениям N (или амплитуде на источнике), когда ударный фронт в профиле волны формируется вблизи фокуса, и наблюдается максимальное

различие между пиковым положительным и пиковым отрицательным давлениями. В этом случае, как видно из рис. 6.15, профиль волны до фокуса ($z = 0.95$) нелинейно искажен, но не содержит разрыва, а уже при $z = 1$ наблюдается сформировавшийся разрыв.

Отметим, что представленные на рис. 6.14 кривые позволяют оценить величины пиковых давлений и интенсивности в фокусе произвольного поршневого ультразвукового преобразователя при любом уровне его возбуждения. Тем самым, они могут служить калибровочными кривыми для нелинейной корректировки акустических параметров поля в фокусе мощных ультразвуковых преобразователей. Данные результаты

представляют несомненную практическую важность и могут использоваться для определения величин акустических параметров нелинейного поля в фокусе и выбора оптимальных уровней облучения.

При еще большем увеличении исходной амплитуды давления ударные фронты формируются ближе к излучателю, происходит эффективное поглощение энергии на разрывах и постепенно наступает насыщение акустического поля в фокусе. На рис. 6.16 приведены рассчитанные кривые насыщения для пиковых значений давления (а, б) и интенсивности (в). Справа на графиках горизонтальными отрезками отмечены уровни насыщения, соответствующие аналитическим выражениям (6.19, 6.10). Для удобства графики здесь также представлены в безразмерных величинах. На верхних двух графиках оси ординат соответствуют величинам, пропорциональным значениям пиковых давлений в фокусе $NK_{p_+} = p_+(F) \cdot \varepsilon \omega_0 F / c_0^3 \rho_0 G$ и $NK_{p_-} = p_-(F) \cdot \varepsilon \omega_0 F / c_0^3 \rho_0 G$, на нижнем графике – интенсивности волны $N^2 K_I = I(F) \cdot 2(\varepsilon \omega_0 F)^2 / c_0^5 \rho_0 G^2$. Как видно из рис. 6.16, уровень насыщения для отрицательного пикового давления приблизительно в два раза ниже, а для положительного пикового давления – в два раза выше аналитической оценки (6.19). В то же время для интенсивности и полусуммы давлений аналитические результаты, полученные для простой модели одномерной сферически сходящейся волны (6.19, 6.10), и численные данные достаточно близки. Следует отметить, что чем больше линейный

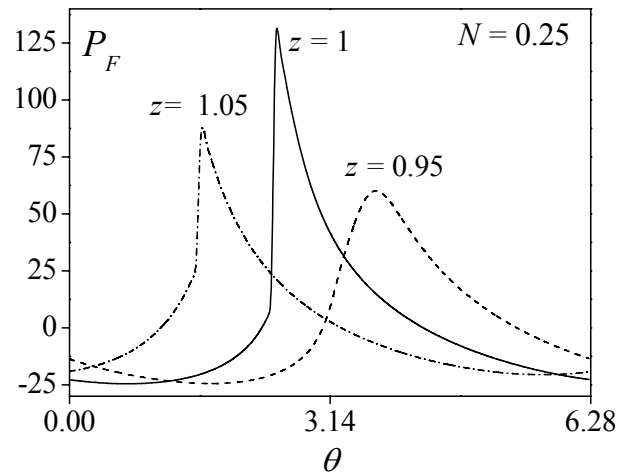


Рис. 6.15. Профили волны на различных расстояниях вдоль оси пучка вблизи фокуса, $G = 40$, $N = 0.25$.

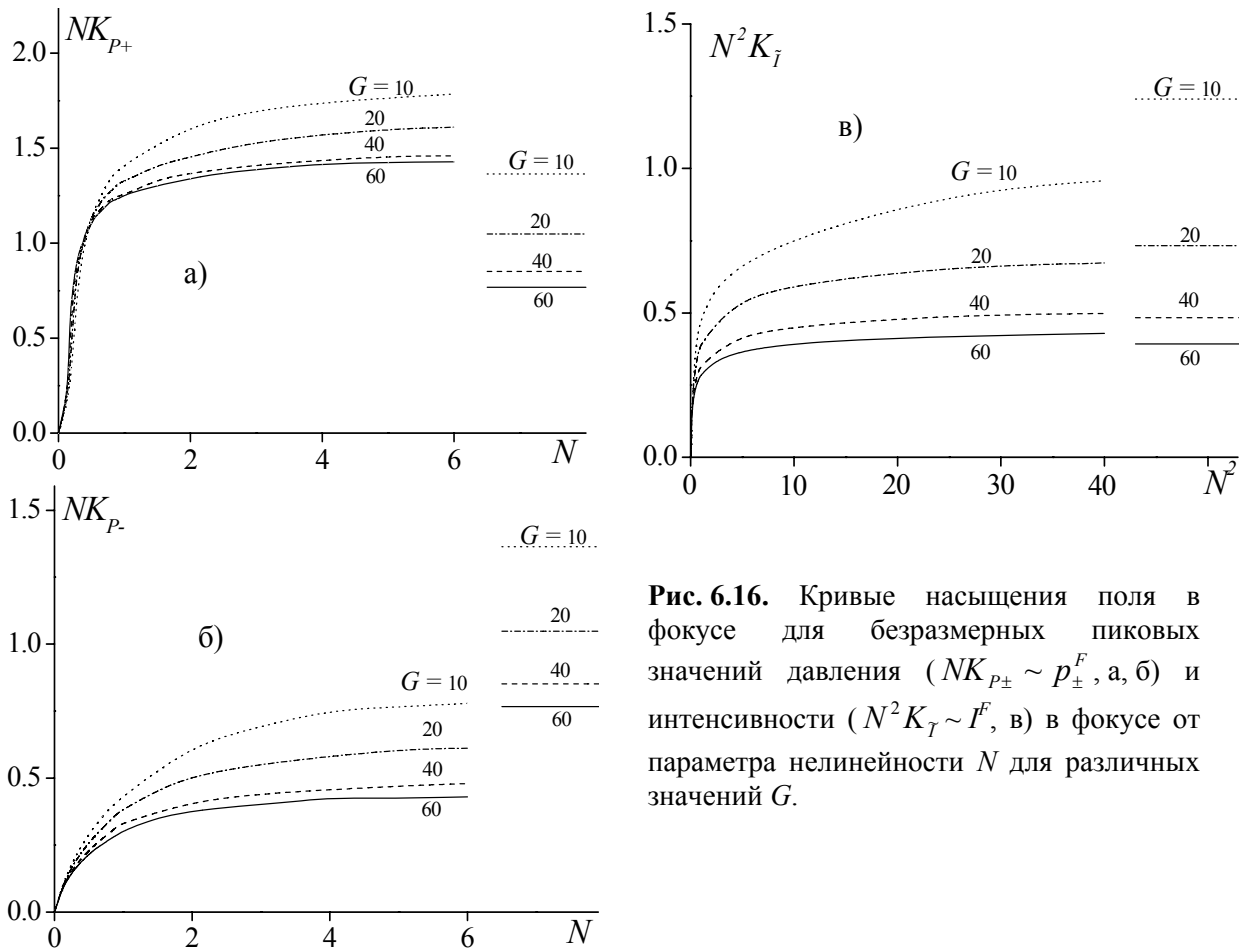


Рис. 6.16. Кривые насыщения поля в фокусе для безразмерных пиковых значений давления ($NK_{P_{\pm}} \sim p_{\pm}^F$, а, б) и интенсивности ($N^2 K_{\tilde{I}} \sim I^F$, в) в фокусе от параметра нелинейности N для различных значений G .

коэффициент концентрации излучателя G , тем при меньших значениях N достигается насыщение поля в фокусе.

Расчеты показали, что для слабо фокусирующих излучателей, $G < 10$, максимум поля в области фокуса при достаточно больших значениях параметра N может оказаться меньше, чем в предфокальном максимуме, хотя насыщение в фокусе еще не наступило. Такая ситуация показана на рис. 6.17, где представлены распределения безразмерных

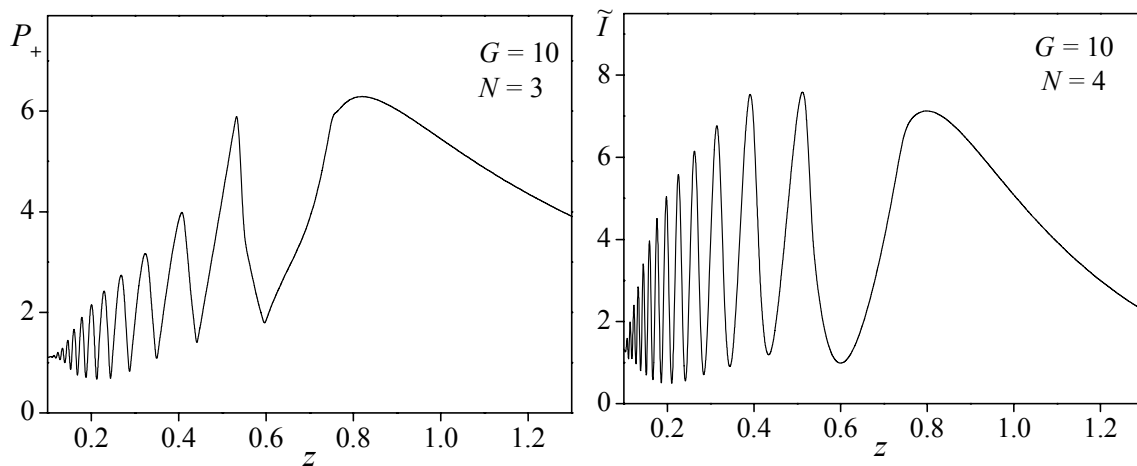


Рис. 6.17. Распределение безразмерных давления P_+ и интенсивности \tilde{I} вдоль оси пучка в режиме развитых разрывов ($G = 10, N = 3, N = 4$).

пикового положительного давления P_+ и интенсивности \tilde{I} волны вдоль оси пучка в

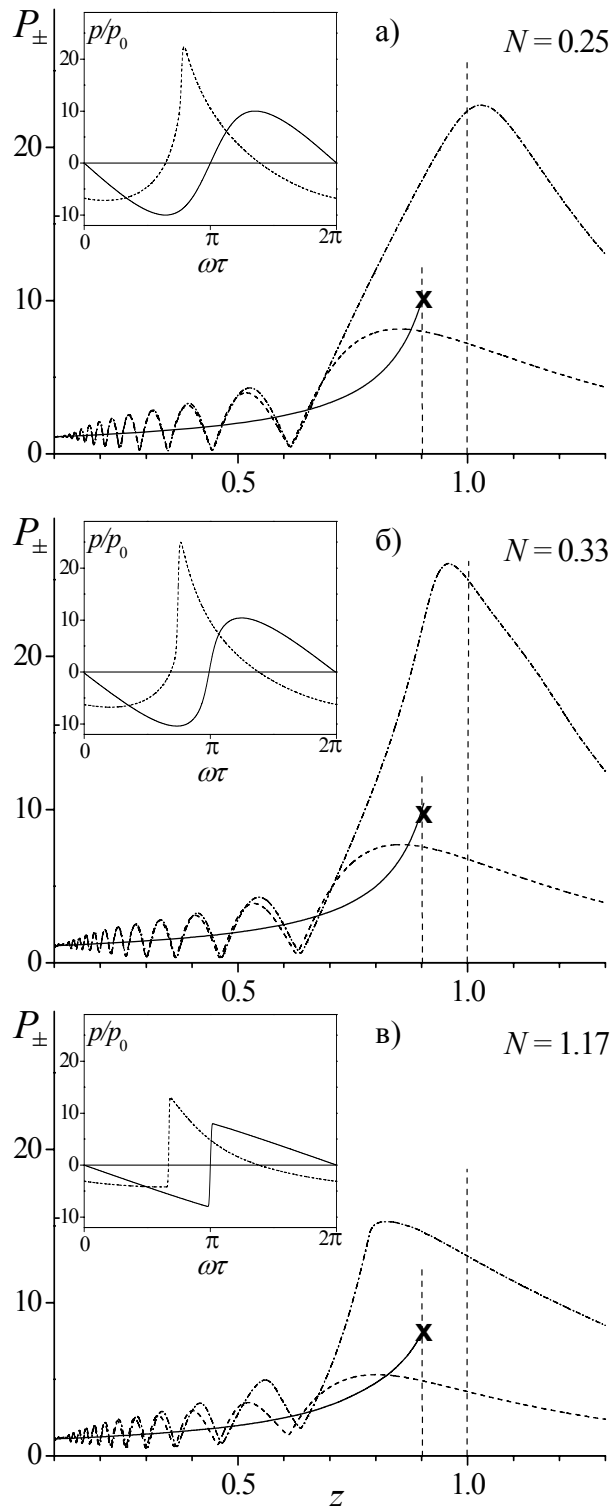


Рис. 6.18. Безразмерные пиковые значения давления P_+ и P_- вдоль оси излучателя ($G = 10$) для параметров нелинейности $N = 0.25$ (а), 0.33 (б) и 1.17 (в). Сплошные кривые соответствуют амплитуде давления в одномерной сферически сходящейся нелинейной волне ($P_+ = P_-$); пунктирные – давлению P_- и штрихпунктирные – давлению P_+ в пучке. На малых графиках показаны профили волны в точке геометрического фокуса для пучка и на расстоянии $1/G$ до фокуса для одномерной сферически сходящейся волны.

режиме развитых разрывов ($G = 10$, $N = 3$, $N = 4$). Для сильно фокусирующих преобразователей, $G = 20, 40, 60$, максимум поля достигается внутри фокального пространственного пика вплоть до достижения уровня насыщения.

Рисунок 6.18 иллюстрирует, насколько акустическое поле нелинейной сферической сходящейся одномерной волны (6.11) отличается от поля реального излучателя, которое имеет сильно «изрезанное» ближнее поле. На рисунке показаны зависимости безразмерных пиковых давлений P_+ и P_- (штриховая и штрихпунктирная кривые, соответственно), полученные при численном решении уравнения ХЗК в воде (6.1), и амплитуды давления (сплошная кривая) в одномерной нелинейной сферической сходящейся волне (6.11) от координаты z вдоль оси пучка. Графики представлены для коэффициента линейной фокусировки $G = 10$ и различных значений параметра N , при которых разрыв в профиле волны ещё не формируется ($N = 0.25$, а), формируется вблизи фокуса ($N = 0.33$, б) и до фокуса ($N = 1.17$,

в). Крестами на графиках отмечены амплитуды давления в одномерной волне на расстоянии $1/G = 0.1$ от излучателя, где аналитически рассчитываются уровни насыщения (6.19). В верхнем левом углу рисунков показаны соответствующие профили волны, полученные при решении уравнения ХЗК в точке геометрического фокуса, а для одномерной сферической сходящейся волны – на расстоянии $1/G$ до фокуса. Как видно из рисунков, амплитуда давления, рассчитанная в рамках одномерной нелинейной модели, сильно занижена для положительного пикового давления в фокусе и, наоборот, завышена для отрицательного пикового давления, что было также показано для давлений насыщения (рис. 6.16).

В данной работе коэффициенты фокусировки рассчитываются в геометрическом фокусе нелинейного пучка. Однако, как видно из рис. 6.18, максимальные по пространству значения различных акустических параметров поля будут отличаться от соответствующих значений в геометрическом фокусе. Например, для значений параметра нелинейности N , при которых достигается максимум коэффициента концентрации положительного пикового давления (см. рис. 6.14), максимальное по пространству давление P_+ отличается от давления в геометрическом фокусе для $G = 10$ на 13.5 %, для $G = 20$ на 3.4 %, для $G = 40$ на 0.8 %, а для $G = 60$ практически не отличается. Отличие уровней насыщения положительного пикового давления, рассчитанных в геометрическом фокусе (рис. 6.16) и в точке пространственного максимума поля, изменяется немонотонно и составляет 12 % ($G = 10$), 0.38 % ($G = 20$), 6 % ($G = 40$) и 20 % ($G = 60$). Указанные отличия, безусловно, необходимо принимать во внимание при оценке коэффициентов концентрации и предельно достижимых полей излучателей мощного ультразвука.

Для иллюстрации практического использования калибровочных кривых на рис. 6.14 рассмотрим следующий пример. Пусть сфокусированное поле в воде создается излучателем с частотой $f_0 = 2.158$ МГц, радиусом $a_0 = 21$ мм и фокусным расстоянием $F = 44.4$ мм (см. раздел 2.4.1). При акустической мощности 120 Вт амплитуда давления на излучателе составляет $p_0 = 0.4$ МПа, интенсивность $I_0 = 5$ Вт/см², что соответствует значению безразмерного параметра $N = 0.25$ [239]. На основе кривых нелинейной коррекции коэффициентов фокусировки (рис. 6.14) оценим величины акустических параметров пучка в фокусе для полученных значений $N = 0.25$ и $G = 48$. Как видно из рисунка, в данном режиме величины поправочных индексов для коэффициентов фокусировки по положительному пиковому давлению и интенсивности близки к максимальным. Выберем величины поправочных индексов между кривыми для $G = 40$ и $G = 60$: $K_{P_+} = 3.27$, $K_{P_-} = 0.6$ и $K_I = 1.4$. Тогда в фокусе получим:

$p_+(F) = p_0 G K_{p_+} = 61.4$ МПа, $p_-(F) = p_0 G K_{p_-} = 10.8$ МПа, $I(F) = I_0 G^2 K_{\bar{\gamma}} = 16.6$ кВт/см². При этом линейные оценки дают существенно отличающиеся значения 19 МПа для пиковых давлений и 11.5 кВт/см² для интенсивности волны в фокусе. Сравним полученные значения с результатами численного моделирования для данного излучателя и данного режима, а также с результатами измерений в воде. На рис. 6.19 показан профиль экспериментального импульса в фокусе (а), а также сравнение двух периодов измеренного и рассчитанного сигналов (б) и их спектров (в). Сплошная линия соответствует измеренным данным, пунктирная – результатам моделирования. Как видно из рисунка, результаты измерений хорошо согласуются с численным расчётом, а пиковые параметры рассчитанного профиля ($p_+ = 63.5$ МПа и $p_- = 11.5$ МПа) практически совпадают с полученными оценками по кривым рис. 6.14. Некоторое отличие экспериментальных и численных данных для положительного пикового давления объясняется ограниченностью полосы пропускания гидрофона (100 МГц), что подробно обсуждалось в главе 2. Таким образом, развитый алгоритм позволяет с высокой точностью описывать поля фокусирующих излучателей, работающих в режиме

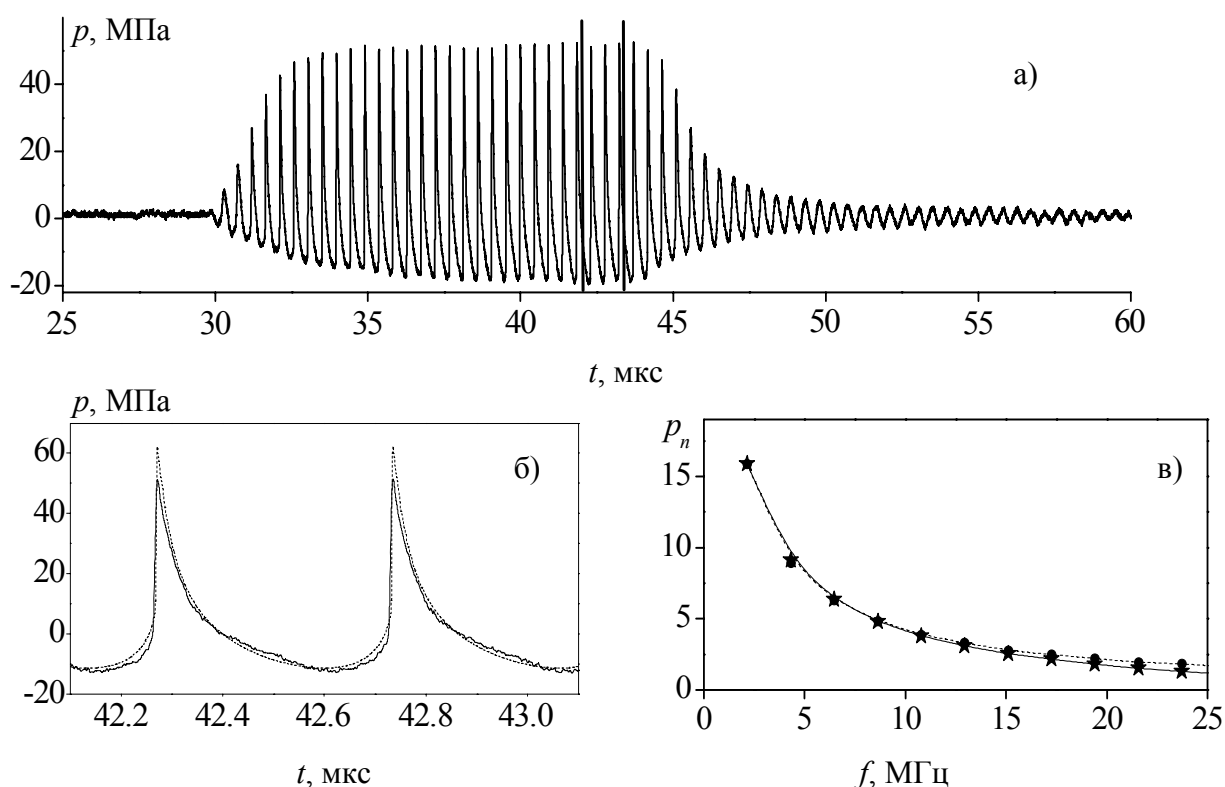


Рис. 6.19. Сравнение результатов измерений (сплошные кривые) и численного моделирования (пунктирные кривые) профиля давления в фокусе: (а) – измеренный сигнал; (б) – два периода в профиле волны между вертикальными линиями на графике измеренного сигнала и (в) – соответствующий им спектр. Здесь p_n – амплитуда n -й гармоники исходного сигнала, $p_1 = p_0$ при $z = 0$. Параметры излучателя: радиус 21 мм, фокусное расстояние 44.4 мм, частота 2.158 МГц, амплитуда давления 0.4 МПа, что соответствует значениям $G = 48$ и $N = 0.25$.

разрывных волн, а полученные в результате моделирования результаты могут быть использованы как альтернатива реальным измерениям.

Существующий предел прочности пьезокерамики и кавитационные процессы делают технически трудным достижение насыщения в эксперименте. Используя результаты рис. 6.16, можно рассчитать предельные значения параметров поля в фокусе рассмотренного выше излучателя: предельное положительное пиковое давление составляет 117 МПа, отрицательное 39 МПа, интенсивность 96 кВт/см². В эксперименте были измерены поля в фокусе вплоть до значений $p_+^F = 80$ МПа, $p_-^F = 15$ МПа, $I^F = 33$ кВт/см² [241].

Рассмотрим теперь характерные величины параметров полей для некоторых других преобразователей, применяющихся в экспериментальных исследованиях по ультразвуковой хирургии. Например, ультразвуковой излучатель, использующийся в группе проф. Г. тер Хаар (Марсден госпиталь, Саттон, Великобритания), имеет частоту $f = 1.7$ МГц, радиус $a_0 = 42$ мм и фокусное расстояние $F = 150$ мм, что соответствует $G = 42.2$. В типичном режиме его использования для получения одиночных тепловых разрушений интенсивность поля в фокусе в ткани по линейной оценке составляет 1500 Вт/см² [203]. В соответствии с рис. 6.14, этот режим ($N = 0.27$) близок к максимуму на кривой усиления положительного пикового давления. В сильно фокусированных полях $G > 20$ акустические параметры волны в ткани и в воде при одинаковой интенсивности в фокусе будут близки, поэтому и в ткани в рассматриваемом режиме фокальный профиль волны содержит ударный фронт и наблюдается максимальная пространственная локализация теплового воздействия. Предельные значения параметров поля в фокусе для данной установки: положительное пиковое давление составляет 35.5 МПа, отрицательное – 11.6 МПа. При этом полусумма пиковых положительного и отрицательного давлений 23.6 МПа и предельная интенсивность поля 10.6 кВт/см² близки к давлению насыщения 20.7 МПа и интенсивности 9.6 кВт/см², полученным с использованием формул (3.9, 3.10). Для излучателя с более высокой частотой $f_0 = 5.5$ МГц, радиусом $a_0 = 9.5$ мм и $F = 19$ мм ($G = 55$) предельное положительное пиковое давление в фокусе составляет 113 МПа, отрицательное 34.7 МПа, интенсивность 85 кВт/см². В эксперименте удалось измерить давления вплоть до $p_+ = 34.5$ МПа и $p_- = 15.5$ МПа, то есть также еще далекие от насыщения [256].

6.5. Пространственное распределение параметров акустического поля в нелинейных фокусированных пучках

Различные параметры акустического поля ответственны за различные физические механизмы воздействия, поэтому безусловный интерес представляет задача исследования пространственной локализации тех или иных акустических величин при различных условиях фокусировки [257]. Характерный вид распределений различных безразмерных параметров фокусированной волны вдоль оси пучка показан на рис. 6.20 для случая линейной фокусировки ($N = 0$); для случая, когда ударный фронт образуется в профиле волны вблизи фокуса ($N = 0.33$) и до фокуса ($N = 1.17$). Графики представлены для слабофокусирующего излучателя с линейным коэффициентом фокусировки $G = 10$. В этом случае при изменении параметров поля будут наблюдаться те же особенности, что и для излучателей с большим коэффициентом фокусировки, однако графики выглядят более наглядно. Здесь рассматривается распространение волны в непоглощающей среде (воде),

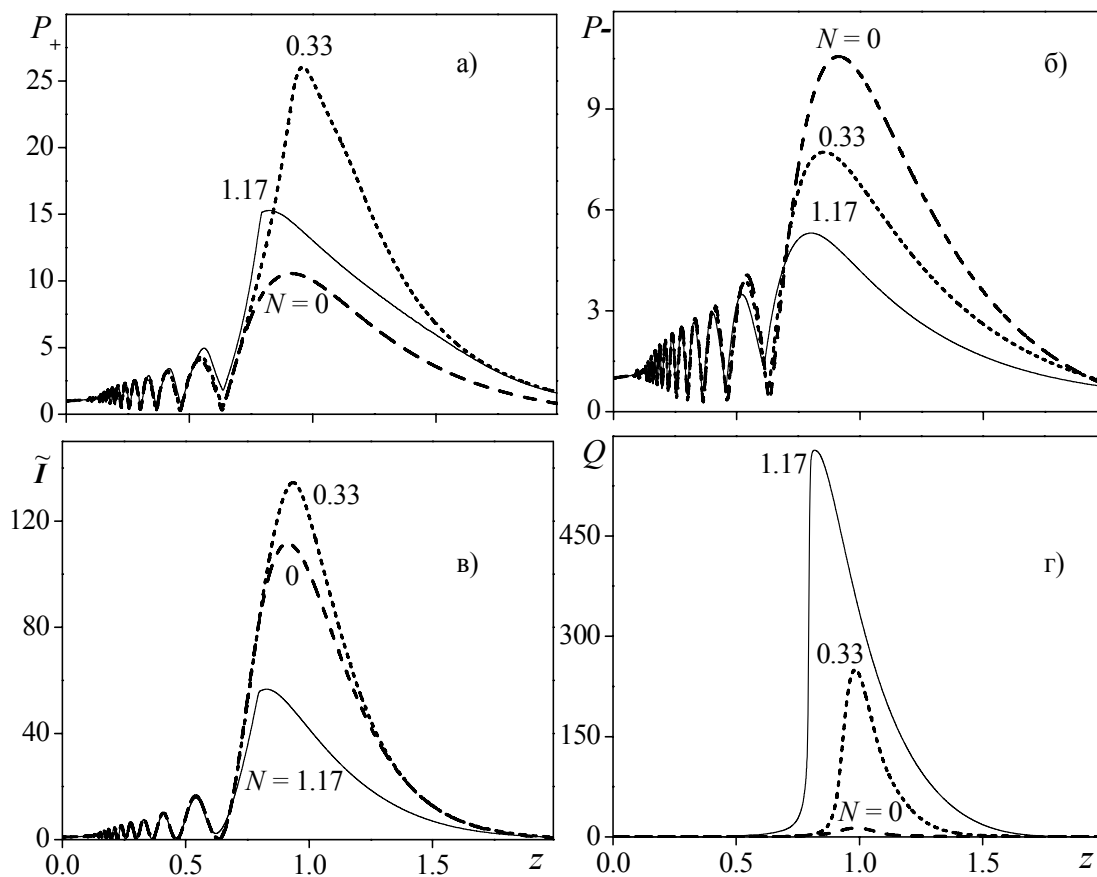


Рис. 6.20. Зависимости (а) пикового положительного P^+ и (б) пикового отрицательного P^- давления, (в) интенсивности \tilde{I} и (г) тепловыделения Q вдоль оси пучка для $G = 10$ и различных значений нелинейного параметра N .

поэтому заметный переход энергии волны в тепло будет происходить лишь после образования ударного фронта. Быстрый рост кривой тепловыделения на рис. 6.20 (г) соответствует расстоянию, на котором формируется ударный фронт. Из рисунка видно, что по мере усиления нелинейных эффектов (увеличение N) параметры акустического поля в фокальной области меняются различным образом. Фокальные значения пикового положительного давления P_+ и интенсивности волны \tilde{I} (рис. 6.20 (а, в)) вначале возрастают при увеличении N до образования разрыва ($N = 0.33$), а затем уменьшаются за счет поглощения энергии на этих разрывах ($N = 1.17$). При этом пиковое отрицательное давление P_- в фокусе монотонно убывает по мере увеличения N , а мощность тепловых источников Q , напротив, резко возрастает (рис. 6.20 (б, г)).

Из рис. 6.20 также видно, что положения пространственных максимумов для различных параметров волны, совпадающие при $N = 0$, смещаются вдоль оси пучка с увеличением N различным образом, причем в некоторых случаях немонотонно. Максимум мощности тепловыделения (рис. 6.20 (г)) с ростом N монотонно смещается в сторону излучателя. Как уже говорилось в предыдущем параграфе, значительный рост мощности тепловыделения начинается только после формирования разрыва в профиле волны. При увеличении амплитуды волны (то есть параметра N) ударный фронт начинает формироваться всё ближе к излучателю, поэтому по положению максимума мощности тепловыделения на оси пучка можно судить о том, на каком расстоянии от излучателя в профиле волны уже образовался разрыв. Максимум положительного пикового давления и интенсивности вначале, наоборот,

смещается в сторону геометрического фокуса, переходя даже в каком-то интервале значений N за фокус, а затем – в сторону излучателя. Более подробно за таким смещением максимума параметра P_+ можно проследить на рис. 6.21. Оно объясняется влиянием эффекта самодифракции пучка, происходящей за счет несимметричного искажения профиля и увеличения скорости распространения участков фазы

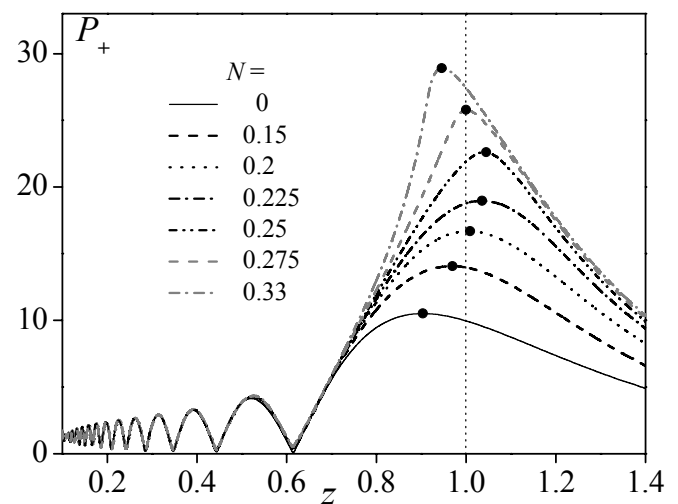


Рис. 6.21. Распределение пикового положительного давления вдоль оси пучка при различных значениях параметра нелинейности N в доразрывном режиме распространения ($G = 0$, $N = 0 \div 0.33$). Точками на графиках отмечены максимальные значения давления P_+ .

сжатия волны вблизи оси распространения. При слабом искажении профиля ($N = 0.25$) эффект самодефокусировки мал и приводит к смещению максимума P_+ от излучателя. В случае максимальной асимметрии ($N = 0.33$) эффект дефокусировки усиливается и максимум P_+ смещается в сторону излучателя. При дальнейшем увеличении N поглощение энергии волны на разрывах в предфокальной области приводит к дополнительному смещению максимума в сторону излучателя. Скорость распространения участков фазы разрежения в волне вблизи оси пучка с ростом N , напротив, уменьшается, что приводит к усилению самофокусировки и монотонному смещению максимума P_- к излучателю (рис. 6.20 (б)). На рис. 6.20 и 6.21 также можно видеть характерный «излом» вблизи максимума кривой давления P_+ . После нарастания давления до максимума происходит его быстрое уменьшение, особенно хорошо заметное при больших нелинейностях ($N = 1.17$ на рис. 6.20). Такой эффект появляется после того, как в профиле волны сформируется ударный фронт, на котором начинается эффективное поглощение энергии. Стоит отметить, что он наблюдается для сильно [255] и слабо фокусирующих излучателей [258], а также в случае плоских преобразователей [181].

На высоких уровнях нелинейности в главном фокальном максимуме наблюдается рассмотренное в главе 4 для ближнего поля плоского поршневого излучателя явление формирования двух разрывов на периоде волны [180]. На рис. 6.22 представлены распределение пиковых давлений вдоль оси излучателя и профили волны вблизи геометрического фокуса для сильно фокусирующего преобразователя $G = 40$ и параметра нелинейности $N = 0.5$. На рис. 6.22 (б) видно, что профиль волны содержит два узких ударных фронта, которые при распространении постепенно сближаются и около фокуса сливаются в один разрыв. Как известно, поглощение энергии на ударном фронте пропорционально амплитуде разрыва в третьей степени. Когда на периоде волны

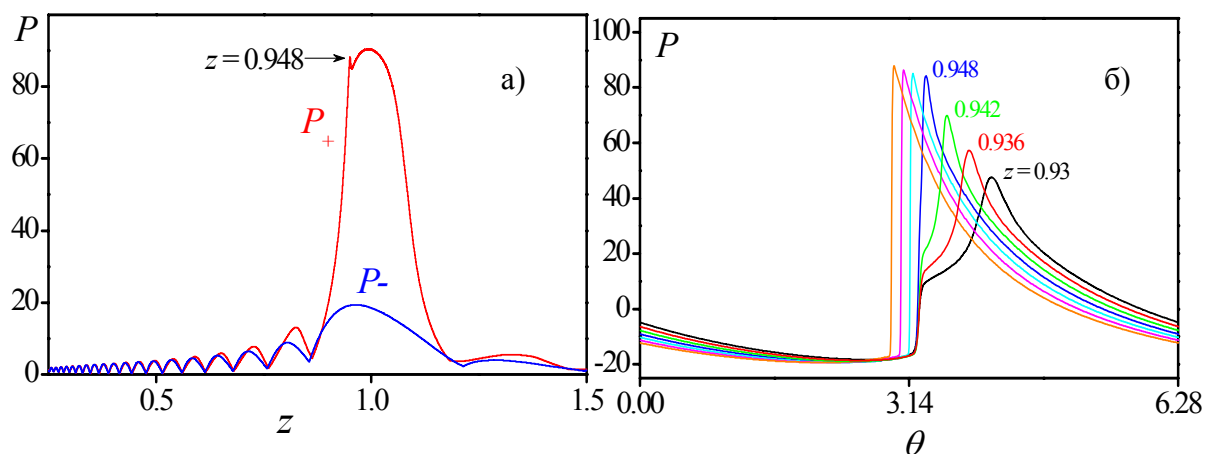


Рис. 6.22. (а) Пиковое положительное P_+ и отрицательное P_- давления вдоль оси распространения волны z ; (б) профили волны на оси пучка на разных расстояниях от излучателя вблизи максимума давления P_+ . $G = 40$, $N = 0.5$.

наблюдается два разрыва, поглощение энергии пропорционально сумме кубов двух амплитуд, $A_{S,1}^3 + A_{S,2}^3$. После слияния разрывов поглощение пропорционально уже кубу суммы двух амплитуд: $(A_{S,1} + A_{S,2})^3$, которое, очевидно, значительно больше, чем сумма $A_{S,1}^3 + A_{S,2}^3$. После слияния двух ударных фронтов в один амплитуда волны резко уменьшается за счет усиления поглощения энергии волны. Это хорошо видно на рис. 6.22 (а) при $z = 0.948$. Так как данный эффект наблюдается до геометрического фокуса, то далее происходит медленное увеличение давления за счет дифракционного усиления вблизи фокуса.

Как уже обсуждалось ранее (гл. 4) явление образования двух разрывов на одном периоде волны вызвано влиянием дифракции, в частности, приходом краевых волн. На рис. 6.23 представлены распределения профилей волны (а) и производной от профиля волны по времени $dP(z,\theta,R)/d\theta$ (б) в пространстве, то есть на различных расстояниях R от оси излучателя. Видно, что образование двух разрывов на одном периоде волны происходит не только вдоль оси излучателя, но и на некотором расстоянии от неё. «Ступеньке» на рис. 6.22 (а) соответствует треугольная голубая область на рис. 6.23 (а) или светлая область на рис. 6.23 (б). Стоит отметить, что явление образования двух разрывов в профиле волны наблюдается как в слабопоглощающей среде (воде), так и в биологической ткани, как для слабо фокусирующих излучателей, так и для преобразователей с большим коэффициентом усиления.

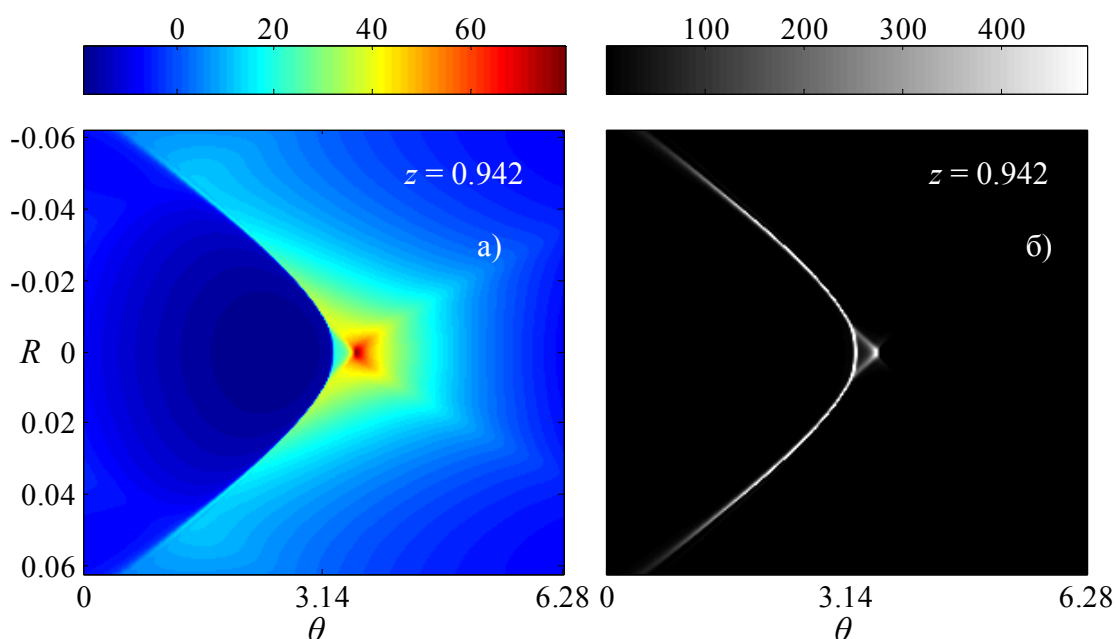


Рис. 6.23. Давление (а) и производная давления по времени $dP(z,\theta,R)/d\theta$ (б) на разных расстояниях от оси пучка R , но на фиксированном расстоянии от излучателя $z = 0.942$. $G = 40, N = 0.5$.

По мере усиления нелинейных эффектов происходит не только изменение коэффициентов концентрации и смещение пространственных максимумов для различных акустических параметров пучка, но меняется также их пространственная структура [259]. На рис. 6.24 показаны пространственные распределения положительного P_+ и отрицательного P_- пиковых значений давления, интенсивности \tilde{I} и мощности тепловыделения Q в плоскости, проходящей через ось пучка, в случае линейной (а, б) и нелинейной (в-е) фокусировки ($G = 40$). Значение параметра нелинейности $N = 0.25$ соответствует случаю максимального усиления коэффициента концентрации для положительного пикового давления (рис. 6.14). Графики представлены в линейном масштабе с восемью равными уровнями, изменяющимися от нуля до максимума

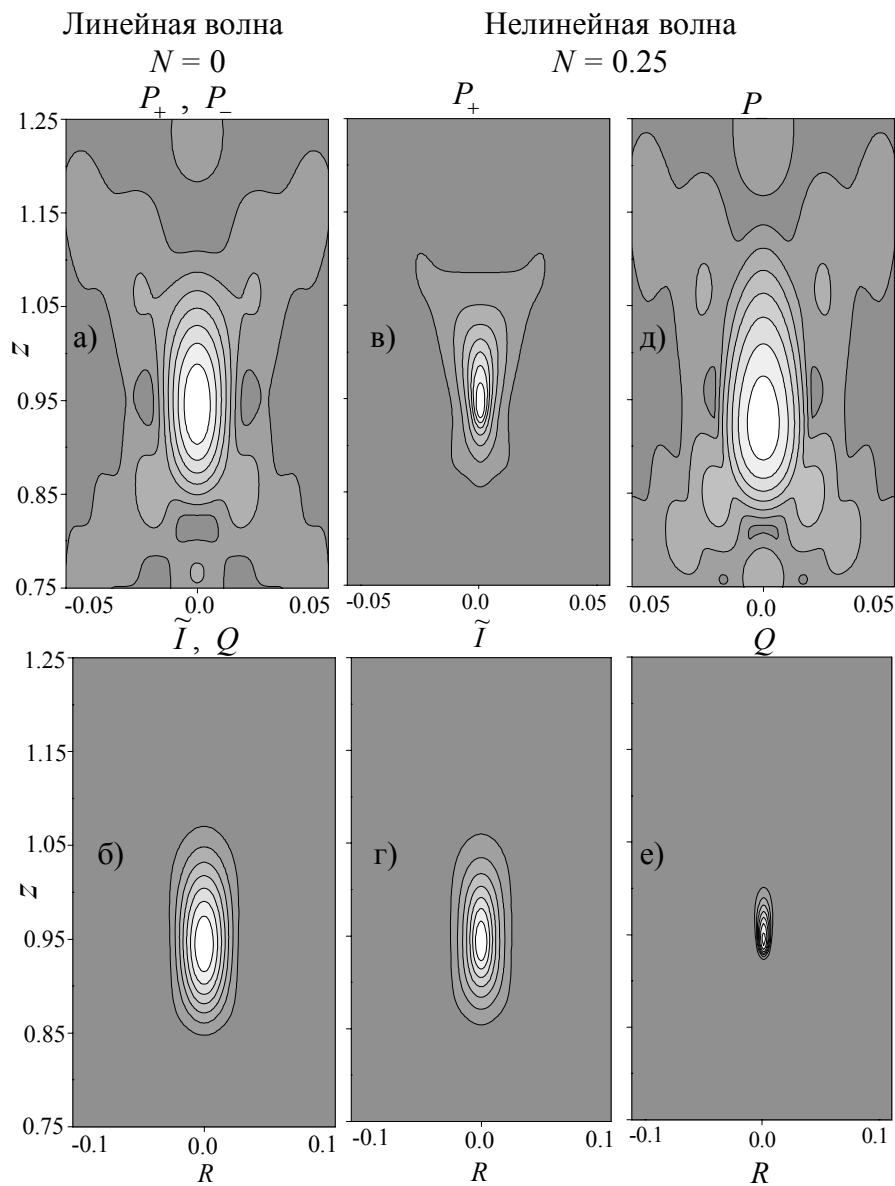


Рис. 6.24. Пространственные распределения в координатах (z, R) для пиковых значений давления P_+ и P_- , интенсивности \tilde{I} и тепловых источников Q в линейном ($N = 0$, а-б) и нелинейном ($N = 0.25$, в-е) пучках ($G = 40$).

амплитуды соответствующей величины. Для линейного пучка (колонка слева) показаны только распределения для амплитуды давления P_{\pm} и интенсивности \tilde{I} , поскольку в этом случае распределения пикового положительного и отрицательного давлений совпадают, а распределения интенсивности волны и мощности тепловыделения пропорциональны друг другу, т.е. также имеют одинаковую пространственную структуру. Как видно из рисунков, в нелинейном поле фокальная область положительного пикового давления (в) и особенно тепловых источников (е) существенно более локализована в пространстве по сравнению с линейным полем. Напротив, фокальная область отрицательного пикового давления (д) заметно смещена в сторону излучателя и гораздо менее локализована в пространстве, особенно в поперечном направлении. Распределение интенсивности в нелинейном пучке (г), на удивление, мало отличается от линейного случая, хотя в фокальном профиле волны уже образовался ударный фронт.

Рассмотрим теперь, как изменяется размер фокальной области с увеличением параметра N (рис. 6.25). Ширину ΔR и длину Δz фокального пятна будем определять по уровню, соответствующему половине максимума давления на оси. С увеличением амплитуды поля на излучателе величины ΔR и Δz для отрицательного пикового давления монотонно растут, а для пикового положительного, наоборот, уменьшаются вплоть до 50% при значении параметра N , соответствующем формированию разрыва вблизи фокуса. При дальнейшем увеличении N , ширина и длина фокальной области положительного пикового давления начинают расти, но в гораздо меньшей степени, чем для отрицательного пикового давления. Поскольку различные параметры волны определяют различные механизмы воздействия ультразвука на ткань, указанные тенденции в изменении пространственной локализации акустических параметров нелинейных полей

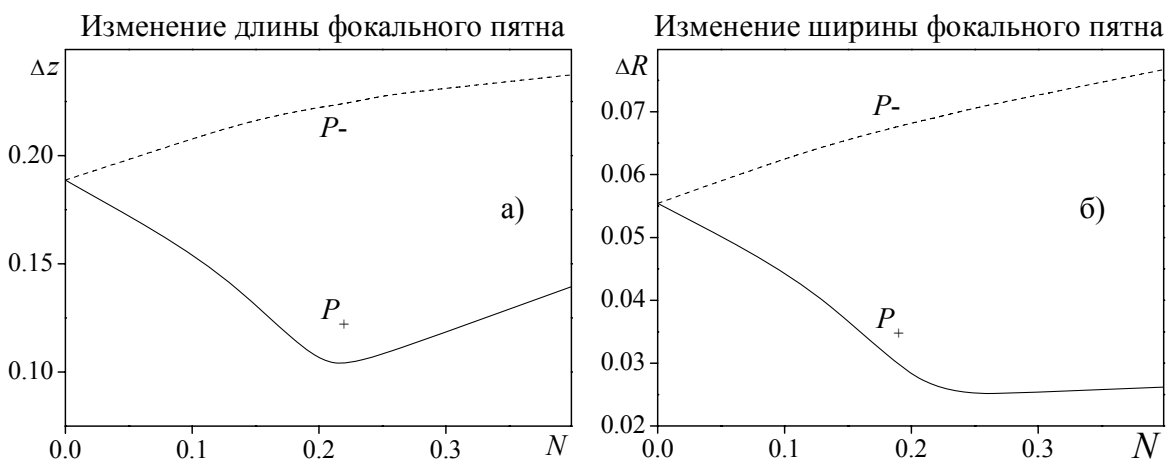


Рис. 6.25. Изменение размера пиковых положительного P_+ и отрицательного P_- давлений вдоль (а) и поперек (б) оси пучка с увеличением параметра нелинейности N (начальной амплитуды волны). Линейный коэффициент фокусировки $G = 40$.

необходимо учитывать при планировании терапевтического воздействия мощного ультразвука на биологическую ткань. Отрицательная фаза профиля волны в основном определяет кавитационное воздействие, в то время как поглощение энергии волны на разрывах приводит к быстрому выделению тепла. Таким образом, можно ожидать, что в мощных фокусированных полях кавитационные явления будут проявляться в более широкой области и ближе к излучателю по сравнению с тепловыми, а в области фокуса возможен сверхбыстрый локальный перегрев ткани. Результаты исследования этого явления приводятся в главе 7. Ясно также, что в нелинейном режиме фокусировки интенсивность волны не может быть использована в качестве параметра, характеризующего эффективность теплового воздействия.

Чтобы оценить характерные для практических медицинских приложений величины нелинейных изменений, рассмотрим одноэлементный HIFU преобразователь, использующийся в эксперименте (§6.1). Если при оценке параметров поля пользоваться линейной теорией, то фокальная область пучка имеет следующие размеры: ширину $\Delta R = 1.0$ мм и длину $\Delta z = 6.5$ мм. При амплитуде давления на излучателе $p_0 = 0.4$ МПа (или $N = 0.25$, ударный фронт образуется вблизи фокуса) ширина фокальной перетяжки положительного пикового давления составляет всего $\Delta R(P_+) = 0.5$ мм, а для отрицательного пикового давления – $\Delta R(P_-) = 1.3$ мм. Соответственно, длина фокальной перетяжки: $\Delta z(P_+) = 3.6$ мм и $\Delta z(P_-) = 8.0$ мм. То есть при линейной оценке размеры фокальной области были бы завышены почти на 50% для давления P_+ и занижены на 25% для давления P_- по сравнению с реальными значениями. Отметим, что при $N = 0.25$ максимум положительного пикового давления будет достигаться практически в геометрическом фокусе, а максимум отрицательного пикового давления – на расстоянии 1 мм до фокуса. Когда размер предполагаемого разрушения в ткани тоже составляет несколько миллиметров, такое смещение фокуса необходимо учитывать при планировании терапевтического протокола облучения.

6.6. Влияние аподизации поля на излучателе на проявление нелинейных эффектов при фокусировке

Модель одиночного поршневого элемента является идеализированной моделью реальных излучателей с распределением поля, близким к равномерному. Другим предельным случаем, представляющим особый интерес, являются гауссовские пучки как модель аподизированного источника (рис. 6.26). Аподизация или сглаживание поля к краям излучателя используется при формировании пучков диагностическими и терапевтическими решетками для подавления боковых лепестков. В то же время это удобная модель, позволяющая гораздо легче получать аналитические и численные оценки, поэтому она широко используется в

теории нелинейных акустических пучков [137, 153, 260]. Представляет интерес провести сравнение нелинейно-дифракционных явлений для двух излучателей с равномерным и гауссовским пространственным распределением начальных амплитуд. Численное моделирование для

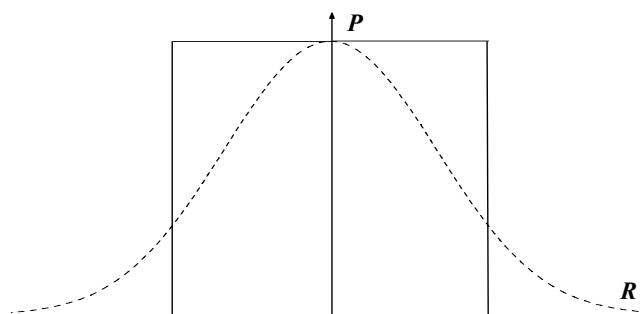


Рис. 6.26. Распределение поля поршневого (сплошная линия) и гауссовского (пунктир) излучателей.

гауссовского излучателя также проводилось в широком диапазоне параметров линейной фокусировки от $G = 5$ до $G = 60$. Радиусы излучателей были одинаковы, радиусом гауссовского излучателя считалось расстояние вдоль R , на котором амплитуда спадала в e раз по сравнению с амплитудой на оси. Исходная мощность выбиралась такой, при которой интенсивность поля в геометрическом фокусе была бы одинаковой для двух излучателей. При этом полная мощность гауссовского источника в 2 раза меньше, чем поршневого. Проводилось сравнение таких параметров акустического поля как интенсивность, пиковое положительное и отрицательное давления.

Рисунок 6.27 (а, б) показывает пространственное распределение пикового отрицательного P_- и положительного P_+ давлений в случае линейной фокусировки ($N = 0$); в случае, когда ударный фронт формируется в профиле волны вблизи фокуса ($N = 0.45, 0.33$) и до фокуса ($N = 1$) для гауссовского и поршневого излучателей. Результаты представлены для линейного коэффициента фокусировки $G = 10$. В линейном случае ($N = 0$), максимальная амплитуда для гауссовского источника достигается вблизи геометрического фокуса F , в то время как для поршня её положение значительно смещено

в сторону излучателя. С увеличением параметра N , для поршневого излучателя положения максимумов пиковых давлений значительно смещаются от своего первоначального положения, в то время как для гауссовского излучателя положение максимумов остается вблизи фокуса.

Рисунок 6.27 (в, г) иллюстрирует изменения ширины пикового положительного и отрицательного давлений вдоль и поперек оси пучка. Как видно из графиков, для гауссовского пучка сохраняются те же тенденции в изменении ширины пучка, что и для поршневого излучателя (см. рис. 6.24): размер фокальной области для давления P_- увеличивается, а для давления P_+ – уменьшается до образования разрыва и увеличивается после. Для гауссовского излучателя указанные особенности проявляются в гораздо меньшей степени. Здесь приведены результаты моделирования для излучателя с коэффициентом линейной фокусировки $G = 10$. При увеличении коэффициента G эффекты смещения пространственных максимумов давлений, сужения и расширения фокальной области для пиковых давлений выражены слабее, поскольку сама фокальная область пучка становится меньше.

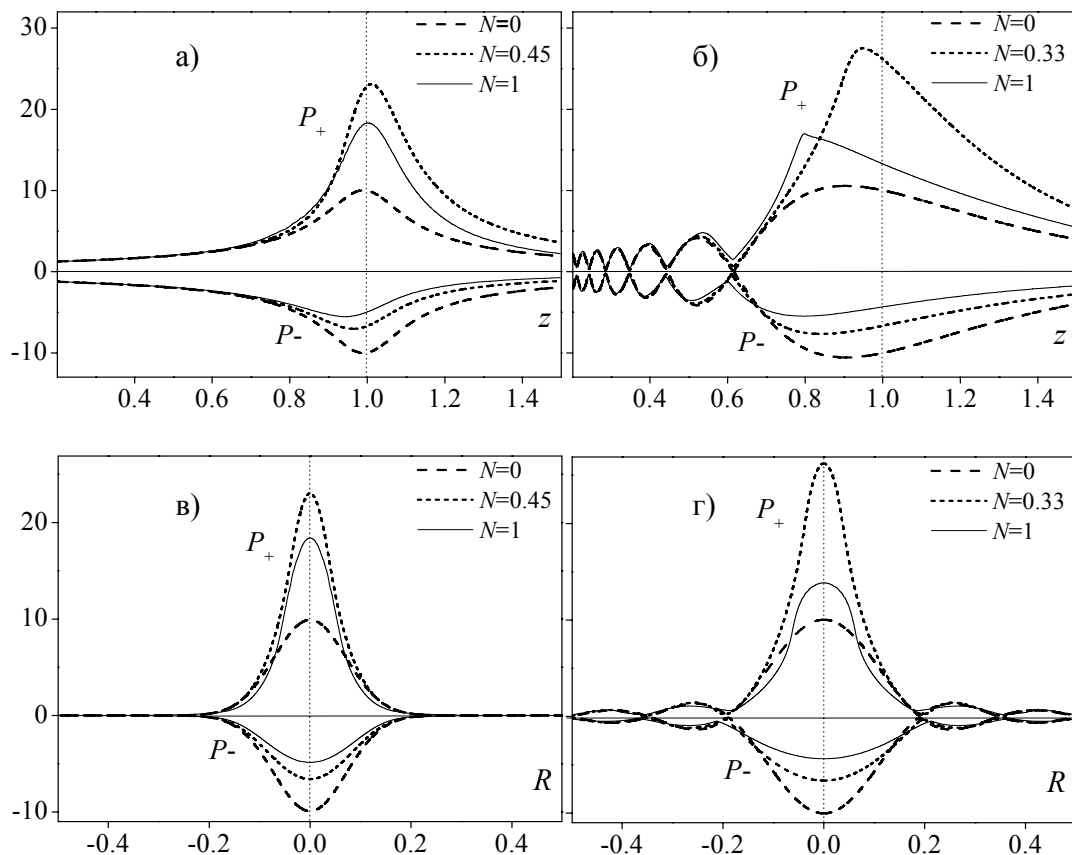


Рис. 6.27. Зависимость безразмерных пиковых давлений в профиле волны: положительного P_+ и отрицательного P_- вдоль (а, б) и поперёк (в, г) оси пучка в фокальной плоскости при линейной ($N=0$) и нелинейной фокусировке для гауссовского ($N=0.45$, слева) и поршневого ($N=0.33$, справа) излучателей.

На рис. 6.28 (слева) показаны зависимости коэффициента усиления в фокусе, нормированного на его линейное значение G (поправочные индексы), от амплитуды давления на источнике ($N \sim p_0$). Результаты представлены для двух случаев: $G = 5$, что соответствует слабо фокусирующим излучателям диагностического ультразвука, и $G = 60$ – что характерно для излучателей ультразвуковой хирургии. Для поршневого излучателя (сплошная линия) максимум коэффициента усиления заметно больше по величине и достигается при меньшей амплитуде источника по сравнению с гауссовским (штриховая линия). Как и следовало ожидать, для более сфокусированных излучателей ($G = 60$) эффект увеличения коэффициента концентрации проявляется сильнее.

Видно, что для излучателей различной геометрии эффект насыщения также проявляется по-разному (рис. 6.28, правый столбец). Для поршня уровень насыщения достигается при меньшем давлении на источнике и выходит на значения в 2-4 раза ниже по сравнению с гауссовским излучателем. Таким образом, упрощенная модель гауссовского излучателя для определения поля реального (близкого к поршневому) преобразователя дает сильно завышенные оценки. Как уже говорилось в § 6.2, для полусуммы пиковых значений давления и интенсивности уровни насыщения для поршня достаточно близки к аналитическим значениям, полученным по формулам (6.19, 6.10), для пикового отрицательного давления – ниже оценочного значения примерно в 2 раза, а для пикового положительного давления – выше в 2 раза. В то же время уровни предельных полей, получаемые для гауссовского источника, оказываются существенно большими (в 6 раз для P_+ и 2 раза для P_-), чем оценочные значения. Таким образом, формула Наугольных и Романенко, хоть и получена с приближениями, применима с хорошей точностью для поршневого источника, в то время как для гауссовского излучателя дает сильно заниженные значения.

Такое различие в поведении кривых насыщения для поршневого и гауссовского излучателей можно объяснить тем, что у гауссовского излучателя, по сравнению с поршневым, гораздо уже фокальная область вдоль оси при том же значении давления в фокусе (рис. 6.26). Таким образом, расстояние, на котором происходит эффективное поглощение при образовании разрывов в поле поршневого излучателя гораздо длиннее, чем в поле гауссовского излучателя. Поэтому для гауссовского источника насыщение наступает при больших амплитудах на излучателе и можно получить более высокие значения параметров акустического поля в фокусе. Это можно также объяснить наличием длинных плавно спадающих крыльев исходного распределения, амплитуда которых меньше, чем в центре источника, поэтому излучение от них приходит к фокусу без образования разрывов и дополнительных потерь.

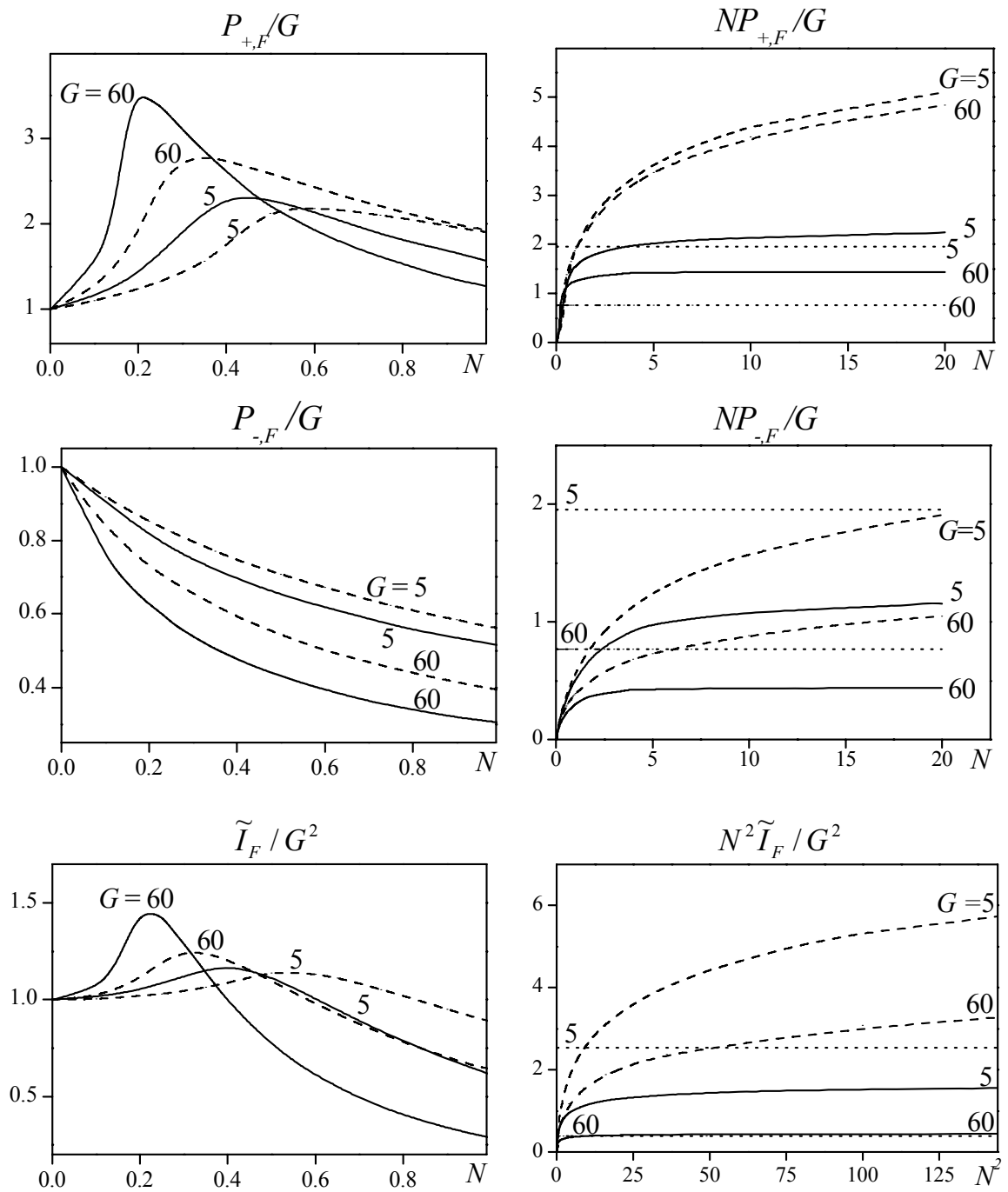


Рис. 6.28. Изменение коэффициента концентрации (слева) и насыщение (справа) пиковых значений давления и интенсивности в зависимости от параметра нелинейности N для поршневого (сплошная линия) и гауссовского (штриховая линия) излучателей. Пунктирные линии соответствуют аналитическим оценкам (6.19, 6.20).

6.7. Трехмерные нелинейные поля ультразвуковых терапевтических решеток

В предыдущих разделах данной главы исследовались нелинейные поля, создаваемые аксиально-симметричными одиночными излучателями ультразвука. В современных устройствах неинвазивной хирургии все больше начинают применяться двумерные фазированные решетки, состоящие из многих элементов, расположенных на сегменте сферической поверхности [261 - 264]. Каждый элемент такой решетки управляется независимо, что позволяет электронным образом перемещать фокус в пространстве, создавать сложную конфигурацию поля в виде нескольких фокусов, минимизировать нагрев акустических препятствий (например, ребер) при сохранении эффективности воздействия в фокусе [263 - 267]. Использование решеток и методов обращения времени позволяет улучшать качество фокусировки в неоднородной ткани, а также отслеживать область воздействия, которая смещается за счет дыхания [261, 268].

Как уже обсуждалось выше, исследовать нелинейные эффекты в трехмерных полях, создаваемых многоэлементными HIFU-решетками, при учете формирования разрывов до сих пор не удавалось. В этой задаче соединяются сразу несколько трудностей: сложная дифракционная структура ближнего поля и большие углы фокусировки, что требует использования точных дифракционных моделей и мелкой пространственной сетки численной схемы, а также сильные нелинейные эффекты, требующие учета большого количества гармоник либо мелкой временной сетки. В данной работе впервые удалось получить на основе уравнения Вестервельта (1.26) численное решение для нелинейного поля терапевтической решетки в режиме развитых разрывов. Был разработан экономный по объему используемой памяти алгоритм, позволяющий проводить такие расчеты на SMP-компьютерах (с общей памятью).

Рассмотрим в качестве примера решетку с частотой 1.2 МГц, состоящую из 256 элементов радиусом 3.3 мм, расположенных на сферической чашке радиусом 68 мм, с отверстием для диагностического датчика радиусом 9 мм, фокусным расстоянием 120 мм и интенсивностью акустического поля вблизи излучающего элемента до 10 Вт/см^2 [242, 269]. Разработанный при исследовании задачи о случайном фазовом слое алгоритм моделирования уравнения Вестервельта (гл. 1, прил. 6) был модифицирован, чтобы сделать возможными расчеты для сильно фокусированных полей разрывных волн (прил. 7). Моделирование проводилось в воде, соответствующие физические параметры в уравнении были равны: $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$, $\beta = 3.5$, $\delta = 4.33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Центр

системы координат соответствовал центру сферического сегмента, на котором были расположены элементы решетки, точка $x = y = 0$, $z = F$ соответствовала геометрическому фокусу решетки.

Граничные условия задавались на плоскости $(x, y, z = 0)$. Поскольку элементы решетки расположены на поверхности сферической чашки, то вначале, с использованием интеграла Рэлея:

$$p(\vec{r}) = -i\rho_0 c_0 \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{u(\vec{r}') \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad (2)$$

рассчитывалось поле на плоскости $z_0 = 2$ см от центра решетки вблизи ее края, расположенного на расстоянии $z = 1.85$ см от центра. Здесь $k = \omega / c_0$ – волновое число, $\omega = 2\pi f$, f – частота ультразвука, $u(\vec{r}')$ – комплексная амплитуда колебательной скорости на поверхности излучателя S . Чтобы учесть влияние нелинейных эффектов в ближнем поле решетки, далее граничное условие переносилось линейным образом на плоскость $(x, y, z = 0)$, касательную к центру сферической поверхности решетки, рассчитывая интеграл Рэлея методом углового спектра. Полученная таким образом сложная дифракционная структура поля "виртуальных" источников на плоскости $(x, y, z = 0)$ (рис. 6.29) использовалась как граничное условие при моделировании.

Результаты расчетов поля решетки в линейном приближении представлены на

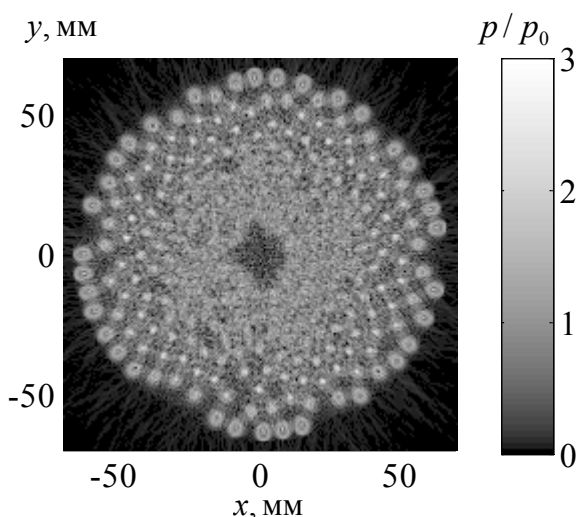


Рис. 6.29. Пространственное распределение безразмерной амплитуды давления p/p_0 на плоскости $z = 0$. Здесь $p_0 = \rho_0 c_0 u_0$, где u_0 – амплитуда колебательной скорости на поверхности элемента.

рис. 6.30. На рис. 6.30 (а) показано распределение амплитуды давления в плоскости оси решетки (x, z) . Шкала амплитуды указана в дБ относительно начальной амплитуды давления p_0 . В разрезе видна неоднородная дифракционная картина поля, обусловленная многоэлементной структурой решетки и случайным расположением элементов. В то же время, поле вблизи фокуса является в большой степени регулярным за счет сложения в фазе полей от отдельных

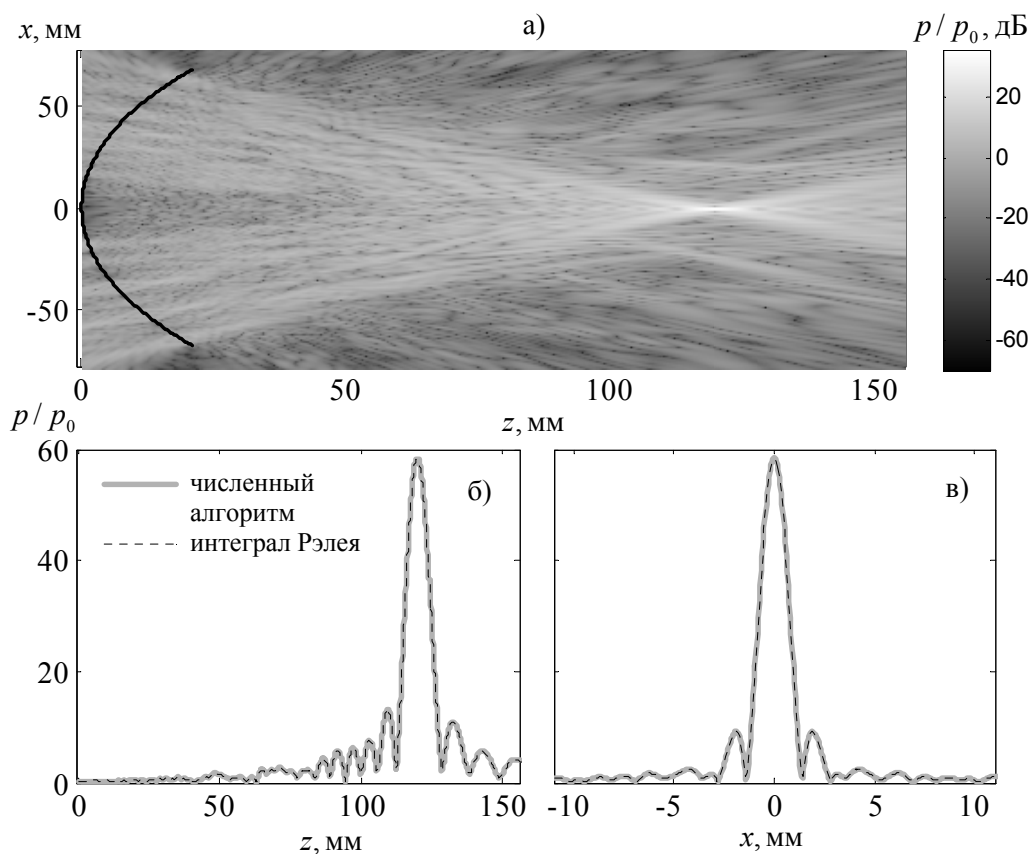


Рис. 6.30. Распределение амплитуды давления p/p_0 в плоскости (x, z) на оси решетки, рассчитанное в линейном приближении с использованием нового алгоритма (а). Черная линия соответствует положению сферической чашки, на которой расположены элементы (масштаб оси x сжат в три раза по отношению к масштабу оси z). Сравнение результатов расчетов с использованием нового алгоритма (сплошные серые кривые) и интеграла Рэлея (пунктирные кривые) для линейного поля решетки: амплитуда давления p/p_0 на оси (б) и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x (в).

элементов. На рис. 6.30 (б, в) показана в линейном масштабе амплитуда давления вдоль оси z решетки и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x , (сплошные кривые). Для сравнения приведены также результаты расчета поля непосредственно с помощью интеграла Рэлея (пунктирные линии). Результаты линейного моделирования позволяют определить размеры фокальной области пучка: размер вдоль оси z по уровню -6 дБ составляет 9.7 мм, а размер в поперечном направлении – 1.7 мм. Амплитуда поля в боковых лепестках не превышает 16 % от амплитуды в фокусе.

На рис. 6.31 представлены профили давления в центре кривизны решетки, рассчитанные при разных начальных интенсивностях на ее элементах, указанных числами возле кривых: 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см²; индекс 0 соответствует случаю линейной фокусировки. Данная последовательность иллюстрирует характерное искажение профилей волны в фокусе по мере усиления нелинейных эффектов [10]. Сначала, при слабом проявлении нелинейности (1 Вт/см²), происходит незначительное искажение профиля без образования ударного фронта. Коэффициент фокусировки для пикового

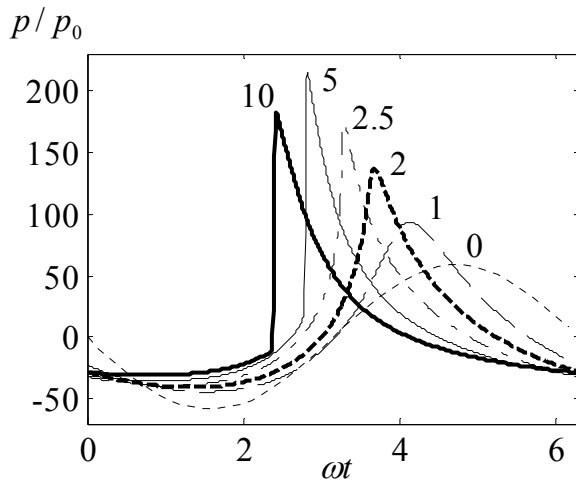


Рис. 6.31. Безразмерные профили давления в геометрическом фокусе решетки ($x = y = 0$, $z = F$), рассчитанные при различных начальных уровнях интенсивности на элементах решетки 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см² (числа у кривых); 0 – линейный режим фокусировки.

положительного давления увеличивается по сравнению с линейным режимом за счет дифракционной расфазировки высших гармоник, для пикового отрицательного давления - уменьшается [241]. Изменение коэффициента фокусировки для пикового давления в фокусе за счет нелинейных эффектов можно описать поправочным индексом, равным отношению безразмерных величин пикового давления в фокусе нелинейного пучка и при линейной фокусировке [241]. При начальной интенсивности 1 Вт/см² поправочный индекс для пикового положительного давления был равен 1.6, а

отрицательного – 0.76. При увеличении начальной интенсивности (2.5 Вт/см²) в фокусе начинает формироваться ударный фронт, коэффициент фокусировки для пикового положительного давления еще более нарастает (поправочный индекс равен 3). При интенсивности 5 Вт/см² развитый ударный фронт образуется вблизи фокуса, а поправочный индекс для пикового положительного давления достигает своего максимального значения 3.7. При еще большей начальной интенсивности (10 Вт/см²) ударный фронт образуется до фокуса и т.к. на ударном фронте происходит сильное нелинейное поглощение энергии волны, поправочный индекс для пикового положительного давления уменьшается до значения 3.1.

Указанные выше характерные нелинейно-дифракционные эффекты проиллюстрированы также на графиках зависимости положительного p_+ и отрицательного p_- пиковых давлений вдоль оси z (рис. 6.32 (а)) и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x (рис. 32 (б)). Кроме указанного эффекта нелинейного усиления p_+ и монотонного уменьшения p_- в области фокуса, наблюдается эффект смещения точки максимума p_+ в сторону от излучателя при средней нелинейности (2 и 2.5 Вт/см²), и в сторону к излучателю при сильной нелинейности (5 и 10 Вт/см²) [241]. В рассчитанных случаях смещение составляет примерно 0.5 мм в обоих направлениях. По мере увеличения начальной интенсивности до значения, когда коэффициент усиления для положительного

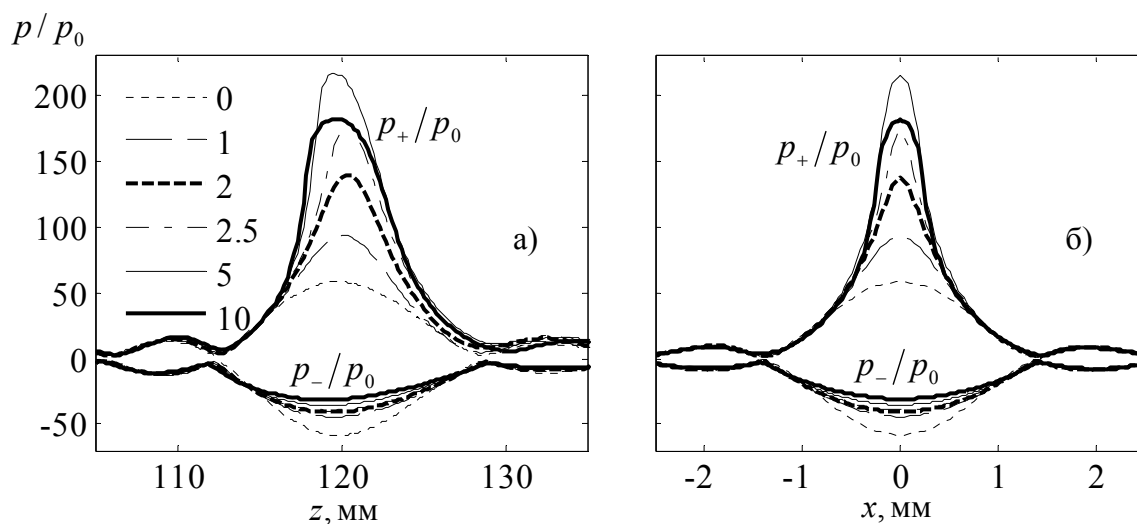


Рис. 6.32. Зависимости безразмерного положительного p_+/p_0 и отрицательного p_-/p_0 пиковых давлений вдоль оси решетки (а) и в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x (б) при различных начальных уровнях интенсивности на элементах решетки: 0 – линейный режим (пунктирная линия), остальные числа у кривых соответствуют интенсивности на элементах решетки, измеряемой в Вт/см^2 .

пикового давления начинает уменьшаться (5 Вт/см^2) происходит сужение фокальной области как в продольном, так и в поперечном направлениях. После прохождения максимума коэффициента усиления фокальная область начинает уширяться. Так, ширина фокальной области по уровню -6 дБ для интенсивностей 1, 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см^2 в продольном направлении составляет 7.5 мм, 6.0 мм, 5.3 мм, 5.3 мм и 6.2 мм, соответственно, а в поперечном – 1.2 мм, 0.8 мм, 0.7 мм, 0.6 мм и 0.7 мм.

Таким образом, представленный здесь новый численный алгоритм позволил впервые на основе уравнения Вестервелта рассчитать трехмерные поля двумерных фокусированных решеток при наличии ударных фронтов в области фокуса. Для уменьшения размеров массивов данных при вычислениях использовалось изменяющееся количество гармоник и эшелонированная схема хранения данных. Также использовалась параллельная модель вычислений для компьютеров с общей памятью (SMP), что позволило существенно уменьшить время расчетов. Проведено тестирование различных операторов алгоритма, а также получаемого полного решения задачи, путем сравнения результатов расчетов с известными аналитическими решениями либо с результатами расчетов, полученных в других работах для нелинейных аксиально-симметричных пучков в параболическом приближении. Результаты тестирования показали хорошую точность алгоритма. Продемонстрировано применение представленного алгоритма для расчета нелинейного поля многоэлементной двумерной фазированной решетки. Показано, что при уровнях интенсивности на элементах решетки, соответствующих клиническим применениям, в фокусе излучателя образуются разрывы.

6.8. Метод эквивалентного излучателя для описания HIFU-полей

Как показывают результаты предыдущей главы, современный уровень вычислительных мощностей и развитые на сегодняшний день алгоритмы позволяют моделировать трехмерные нелинейные поля, создаваемых источниками HIFU произвольной геометрии, включая многоэлементные фазированные решетки. При этом возможности современного численного эксперимента и точность получаемых результатов не уступают, а иногда и превосходят результаты измерений (§6.1). Однако такие расчеты трехмерных нелинейных полей, содержащих разрывы, по-прежнему являются уникальными и возможны пока лишь в нескольких лабораториях мира, обладающих опытом экспериментальных ультразвуковых исследований, численного моделирования и доступом к мощным суперкомпьютерам. При отсутствии совокупности этих условий, практическая реализация такого численного эксперимента пока нереальна.

Кроме того, время расчета трехмерных задач в режиме формирования ударных фронтов даже на самых быстродействующих компьютерах, по-прежнему является достаточно трудоемким и долгим процессом. Часто необходимо моделирование многих реализаций для различных параметров излучателя и его мощности, при этом время расчета одной реализации может составлять несколько десятков часов. Поэтому актуальным является поиск более простых и быстрых методик получения количественно правильных оценок параметров нелинейных HIFU-полей без проведения таких сложных расчетов. Ясно, что для решения практических задач наибольший интерес представляет оценка параметров поля в фокусе, где осуществляется целевое воздействие на ткань.

Как будет показано ниже на примере многоэлементной фокусирующей решетки, такая возможность быстрого учета нелинейных эффектов в фокусе, существует и основывается на следующем. Из рисунков 6.30 и 6.32 видно, что в области фокуса решетки поле в большой степени симметрично относительно оси z . Кроме того, поскольку излучатели HIFU являются сильно фокусирующими, амплитудно-зависимые нелинейные эффекты проявляются в основном вблизи фокуса, где давление максимально. Вне этой области нелинейные эффекты гораздо слабее и не приводят к существенным различиям в распределениях давления в зависимости от начальной интенсивности.

Идея предлагаемого упрощенного метода состоит в том, чтобы заменить в моделировании точные граничные условия задачи граничным условием для одиночного поршневого излучателя, поле которого наилучшим образом аппроксимирует линейное поле решетки в области фокуса. Будем называть такой одиночный источник *эквивалентным* излучателем. Предполагается тогда, что и в случае нелинейной

фокусировки поля решетки и эквивалентного излучателей в области фокуса при одинаковом увеличении исходной амплитуды давления будут близки. Данный метод аппроксимации уже использовался в §6.1 работы при моделировании в параболическом приближении полей одиночных излучателей, распределение давления на поверхности которых не является равномерным за счет генерации волн Лэмба. Применение метода показало высокую точность получаемых результатов. Здесь будет рассмотрен пример многоэлементной решетки с отверстием для диагностического датчика, показывающий работоспособность метода и для излучателей с гораздо более сложной геометрией, где применимость и точность использования эквивалентного излучателя не так очевидна.

Итак, рассмотрим постановку численного эксперимента для трех моделей (рис. 6.33). Первая модель – рассмотренное в предыдущем параграфе решение уравнения Вестервельта для поля, создаваемого решеткой (рис. 6.33 (а)). Граничные условия вначале задаются в виде равномерного распределения колебательной скорости на элементах решетки, затем рассчитывается распределение давления на плоскости $z = 0$ и используется как граничное условие для последующего нелинейного моделирования (§6.6). Две другие модели являются моделями эквивалентных аксиально-симметричных поршневых фокусирующих излучателей. В более сложном для численного решения случае (рис. 6.33 (б)) равномерные граничные условия для колебательной скорости задаются на сегменте сферы, как и для решетки, затем аналогичным образом переносятся на плоскость $z = 0$. Далее моделирование поля проводится, используя уравнение Вестервельта (УВ). В третьем случае (рис. 6.33 (в)) граничное условие в виде равномерного распределения давления сразу задается на плоскости $z = 0$. Задержка для фазы на плоскости, обеспечивающая фокусировку, и дальнейшее моделирование проводятся в параболическом приближении, используя уравнение ХЗ.

На рис. 6.33 сверху приведены соответствующие безразмерные распределения амплитуды давления на плоскости $z = 0$ для решетки (а) и двух эквивалентных излучателей: (б) – модель, использующая уравнение Вестервельта (УВ), (в) – модель, использующая параболическое уравнение (ХЗ). Давление нормировано на максимальное значение в каждом из распределений. Нижний ряд на рис. 6.33 иллюстрирует геометрию излучателей для соответствующих моделей. Во всех трех случаях расчеты проводились на основе представленного в прил. 6 нового трехмерного численного алгоритма с дифракционными операторами (П6.1) для уравнения Вестервельта либо (П7.5) для параболического приближения. Расчеты в параболическом приближении сравнивались с решениями уравнения ХЗ на основе ранее развитых алгоритмов для аксиально-симметричных пучков (прил. 5) и показали соответствие получаемых результатов.

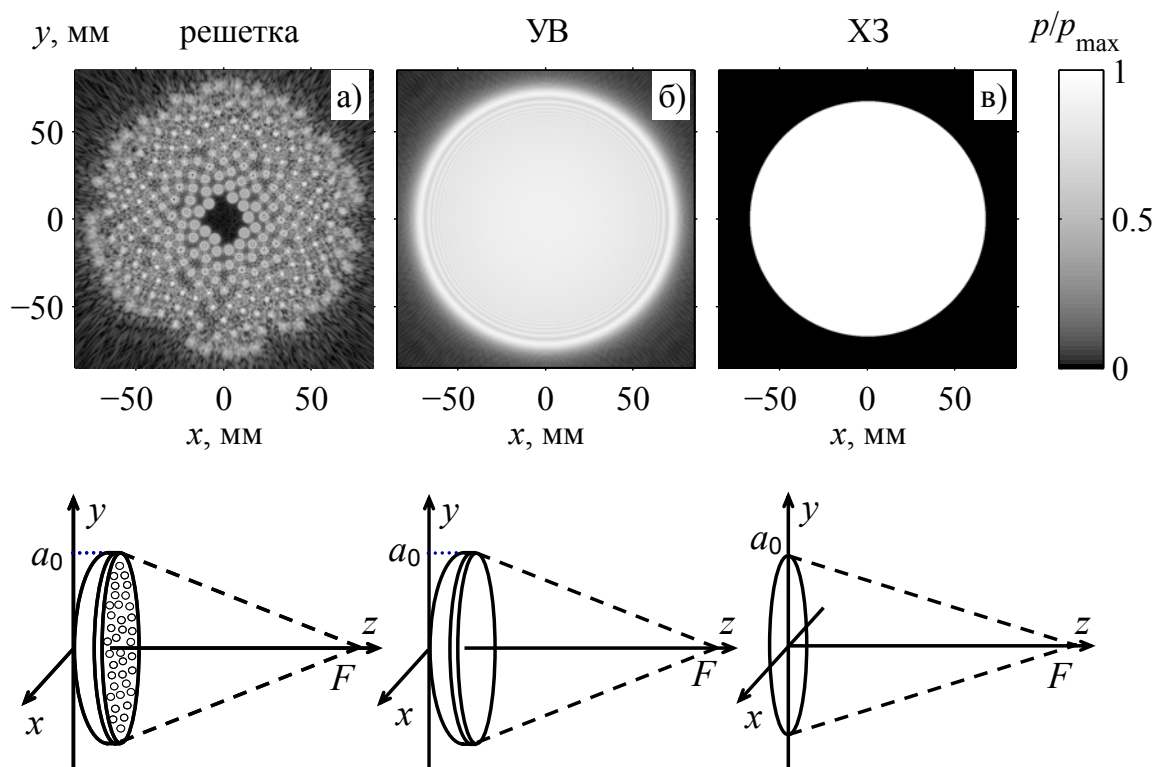


Рис. 6.33. Верхний ряд: граничные условия для безразмерной амплитуды давления решетки (а) и двух эквивалентных излучателей (б, в) в плоскости $z = 0$. Нижний ряд: геометрия задания граничных условий для соответствующих дифракционных моделей: УВ – уравнение Вестервельта (б), ХЗ – параболическое уравнение теории дифракции (в).

Следуя подходу, развитому в §6.1, определение параметров эквивалентного поршневого излучателя (радиуса и амплитуды давления) проводилось в линейном режиме фокусировки путем сравнения известных аналитических решений для давления на оси аксиально-симметричного поршневого излучателя и в фокальной плоскости с численным решением для поля решетки. Фокусное расстояние F во всех трех рассматриваемых здесь случаях было одинаковым. Вначале варьировался радиус излучателя a_0 (рис. 6.33), величина которого определяет положение первых нулей главного фокального пика поля давления, т.е. размеры фокальной области. Для нахождения оптимального радиуса эквивалентных излучателей минимизировалась сумма модулей разности давлений, создаваемых решеткой и поршнем как вдоль оси x , так и вдоль оси z . Распределения давления предварительно нормировались на максимальные значения в каждом из распределений. Затем, чтобы обеспечить совпадение амплитуды давления в фокальном максимуме у решетки и у поршня, выбиралось значение амплитуды колебательной скорости на сферическом излучателе в модели УВ или амплитуды давления на плоскости в модели ХЗ.

Обозначим амплитуду колебательной скорости на элементах решетки V_0 , а давление вблизи элементов, рассчитываемое в приближении плоской волны –

$p_0 = V_0 c_0 \rho_0$. Начальное давление для моделей эквивалентных излучателей обозначим как \tilde{p}_0 . Коэффициент концентрации поля в фокусе G характеризуется отношением $G = p_F / p_0$ для решетки и $G = p_F / \tilde{p}_0$ для эквивалентных излучателей, где p_F - амплитуда давления в фокусе. Отношение начальных амплитуд давления на эквивалентном излучателе и на элементах решетки, при котором достигается одинаковое давление в фокусе, будем называть коэффициентом масштабирования давления K_{sc} . Параметры решетки и рассчитанные параметры соответствующих ей эквивалентных излучателей приведены в табл. 1.2.

тип источника/параметры	F , мм	a_0 , мм	G	K_{sc}
решетка	120	64	58:4	1:0
фокусирующий поршень, интеграл Рэлея	120	64:6	94:5	0:613
фокусирующий поршень, параболическое приближение	120	66:9	93:8	0:620

Таблица 6.1. Параметры решетки и двух эквивалентных излучателей.

На рисунке 6.34 показаны распределения амплитуды давления вдоль оси z (а) и в фокальной плоскости (б) для трех моделей излучателей. Видно, что рассчитанные кривые практически неразличимы, т.е. поле решетки в фокальной области хорошо аппроксимируется полями обоих эквивалентных излучателей. В направлении оси излучателя распределения давления совпадают не только вблизи самого фокуса, но и в окрестности нескольких предфокальных и послефокальных максимумов. В фокальной плоскости кривые совпадают в области главного фокального максимума. Более низкий уровень боковых лепестков в распределениях для эквивалентных излучателей объясняется тем, что в рассматриваемых моделях не учитывается наличие отверстия в центре для диагностического датчика. Поскольку это отверстие у рассматриваемой решетки мало (радиус 9 мм), то отличия в данном случае небольшие. При необходимости легко заменить рассматриваемую модель сплошного эквивалентного излучателя на излучатель с отверстием в центре.

После определения оптимальных параметров эквивалентных излучателей, проводилось моделирование создаваемых ими их нелинейных полей. Результаты моделирования полей эквивалентных излучателей в сравнении с расчетами поля решетки при различных интенсивностях на ее элементах представлены на трех рисунках: рис. 6.35 – профили давления в фокусе, рис. 6.35 – распределения пикового положительного и

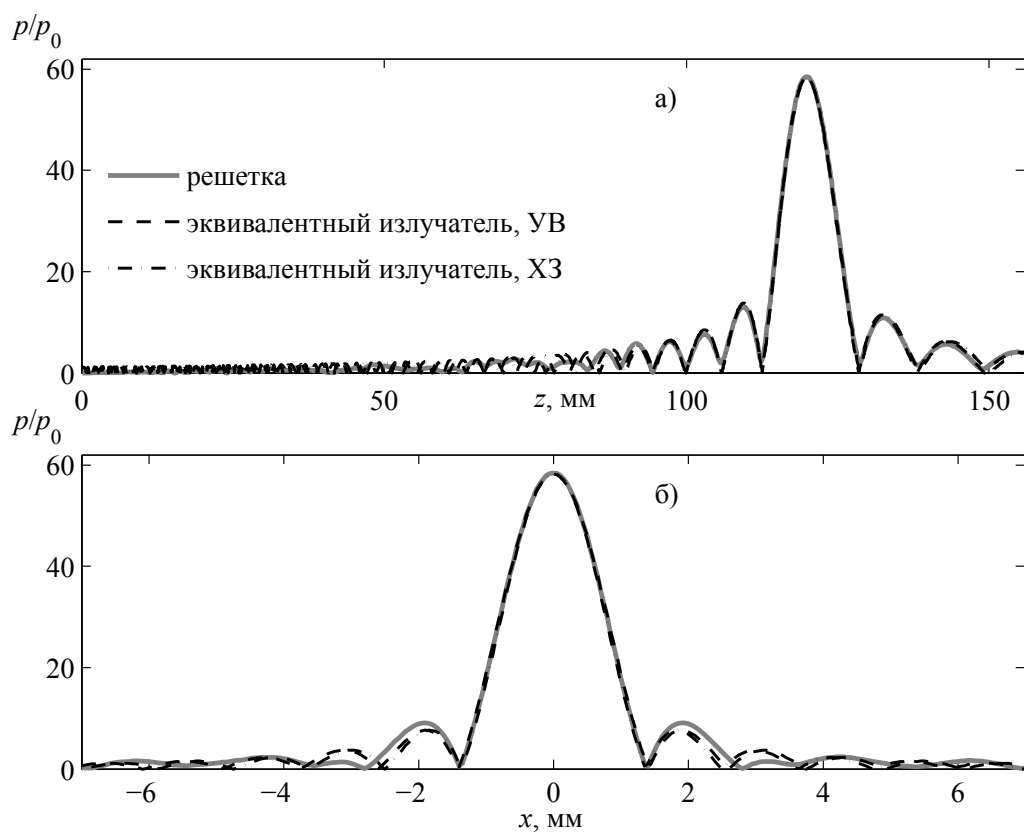


Рис. 6.34. Сравнение распределений амплитуды давления в линейном поле решетки (серая кривая) на оси (а) и в фокальной плоскости (б) с аналитическими решениями для полей эквивалентных излучателей. Штриховая кривая – давление в поле эквивалентного излучателя, рассчитываемого с помощью интеграла Рэлея; штрих-пунктирная кривая - в параболическом приближении.

отрицательного давлений вдоль оси z и рис. 6.37 – распределения пикового положительного и отрицательного давлений в разрезе фокальной плоскости вдоль оси x . Для сравнения результаты расчетные данные нормировались к давлению на элементах решетки p_0 . На всех рисунках полю решетки соответствует серая кривая, полю эквивалентного излучателя, рассчитываемому на основе уравнения Вестервельта (УВ), – штриховая кривая и в параболическом приближении (ХЗ) – штрихпунктирная кривая. Цифрами вверху графиков обозначена интенсивность на элементах решетки $I_0 = p_0^2 / 2c_0\rho_0$, измеряемая в Вт/см^2 , цифра 0 соответствует линейному режиму фокусировки. Из полученных результатов видно, что за исключением расчетов в параболическом приближении при умеренных интенсивностях (2 Вт/см^2 и 2.5 Вт/см^2), результаты моделирования практически неотличимы. Максимальное отличие результатов для пикового положительного давление в фокусе составляет 12% при интенсивности 2.5 Вт/см^2 .

Наблюдаемое завышение пикового давления при указанных интенсивностях в параболическом приближении связано с тем, что в параболическом приближении

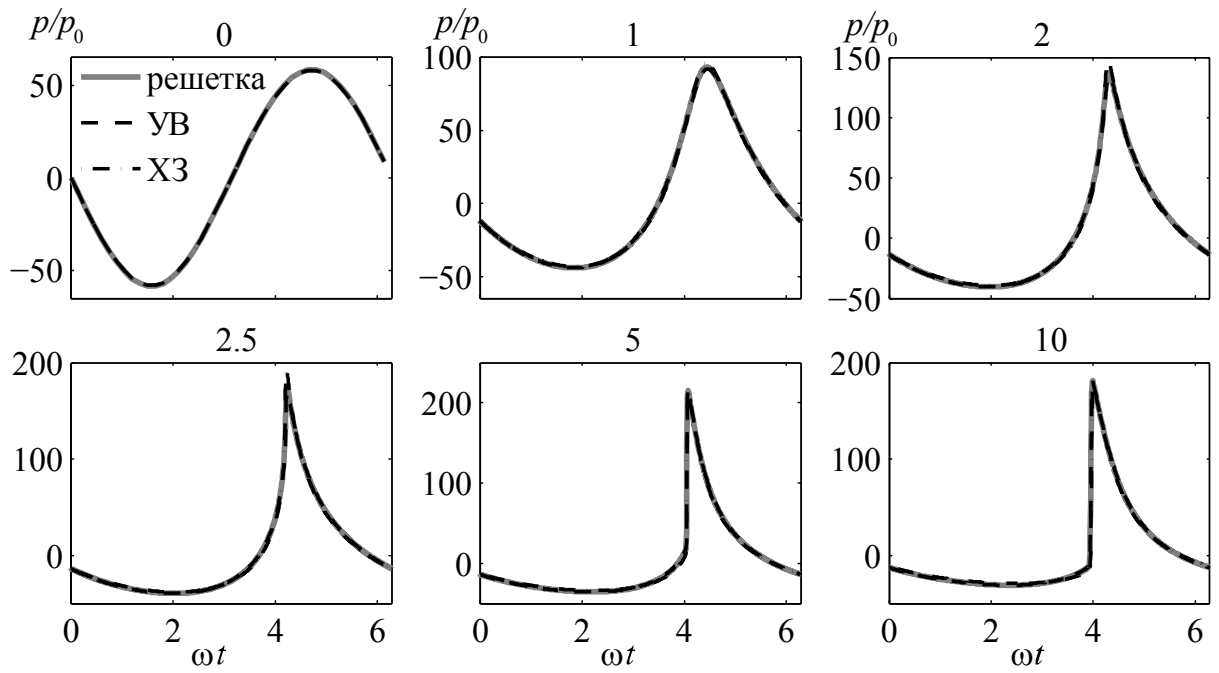


Рис. 6.35. Сравнение профилей давления в фокусе, полученных при моделировании поля решетки (серые кривые) и полей двух эквивалентных излучателей, рассчитанных на основе уравнения Вестервельта (штриховые кривые) и в параболическом приближении (штрих-пунктирные кривые). Давление нормировано на начальное давление на элементах решетки p_0 , цифры сверху графиков соответствуют интенсивности на элементах решетки $I_0 = p_0^2/2c_0\rho_0$ в Вт/см².

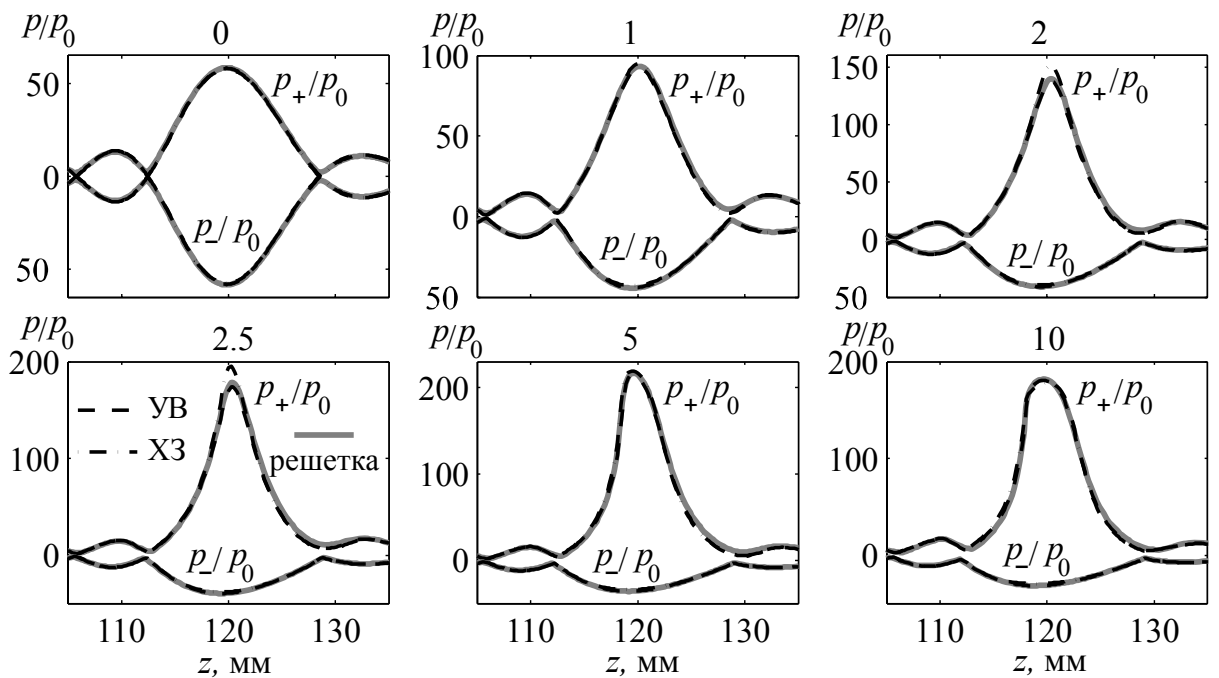


Рис. 6.36. Сравнение величин пиковых давлений в профиле волны вдоль оси z , полученных при моделировании поля решетки и двух эквивалентных излучателей. Маркировка кривых и значений интенсивности, показанных сверху графиков, такая же, как и на рис. 1.12.

граничное условие задавалось на плоскости ($x; y; z = 0$) и нелинейные эффекты учитывались без ограничений объема поверхностью чашки излучателя, как при моделировании поля на основе уравнения Вестервельта. Большой объем, в котором происходят нелинейные взаимодействия, увеличивает амплитуду гармоник вблизи излучателя и усиливает проявления нелинейных эффектов в фокусе (увеличения p_+/p_0). Однако эти отличия невелики и проявляются, когда ударный фронт в фокусе только образуется. В случае поля эквивалентного излучателя, рассчитываемого на основе уравнения Вестервельта, различия с полем решетки при $I_0 = 2.5 \text{ Вт/см}^2$ не превышают 3%.

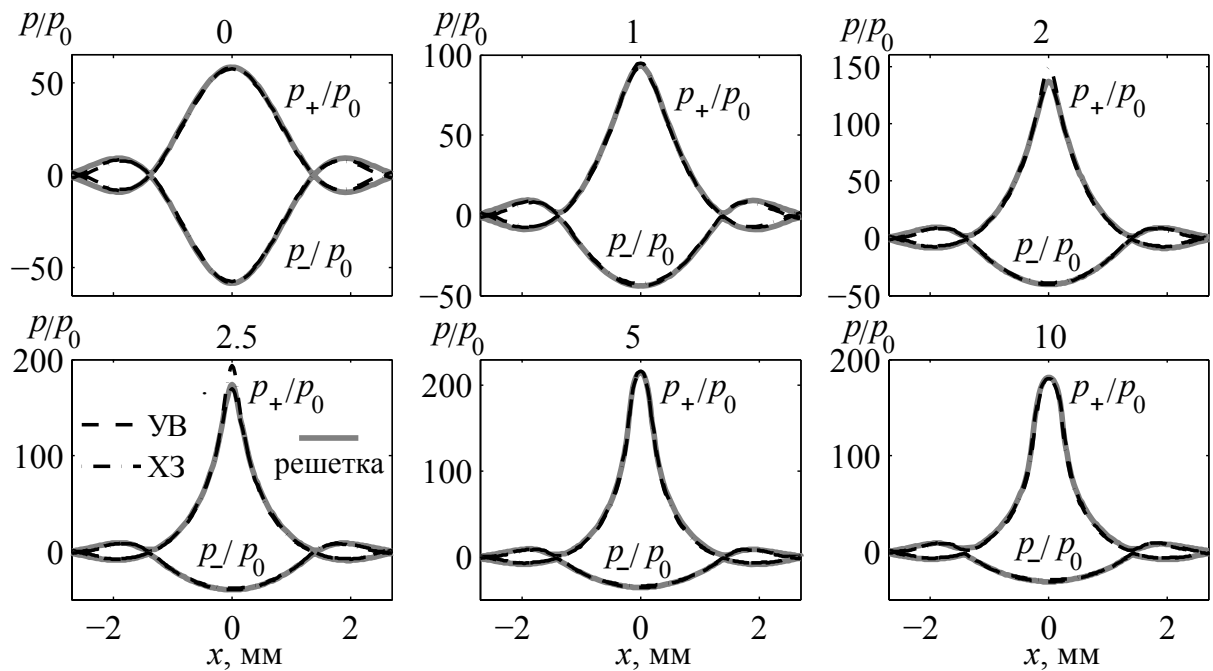


Рис. 6.37. Сравнение величин пиковых давлений в профиле волны в фокальной плоскости вдоль оси x , полученных при моделировании поля решетки и полей двух эквивалентных излучателей. Маркировка кривых и значений интенсивности, показанных сверху графиков, такая же, как и на рис. 1.12.

Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что метод эквивалентного аксиально-симметричного излучателя может быть с успехом использован для получения количественно правильных оценок проявления нелинейных эффектов в фокальной области решетки. Отметим, что, несмотря на достаточно большой угол фокусировки эквивалентного излучателя $\sin \theta = a_0/F = 27^\circ$, использование параболического приближения для расчета дифракционных эффектов при используемом в данном методе выборе граничных условия, позволяет также получать количественно верные результаты.

6.9. Заключительные замечания

Разработка методов определения характеристик нелинейных волновых полей, создаваемых источниками мощного фокусированного ультразвука, является важной и на сегодняшний день еще нерешенной задачей в области современной HIFU-хирургии. Сложность данной задачи и ее отличие от аналогичной задачи метрологии полей, создаваемых датчиками диагностического ультразвука, являются высокие давления, приводящие к образованию ударных фронтов с амплитудами до 100 МПа в фокусе, и сильная пространственная локализация поля за счет больших углов фокусировки. До сих пор не определен круг параметров, измерение которых является необходимым для сертификации приборов HIFU, не существует стандартных методов калибровочных измерений в воде и использования этих данных для предсказания поля в ткани при планировании протоколов облучения.

В первой части данной главы диссертации развит новый комбинированный метод описания полей HIFU, сочетающий в себе преимущества физического и численного эксперимента. Предложенный подход позволяет определять форму ультразвуковой волны, пиковые давления, интенсивность и мощность тепловыделения в фокальной области HIFU-источников в воде, где обычно проводятся калибровочные измерения. Показано, что результаты численного эксперимента на основе уравнения ХЗ с граничным условием в виде фокусирующего поршневого источника могут успешно использоваться для описания полей реальных сильно фокусирующих излучателей, распределение колебательной скорости на поверхности которых является гораздо более сложным. Для каждого конкретного излучателя параметры поршня находятся из результатов сканирования поля при малых амплитудах, что является стандартной процедурой. Развитый метод получил дальнейшее развитие путем использования методов акустической голографии для восстановления реального распределения поля на поверхности излучателя, более точного дифракционного подхода, численного моделирования в трехмерной пространственной геометрии [269].

Прямое использование развитого метода предполагает моделирование уравнения ХЗ в широком диапазоне параметров. Хотя основные центры медицинского ультразвука в различных странах уже имеют свои разработанные алгоритмы, такие расчеты пока еще не являются легко осуществимой задачей. Практически важным результатом успешной апробации развитого подхода является возможность создания базы данных, по которой можно проводить оценку нелинейных эффектов для произвольного излучателя уже без

дополнительного моделирования [241]. Эта задача осуществлена во второй части главы, где получены количественные результаты для нелинейной коррекции коэффициентов концентрации и насыщения поля в фокусе, позволяющие рассчитать различные характеристики нелинейно-искаженных профилей волны в широком интервале параметров поршневых преобразователей. Установлено, что существующие аналитические оценки для величин насыщения в фокусе дают заниженные значения для пикового положительного давления и, напротив, завышенные – для пикового отрицательного (примерно в 2 раза), но в то же время достаточно близки к рассчитанным численно интенсивности и полусумме пиковых значений давления. Показано, что для гауссовского источника эффект насыщения наступает при бóльших амплитудах на излучателе и можно получить более высокие значения параметров акустического поля в фокусе, чем для поршневого источника.

Исследованы основные различия в пространственной структуре фокальной области различных параметров нелинейного акустического поля: более высокая локализованность положительного пикового давления, интенсивности и мощности тепловых источников и, напротив, расширение области отрицательного пикового давления и ее смещение в сторону излучателя. При этом нелинейное искажение пространственной структуры поля сильнее проявляется для поршневого излучателя, чем для гауссовского, и при меньших коэффициентах линейной фокусировки. Выявлено, что интерференция прямой и краевой волн в фокусированных пучках, создаваемых поршневыми источниками, может приводить к формированию двух ударных фронтов на одном периоде волны в фокальной области пучка при её фокусировке в режиме развитых разрывов.

Результаты моделирования хорошо согласуются с данными эксперимента и могут служить мощным дополняющим, а часто и заменяющим реальный эксперимент инструментом для калибровки полей преобразователей, использующихся в ультразвуковой хирургии, а также оптимизации клинических протоколов. Развитие новых подходов, сочетающих преимущества эксперимента и моделирования, открывает возможности получения достоверных данных о параметрах HIFU полей в воде, что необходимо для развития стандартов, и ткани для планирования облучения и предсказания вносимых биоэффектов.

Развита новая численная модель для описания трехмерных нелинейных полей, создаваемых современными ультразвуковыми терапевтическими решетками. Модель основана на решении уравнения Вестервельта; разработанный алгоритм позволяет рассчитывать нелинейные поля периодических волн при наличии ударных фронтов, локализованных вблизи фокуса. В численном эксперименте исследована роль нелинейных

эффектов при фокусировке в воде для двумерной решетки, состоящей из 256 элементов, в диапазоне интенсивностей на элементах до 10 Вт/см^2 . Полученные решения показали, что для характерных режимов эксплуатации современных решеток нелинейные эффекты играют важную роль и в профиле волны в фокусе происходит образование ударных фронтов. Разработанный алгоритм может быть использован для решения широкого класса практически важных задач нелинейной медицинской акустики. С его помощью можно описывать нелинейные эффекты при калибровке полей, создаваемых источниками ультразвуковой хирургии в воде, а также рассчитывать тепловые эффекты при воздействии ультразвука на ткань. Обобщение алгоритма с учетом плавных неоднородностей среды распространения позволит более реалистично рассчитывать поле в мягких тканях; возможно также моделирование воздействия на ткани при наличии акустических препятствий, например, при облучении сквозь грудную клетку. Важной особенностью алгоритма в данных приложениях является возможность расчета трехмерных полей мощных излучателей сложной конфигурации, оставаясь при этом в рамках разумных требований к вычислительным средствам текущего поколения.

Также в главе представлена модель эквивалентного осесимметричного излучателя для быстрого расчета нелинейного поля многоэлементной решетки в области фокуса. Показано, что эквивалентный излучатель, рассчитываемый при помощи аксиально симметричного уравнения Вестервельта, может описывать поле решетки с ошибкой всего в несколько процентов. Использование параболического приближения приводит к несколько большим ошибкам, которые, однако, могут быть уменьшены при надлежащей модификации граничных условий.

Практическая значимость развитого метода состоит в том, что он дает простой рецепт для оценки нелинейных эффектов при калибровке полей большого класса излучателей HIFU: после проведения линейного сканирования поля вдоль оси и поперек оси в фокальной плоскости подбираются параметры (апертура, фокусное расстояние и давление) эквивалентного излучателя, после чего проводится нелинейное моделирование поля в диапазоне начальных давлений, характерных для работы данного устройства. Моделирование аксиально-симметричного поля одиночного излучателя является гораздо более простой задачей. Алгоритмы такого моделирования, основанные как на параболическом приближении (уравнение ХЗК) [35, 37, 38, 174, 179], так на уравнении Вестервельта [127, 222], развиты в гораздо большем количестве ультразвуковых центров и компаний в мире. Более того, даже при отсутствии возможности моделирования, можно использовать уже имеющиеся опубликованные результаты расчетов, проведенных в широком диапазоне параметров излучателей [241].

Ультразвуковая хирургия с использованием высокоамплитудных разрывных волн

7.1. Вводные замечания

Как показывают результаты главы 6, современные источники ультразвуковой хирургии позволяют обеспечить такие режимы облучения, при которых в фокусе образуются ударные фронты с амплитудой до 100 МПа, что превышает даже уровни давления в полях ударно-волновых литотриптеров. Такие режимы облучения уже применяются в некоторых клинических устройствах и привлекают к себе все большее внимание в исследовательских ультразвуковых центрах [270, 244, 228]. Образование разрывов принципиальным образом изменяет эффективность теплового воздействия ультразвука, улучшает пространственную локализацию воздействия, открывает новые возможности для контролируемого теплового и механического разрушения ткани и получения новых биоэффектов нетеплового характера [271, 272], а также позволяет решить проблему ультразвуковой визуализации воздействия. Стоит отметить, что до последнего времени существовали сомнения в возможности формирования ударных волн в реальной биологической ткани и их использования в разработке новых протоколов HIFU-облучения [273]. Это объяснялось тем, что поглощение в ткани уменьшает амплитуду распространяющейся волны, а неоднородности ткани могут приводить к дефокусировке волны, что также уменьшает проявление нелинейных эффектов. Цикл работ, описанных в данной главе, направлен на подтверждение возможности реализации ударно-волнового воздействия в HIFU-терапии и фактически образует физическую основу этого нового направления неинвазивной хирургии.

В области терапевтического ультразвука, применяющегося для неинвазивного разрушения опухолей, можно условно выделить два направления. В режиме низкотемпературной гипертермии ткань облучается ультразвуком с интенсивностью порядка 1 - 10 Вт/см² в течение 60 – 120 минут, при этом температура всей ткани увеличивается и поддерживается на уровне пороговой (42 - 43°C), при которой раковые клетки погибают, а здоровые остаются неповрежденными [274-275]. Использование такого подхода не получило широкого распространения из-за включения в биологической ткани механизмов охлаждения: диффузии тепла и оттока тепла за счет потока крови

(процесса перфузии) как в крупных кровеносных сосудах, так и в капиллярах, окружающих нагреваемую область и, соответственно, сложности контроля температуры в ткани [276]. В режиме высокоинтенсивной ультразвуковой хирургии (HIFU) интенсивность в фокусе достигает несколько сотен Вт/см², нагревание ткани происходит за несколько секунд до температуры выше 60°C, при которой происходит тепловой некроз ткани. В последнее время именно этот режим находит все большее применение для акустической хирургии доброкачественных и злокачественных опухолей.

Развиваемое в данной главе новое направление – неинвазивная хирургия с использованием высокоамплитудных разрывных волн и интенсивностями в фокусе порядка нескольких тысяч и даже десятков тысяч Вт/см². Один из подходов в данной области связан с использованием микросекундных (несколько периодов) импульсов для механического разрушения ткани за счет создания кавитационного облака [278 - 280].

Иной подход, становлению и развитию которого посвящена данная работа, связан с использованием более длинных импульсов (порядка миллисекунд), когда внутри каждого из импульсов в фокусе достигается температура кипения. Для планирования облучения в работе развит новый метод, позволяющий определять величины параметров нелинейного

ультразвукового поля в фокусе в ткани (нелинейный дирейтинг), основываясь на данных калибровочных измерений в воде. Решена задача о предельных уровнях параметров акустического

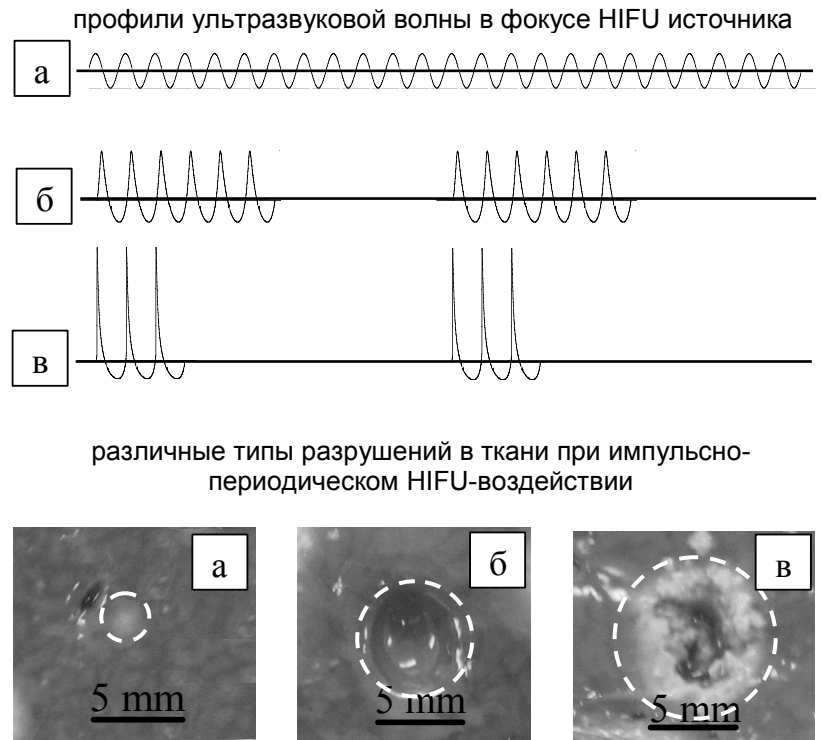


Рис.7.1. Использование нелинейных эффектов для получения контролируемых разрушений ткани различных типов и размеров. Параметры облучения: средняя по времени интенсивность при непрерывном (а) и импульсно-периодическом (б, в) режимах одинакова, а пиковые значения давления и скважность импульсов различны. Фотографии соответствующих разрушений ткани печени в фокальной плоскости: а) - тепловое разрушение малых размеров (область белого цвета), б) – механическое разрушение (эмульсификация) ткани; в) – тепловое разрушение с неоднородной структурой и полостью в центре. Области разрушения обведены штриховой линией. Результаты получены автором на клинической установке YDME [277]

поля в фокусированных пучках в средах с различным поглощением, что является самостоятельной интересной проблемой физики нелинейных волн. Исследованы режимы импульсно-периодического воздействия с одинаковой средней по времени мощностью, но различной пиковой интенсивностью, длительностью импульсов и частотой их следования, позволяющие контролировать проявление нелинейных эффектов в фокальной области пучка и эффективность теплового и механического воздействия на ткань. Возможность нагревания ткани за миллисекунды до температур теплового некроза позволила осуществлять быстрое сканирование фокуса для увеличения объема разрушений. Образование пузырей кипения позволило осуществлять ультразвуковую визуализацию области воздействия в режиме реального времени, что до последнего времени являлось основным ограничением в клиническом применении HIFU. Недавно был открыт новый эффект – механическое разрушение ткани при периодическом сверхбыстром нагревании, образовании кипящего пузыря и взаимодействии с ним ударноволнового поля (рис. 7.1). Механизмы данного эффекта еще предстоит исследовать.

При проведении исследований использовался комбинированный подход, сочетающий преимущества как физического эксперимента, так и методов численного моделирования. Эксперименты проводились в сотрудничестве с Центром промышленного и медицинского ультразвука в Сиэтле, Национальной физической лаборатории в Теддингтоне, Институтом исследований рака в Саттоне.

Результаты данной главы опубликованы в статьях [9, 203, 230, 267, 281 - 290].

7.2. Основные уравнения для моделирования полей HIFU-излучателей в ткани и теплового воздействия на ткань

Приведем здесь кратко основные уравнения и обозначения, которые использовались в численном моделировании задач, рассматриваемых в данной главе. Так же как и при описании полей, создаваемых HIFU-источниками в воде (гл.6, §6.2), рассматривались два основных уравнения. Это уравнение ХЗК, которое использовалось для описания полей одиночных элементов:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - L_T(p) \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (7.1)$$

и модифицированное уравнение Вестервельта (УВ):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p + \frac{\varepsilon}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + L_T(p). \quad (7.2)$$

В уравнениях (7.1) и (7.2), по сравнению с уравнениями ХЗК (6.1) и УВ (6.2) в воде, содержится оператор $L_T(p)$, описывающий дополнительное поглощение ультразвука в ткани в соответствии линейным по частоте степенным законом $\alpha \cdot (f/f_0)$. Таким образом, частотно-зависимое поглощение в ткани, $\alpha_T(f)$, было введено в численную модель как комбинация линейного по частоте поглощения и слабого термовязкого квадратичного закона поглощения как в воде:

$$\alpha_T(f) = \alpha \cdot (f/f_0) + \alpha_B \cdot (f/f_0)^2. \quad (7.3)$$

Дисперсия скорости звука рассчитывалась для линейного закона поглощения с помощью локальных дисперсионных соотношений типа Крамерса-Кронига [156]:

$$\Delta c/c_0 = \frac{c_0 \alpha_0}{\pi^2 f_0} \ln(f/f_0), \quad (7.4)$$

где $\Delta c = c(f) - c_0$, $c(f)$ – скорость звука на частоте f . Алгоритм численного моделирования уравнения ХЗК (7.1) для одиночного фокусирующего источника описан в приложении 5, уравнения Вестервельта (7.2) для многоэлементной терапевтической решетки – в приложении 7.

Интенсивность ультразвукового поля рассчитывалась по результатам моделирования в приближении квазиплоской волны как:

$$I = \sum_{n=1}^N |p_n|^2 / 2\rho_0 c_0, \quad (7.5)$$

где $|p_n|$ – амплитуда n -ой гармоники акустического давления. Мощность тепловых источников Q рассчитывалась как сумма вкладов поглощения на каждой из гармоник:

$$Q = \frac{1}{\rho_0 c_0} \sum_n \alpha_n |p_n|^2, \quad \alpha_n = \alpha_r(f_n = n f_0). \quad (7.6)$$

При облучении гармоническими волнами в отсутствие нелинейных эффектов интенсивность волны и мощность тепловыделения в ткани пропорциональны квадрату амплитуды давления на основной частоте и равны:

$$I_{lin} = \frac{|p_1|^2}{2\rho_0 c_0}; \quad Q_{lin} = \frac{\alpha_r(f_0) |p_1|^2}{\rho_0 c_0}. \quad (7.7)$$

При формировании ударных фронтов в фокусе поглощение пропорционально кубу скачка давления на фронте, существенно превышает поглощение на основной частоте волны и не зависит от коэффициента поглощения в ткани:

$$Q_{shock} = \frac{\beta A_s^3}{6c_0^4 \rho_0^2}. \quad (7.8)$$

Моделирование эволюции распределения температуры в ткани проводилось при помощи уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + \frac{Q}{c_v}. \quad (7.9)$$

Здесь T °С – это разность текущей и начальной T_0 температуры как функция координат и времени, c_v – теплоемкость единицы объема ткани, χ – коэффициент температуропроводности ткани. На основе данных об эволюции температуры в каждой точке пространства рассчитывалась тепловая доза t_{56} , определяемая здесь относительно температуры 56°С :

$$t_{56.0} = \int_0^{t_{нагрева}} R_0^{(56.0-T(t))} dt. \quad (7.10)$$

Здесь $R_0 = 0.5$, $t_{56.0}$ – временной эквивалент тепловой дозы, выражаемый в секундах. Превышение тепловой дозой порогового значения $t_{56.0} \geq 1$ с (что соответствует 120 мин при 43 °С) означает разрушение ткани [6].

7.3. Метод определения параметров нелинейного акустического поля в фокусе при распространении в биологической ткани

Для планирования HIFU-облучения ткани необходимо знать величины параметров акустического поля *in situ*, т.е. в области ткани, подвергающейся воздействию ультразвука. Чтобы определить эти параметры, акустическое поле в воде, где проводятся калибровочные измерения, обычно умножается на экспоненциальный множитель, учитывающий потери энергии волны в ткани в предположении линейного распространения ультразвука [6, 9]. Такая процедура получила название дирейтинга. Например, интенсивность ультразвука в ткани, I_T , на глубине L может быть определена из измерений в воде следующим образом:

$$I_T = I_B \exp(-2\alpha L), \quad (7.11)$$

где I_B – интенсивность ультразвука в воде в той же точке, линейно экстраполированная из измерений на низких амплитудах, и α – коэффициент поглощения в ткани на рабочей частоте излучателя. Тогда амплитуда давления p_T и мощность тепловыделения H_T в ткани могут быть получены с помощью следующих выражений:

$$p_T = \sqrt{2I_T \rho_0 c_0}, \quad H_T = 2\alpha I_T, \quad (7.12)$$

где нижний индекс «т» означает ткань. Предполагается, что плотность среды, ρ_0 , и скорость звука, c_0 , одинаковые в воде и в ткани. Затухание в ткани обычно выбирается в диапазоне $0.3 \div 0.7$ дБ см⁻¹ МГц⁻¹.

При больших уровнях давления, когда нелинейные эффекты значительны, использование формул (7.11) и (7.12) становится принципиально неверным. Во-первых, результаты измерений акустического поля в воде при малых мощностях не могут быть линейно экстраполированы на большие мощности, когда проявляются нелинейные эффекты [226, 291]. Даже если измерения в воде проводить во всем диапазоне рабочих мощностей (гл. 6), то экстраполяция (7.11) полученных данных также не даст правильных результатов в ткани. Поглощение в ткани гораздо сильнее, чем в воде, поэтому при одинаковой мощности излучателя амплитуда волны при распространении в ткани будет меньше и нелинейное искажение формы волны будет слабее, чем в воде [292, 222]. За счет генерации высших гармоник, которые поглощаются в ткани быстрее, чем основная частота, затухание нелинейно-искаженных волн в ткани происходит сильнее, чем предсказывает формула (7.11). Наконец, основные акустические параметры нелинейных полей, такие как интенсивность, пиковые давления, и мощность тепловыделения, уже не могут быть получены с помощью простых соотношений (7.7).

В диагностике для учета акустической нелинейности в процессе дирейтинга было предложено несколько методов локальной коррекции результатов [292, 293]. Были также определены ошибки, возникающие при дирейтинге для типичных диагностических источников и типов ткани [222]. Основная трудность здесь заключается в том, что диагностические датчики имеют низкий коэффициент усиления в фокусе ($G = 3-8$), поэтому амплитудно-зависимые эффекты нелинейности важны на всем пути распространения волны от излучателя до фокуса и проявляются различным образом в воде и в поглощающей ткани. До сих пор не существует подхода, который бы с хорошей точностью предсказывал бы нелинейное акустическое поле источников диагностического ультразвука в ткани по данным измерений в воде.

Предлагаемый здесь метод основан на том, что фокусирующие преобразователи HIFU-хирургии обычно имеют высокий коэффициент усиления по давлению (40-80). В этом случае амплитуда поля в фокальной области существенно выше, чем на пути к фокусу, а длина высокоамплитудной фокальной области – намного короче, чем фокусное расстояние излучателя и характерная длина поглощения основной частоты излучения в ткани [9, 239]. Тогда разумно предположить, что нелинейные эффекты в фокальной области будут преобладать над эффектами нелинейного распространения в ближнем поле, степень нелинейного искажения формы волны будет определяться уровнем давления в фокальной области, а потери энергии волны на пути к фокусу в ткани можно аппроксимировать поглощением ультразвука на основной частоте.

Следуя данным предположениям, рассмотрим вначале фокусировку линейного пучка в воде и в ткани при таких давлениях на источнике, когда амплитуда давления P_F в геометрическом фокусе преобразователя будет одинаковой в обеих средах. Предполагается, что все акустические параметры воды и ткани, за исключением поглощения, одинаковы. На рис. 7.2 показаны распределения амплитуд давления вдоль оси пучка для одноэлементного поршневого

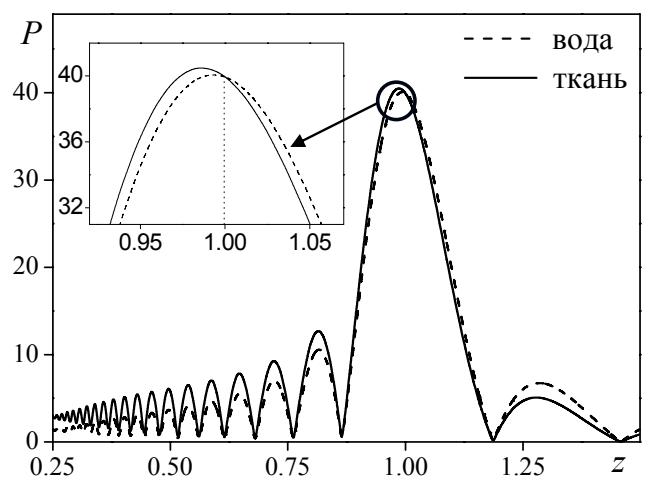


Рис. 7.2. Иллюстрация идеи метода нелинейного дирейтинга в случае линейного фокусированного пучка. Давление на излучателе в ткани (сплошная кривая) в $\exp(1) = 2.7$ раз выше, чем в воде (пунктир) для компенсации затухания волны при её распространении до фокуса и обеспечения такого же давления в фокусе, как и при распространении в воде.

источника с линейным коэффициентом концентрации $G = p_F/p_0 = 40$. Решения получены численно с помощью линеаризованного уравнения ХЗК (6.5). Давление p нормировано на амплитуду давления на излучателе p_0 в воде: $P = p/p_0$. Сплошная кривая соответствует распространению в ткани, пунктирная – в воде. Если начальное давление при распространении в ткани в $\exp(A_T)$ раз больше, чем при распространении в воде, то давление в фокусе будет одинаковым в обеих средах. Здесь $A_T = \alpha_T F$ - безразмерный коэффициент поглощения в ткани на частоте излучателя; на рис. 7.2 $A_T = 1$ и $\exp(A_T) = 2.7$.

Суть предлагаемого подхода основана на гипотезе, что если увеличить амплитуду давления на излучателе в нелинейном пучке таким же образом, т.е.

$$p_0(\text{ткань}) = p_0(\text{вода})\exp(A_T), \quad (7.13)$$

то профили давления в фокусе также будут близки как по форме, так и по пиковым значениям. Если эта гипотеза верна, то параметры нелинейных ультразвуковых полей в биологической ткани могут быть определены из измерений или моделирования акустического поля в воде (гл.6), используя лишь линейный коэффициент поглощения A_T .

Для проверки предложенного метода был проведено моделирование нелинейных фокусированных полей в воде и в ткани в широком диапазоне начальных давлений и линейных коэффициентов усиления излучателя [282]. Сначала рассчитывались профили и спектры волны, пиковые положительное и отрицательное давления в фокусе излучателя в воде. Затем на основе предложенного метода предсказывались значения соответствующих параметров в ткани, и полученные значения сравнивались с результатами прямого моделирования в ткани. Основная часть результатов приведена здесь для величины параметра поглощения $A_T = 1$, но также проводится сравнение с численными результатами для параметров $A_T = 0.25, 0.5$ и 0.75 [294]. Экспериментальная апробация метода проводилась путем сравнения профилей волны, измеренных в фокусе излучателя в воде и за образцом биологической ткани (говяжьей печени, свиной брюшной стенки) при соответствующем выборе уровней амплитуд начального давления.

На рисунке 7.3 показаны зависимости пикового положительного и отрицательного давлений (а) и интенсивности волны (б), рассчитанные в ткани (сплошная кривая) и в воде (пунктир) вдоль оси пучка. На малых графиках показаны профили волны (а) и амплитуды первых шести гармоник (б) в воде и в ткани в фокусе излучателя, $z = 1$. Расчёты в воде проводились для граничного условия (6.5), линейного коэффициента усиления $G = 40$ и нелинейного параметра $N = 0.25$. При этих условиях ударный фронт формируется вблизи фокуса, а нелинейное увеличение коэффициента усиления для пикового положительного давления максимально (рис. 6.14). Расчёты в поглощающей ткани проводились для

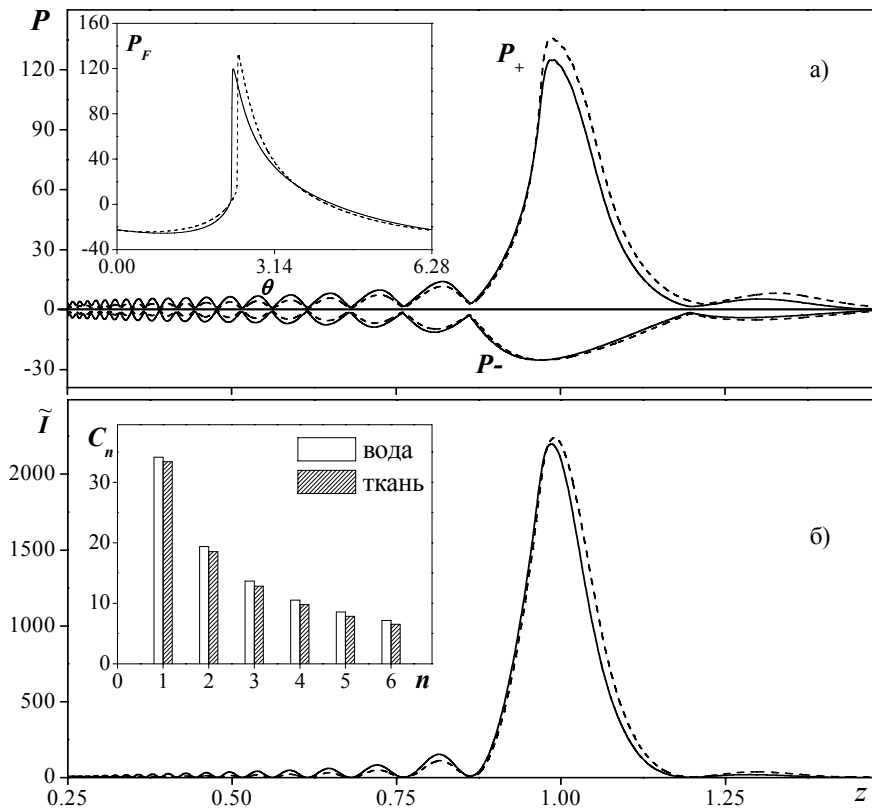


Рис. 7.3. Зависимости безразмерного пикового положительного и отрицательного давлений (а) и интенсивности (б) вдоль оси нелинейного фокусированного пучка при распространении в ткани (сплошная кривая) и в воде (пунктир). Давления и интенсивность нормированы на соответствующие величины на источнике при фокусировке в воде. Значения параметров: $G = 40$, $N = 0.25$, $A_T = 1$. На малых графиках изображены профиль волны (а) и амплитуды её первых шести гармоник спектра (б) в фокусе.

давления на источнике в $\exp(1) = 2.7$ раз выше, в соответствии с величиной параметра поглощения $A_T = 1$. Давления и интенсивность на рисунках нормированы на соответствующие значения на излучателе, используемые при моделировании в воде, поэтому безразмерная амплитуда давления при $z = 0$ в ткани равна 2.7, а интенсивность – 7.4. В случае линейного распространения волны (рис. 7.2), такое увеличение исходного давления при распространении в ткани точно компенсирует потери энергии на пути к фокусу, поэтому в фокусе преобразователя в воде и в ткани величины давления и интенсивности одинаковы. Результаты, представленные на рис. 7.3, соответствуют фокусировке в режиме формирования разрывов, однако и в этом случае величины давления, интенсивности, профили волны и спектры в фокусе излучателя в воде и в ткани близки друг к другу. Отметим, что хотя пиковое положительное давление в профиле волны, рассчитанной в воде, на 10% выше, чем в ткани, амплитуда разрыва в обоих профилях практически одинаковы. Ударный фронт в ткани несколько смещен вниз по сравнению с ударным фронтом в воде, что характерно для распространения разрывных волн в диспергирующей среде типа биологической ткани [132].

Результаты, показанные на рис. 7.3, являются только одним примером, подтверждающим предложенный метод директинга для сильно фокусирующих источников. Расчеты также проводились при том же коэффициенте линейного усиления G в интервале значений $0 < N < 2.5$. Процесс директинга иллюстрируется на рис. 7.4 для

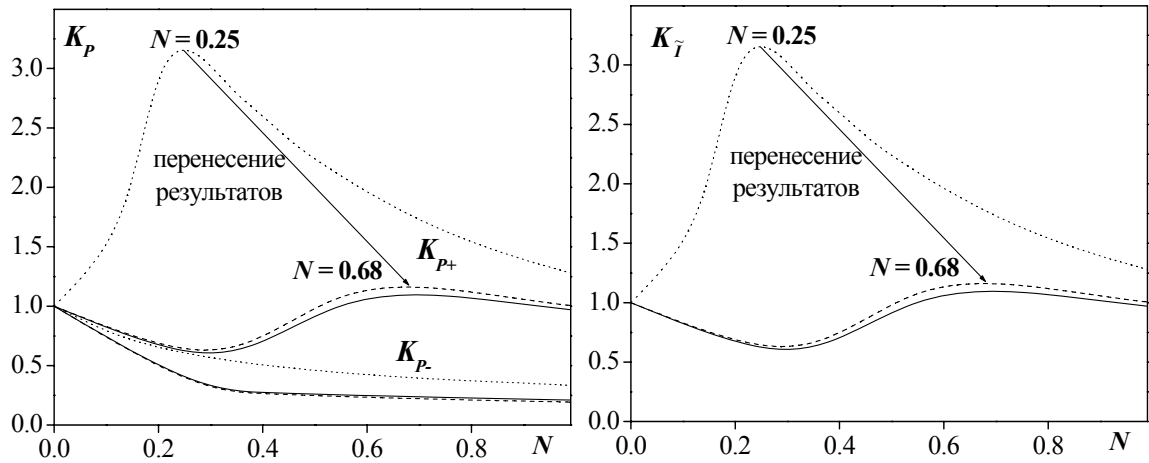


Рис. 7.4. Коррекционные множители к коэффициентам фокусировки для пикового положительного (K_{P+}) и отрицательного (K_{P-}) давлений и интенсивности (K_I) в нелинейном пучке в зависимости от нелинейного параметра N . Коррекционные множители определены как $K_P = p_F / p_0 G$ и $K_I = I_F / I_0 G^2$, где $G = 40$. Сплошные кривые – результаты моделирования в ткани, штриховые – результаты моделирования в воде, пунктир – результаты моделирования в воде, перенесенные на ткань на основе предложенного метода.

пиковых давлений и интенсивности. На рисунке показаны коррекционные множители $K_{P+} = G_{нел} / G = p_{+,F} / p_0 G$, $K_{P-} = G_{нел} / G = p_{-,F} / p_0 G$ и $K_I = G_{нел}^2 / G^2 = I_F / I_0 G^2$ для линейного коэффициента фокусировки G ($G = 40$ в воде, $G = 14.7$ в ткани) как функции нелинейного параметра N (т.е. давления на излучателе). Сплошная линия – результат прямого моделирования в ткани, штриховая линия – прямое моделирование в воде. Более эффективное поглощение высших гармоник, генерируемых в ткани на пути к фокусу, преобладает над их лучшей фокусировкой; увеличение амплитуды поля на излучателе приводит сначала к уменьшению коэффициента фокусировки. Когда ударные фронты начинают формироваться близко к фокусу, коэффициент фокусировки возрастает, его максимальное значение достигается в ткани при большей амплитуде на излучателе: $N = 0.68$ в ткани по сравнению с $N = 0.25$ в воде. Чтобы определить параметры поля в ткани, умножим амплитуду давления на излучателе в воде на множитель $\exp(A_T) = \exp(1)$ (7.13) и получим результаты «дирейтинга» (пунктир), которые очень близки к результатам прямых расчетов в ткани (сплошная линия), различие не превышает 8%.

На рис. 7.5 показаны кривые насыщения для пиковых давлений (а) и интенсивности (б) в фокусе, при $z = 1$. Безразмерные величины на рисунке по оси ординат, $NP_F / G = p_F \cdot N / p_0 G$ (а) и $N^2 I_F / G^2 = I_F \cdot N^2 / I_0 G^2$ (б), пропорциональны пиковым давлениям p_F и интенсивности I_F в фокусе. Оси абсцисс соответствуют давлению $N \sim p_0$ и интенсивности $N^2 \sim I_0$ на излучателе. В условиях линейной фокусировки кривые на рис. 7.5 были бы прямыми линиями. В безразмерных переменных на рисунке значения

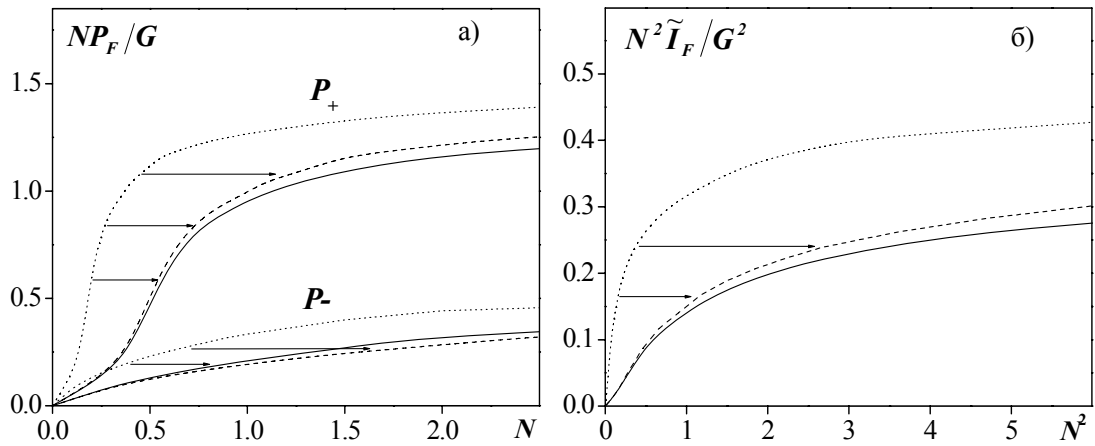


Рис. 7.5. Пиковые давления ($NP_F / G \sim p_F$, а) и интенсивность ($N^2 \tilde{I}_F / G^2 \sim I_F$, б) волны в фокусе в зависимости от амплитуды давления ($N \sim p_0$) и интенсивности ($N^2 \sim I_0$) на излучателе. Сплошная и штриховая линии соответствуют результатам прямого моделирования распространения волны в ткани и в воде при граничных условиях (2.24); пунктирная линия соответствует результатам дирейтинга. Линейный коэффициент усиления в воде $G = 40$.

интенсивности и пиковых давлений в воде в фокусе и на излучателе были бы одинаковы, а в ткани – в $\exp(1)$ раз ниже по давлению и в $\exp(2)$ раза ниже по интенсивности в фокусе по сравнению с излучателем. В нелинейном пучке кривые имеют более сложный вид и результаты в ткани уже не могут быть получены из результатов в воде простым умножением на некоторый множитель. После масштабирования выходной мощности излучателя, т.е. умножая начальное давление на $\exp(1)$ или интенсивность на $\exp(2)$, как показано стрелками на рис. 7.4, новые кривые (пунктир) очень близки к результатам прямого моделирования в ткани (сплошная линия). Например, как было показано на рис. 7.3, результаты, полученные в воде при $N = 0.25$, соответствуют результатам в ткани при $N = 0.25 \cdot \exp(1) = 0.68$. Аналогичные расчеты, проведенные для нескольких значений коэффициента поглощения в ткани $0.25 \leq A_T \leq 1$, (2) $A_T = 0.75$, показали, что точность предложенного метода тем выше, чем меньше поглощение в ткани (2% для $A_T = 0.25$).

Результаты, показанные на рис. 7.6 и иллюстрирующие эффект насыщения в нелинейных фокусированных пучках, позволяют ответить на вопрос, как отличаются предельно достижимые уровни акустического поля в фокусе в слабо-поглощающих (вода) и поглощающих (ткань) средах. Видно, что для достижения насыщения при фокусировке в ткани требуются более высокие выходные мощности излучателя, однако сами уровни насыщения в ткани, лишь немного ниже, чем в воде (менее 10%).

Как уже обсуждалось выше, предложенный метод основывался на предположении, что в сильно фокусированных пучках амплитуда давления в фокальной области значительно выше, чем на пути к фокусу, и поэтому нелинейные эффекты вблизи фокуса

преобладают над эффектами нелинейного распространения до фокуса. Правомерность этой гипотезы проверялась путем моделирования пиковых давлений в фокусе для различных линейных коэффициентов усиления $5 \leq G \leq 60$. На рис. 7.6 представлены зависимости безразмерных пиковых давлений в фокусе, $NP_F/G = p_F \cdot N/p_0G \sim p_F$, от коэффициента усиления G для квазилинейного режима фокусировки ($N=0.5$ в ткани или $N=0.18$ в воде, а) и в режиме развитых разрывов ($N=2$ в ткани и $N=0.7$ в воде, б).

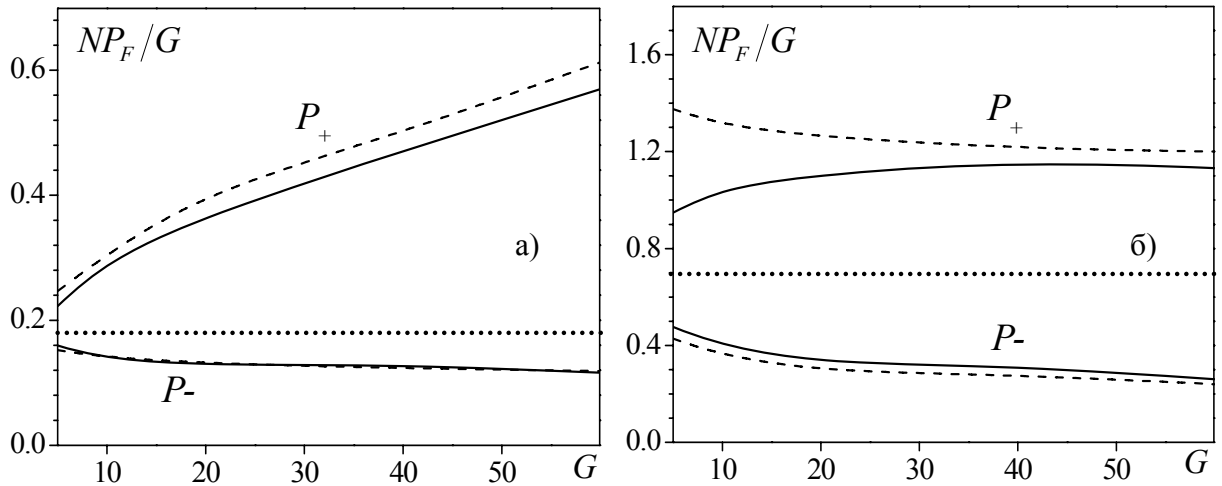


Рис. 7.6. Значения пиковых давлений в фокусе в зависимости от величины линейного коэффициента усиления G для параметров нелинейности $N=0.5$ (а) и $N=2$ (б) в случае распространения волны в ткани (сплошная линия) и результаты дирейтинга (пунктир). Горизонтальные точечные линии соответствуют значениям давлений в фокусе линейного пучка.

Сплошные кривые соответствуют распространению в ткани, а пунктирные – результатам дирейтинга. В линейном пучке в воде увеличение амплитуды давления в фокусе равно линейному коэффициенту усиления ($P_F = G$) и безразмерное давление на рис. 7.6 было бы равно нелинейному параметру N , используемому при моделировании в воде (горизонтальные линии на высоте 0.18 (а) и 0.7 (б)). В квазилинейном и разрывном режимах значения пикового отрицательного давления, P_- , в фокусе излучателя в ткани практически совпадают с результатами дирейтинга для всех значений коэффициента усиления G . Для пикового положительного давления, P_+ , результаты дирейтинга выше, чем полученные при прямом моделировании в ткани. В квазилинейном пучке (а), различие между кривыми несколько возрастает для сильно фокусирующих излучателей, но в любом случае не превышает 7% во всем диапазоне значений параметра G . В режиме развитых разрывов (б) различие между кривыми больше для слабофокусирующих источников ($G < 20$), т.к. в этом случае сильнее проявляются эффекты нелинейного распространения в ближнем поле. Для значения $G=5$ разница составляет 35%. Чем больше значение G , тем ближе результаты дирейтинга и прямых расчетов в ткани для P_+ (5% для $G=60$). Эти результаты показывают, что предложенный метод дирейтинга может

быть использован для оценки пикового положительного давления (ошибка <10%) для сильно фокусирующих преобразователей с линейными коэффициентами усиления $G = 30 \div 60$. Для оценки пикового отрицательного давления метод обеспечивает хорошую точность независимо от величины коэффициента усиления излучателя.

Для экспериментальной проверки предложенного метода были проведены измерения профилей волны в фокусе излучателя в воде и за образцами тканей *ex vivo* говяжьей печени и свиной брюшной стенки, состоящей из слоев кожи и жировой ткани (рис. 7.7). Образцы печени имели толщину 27 мм, образцы брюшной стенки – неравномерную толщину ≈ 3 см. Образцы дегазировались в вакуумной камере в течение часа; измерения проводились в дегазированной воде на установке, описанной в §7.6, при комнатной температуре (20°C) с помощью оптоволоконного гидрофона (FORH 2000) в точке пространственного максимума пикового положительного давления. Расстояние между гидрофоном и образцами не превышало 1 мм. По результатам измерений в воде были предсказаны профили волны в ткани, которые затем сравнивались с измеренными профилями после прохождения образца и с результатами моделирования.

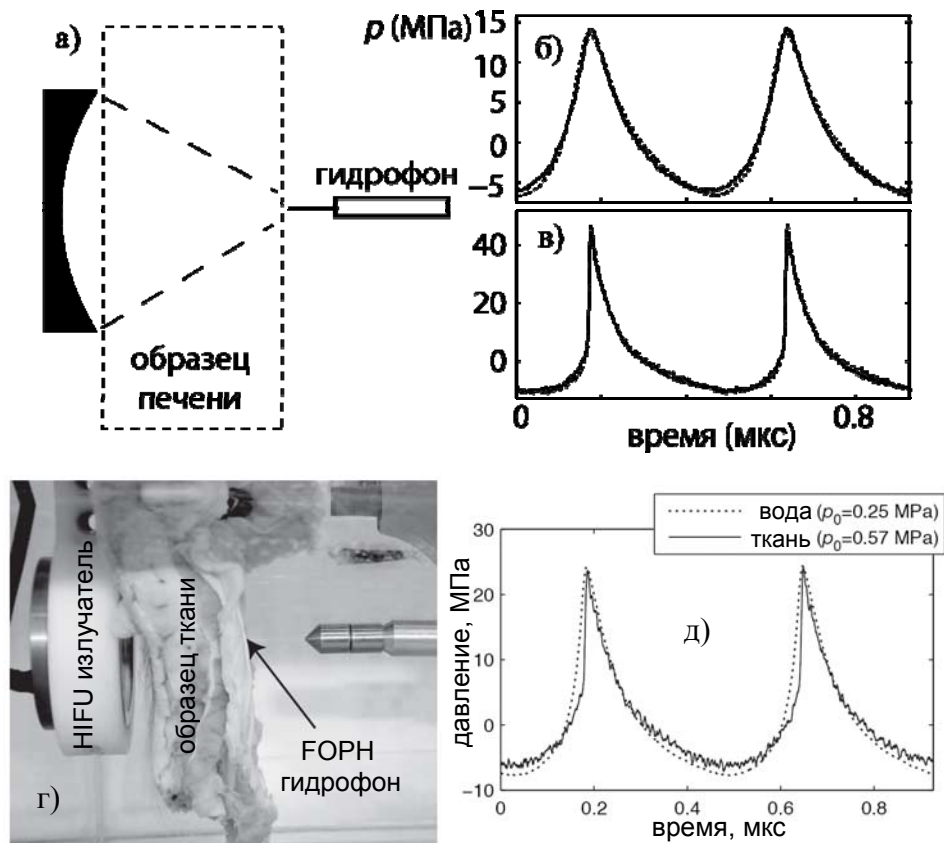


Рис. 7.7. Слева: схема измерений за образцами говяжьей печени (а) и свиной брюшной стенки (г) *ex vivo* в фокусе HIFU излучателя. Справа: сравнение профилей волны, измеренных в воде (пунктир) и после прохождения образцов (сплошная линия). Амплитуда на источнике: (б) $p_0 = 0.18$ МПа для воды, $p_0 = 0.3$ МПа для печени; (в) $p_0 = 0.36$ МПа для воды, $p_0 = 0.6$ МПа для печени; (д) $p_0 = 0.25$ МПа для воды, $p_0 = 0.57$ МПа для брюшной стенки.

На рис. 7.7(б) показаны профили давления в фокусе, измеренные в воде (пунктирная кривая) при давлении на излучателе $p_0 = 0.18$ МПа и за образцом печени (сплошная линия) при $p_0 = 0.3$ МПа. Для расчетов в воде этим условиям соответствуют параметры $G = 48$ и $N = 0.11$, т.е. квазилинейный режим фокусировки (рис. 7.4): профили волны в фокусе искажены ($p_+ = 14$ МПа, $p_- = 6$ МПа), но ударный фронт ещё не сформировался. При измерениях за образцом печени амплитуда давления на излучателе масштабировалась в соответствии с предложенным методом (7.11), что дает суммарные потери при распространении в ткани 4.3 дБ и коэффициент поглощения $\alpha_t = 0.18$ Нп/см на частоте излучателя 2.158 МГц или 0.08 Нп/(см·МГц) в предположении линейной зависимости поглощения от частоты. Этот результат соответствует известному из литературы интервалу значений затухания в печени 0.04 – 0.1 Нп/(см·МГц) [6, 15].

При фокусировке волны в воде при $p_0 = 0.3$ МПа ($N = 0.23$) в фокусе излучателя образуется ударный фронт с пиковым положительным давлением $p_+ = 45$ МПа и пиковым отрицательным давлением $p_- = -9$ МПа (рис. 7.7 (в)). Такие условия соответствуют максимальному нелинейному увеличению коэффициента усиления (рис. 7.4). В соответствии с коэффициентом поглощения α_t , полученным при первом измерении, для измерений в ткани было выбрано давление $p_0 = 0.57$ МПа. Как видно из рисунка, профили волны, измеренные в воде и за образцом ткани, и в этом случае практически совпадают.

Результаты более сложного случая фокусировки в неоднородной ткани, состоящей из слоев с различными физическими параметрами (брюшная стенка), показаны на рис. 7.7 (г, д). Начальное давление при облучении через образец ткани было увеличено на 7.2 дБ. Как видно, учет такого интегрального поглощения дает хорошее согласие результатов. Отметим, что крутизна ударного фронта после прохождения образца несколько больше, чем в воде. Это может быть связано с тем, что нелинейный параметр мягких тканей обычно больше, чем у воды, а в предложенном способе учитывается разница только коэффициентов поглощения.

Таким образом, результаты численного эксперимента и прямых измерений в воде и за образцом биологической ткани подтвердили не только возможность применения предложенного метода нелинейного дирейтинга для разных выходных мощностей, но и возможность использования развитого численного алгоритма как альтернативу измерениям. Развитый здесь метод, учитывающий поглощение ультразвука в ткани, недавно получил дальнейшее развитие, позволяющее учесть также разницу в величинах нелинейного параметра в воде и ткани [295].

7.4. Нелинейные эффекты при использовании сканирующего режима облучения ткани

Характерный объем одиночного теплового HIFU-разрушения (фокального пятна длиной 1.0 – 1.5 см и диаметром 1.2 - 2 мм) обычно намного меньше характерного объема опухоли ($\sim 1 - 4 \text{ см}^3$) [296, 297], поэтому возникает необходимость в смещении фокуса в пространстве. В существующих клинических установках наиболее активно сейчас используются два режима. В одном из них, путем механического смещения HIFU-излучателя, в ткани формируют дискретный набор расположенных друг за другом одиночных фокальных пятен [297]. Однако такой режим требует продолжительной процедуры лечения. В другом режиме, используемом в установке HAIFU, излучатель непрерывно смещается с некоторой выбранной постоянной скоростью, формируя область разрушения в виде полосы (в англоязычной литературе называемой «треком»), что позволяет существенно сократить длительность лечебной процедуры [289]. Целью данной части работы было показать в численном и физическом экспериментах, что в этих условиях эффекты акустической нелинейности играют определяющую роль в получении необходимого хирургического эффекта.

Эксперименты проводились с использованием клинической HIFU-установки, разработанной в Институте исследований рака г. Саттон (Великобритания), с параметрами: радиус излучателя $r_0 = 4.2 \text{ см}$, фокусное расстояние $F = 15 \text{ см}$, рабочая частота $f_0 = 1.7 \text{ МГц}$ (рис. 7.8) [298]. Вода и образцы говяжьей печени дегазировались в течение 40 минут,

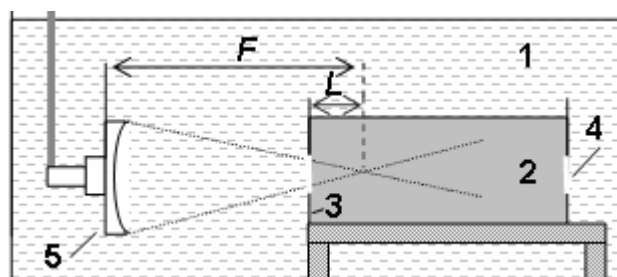


Рис. 7.8. Схема экспериментальной установки. 1 – бассейн с водой, 2- образец говяжьей печени, 3 – кювета, в которую помещается печень, 4 – круглые отверстия, затянутые тонкой пленкой, 5 – ультразвуковой излучатель, $L=2\text{см}$ – расстояние между фокусом и границей раздела вода-ткань.

затем образцы печени помещались в кювету, фронтальная и задняя стенки которой имели круглые отверстия, затянутые тонкой акустически прозрачной полиэтиленовой мембраной толщиной порядка 20 мкм . Ультразвуковой излучатель и кювета с образцом печени полностью погружались в резервуар с водой таким образом, чтобы расстояние между границей раздела вода-ткань и точкой геометрического фокуса в образце составляло $L = 2 \text{ см}$. Параллельно измерениям проводилось моделирование на основе нелинейного уравнения типа ХЗК (7.1). Уравнение решалось для двух областей, в воде (1) и ткани (2), с параметрами $c_{01} = 1486 \text{ м/с}$, $c_{02} = 1614 \text{ м/с}$, $\rho_{01} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{02} = 1214 \text{ кг/м}^3$, $\varepsilon_1 = 3.5$

$\varepsilon_2 = 4.8$, $\alpha_{01} = 7.23 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, $\alpha_{02} = 8.42 \text{ м}^{-1}$, $\eta_{01} = 2$ и $\eta_{02} = 1.3$ [299]. Значения безразмерных параметров составляли $G_1 = 42.2$, $G_2 = 38.9$, $A_1 = 1.08 \cdot 10^{-2}$, $A_2 = 1.26$, значение нелинейного параметра N зависело от положения границы раздела вода - ткань. Уравнение теплопроводности (7.9) также решалось для двух областей, в воде и ткани, с параметрами $\kappa_1 = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\kappa_2 = 1.3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $c_{v1} = 4.3 \cdot 10^6 \text{ Вт}\cdot\text{с}/(\text{°С}\cdot\text{м}^3)$, $c_{v2} = 3.8 \cdot 10^6 \text{ Вт}\cdot\text{с}/(\text{°С}\cdot\text{м}^3)$. Для оценки ультразвукового воздействия использовалась концепция тепловой дозы, определяемая относительно температуры $T_{ref} = 56 \text{ °С}$, что дает значение критической дозы $td_{T_{ref}} = 1 \text{ с}$ (7.10) [300].

Исследовались режимы облучения, в которых проводится перемещение фокальной области за счет механического смещения излучателя: последовательное формирование дискретного набора из восьми одиночных разрушений и разрушения в виде непрерывной полосы - «трека» (рис. 7.9). При формировании дискретного набора разрушений длительность каждого облучения составляло 2 секунды, временной шаг между следующими друг за другом облучениями - 60 секунд. Ультразвуковой излучатель механически смещался с помощью системы позиционирования поперек оси пучка (вдоль координаты y) таким образом, чтобы центры соседних областей разрушения отстояли друг от друга на расстоянии 2 мм (а). Исходная акустическая мощность источника выбиралась таким образом, чтобы максимум интенсивности поля в фокальной области с учетом поглощения в ткани составлял $1500 \text{ Вт}/\text{см}^2$. Эксперимент повторялся для трех различных образцов, которые имели форму параллелепипеда шириной 12 см (вдоль оси y) и длиной (вдоль оси пучка) 4.3 см.

Для формирования разрушения в виде «трека» ультразвуковой излучатель смещался с постоянной скоростью 6 мм/с, непрерывно излучая в течение 5 секунд

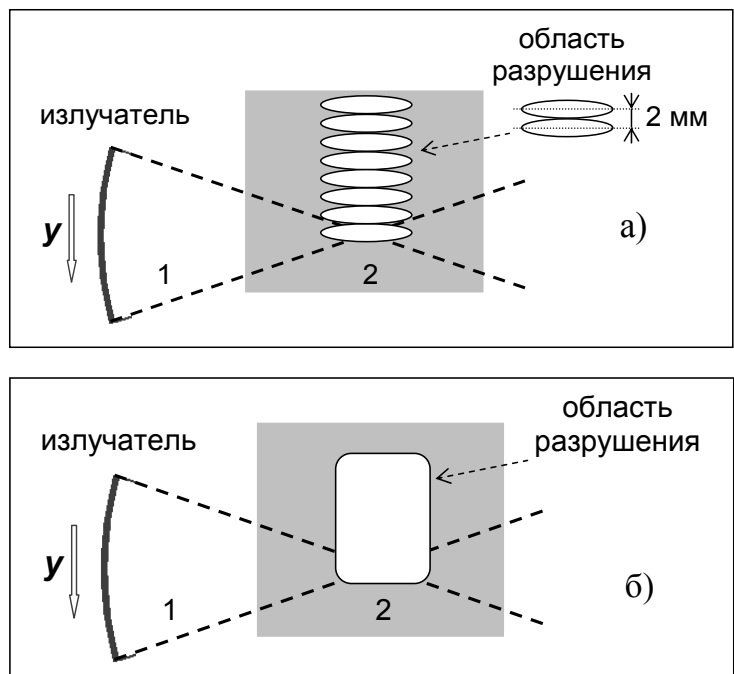


Рис. 7.9. Схема реализации режимов формирования разрушения (а) - в виде дискретного набора из восьми одиночных разрушений и (б) - в виде «трека». Цифрами обозначены: 1- дегазированная вода, 2 – образец печени, ось y – направление механического смещения ультразвукового излучателя.

(рис. 2(б)). При этом облучение отдельного объема ткани на оси сканирования составляет доли секунды (≈ 0.3 с). Исходная акустическая мощность источника выбиралась таким образом, чтобы максимальная интенсивность поля в фокальной области с учетом поглощения в ткани составляла 3000 Вт/см^2 . Разрушения формировались в трех различных образцах печени, имеющих форму параллелепипеда шириной 12 см (вдоль оси y) и длиной (вдоль оси пучка) 11 см.

На рис. 7.10(а) изображены профили волны, рассчитанные в фокусе пучка при линейном режиме фокусировки и с учетом нелинейных эффектов. Видно, что при выбранной интенсивности облучения в профиле волны в фокусе образуется ударный фронт. Пиковое положительное давление в профиле волны более чем в два раза превышает амплитуду давления в линейном пучке, а полный перепад давления нелинейной волны в полтора раза превышает его значение в случае линейного распространения. Видно, что существенное проявление нелинейных эффектов имеет место лишь в малой пространственной области вблизи геометрического фокуса – приблизительно 1 мм в поперечном и 1.5 см в продольном направлениях. Именно в этой области можно ожидать существенного повышения эффективности теплового воздействия на ткань.

Переход энергии вверх по спектру при фокусировке нелинейной волны приводит к ослаблению дифракционных эффектов, в результате чего полная интенсивность нелинейной волны, рассчитанная по сумме интенсивностей всех гармоник в фокусе, примерно на 15% превышает значение интенсивности, рассчитанной для линейного пучка. В то же время мощность тепловых источников в фокальной области нелинейного пучка возрастает существенно. Показанные на рис. 7.10(б) пространственные распределения тепловых источников вдоль оси пучка для линейного и нелинейного режимов фокусировки иллюстрируют увеличение эффективности нагрева в нелинейном режиме почти на порядок. Используемый уровень

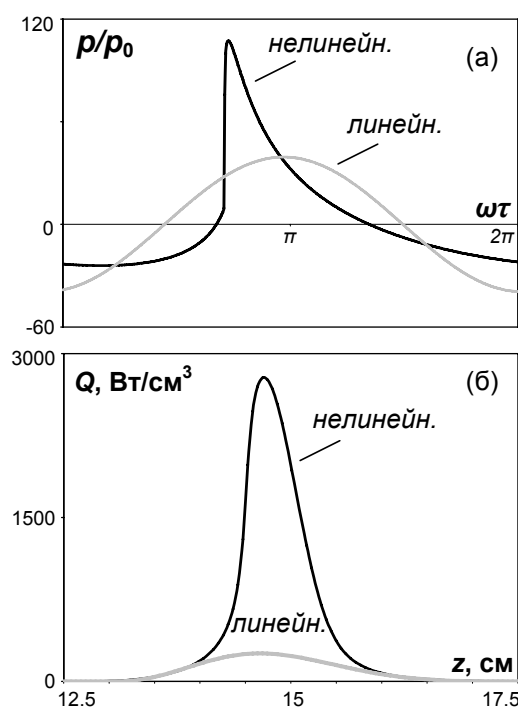


Рис. 7.10. Профили волны в фокусе пучка (а) и пространственное распределение тепловых источников вдоль оси пучка (б) для линейного и нелинейного режимов фокусировки ультразвука.

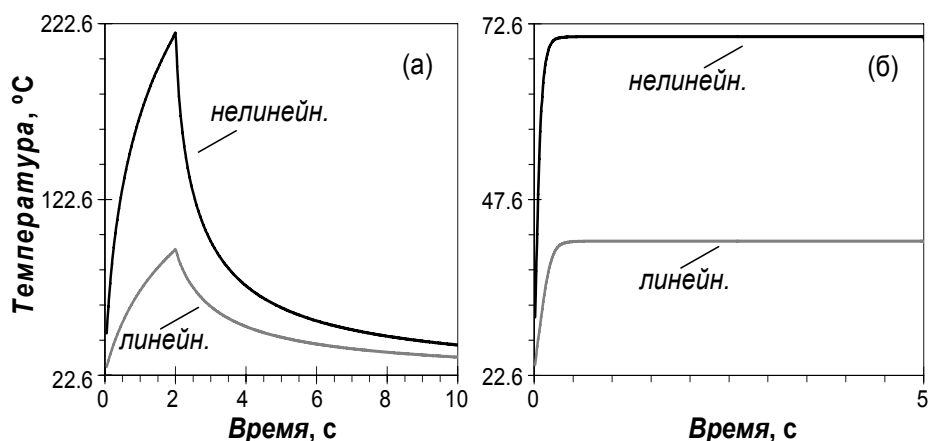


Рис. 7.11. Зависимости максимального значения температуры в фокусе излучателя от времени после 2-х секунд (а - одиночное разрушение) и 5-ти секунд (б - «трек») облучения в линейном и нелинейном пучках.

интенсивности был близок к оптимальному в смысле реализации режима локального перегрева ткани в фокусе за счет поглощения на ударных фронтах, поскольку разрыв образовывался лишь вблизи фокуса и не происходило дополнительных потерь энергии волны в предфокальной области.

Полученные пространственные распределения температуры продемонстрировали, что даже для коротких времен облучения (~ 1 с) влияние диффузии тепла проявляется достаточно сильно и зависимость $T(t)$ отлична от линейной (рис. 7.11(а)). Большой пространственный градиент в распределении тепловых источников при нелинейном режиме усиливает процесс диффузии. Поэтому, несмотря на то, что мощность тепловых источников в фокусе для линейного и нелинейного режимов отличается почти на порядок, температура после 1 с облучения отличается лишь в три раза. Было показано, что область сильного нагрева (выше 70°C) для нелинейного режима существенно шире как в продольном, так и поперечном направлениях и слегка смещена в сторону

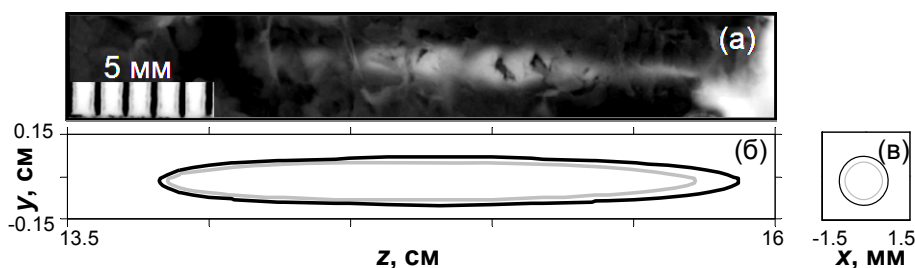


Рис. 7.12. Область теплового разрушения, полученная в образце печени (а) и предсказанная численно (yz плоскость ($x = 0$ см) (б) и ux плоскость ($z = 15$ см) (в)). Контуры проведены по уровню тепловой дозы $td_{56} = 1$ с и охватывают область теплового некроза ткани, полученную в линейном (линия серого цвета) и нелинейном (линия черного цвета) режимах распространения после 2-х секунд облучения ультразвуком.

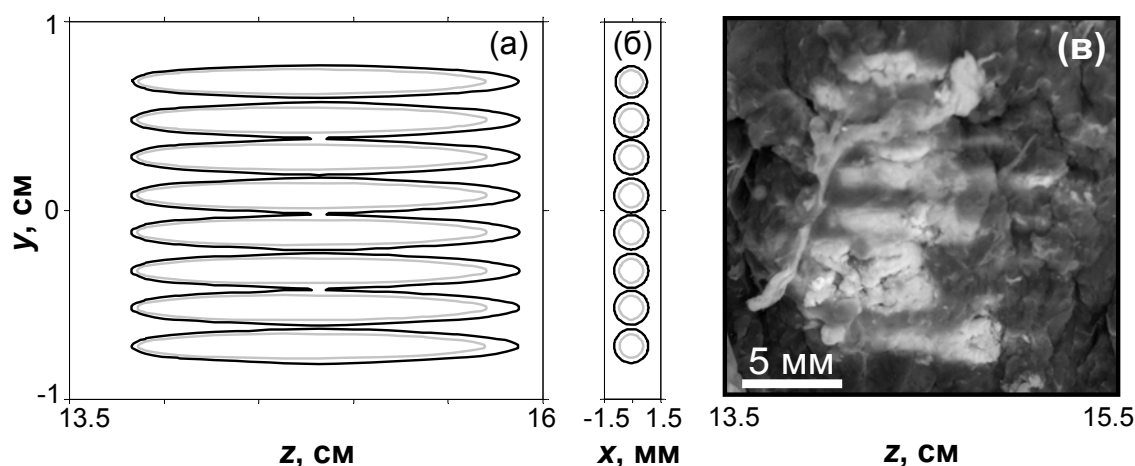


Рис. 7.13. Область теплового разрушения, предсказанная численно (yz плоскость ($x = 0$ см) (а) и ux плоскость ($z = 15$ см) (б)) в линейном (линия серого цвета) и нелинейном (линия черного цвета) режимах фокусировки пучка в ткани и полученная в образце печени (в).

излучателя. Напротив, область с умеренной температурой в случае нелинейного распространения уже, чем при линейном режиме, что вызвано лучшей локализацией нагрева. На временах > 0.8 с размер области высокой температуры ($> 70^\circ\text{C}$) существенно превышает область, где проявляются эффекты нелинейного перегрева, поэтому области теплового разрушения, предсказываемые линейной и нелинейной теориями, отличаются незначительно (рис. 7.12(б, в) и 7.13(а, б)). Однако на малых временах облучения (порядка 0.3 с) акустическая нелинейность способствует быстрому нагреву ткани до температуры выше 60°C , на которой можно ожидать формирование области теплового разрушения ткани. Именно такие небольшие времена облучения имеют место в режиме «трек», в котором излучатель смещается с постоянной скоростью 6 мм/с и каждый миллиметр ткани облучается не более 0.3 с. Из (рис. 7.12) видно, что только нелинейная теория предсказывает нагрев ткани до температуры, на которой происходит разрушение.

Полученные распределения температуры использовались для расчета поля тепловой дозы. На рис. 7.12 показана фотография одиночного теплового некроза в образце печени (а) после двух секунд облучения ультразвуком и посчитанное для данного режима распределение тепловой дозы для линейного распространения волны (контур серого цвета) и с учетом нелинейных эффектов (контур черного цвета). Поле тепловой дозы представлено в сечении yz ($x = 0$ см) (б) и ux плоскости ($z = 15$ см) (в). Примеры формирования одиночного теплового разрушения и набора из одиночных разрушений, в котором продолжительность каждого облучения составляла 2 с, временной и пространственный шаг между соседними областями некроза – 60 с и 2 мм, соответственно, показаны на рис. 7.13. Видно, что на временах облучения, превышающих 1 секунду, описание теплового воздействия на ткань линейной и нелинейной теориями отличается незначительно. Однако в режиме «трек» (рис. 7.14) тепловое разрушение

ткани предсказывается теоретически только при учете нелинейных эффектов (кривые черного цвета), линейная теория не предсказывает появление некроза. Расчеты показали, что эффекты акустической нелинейности способствуют более быстрому, по сравнению с линейным режимом, нагреву, а следовательно, и разрушению ткани на временах ~ 0.3 с. Приведенные на рис. 7.12-7.14 результаты показывают, что полученные в эксперименте области теплового некроза адекватно описываются численной моделью, развитой в настоящей работе. Показано, что в режимах малых времен облучения экспериментальные данные, находятся в хорошем согласии с предсказаниями нелинейной теории и не описываются в рамках линейной фокусировки ультразвука.

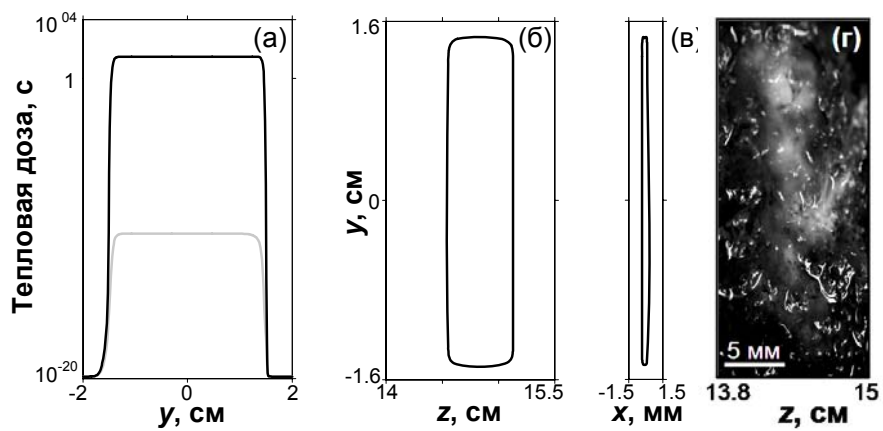


Рис. 7.14. Распределение тепловой дозы вдоль направления движения излучателя (ось y), полученное для линейного (линия серого цвета) и нелинейного (линия черного цвета) режимов распространения (а) и область разрушения ткани, предсказанная нелинейной теорией, показанная в yz ($x = 0$ см) (б) и ux ($z = 15$ см) (в) сечениях; разрушение в печени, полученное экспериментально (г). Длительность ультразвукового облучения составляет 5 секунд.

7.5. Нелинейные эффекты при использовании сканирующего режима облучения в гелевом фантоме

Как было показано в предыдущем параграфе главы, сканирующий режим при использовании облучения в режиме формирования разрывов в фокусе позволяет эффективно увеличить объем области разрушения в ткани. При облучении в таком режиме на диагностическом УЗ изображении часто наблюдается появление экзогенной области, что используется для визуализации области воздействия. Появление экзогенности сопровождается увеличением размера теплового разрушения, характерным каплеобразным искажением его формы и смещением разрушения в сторону излучателя. До последнего времени такие особенности обычно объясняли кавитационными явлениями в ткани [301 - 303, 231]. Устоявшимся мнением является и то, что возникновение кавитации в ткани приводит к усилению поглощения ультразвука и может быть использовано для разработки более эффективных протоколов облучения [39]. Исследования данной работы впервые показали, что физическим механизмом нелинейного усиления теплового эффекта является искажение формы волны, а ускоренный нагрев до температуры кипения и образование паровых пузырьков приводит к переотражению ультразвука в сторону излучателя и обеспечивает контраст на ультразвуковом изображении. Полученные результаты стали находить подтверждение в недавних работах других научных групп [304].

Удобным методом для детального исследования данных явлений послужило использование прозрачного гелевого фантома ткани. Фантом состоял из оптически прозрачного полиакриламидного геля с 7% добавкой говяжьего сывороточного альбумина (BSA) [305]. При повышении температуры геля до 60°C - 65°C происходит тепловая денатурация альбумина, сопровождающаяся помутнением геля. Акустические и теплофизические параметры геля близки к параметрам биологической ткани, однако коэффициент поглощения, определяемый концентрацией альбумина, при 7% BSA примерно в три раза меньше, чем в ткани [230]. Ниже представлены результаты экспериментов и моделирования, показывающие роль нелинейного поглощения и возникающего кипения при формировании одиночных разрушений и сканировании фокуса в геле. Использовались импульсно-периодические режимы облучения с одинаковой средней по времени мощностью и скоростью сканирования фокуса, но различными пиковыми значениями мощности пучка в импульсе и, соответственно, величиной коэффициента заполнения в импульсе. Схема эксперимента представлена

рис. 7.15. Образец геля кубической формы со стороной 5.5 см помещался в акриловый контейнер с двумя открытыми сторонами, перпендикулярными оси HIFU-пучка.

Контейнер крепился в бассейне с дегазированной водой комнатной температуры 22°C. Дегазация проводилась в течение двух часов, уровень дегазации контролировался измерителем концентрации кислорода (YSI, Yellow Springs, Ohio) и не превышал 25% от уровня насыщения. CCD камера (30 кадров в секунду) использовалась для визуализации процесса облучения, в поле зрения камеры помещался светодиод (LED), показывающий моменты включения и выключения HIFU. Рабочая частота излучателя в виде одиночного элемента (SU-107 Sonic Concepts, Woodinville, WA) составляла 3.5 МГц, диаметр 33 мм и радиус кривизны 35 мм. На элемент крепилась усеченная полая конусная насадка из акрила, на которую натягивалась тонкая полиэтиленовая

пленка для подавления потоков в воде между преобразователем и образцом. Перемещение преобразователя осуществлялось с помощью трехосевой системы позиционирования, контролируемой программой LabView (National Instruments, Austin, TX). Сигнал на излучатель подавался с генератора (HP 33120), усиливался линейным усилителем мощности (ENI A150), электрическая мощность на излучателе контролировалась измерителем мощности (Sonic Concepts, Woodinville, WA). Для сравнения с результатами моделирования, акустическая мощность излучателя была измерена методом акустического взвешивания и показала эффективность преобразователя $84\% \pm 4\%$. Пространственные распределения поля на малых мощностях измерялись в воде с помощью калиброванного игольчатого гидрофона с активным участком 150 мкм (SEA GL-0150-1A, Soquel, CA).

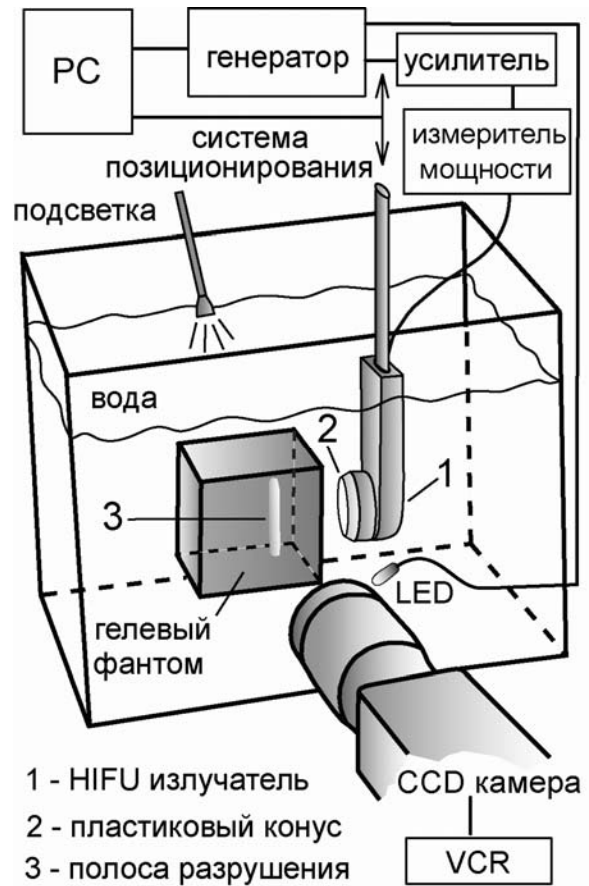


Рис. 7.15. Схема экспериментальной установки для видео наблюдения одиночных и полосовых разрушений в гелевом фантоме. Частота HIFU-излучателя 3.5 МГц, диаметр 33 мм, фокусное расстояние 35 мм. Излучатель перемещался вертикально с постоянной скоростью 0.5 мм/с.

Предварительные эксперименты по созданию одиночных разрушений проводились при облучении в непрерывном режиме с постепенным повышением мощности. Значение базовой мощности (16 Вт) было выбрано эмпирически таким образом, что в течение характерной для HIFU экспозиции в 4 с в геле происходило формирование оптически непрозрачной области тепловой денатурации симметричной формы (рис. 7.16(a)).

Дальнейшее малое увеличение мощности приводило к образованию пузырьков миллиметрового размера, в самом конце облучения при 16.5 Вт (б) и уже при 2.5 секундах при 17 Вт (в). После появления пузырьков наблюдались известные качественные изменения в формировании разрушения: несимметричное искажение его формы и смещение в сторону излучателя (рис. 3в справа).

Для оценки влияния эффектов акустической нелинейности в условиях проводимого эксперимента, был проведен численный эксперимент с учетом и без учета нелинейности. HIFU-пучок описывался уравнением типа ХЗК с учетом линейного по частоте коэффициента поглощения геля (7.3). Уравнение решалось для двух областей – в воде (1) и гелевом образце (2), с параметрами: $c_{01} = 1486$ м/с, $c_{02} = 1544$ м/с, $\rho_{01} = 1000$ кг/м³, $\rho_{02} = 1044$ кг/м³, $\varepsilon_1 = 3.5$, $\varepsilon_2 = 4$, $b = 4.33 \cdot 10^{-3}$ кг·с⁻¹·м⁻¹, $\alpha_{02} = 1.6$ м⁻¹ на частоте 1 МГц, $\eta_{01} = 2$ и $\eta_{02} = 1$ [230]. Граничное условие выбиралось в виде гармонической волны с амплитудой, равномерно распределенной вдоль поверхности поршневого фокусирующего излучателя (6.5). Для расчета температурного поля в ткани $T = T(\vec{r}, t)$ использовалось неоднородное уравнение теплопроводности Пеннеса (7.9). Уравнение теплопроводности также решалось для двух областей – в воде (1) и геле (2) с параметрами: $\kappa_1 = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\kappa_2 = 1.3 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $c_{v1} = 4.3 \cdot 10^6$ Вт·с/(°С·м³), $c_{v2} = 5.3 \cdot 10^6$ Дж/(°С·м³). Известно, что гель становится оптически рассеивающим примерно через 2 с при 58°С и менее чем через 0.1 с при 65°С [305], что близко к величинам, наблюдаемым в тканях. Поскольку эксперимент проводился на

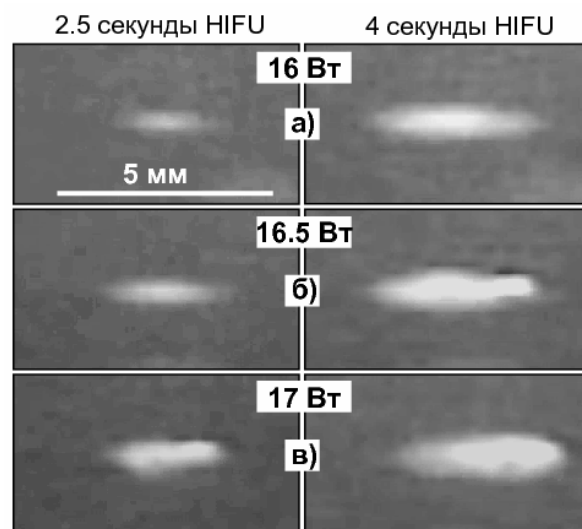


Рис. 7.16. Кадры видеосъемки одиночных разрушений в дегазированном геле при облучении ультразвуком с мощностью 16 Вт (а), 16.5 Вт (б), и 17 Вт (в) после 2.5 секунд (слева) и 4 секунд (справа) облучения. HIFU-излучатель располагался с правой стороны. Малое увеличение акустической мощности свыше 16 Вт приводило к существенному ускорению образования разрушения и появлению пузырьков миллиметрового размера (б), после чего происходило несимметричное искажение формы разрушения и его смещение в сторону излучателя.

временах порядка или меньше секунды, критерием теплового разрушения был выбран порог по температуре 65°C , а не интегральная тепловая доза (7.10).

На рис. 7.17 приведены основные результаты моделирования для акустической мощности 16.5 Вт, когда формирование пузырька миллиметровых размеров происходит в самом конце экспозиции в 4 с (рис. 7.16(б)). Результаты моделирования показывают, что при этом уровне мощности профиль волны в фокусе сильно искажен, но ударный фронт еще не образовался (а), наблюдается слабое повышение полной интенсивности волны (б) и более чем четырехкратное увеличение эффективности тепловых источников (в) в фокусе. Результаты линейного моделирования предсказывают увеличение температуры выше 65°C , но гораздо ниже температуры кипения (в). Нелинейные расчеты предсказывают превышение температуры 100°C в конце экспозиции, а также время начала формирования разрушения ($T > 65^{\circ}\text{C}$), соответствующие эксперименту. Эффективность тепловыделения в фокусе увеличивается за счет нелинейных эффектов в четыре раза, однако температура увеличивается менее чем на 50% (г). Это объясняется тем, что пространственный пик нелинейных тепловых источников

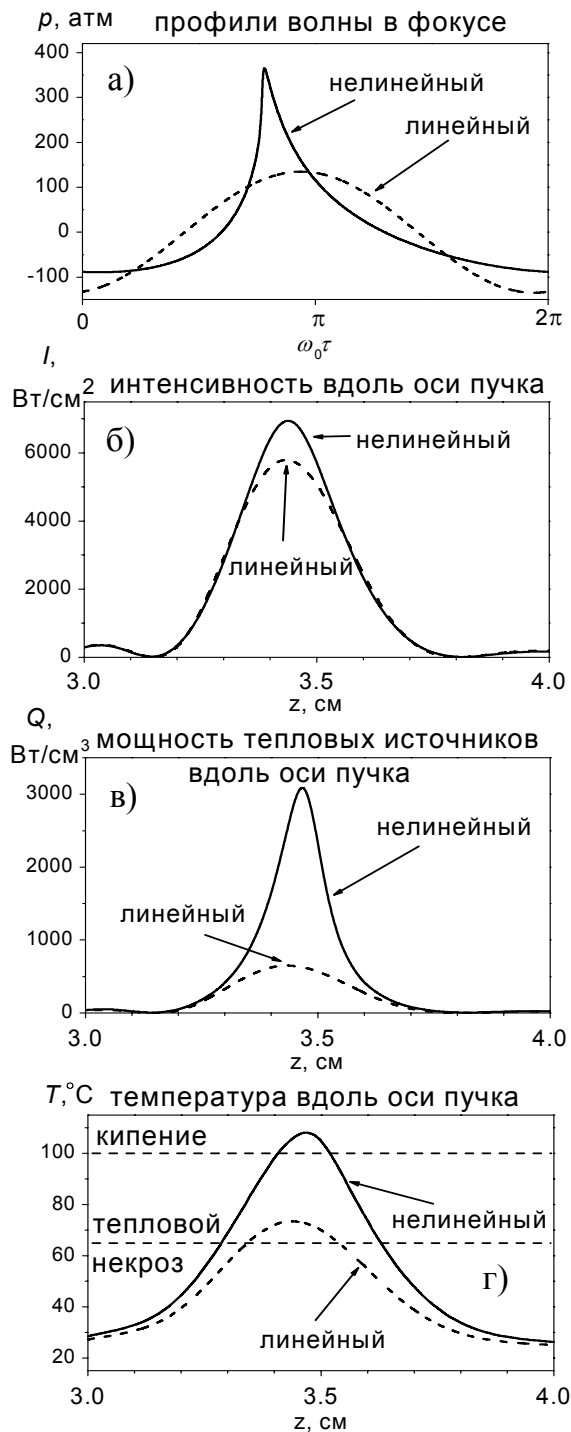


Рис. 7.17. Результаты численного эксперимента по облучению гелевого фантома с учетом (сплошные линии) и без учета (штриховые линии) нелинейных эффектов. Акустическая мощность источника составляла 16.5 Вт, пиковое значение интенсивности в фокусе 5.8 кВт/см^2 в линейном пучке, время облучения 4 секунды. Учет нелинейных эффектов показывает сильное искажение профиля волны (а), увеличение интенсивности (б) и существенное повышение мощности тепловых источников (в) в фокусе, приводящее к превышению температуры кипения, не описываемое в рамках линейной модели.

значительно уже, чем в линейном пучке (рис. 7.17(в)), поэтому влияние эффекта диффузии вблизи максимума температуры проявляется сильнее. Результаты нелинейного моделирования при различных мощностях также соответствовали наблюдаемым в эксперименте тепловым разрушениям вплоть до достижения температур выше 100°C и начала кипения.

Для более наглядной иллюстрации относительной роли нелинейно-акустических эффектов и кавитации в повышении эффективности тепловых эффектов, экзогенности области облучения и искажения формы разрушения, дополнительные эксперименты проводились в недегазированном геле с излучателем той же формы, но с более низкой частотой 2 МГц. Понижение частоты и повышение концентрации газа понижает порог кавитации, усиливает ее интенсивность, а также уменьшает поглощение на основной частоте, делая переход к нелинейному режиму нагреванию более резким. Уровень мощности (42 Вт) был подобран эмпирически таким образом, чтобы обеспечить наблюдение всех стадий формирования теплового разрушения и начала кипения в рамках выбранной экспозиции 30 с. Прямое освещение (слева на рис. 7.18) позволяло лучше визуализировать форму и размер разрушения, подсветка рассеянным светом (справа на рис. 7.18) – лучше показать внутреннюю структуру разрушения.

Разрушение начинает формироваться после 9 с облучения, его размер увеличивается симметричным образом (15 с) до начала кипения, когда отчетливо регистрируется появление большого пузырька размером около 2-3 мм при подсветке рассеянным светом и яркая вспышка при прямой подсветке (20 с). Пузырьки продолжают образовываться и схлопываться внутри

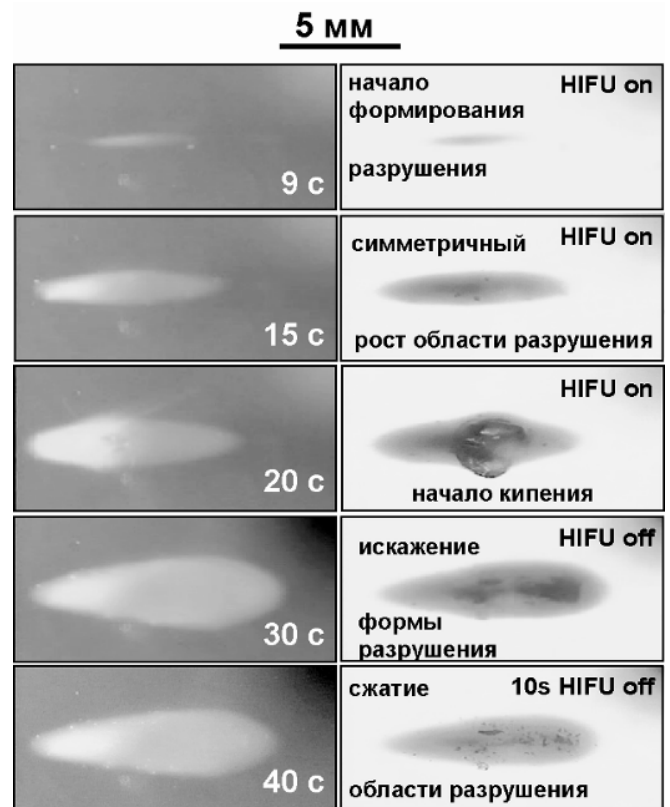


Рис. 7.18. Последовательность кадров видео съемки, иллюстрирующая различные стадии формирования разрушения в геле при HIFU-облучении: появление области тепловой денатурации (9 с), симметричный рост (<15 с), начало кипения (20 с), асимметричное искажение формы разрушения (>20 с), уменьшение объема после выключения HIFU (>30 с). Облучалось два гелевых образца в одинаковых условиях с акустической мощностью 42 Вт, но с разной подсветкой: прямым светом с левой стороны в сторону преобразователя (слева) и рассеянным светом в сторону камеры.

области разрушения, которая искажается и увеличивается несимметричным образом в сторону излучателя, образуя к концу экспозиции (30 с) типичную каплевидную форму с неоднородной внутренней структурой в центре, окруженной областью однородной тепловой денатурации. После выключения HIFU паровые полости внутри зоны разрушения уменьшаются (40 с), что приводит к сокращению размеров видимого разрушения. Результаты этого эксперимента ясно показали процесс кипения в геле и формирование неоднородной внутренней структуры в центре разрушения, обычно наблюдаемый в тканях и часто ошибочно интерпретирующийся как следствие кавитации. Представленные результаты дают дополнительное подтверждение того, что именно кипение ответственно за искажение формы разрушения. Важно отметить, что используемая в эксперименте мощность в три раза превышала мощность, соответствующую порогу кавитации в геле, измеренному с помощью пассивного детектора кавитации (PCD), т.е. кавитация присутствовала с самого начала облучения, но искажения наблюдались только после начала кипения.

Пузырьки в геле или ткани являются сильными рассеивателями ультразвука, и их присутствие во время экспозиции HIFU потенциально может быть зарегистрировано с использованием методов диагностического ультразвука. При этом отсутствие повышенной эхогенности в В-режиме не может гарантировать отсутствие пузырьков. Чтобы сравнить, как отличается между собой присутствие пузырьков кавитации микронного размера и кипения на ультразвуковых изображениях, были проведены эксперименты в геле с одновременной оптической и ультразвуковой визуализацией. Кадры на рис. 7.19 представляют собой последовательность изображений в В-режиме, полученную одновременно с видеосъемкой. Средняя по времени акустическая мощность составляла 36.5 Вт, коэффициент заполнения 72% и экспозиция 30 с. HIFU-излучатель находится справа, прямая подсветка напротив, камера спереди (рис. 1), диагностический

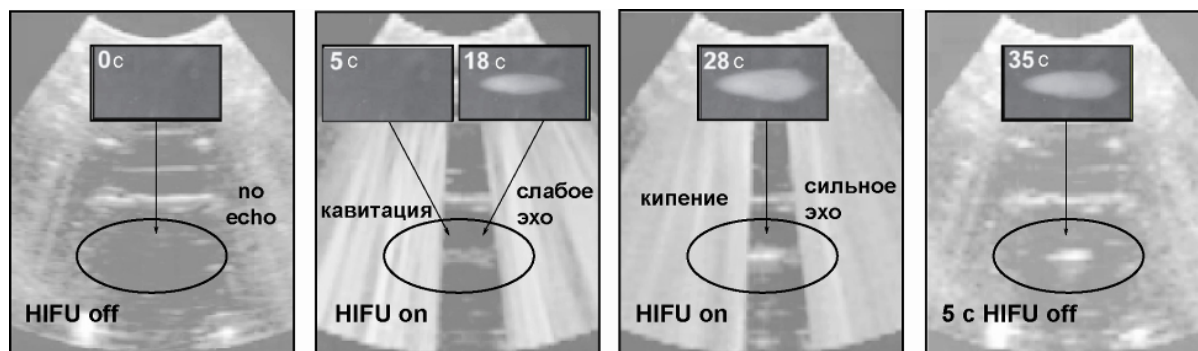


Рис. 7.19. Одновременная визуализация эффекта HIFU в недегазированном геле с помощью диагностического ультразвука (В-моды) и видеосъемки в течение 30 с облучения. Параметры импульсно-периодического облучения: 36.5 Вт средняя акустическая мощность, 72% коэффициент заполнения. Преобразователь HIFU находится справа, освещение слева, диагностический датчик сверху, камера спереди.

датчик напротив камеры. Как видно из рисунка, слабое повышение эхогенности (кавитация) наблюдается сразу после включения HIFU, до (5 с) и после (18 с) появления теплового разрушения. Несмотря на присутствие кавитации, тепловое разрушение увеличивается симметричным образом (18 с) до начала кипения (28 с). Начало кипения соответствует появлению яркого эхогенного пятна, которое наблюдается до конца облучения и сохраняется еще около минуты после выключения HIFU. Гиперэхогенные области сохраняются в В-режиме наблюдения более 1 минуты после облучения, что согласуется с предыдущими численными и экспериментальными результаты для ткани [306]. Механизм диссипации эхогенности может быть связан с охлаждением паровых полостей, заполнением оставшихся пустот жидкостью и растворением остаточного газа.

Для иллюстрации роли нелинейности в усилении тепловых эффектов в геле создавались полосовые разрушения путем механического перемещения ультразвукового излучателя (рис. 7.20). Облучение проводилось при одинаковой скорости излучателя 0.5 мм/с, одинаковой средней по времени мощности, но различной пиковой мощностью в импульсе, компенсируемой изменением коэффициента заполнения. Частота повторения импульсов составляла 1 кГц. Максимальной мощности 240 Вт соответствовал коэффициент заполнения 6.25%. Мощность в непрерывном режиме (15 Вт) была подобрана, исходя из результатов одиночных облучений, чтобы не достигать температуры кипения, но уже создавать видимое разрушение. При 15 Вт видимое разрушение появлялось через 2 секунды и имело характерную ширину около 1 мм после 4 секунд облучения (рис. 7.19). Небольшое увеличение мощности от 15 до 17 Вт приводило к кипению за 2.5 секунды, а двукратное увеличение пиковой мощности в импульсе при той же средней

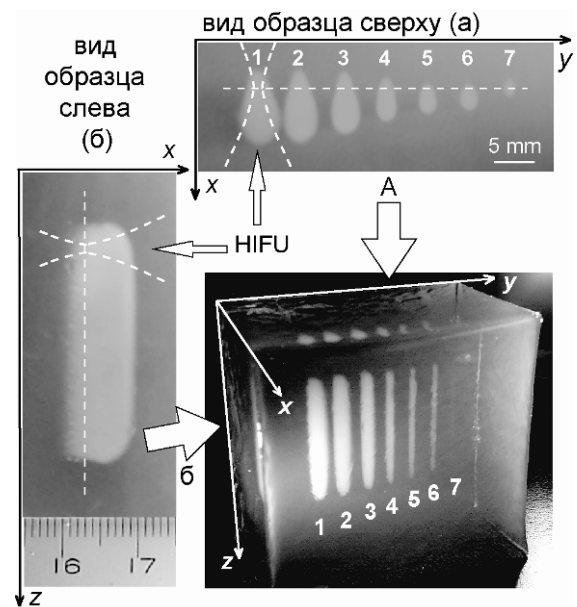


Рис. 7.20. Вертикальные полосы тепловых разрушений в образце геля, полученные путем перемещения HIFU-преобразователя снизу вверх с постоянной скоростью 0.5 мм/с. Использовался импульсно-периодический режим облучения с постоянной средней акустической мощностью 15 Вт, но с различной и пиковой мощностью в импульсе и соответствующим коэффициентом заполнения: 1 - 240 Вт и 6,25%, 2 - 8,35%, 3 - 12,5%, 4 - 25%, 5 - 50%, 6 - 67%, 7 - 15 Вт и 100%. Показан также вид образца с разрушениями слева и сверху. Излучатель помещался с передней стороны образца, как это указано стрелками HIFU. Прямые пунктирные линии соответствуют положению фокуса излучателя. Изогнутые пунктирные линии иллюстрируют форму пучка в области фокуса.

мощности HIFU 16.5 Вт приводило к практически мгновенному вскипанию, видимом на самом первом кадре, т.е. за время < 30 мс. Таким образом, все режимы облучения, за исключением непрерывного, соответствовали режиму развитых разрывов с кипением.

На рис. 7.20 показаны фотографии образца с семью полосами разрушений, расположенными на расстоянии 5 мм друг от друга. Облучение образца проводилось с передней стороны, излучатель перемещался снизу вверх. Полоса с номером 1 соответствует максимальному уровню пиковой мощности, с номером 7 – минимальному. Видно, что по мере увеличения пиковой мощности ширина и глубина полосового разрушения заметно возрастает. Размер максимального разрушения (1) составляет 5 мм в ширину и 10 мм в глубину, а наименьшего (7) – соответственно 1 мм и 1.5 мм. Таким образом, при той же средней по времени интенсивности в фокусе, эффективность воздействия, размер и форма получаемых разрушений существенно меняется в зависимости от временной формы ультразвуковой волны. Пунктирная линия на верхней фотографии соответствует фокусу излучателя и пересекает середину разрушения в случае только тепловых эффектов (7). Полосы (1-6), в которых ожидалось эффекты кипения, расположены в основном в предфокальной области. Эти результаты согласуются с наблюдениями разрушений в ткани, получаемых при высокой интенсивностях и обычно ошибочно интерпретируемых как эффект кавитации.

Приведенные здесь данные подтверждают гипотезу о том, что именно кипение и соответствующее образование крупных паровых полостей приводит к эффективному отражению HIFU энергии и вызывает изменение формы разрушения от симметричной "сигары" к несимметричной "капле", смещенной в сторону излучателя. Использование импульсно-периодического облучения с высокими пиковыми значениями мощности в импульсе приводит к формированию разрушений гораздо большего размера по сравнению облучением в непрерывном режиме с той же средней мощностью. Образующиеся при кипении паро-газовые полости миллиметрового размера наблюдались в геле и служат источником контраста на В-модовом изображении ультразвукового сканера. Микропузырьковую кавитацию также можно зарегистрировать на изображении в В-режиме как незначительное повышение эхогенности, однако только в образцах геля с самой однородной структурой без первоначальных рассеивателей (рис. 5), что делает прямой В-режим визуализации фокальной области HIFU в неоднородных тканях гораздо более сложной задачей [307]. При максимальной мощности образование пузырька и формирование асимметричного разрушения начиналось с первого кадра съемки (< 30 мс), что, по-видимому, обусловлено формированием в фокусе разрыва большой амплитуды. Исследованию таких режимов сверхбыстрого нагревания посвящен следующий параграф.

7.6. Эффект локального сверхбыстрого кипения в ткани при воздействии фокусированным пучком разрывных волн

В данном параграфе численно и экспериментально проверяется гипотеза о том, что при мощностях, используемых в современной HIFU хирургии, формирование высокоамплитудных ударных волн в фокусе излучателя (рис. 7.7) может приводить к быстрому, в течение миллисекунд, вскипанию в ткани. Быстрое возникновение кипения в ткани имеет как положительные, так и отрицательные стороны в зависимости от используемого протокола лечения. С одной стороны, после начала кипения процесс облучения уже трудно контролировать. Рассеяние мощного ультразвука на пузырьках приводит к дополнительному нагреву ткани в предфокальной области, экранированию фокуса и искажению формы создаваемого разрушения. С другой стороны, появление пузырьков пара миллиметровых размеров позволяет визуализировать область облучения при помощи диагностического ультразвука. Этот эффект можно использовать и для прицеливания фокуса HIFU пучка. Короткий миллисекундный импульс большой амплитуды вызовет сверхбыстрое локальное вскипание в ткани, которое возможно зарегистрировать и, таким образом, убедиться в правильном положении фокуса при внесении минимальных разрушений. Время вскипания, определяемое амплитудой разрыва, при заданной амплитуде на излучателе также может быть использовано для оценки поглощения на пути к фокусу для дальнейшего планирования уровней облучения.

Исследования проводились для гелевого фантома ткани, описанного в §7.5, и *ex vivo* биологической ткани (говяжьей печени). Измерения проводились на экспериментальной установке, описанной в §6.6. Начало кипения регистрировалось с помощью высокоскоростной цифровой видеокамеры в прозрачных фантомах ткани, в *ex vivo* образцах реальной биологической ткани использовались акустические методы.

В теоретическом описании ультразвукового поля в ткани использовался прямой численный эксперимент («нелинейная модель») на основе уравнения ХЗК (7.1) и две упрощенных аналитических модели для оценки мощности тепловых источников Q_F в фокусе: «линейная модель» (7.7) и оценка по «теории слабых ударных волн» (7.8). При этом амплитуда ударного фронта была получена из профилей волны в фокусе, рассчитанных численно либо измеренных с помощью оптоволоконного гидрофона (FORN 2000). В предположении линейной фокусировки («линейная модель») также оценивалась интенсивность поля в фокусе, что довольно часто используется в современной практике при оценке нагрева биологической ткани. Значения интенсивности и мощности тепловыделения в фокусе, полученные на основе этих двух моделей, далее

обозначаются как I_N и Q_N для результатов моделирования нелинейного пучка и I_L и Q_L – для линейного случая. Пиковое значение интенсивности в фокусе, I_L , рассчитывалось как $I_L = p_F^2 / 2\rho_0 c_0$, где p_F – амплитуда давления в фокусе линейного пучка в ткани. Для расчета температуры в ткани использовалось уравнение теплопроводности (7.9) с учетом либо без учета влияния диффузии тепла.

Физические параметры, используемые при моделировании в воде и геле, приведены в §7.5. Для моделирования в биологической ткани (печени) все физические параметры были такими же, как и в воде, за исключением поглощения, которое было определено в §7.6: $\alpha_T = 18.4$ Нп/м на 2.158 МГц (0.085 Нп/см/МГц). Волна считалась ударной, если ширина фронта составляла 6-7 шагов временной сетки, используемой в моделировании (3 нс), или была равна временному масштабу, ограниченному полосой пропускания гидрофона в измерениях (10 нс). Отметим, что для воды теоретическая оценка ширины фронта ударных волн с амплитудами 40–80 МПа (как в данной работе) составляет величину порядка 0.1 нс.

Приведем сначала некоторые теоретические оценки возрастания мощности тепловыделения в случае образования разрывов в профиле волны. В условиях проводимого эксперимента, пиковое положительное давление в фокусе изменялось от 40 до 80 МПа (для данного излучателя) и было более чем в три раза выше, чем линейно предсказанная амплитуда давления в фокусе, p_F , что соответствует результатам моделирования (рис. 7.4). Если допустить, что пиковое положительное давление примерно равно амплитуде разрыва, рис. 7.3(а), то амплитуду разрыва в фокусе можно рассчитать как $p_s = 3p_F$ [203, 282]. Сравним величину энергии, поглощаемую на разрывах (7.8), и при линейном распространении гармонической волны (7.7):

$$\frac{q_{shock}}{q_L} = \frac{9\epsilon f_0 p_F}{2\alpha_T \rho_0 c_0^3}. \quad (7.14)$$

Эта величина определяется амплитудой давления волны в фокусе (в линейном приближении), физическими свойствами среды и частотой волны. Для диапазона интенсивностей в фокусе I_L от 6000 до 25000 Вт/см² получим, что выделение тепла Q_{shock} в геле от 40 до 83 раз выше, чем Q_L . В печени, где поглощение выше, величина Q_{shock} в 8÷16 раз выше, чем линейного поглощения Q_L для того же интервала интенсивностей. Поскольку поглощение волны на образовавшемся ударном фронте значительно превышает линейный нагрев в результате поглощения на основной частоте, выражение (7.8) может быть использовано в качестве достаточно точной оценки величины мощности тепловыделения в фокусе как для геля, так и для ткани.

Если считать нагрев достаточно быстрым, то диффузией тепла в уравнении (7.9) можно пренебречь. В этом случае время до наступления кипения, t_k , может быть рассчитано аналитически, используя только мощность тепловыделения в фокусе:

$$t_k = \frac{\Delta T \cdot c_v}{Q_F}, \quad (7.15)$$

где $\Delta T = 80^\circ\text{C}$, то есть разница между начальной температурой (20°C) и температурой кипения (100°C).

Приведем здесь

простые оценки характерного времени диффузии. Поскольку размер фокальной области вдоль оси пучка гораздо больше, чем в поперечном направлении, то диффузия тепла в основном будет происходить вдоль радиальной координаты r . Если предположить, что распределение температуры имеет цилиндрическую симметрию с гауссовской зависимостью: $T(t=0, r) = T_0 \cdot \exp(-r^2/a^2)$, то точное решение однородного уравнения (7.9) для изменения температуры со временем имеет вид [308]:

$$T(t, r) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + 4kt/a^2}} \cdot \exp(-r^2/a^2(1 + 4kt/a^2)). \quad (7.16)$$

Здесь T_0 – пиковое значение температуры, a – начальный радиус нагреваемой области. Характерное время диффузии, t_0 , за которое начальный радиус нагретой области увеличится в корень из двух раз, т.е. на 40%:

$$t_0 = a^2/4k \quad (7.17)$$

Для рассматриваемого здесь излучателя радиус области тепловыделения (по уровню e^{-1}) в случае линейной фокусировки (рис. 7.21 (а, б)) равен $a = 0.4$ мм, тогда характерное время диффузии в геле $t_0 = 300$ мс. В режиме развитых разрывов (рис. 7.21в, г) радиус области тепловыделения сужается до 0.1 мм, что даёт характерное время диффузии 17 мс. Таким образом, если время до возникновения кипения составляет несколько миллисекунд, то диффузией тепла можно пренебречь и для оценки t_k использовать формулу (7.15).

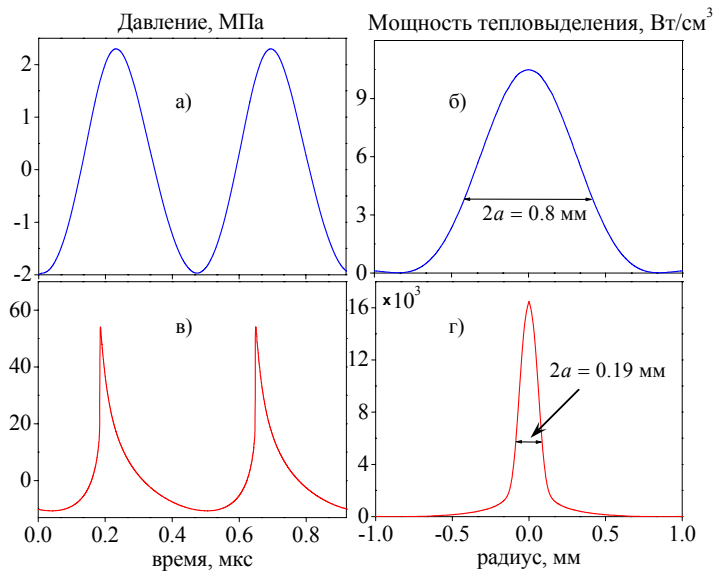


Рис. 7.21. Численно рассчитанные профили волны (слева) и тепловые источники (справа) в фокусе пучка в геле в линейном (а, б) и нелинейном (в, г) случае. Параметры излучателя: радиус 21 мм, фокусное расстояние 44.4 мм, частота 2.158 МГц, начальная амплитуда давления $p_0 = 0.048$ МПа (а, б) и 0.37 МПа (в, г).

На рис. 7.22 показаны результаты измерений и численного моделирования акустического поля в геле для начальной амплитуды давления $p_0 = 0.048$ МПа ($I_L = 144$ Вт/см², $I_N = 145$ Вт/см²) и $p_0 = 0.44$ МПа ($I_L = 11900$ Вт/см², $I_N = 16700$ Вт/см²). Профили волны в фокусе, рассчитанные численно и измеренные с помощью гидрофона, изображены на рис. 5.2(а). При малой амплитуде на излучателе волна является почти синусоидальной: $p_+ = 2.2$ МПа и $p_- = -2.0$ МПа; рассчитанные и измеренные профили волны практически не отличаются. При большой амплитуде на излучателе в фокусе формируется ударный фронт. Рассчитанный и измеренный профили достаточно близки друг к другу, однако, как и при измерениях в воде (гл.6), пиковое положительное давление в эксперименте немного ниже, чем рассчитанное вследствие ограниченности полосы чувствительности гидрофона.

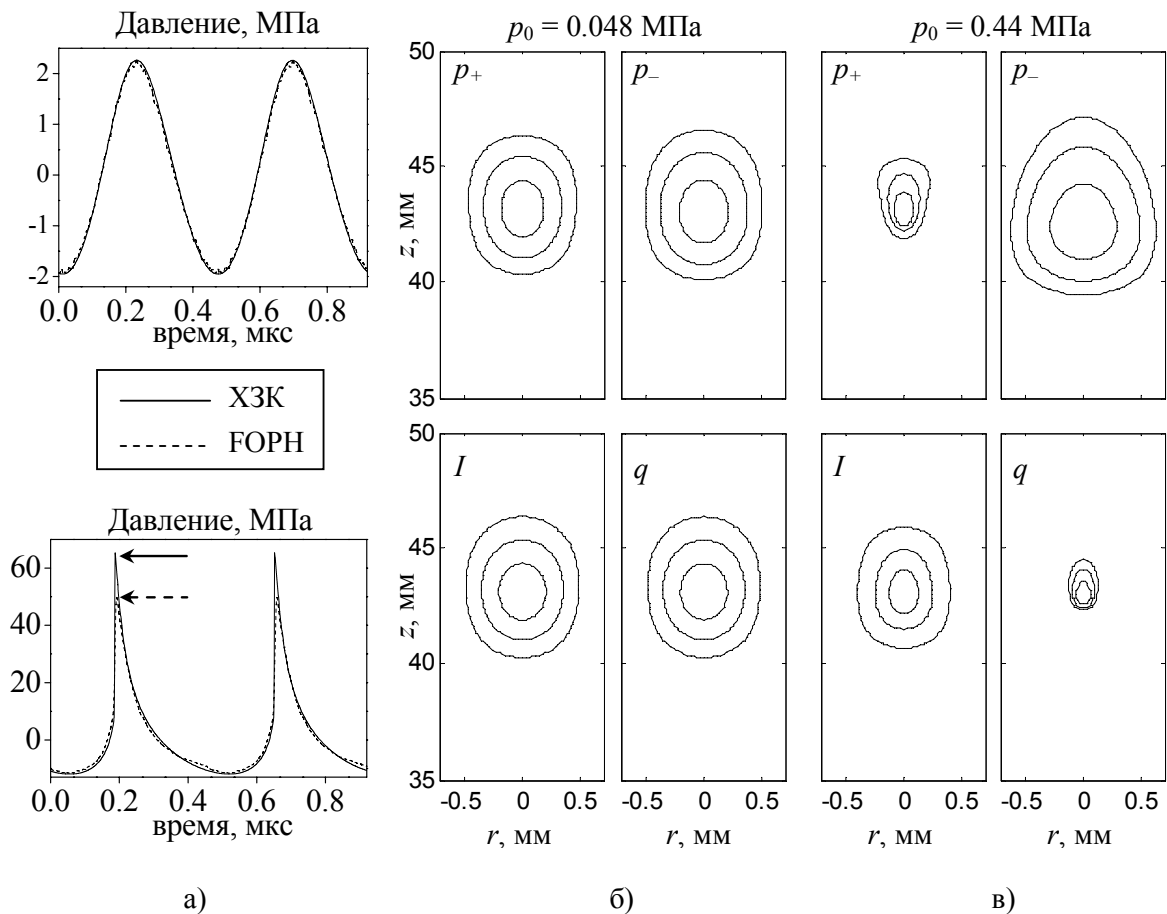


Рис. 7.22. Результаты моделирования и измерения акустического поля HIFU излучателя частотой 2 МГц в гелевом фантоме ткани при амплитуде давления на источнике: $p_0 = 0.048$ МПа ($I_L = 144$ Вт/см², $I_N = 145$ Вт/см²) и $p_0 = 0.44$ МПа ($I_L = 11.9$ кВт/см², $I_N = 16.7$ кВт/см²). (а) рассчитанные (ХЗК) и измеренные (FORN) профили давления в фокусе излучателя; (б, в) рассчитанные распределения пиковых давлений, интенсивности и тепловых источников в плоскости оси пучка для практически линейного случая, $p_0 = 0.048$ МПа, и для случая, когда ударный фронт присутствует в профиле волны в фокусе, $p_0 = 0.44$ МПа. Контуры соответствуют уровням -1, -3 и -6 дБ от максимума каждой из величин.

Рисунки 7.22, (б) и (в), иллюстрируют распределения в плоскости оси пучка пиковых положительного p^+ и отрицательного p^- давлений, интенсивности I и мощности тепловыделения Q . При малой начальной амплитуде $p_0 = 0.048$ МПа, линейный случай (б), пространственные распределения для p^+ и p^- совпадают, так же как совпадают распределения для интенсивности и мощности тепловых источников. При начальной амплитуде $p_0 = 0.44$ МПа, нелинейный случай (в), пространственные распределения параметров акустического поля изменяются по-разному для каждой величины. Ширина пикового положительного давления (по уровню -6 дБ) изменяется от 0.93 мм до 0.37 мм, а мощности тепловыделения – от 0.99 мм до 0.2 мм. Сужение интенсивности менее выражено: 0.99 мм в линейном случае и 0.82 мм в нелинейном случае. Распределение пикового отрицательного давления, в отличие от остальных параметров, становится шире (от 0.99 мм до 1.22 мм), и его максимум сдвигается к излучателю.

Рисунок 7.23 показывает изменение мощности тепловыделения в фокусе при различных амплитудах давления на излучателе от $p_0 = 0.048$ МПа ($I_L = 144$ Вт/см², $I_N = 145$ Вт/см²) до $p_0 = 0.57$ МПа ($I_L = 19.9$ кВт/см², $I_N = 25.5$ кВт/см²). Кривая, обозначенная как «Линейная модель», соответствует формуле (7.7). Кривая, обозначенная как «Нелинейная модель», соответствует результатам нелинейного моделирования и расчетам мощности тепловыделения по формуле (7.6). Оставшиеся две кривые (ТСУВ) рассчитаны на основе теории слабых ударных волн (7.8), где амплитуды ударного фронта были получены из численно рассчитанного, ТСУВ(ХЗК), или измеренного гидрофоном, ТСУВ(ФОРН), профиля волны для случаев, когда ударный фронт уже сформировался. Над графиком показаны численно рассчитанные профили волны в фокусе для иллюстрации того, как мощность тепловыделения соотносится с нелинейным искажением профиля волны.

При малых выходных мощностях излучателя ($p_0 < 0.24$ МПа, $I_L < 3.7$ кВт/см², $I_N < 4.17$ кВт/см²) профили волны в фокусе искажены, но ударный фронт ещё не сформировался. Некоторое увеличение мощности тепловыделения в фокусе по сравнению с линейно предсказанным значением происходит из-за нелинейной генерации и более интенсивного поглощения высших гармоник. Когда ударный фронт начинает формироваться в фокусе излучателя ($p_0 = 0.3$ МПа, $I_L = 5.77$ кВт/см², $I_N = 7.04$ кВт/см²), мощность тепловых источников, рассчитанная на основе нелинейного моделирования, значительно возрастает по сравнению линейной оценкой. Для случая сформировавшегося ударного фронта ($p_0 = 0.34$ МПа, $I_L = 7.32$ кВт/см², $I_N = 9.63$ кВт/см²), мощность тепловыделения, предсказанная нелинейной моделью, в 50 раз выше, чем в линейном пучке. Отличие между линейными и нелинейными расчетами возрастает до 83 раз для максимальной в условиях эксперимента амплитуды давления на излучателе $p_0 = 0.57$ МПа.

Видно, что в случае развитых разрывов поглощение на ударном фронте вносит основной вклад в значение мощности тепловыделения, и оценка мощности тепловыделения по формуле (7.8), основываясь на численном решении, кривая ТСУВ (ХЗК), хорошо согласуется с результатами численной «нелинейной модели» (сплошная кривая). Аналогичная оценка по данным измерений, кривая ТСУВ (FORH), немного ниже, поскольку пиковое положительное давление (и соответственно, амплитуда разрыва) в профиле волны недооценивается при измерениях. Таким образом, в случае развитых разрывов в профиле волны, мощность тепловыделения может с хорошей степенью точности (порядка 10%) оцениваться на формуле (7.8).

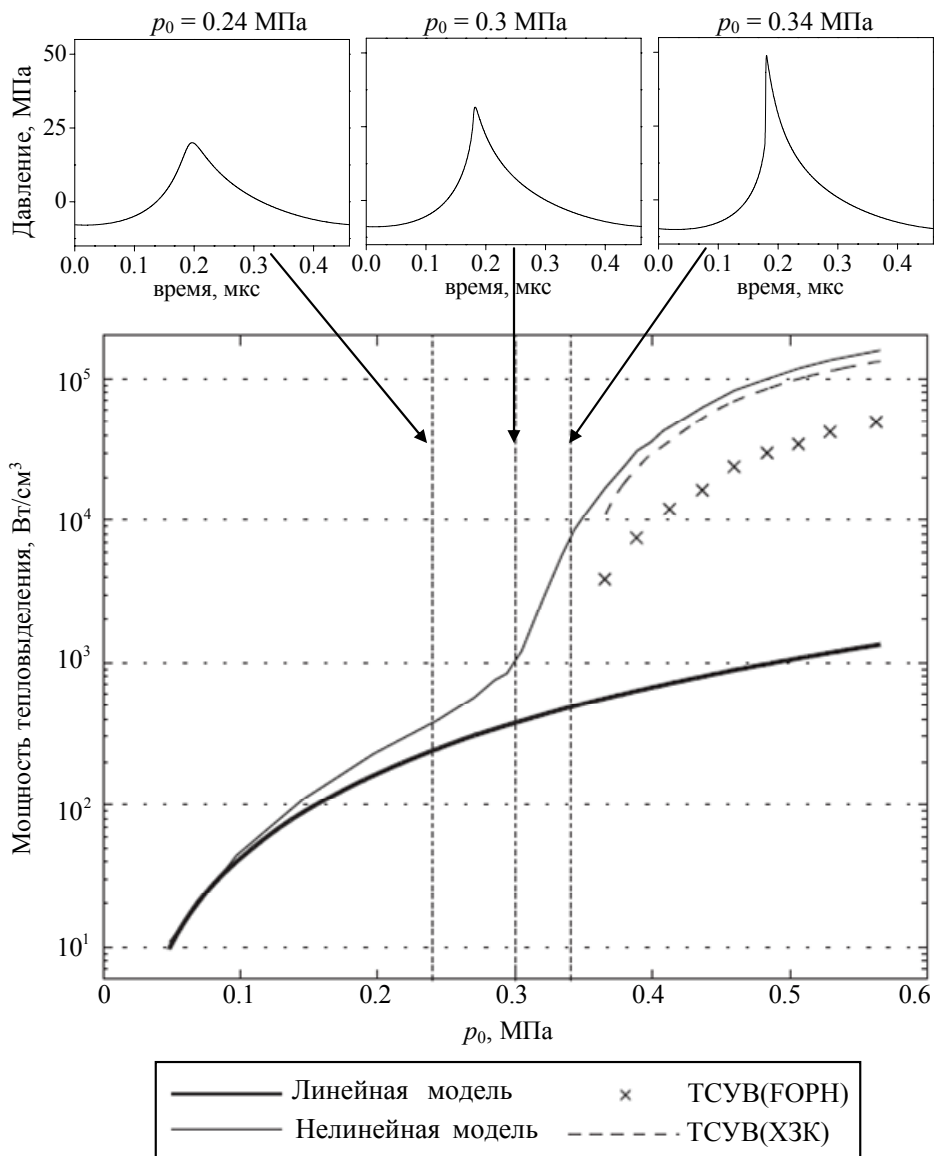


Рис. 7.23. Изменение мощности тепловых источников в фокусе в зависимости от амплитуды давления на излучателе. Тепловые источники были рассчитаны численно в предположении линейного и нелинейного распространения волны в гелевом фантоме ткани, а также рассчитаны на основе теории слабых ударных волн, используя профили волны в фокусе, полученные в моделировании и эксперименте. Над графиком показаны характерные профили волны в фокусе, рассчитанные при трех различных давлениях на излучателе.

Рассмотрим теперь результаты измерений. На рис. 7.24 показана последовательность кадров, снятых высокоскоростной камерой (1000 кадров в секунду), иллюстрирующая нагрев геля в течение 9 мс при амплитуде давления на излучателе $p_0 = 0.44$ МПа ($I_L = 12$ кВт/см², $I_N = 16.7$ кВт/см²). Излучатель HIFU располагался с левой стороны, иголочка диаметром 0.8 мм в верхней части кадра помещалась на 3 мм выше геометрического фокуса излучателя и служила ориентиром при фокусировке. Результаты

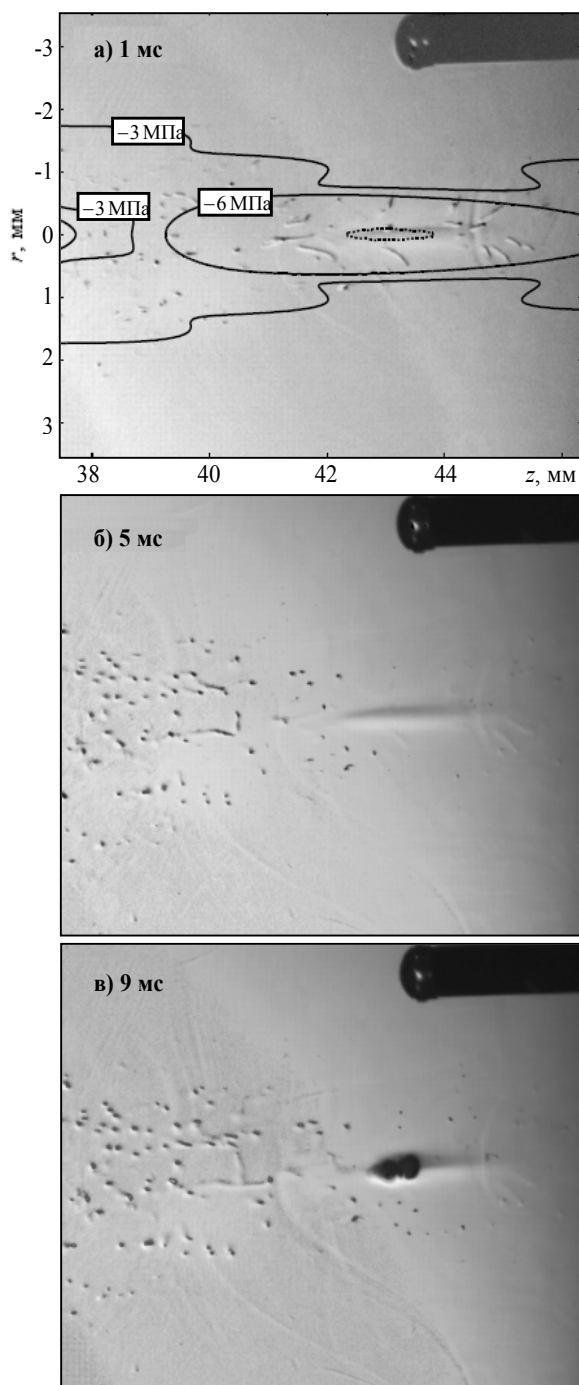


Рис. 7.24. Кадры съемки нагрева гелевого образца ткани при амплитуде давления на излучателе $p_0 = 0.44$ МПа ($I_L = 12$ кВт/см², $I_N = 16.7$ кВт/см²).

численного моделирования пиковых давлений акустического поля приведены поверх изображения на рис. 7.24(a) и показывают размер и положение кадра относительно фокальной области HIFU источника. Кадр имеет следующие размеры: от 37.5 мм до 46.5 мм в аксиальном направлении и от -3.5 мм до 3.5 мм в радиальном направлении. Пиковое давление при данной мощности излучателя достигается в точке $x = 43$ мм. Внутренний контур (пунктирная линия) показывает область -6 дБ для мощности тепловыделения. На рисунке также нарисованы контуры -3 МПа и -6 МПа для пикового отрицательного давления (сплошные линии), что соответствует минимальной и максимальной границам порога кавитации, измеренным в гелевом фантоме ткани [286].

На первом кадре (рис. 7.24a), через 1 мс после начала облучения, уже наблюдается кавитационное облако в большой области во внешнем контуре пикового отрицательного давления (-3 МПа). Видны следы(1-2 мм) за пузырьками, показывающие их движение в геле под действием радиационной силы. В течение нескольких первых миллисекунд все

наблюдаемые пузырьки выталкивались из области высокого давления (внутренний пунктирный контур). Через 5 мс облучения (рис. 7.24,б) в кадре видна затемненная область, по-видимому, обусловленная изменением оптических свойств геля при повышении температуры, а не денатурацией белка, поскольку затемнение пропадало при охлаждении геля до комнатной температуры. Через 9 мс облучения (рис. 7.24,в), в области наибольшего пикового положительного давления и, соответственно, наибольшего нагрева (пунктирная область) появлялся кипящий пузырь. Образование и схлопывание новых пузырей продолжалось в течение дальнейшего нагрева (150 мс для данного случая), сопровождаясь увеличением в размерах и смещением в сторону излучателя.

Рисунок 7.25 суммирует результаты оценки времени до начала кипения в геле, полученные в эксперименте и при численном расчете с учетом и без учета диффузии тепла. Над графиками показаны профили волны для двух случаев, когда ударный фронт уже присутствовал в профиле волны. Численно рассчитанные пиковые положительные давления изменялись от 57 МПа до 79 МПа, несколько выше, чем в эксперименте: от 41 МПа до 63 МПа. На нижнем графике приведены значения времени до начала кипения в геле, полученные пятью различными способами: 1) с помощью высокоскоростной камеры (точки); 2,3) измеряя (крест) или моделируя (пунктир) профиль волны и рассчитывая затем время кипения по теории слабых ударных волн, нелинейное моделирование с учетом (сплошная кривая) и без учета диффузии тепла (штрих).

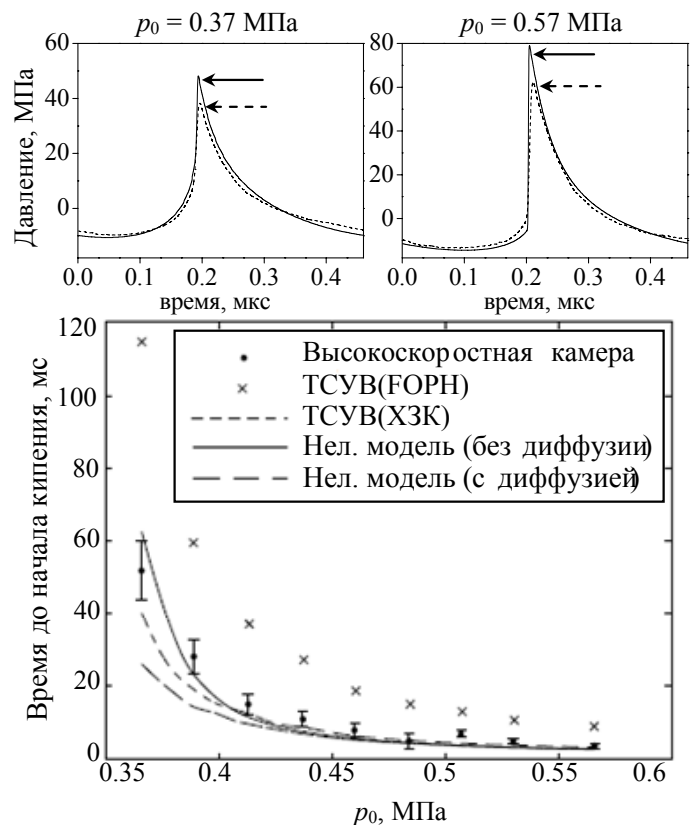


Рис. 7.25. Сверху: профили волны в фокусе, рассчитанные (сплошная линия) и измеренные (пунктир) в геле при амплитуде давления на излучателе, когда ударный фронт только сформировался ($p_0 = 0.37$ МПа, $I_L = 9.42$ кВт/см², $I_N = 13$ кВт/см²) и на стадии развитых разрывов ($p_0 = 0.57$ МПа, $I_L = 19.9$ кВт/см², $I_N = 25.5$ кВт/см²). Снизу: оценка времени до начала кипения, полученная пятью разными способами: с помощью высокоскоростной камеры, моделирования акустического поля и решения уравнения теплопроводности (учитывая и не учитывая диффузию), на основе численно рассчитанных или измеренных профилей волны и теории слабых ударных волн.

Точками на графике показаны результаты измерения времени начала кипения в геле с помощью высокоскоростной камеры. На рисунке также можно видеть погрешность измерения, стандартное отклонение от среднего значения. Время до начала кипения варьируется от 52 мс для давления на излучателе 0.37 МПа до 4 мс для начального давления 0.57 МПа. Таким образом, небольшое изменение начального давления приводит к сильным изменениям мощности тепловыделения, и соответственно, времени до начала кипения, особенно когда начинает формироваться ударный фронт. Расчеты временем до начала кипения на основе полного моделирования уравнения ХЗК (7.6), а также полученные по формуле (7.8) из численно рассчитанного профиля волны, хорошо согласуются с измерениями с помощью высокоскоростной камеры. Этот результат подтверждает гипотезу о том, что численно рассчитанный профиль волны более точный, чем измеренный в эксперименте. На графике не показаны данные, полученные с помощью линейной модели (5.3, 5.6) в пренебрежении диффузии тепла. Они дают значения от 770 мс до 320 мс в диапазоне давлений, для которых построен рис. 7.25, что выше шкалы графика. Кроме того, поскольку на больших временах диффузия тепла будет играть заметную роль, нагрев будет происходить еще медленнее. Это также можно наблюдать на рис. 7.25 для малой амплитуды давления на излучателе $p_0 = 0.37$ МПа, где время до начала кипения без учета диффузии в два раза меньше, чем в эксперименте или при моделировании с учетом диффузии тепла. Время, при котором наблюдается это несоответствие результатов (> 20 мс), коррелирует с оценкой характерного времени диффузии, 19 мс.

В образце печени экспериментальное определение времени начала кипения проводилось как по анализу сигнала, который отражался от кипящего пузыря, приходил обратно на HIFU излучатель и вызывал флуктуации напряжения на источнике [309, 286, 310], так и с помощью пассивного детектора кавитации (PCD) [311]. Детектор представляет собой преобразователь, который также фокусируется в середину печени перпендикулярно оси основного HIFU излучателя и

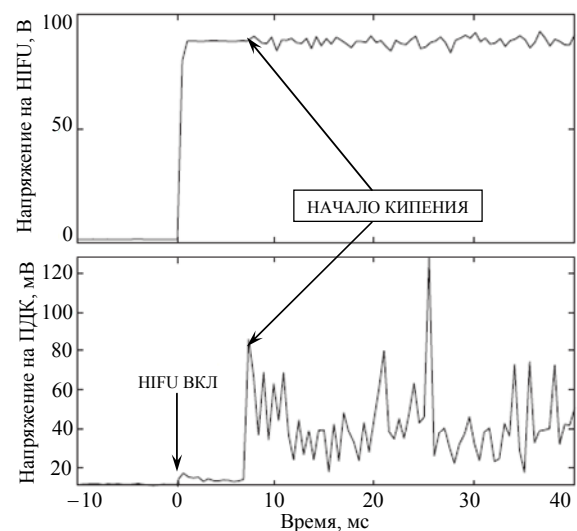


Рис. 7.26. Регистрация начала кипения (7.5 мс) в образце печени при амплитуде на HIFU излучателе $p_0 = 0.48$ МПа. Фокус излучателя находился в середине образца, на глубине 13.5 мм. Начало кипения определялось по флуктуациям напряжения на HIFU источнике (верхний график), и изменению амплитуды сигнала на PCD (нижний график).

работает только на приём сигнала. Его резонансная частота составляет 20 МГц, поэтому регистрироваться будет только высокочастотная область спектра, амплитуда которого резко увеличивается при появлении кипящего пузыря в ткани. На рис. 7.26 показано изменение напряжения на HIFU излучателе и сигнала PCD в течение 40 мс облучения образца печени при амплитуде давления на излучателе $p_0 = 0.48$ МПа. В работе [285] было показано соответствие между визуально наблюдаемым вскипанием геля и измеряемыми флуктуациями сигналов. Наблюдаемый уже через 7.5 мс резкий скачок напряжения на PCD и начало флуктуации сигнала на HIFU преобразователе свидетельствуют о начале кипения в ткани. Небольшое увеличение сигнала PCD при включении HIFU является следствием возникновения кавитации.

На рис. 7.27 показаны обобщающие результаты численного и экспериментального определения времени до начала кипения в образце печени для трех различных амплитуд давления на излучателе $p_0 = 0.42$ МПа ($I_L = 8.4$ кВт/см², $I_N = 11.1$ кВт/см²), 0.48 МПа ($I_L = 11.4$ кВт/см², $I_N = 15.2$ кВт/см²) и 0.57 МПа ($I_L = 15.4$ кВт/см², $I_N = 20.1$ кВт/см²). Средние времена начала кипения были определены экспериментально аналогично тому, как показано на

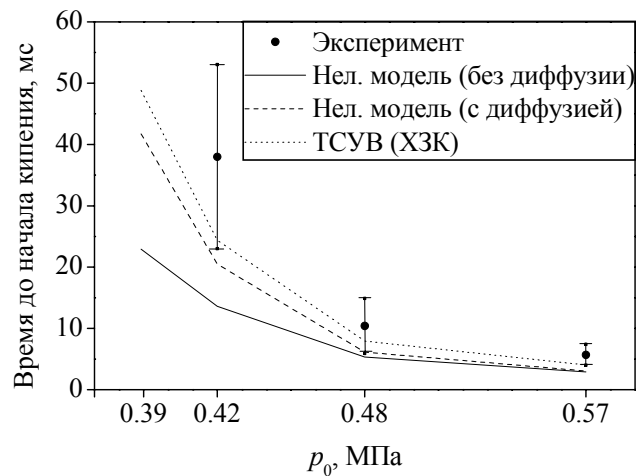


Рис. 7.27. Обобщение результатов численного и экспериментального определения времени до начала кипения в образце печени при амплитудах давления на излучателе $p_0 = 0.42$, 0.48 и 0.57 МПа. Фокус излучателя находился на глубине 13.5 мм в образце.

рис. 7.26: 38 мс для $p_0 = 0.42$ МПа, 10.4 мс для $p_0 = 0.48$ МПа и 5.7 мс для $p_0 = 0.57$ МПа. Кроме того, представлены результаты численного расчета времени до начала кипения тремя разными методами. Сплошная линия соответствует результатам моделирования нагрева до температуры 100°C на основе нелинейной модели, пренебрегая диффузией тепла, пунктирная линия - с учетом диффузии. Штриховая линия рассчитана на основе теории слабых ударных волн и амплитуд разрыва, полученных из моделированных профилей волны в печени (рис. 7.7). Рассчитанные амплитуды разрыва в фокусе волны составили $p_s = 30.1$, 54.1 и 69.8 МПа. Таким образом, видно, что в биологической ткани возможен сверхбыстрый нагрев и кипение в течение нескольких миллисекунд, что подтверждают как численные, так и экспериментальные данные.

7.7. Нелинейные эффекты при облучении ткани через грудную клетку

Одной из важных и на сегодняшний день еще не решенных задач в области HIFU является облучение органов, находящихся за грудной клеткой, например, печени или сердца [267, 312]. Сильное поглощение и отражение ультразвука на ребрах уменьшает интенсивность акустического поля, дошедшую до фокуса, в связи с чем она может оказаться недостаточной для разрушения ткани. Более того, дифракция пучка на периодической структуре ребер приводит к расщеплению исходного фокуса на основной фокус и несколько побочных, что приводит к дополнительному уменьшению интенсивности в основном фокусе, а также к ухудшению локальности воздействия [284]. Перегрев костей и ожоги кожи являются одними из главных побочных эффектов облучения, ограничивающих применение метода HIFU в медицинской практике [313, 314].

Для уменьшения попадания ультразвука на кости разрабатываются методы, основанные на использовании фазированных терапевтических решеток. Основной идеей этих методов является создание таких амплитудно-фазовых распределений на элементах решетки, при которых основная энергия пучка проходит через межреберные промежутки. Так, например, предлагалось отключать элементы решетки, для которых векторы, нормальные к поверхности элемента, пересекали ребро [315]. Для импульсных сигналов использовался метод обращения времени, позволяющий также уменьшить попадание ультразвука на ребра и преодолеть искажения, вносимые костями грудной клетки [316]. В наших недавних работах были предложены лучевой и дифракционный подходы к описанию распространения ультразвука от фокуса к терапевтической решетке через ребра с последующим обращением фазы на элементах решетки и переизлучением гармонического сигнала, позволяющие уменьшить тепловое воздействие на ребра [267].

Недостатками всех существующих на настоящее время методов является присутствие эффекта расщепления фокуса после прохождения фокусированного ультразвука через кости грудной клетки. При этом происходит дополнительное уменьшение интенсивности в основном фокусе примерно в два раза за счет перераспределения энергии ультразвукового пучка в боковые максимумы, что может стать недостаточным для теплового разрушения ткани в фокусе либо вызывать повреждение ткани в нежелательных побочных максимумах. Как будет показано ниже, использование нелинейных эффектов и облучения в режиме формирования ударных фронтов позволяет подавить процесс расщепления фокуса, а также повысить локальность и эффективность теплового воздействия в главном фокусе [287].

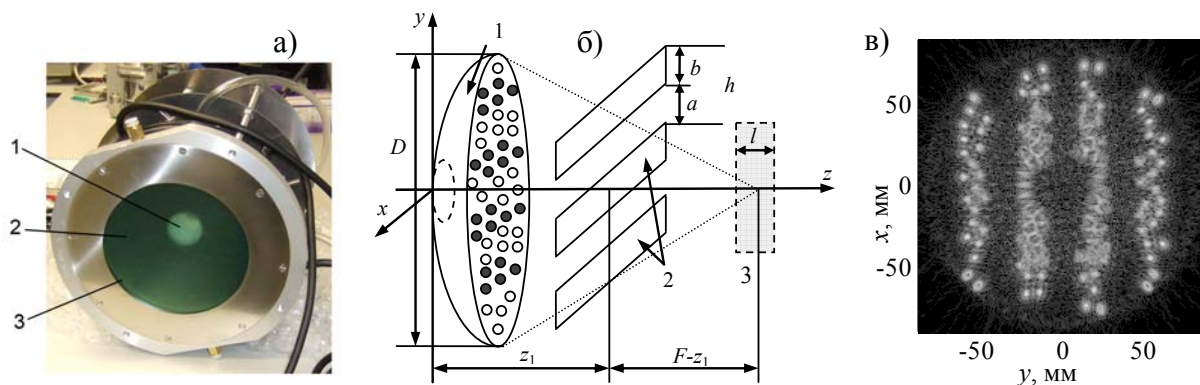


Рис. 7.28. (а) Внешний вид устройства решетки: 1 – отверстие для диагностического датчика, 2 – поверхность решетки, состоящая из 254 элементов, 3 – защитная мембрана. (б) Схема фокусировки ультразвукового пучка с помощью фазированной антенной решетки через ребра в слой ткани: 1 – решетка, 2 – ребра, 3 – слой ткани. (в) Распределение амплитуды давления на расстоянии $z = 32$ мм от центра решетки в моделировании.

Численные эксперименты по облучению мышечной ткани свиньи *in vitro* при наличии ребер проводились для клинической пьезокомпозитной решетки (рис. 7.28,а) со следующими параметрами: рабочая частота 1 МГц, 254 элемента диаметром 7 мм, расположенные в квазислучайном порядке по поверхности сферического сегмента диаметра $D = 170$ мм и радиуса кривизны $F = 130$ мм, минимальное расстояние между центрами элементов 7.9 мм, наибольшее - 9.4 мм. В центре решетки имелось отверстие диаметром 40 мм для установки в нем диагностического преобразователя. Решетка была разработана в Имперском колледже в Лондоне при сотрудничестве с АКИНОм и в 2008 году произведена фирмой Imasonic, Франция [264]. Геометрия расчетов показана на рис. 7.28,б. В качестве модели, имитирующей ребра, использовались бесконечно тонкие абсолютно поглощающие параллельные полосы шириной $b = 18$ мм и расстоянием $a = 14$ мм между ними; $h = a + b$ – период пространственной структуры ребер. Размер ребер и межреберных промежутков соответствовал характерному размеру грудной клетки крупных животных, в частности, свиней. С целью минимизации воздействия ультразвука на ребра, элементы решетки, находящиеся в геометрической тени ребер, отключались (рис. 7.28,в).

Расчет акустического поля в воде и ткани проводился основе уравнения Вестервельта (6.2, 7.2). Конкретные значения физических параметров в моделировании были равны: $\rho_0 = 1000$ кг·м⁻³, $c_0 = 1500$ м·с⁻¹, в воде $\varepsilon = 3.5$, в ткани $\varepsilon = 4.7$, коэффициент поглощения в воде $\alpha_w = 4.33 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Коэффициент поглощения в ткани считался линейно зависимым от частоты и был равен $\alpha = 0.42$ дБ·см⁻¹ на рассматриваемой частоте $f = 1$ МГц. Расчеты проводились с учетом присутствия ребер. Считалось, что полосы, имитирующие ребра, полностью поглощают ультразвук. Рассматриваемая модель является наиболее простой, но в то же время отражающей основные свойства грудной клетки в плане

прохождения ультразвука, именно такая модель использовалась в недавно проведенных первых экспериментах по облучению через ребра в HIFU установке с МРТ наблюдением [317]. Существуют и более сложные модели, учитывающие рассеяние на ребрах [318], их трехмерную геометрию и внутреннюю структуру [319]. В расчетах интенсивность на элементах решетки варьировалась в интервале значений $I_0 = 2.5 - 40 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$, с учетом данных последних сообщений на конференциях и частных обсуждений с производителями и пользователями HIFU-устройств о максимально допустимых уровнях интенсивности для современных композитных и пьезокерамических HIFU-элементов ($20 - 40 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$). Моделирование теплового разрушения осуществлялось с использованием уравнения теплопроводности (7.9) и уравнения для тепловой дозы (7.10) при следующих значениях параметров: $C_V = 3060 \text{ Дж}/^\circ\text{К}$, $\chi = 1.93 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ [15].

Эксперименты проводились в сотрудничестве с Имперским колледжем (Лондон) и Национальной физической лабораторией (Теддингтон). Облучение проходило в воде, акустическое поле после прохождения фантома ребер, расположенного на расстоянии $z = 45 \text{ мм}$ от центра решетки, фокусировалось в середину слоя ткани толщиной 2 см . Перед облучением ткани, с помощью инфракрасной камеры (Phoenix MWIR 9705 FLIR Systems, Boston, США) проводились измерения распределений интенсивности в воде в свободном поле в фокальной плоскости и в плоскости ребер при выбранной конфигурации отключения элементов (рис. 7.29). Ультразвуковой пучок был направлен вертикально вверх через воду на тонкий (1.8 мм) слой ультразвукового поглотителя (Aptflex F28, Precision Acoustics, Dorchester, Великобритания) с однопроходным коэффициентом поглощения 6 дБ при частоте 1 МГц . Коэффициент отражения на поверхности вода/поглотитель составлял -25 дБ . Верхняя сторона поглотителя граничила с воздухом и полностью отражала ультразвук. Расстояние между объективом ИК-камеры и поглотителем составляло 40 см , тепловое разрешение – 5.6 мК . Фантом грудной клетки (рис. 7.30,а) представлял собой

5 полос толщиной 3 мм из поглощающего ультразвук материала (Aptflex F48, Precision Acoustics, Dorchester, UK). Общие потери при прохождении ультразвука частотой 1 МГц через этот материал составляли 25 дБ , а отражение -20 дБ . Измерения



Рис. 7.29. Схема измерений распределений интенсивности: (а) - в фокальной плоскости и (б) - в плоскости ребер (б) с помощью ИК-камеры.

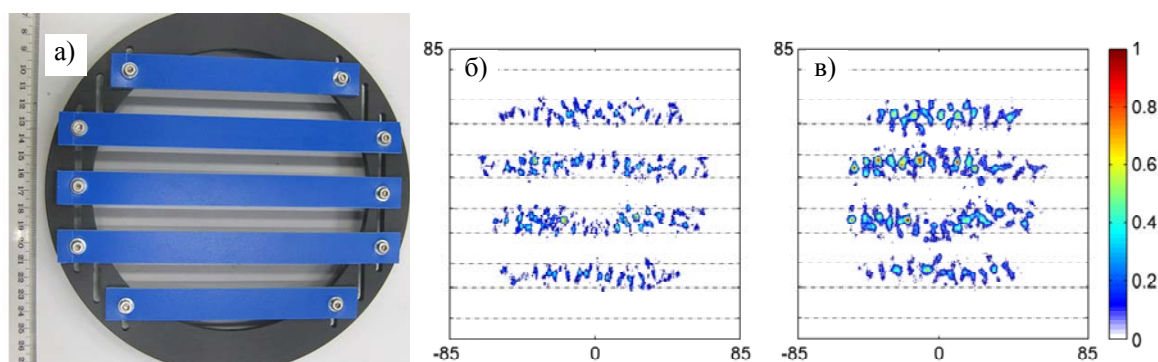


Рис. 7.30. (а) Фотография фантома ребер. (б) Рассчитанные и (в) измеренные с помощью ИК камеры распределения интенсивности акустического поля в плоскости ребер. Распределения нормированы на свое максимальное значение.

удалось провести при сравнительно небольших уровнях интенсивности на элементах, до $2.5 \text{ Вт}\cdot\text{см}^{-2}$, что соответствовало практически линейному режиму фокусировки. Полученные результаты позволили впервые экспериментально подтвердить предсказанный теоретически эффект расщепления фокуса при облучении ткани.

На рис. 7.30 показаны распределения интенсивности в плоскости ребер, рассчитанные численно (б) и измеренные с помощью ИК-камеры (в). Штриховые линии, параллельные оси x , соответствуют краям полосок, из которых состоит фантом (а). Видно, что основной поток ультразвуковой энергии распространяется через межреберные промежутки, а энергия, приходящаяся на кости (или в данном случае полоски фантома), мала. Результаты расчетов показали, что потери мощности на ребрах составляют 25% от всей излученной мощности, что в 2.2 раза меньше по сравнению со случаем, когда все элементы решетки включены (55% от всей излученной мощности).

На рис. 7.31 показаны расчетные (а) и измеренные с помощью ИК-камеры (б) распределения интенсивности в фокальной плоскости решетки ($z = 130 \text{ мм}$) с частично

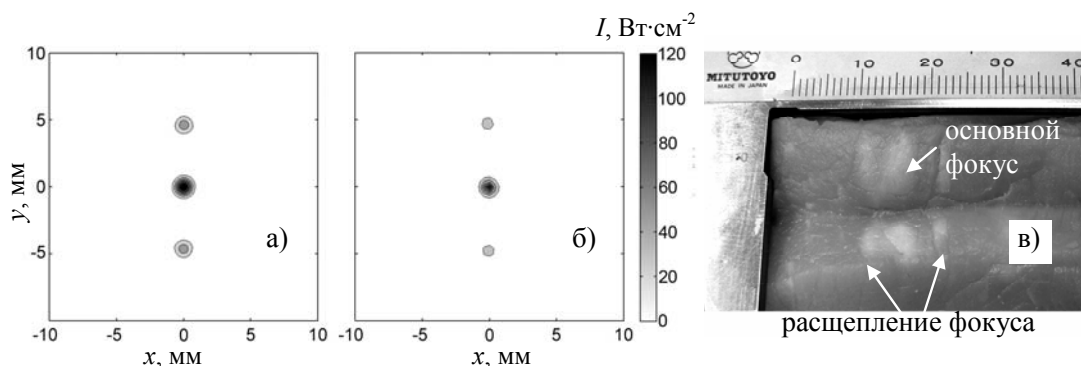


Рис. 7.31. (а) Результаты расчетов и (б) измерений с помощью ИК-камеры распределений интенсивности в фокальной плоскости решетки с частично выключенными элементами (рис. 1) в воде без ребер на пути прохождения ультразвука. (в) Фотографии разрушений в образце биологической ткани в фокальной области источника при облучении в присутствии фантома в течение 10 с и интенсивности $2.5 \text{ Вт}/\text{см}^2$ на элементах решетки.

выключенными элементами. Контуры распределений представлены от 10 Вт/см^2 до 110 Вт/см^2 с шагом 10 Вт/см^2 . Как видно из рисунка, в фокальной плоскости происходит образование триады фокусов с расстояниями между соседними фокусами 4.6 мм , что соответствует аналитическим оценкам, полученным в работе [284].

Ясно, что расщепление фокуса происходит и в отсутствие рёбер как таковых, поскольку решетка со сферической поверхностью представляет собой набор параллельных полос элементов (рис. 7.28,б). На рис. 7.31,в показаны тепловые разрушения ткани после облучение мышечной ткани свиньи сквозь фантом ребер при интенсивности на элементах 2.5 Вт/см^2 и времени облучения 10 с . По форме разрушений также видно явление расщепления фокуса: помимо основного фокуса, создаваемого в центре кривизны решетки, наблюдается также два побочных максимума появление которых связано с интерференцией волн от пространственно разделенных источников, которыми являются межреберные промежутки. На рис. 7.32 сравниваются разрушения в ткани, полученные при различной экспозиции (5 с (а), 10 с (б) и 15 с (в)) с результатами численного моделирования в линейном приближении и с учетом нелинейных эффектов. Видно, что теоретически рассчитанные формы разрушений практически совпадают друг с другом и хорошо согласуются с экспериментом. Таким образом, при такой интенсивности на элементах нелинейные эффекты практически не сказываются. Побочные максимумы появляются при увеличении экспозиции до 10 с (б); с увеличением времени нагрева в результате диффузии тепла боковые фокусы начинают сливаться с основным (в).

Исследования при более высоких уровнях интенсивности на элементах проводились только в численном эксперименте. На рис. 7.33 представлены безразмерные профили волны в основном и в боковых фокусах при интенсивности на излучателе I_0 : 2.5 Вт/см^2 , 20 Вт/см^2 и 40 Вт/см^2 . Профиль, помеченный знаком 0 соответствует линейной фокусировке волны. При интенсивности $I_0 = 2.5 \text{ Вт/см}^2$, соответствующей

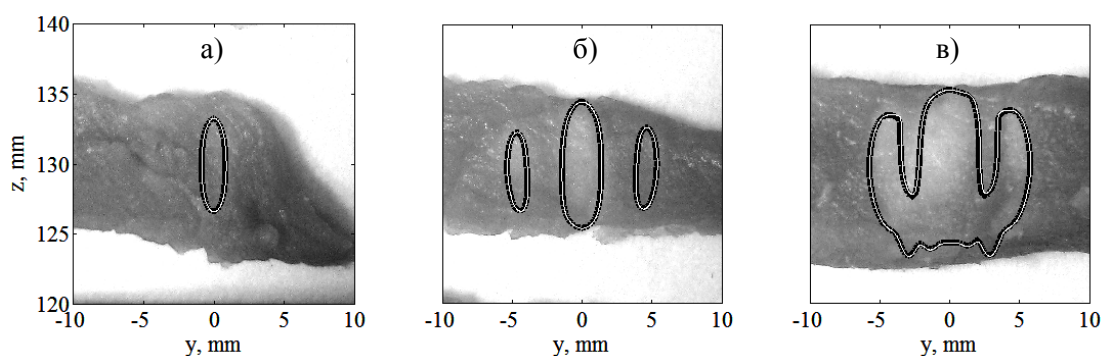


Рис. 7.32. Сравнение формы разрушения ткани *in vitro* за фантомом ребер, полученной в эксперименте, с теоретическими расчетами режимов нагрева в линейном приближении (черная кривая) и с учетом нелинейных эффектов (белая кривая) при начальной интенсивности $I_0 = 2.52 \text{ Вт/см}^2$ и времени облучения 5 с (а), 10 с (б) и 15 с (в).

проведенному эксперименту, нелинейные эффекты практически незаметны и профиль волны в фокусе близок к гармоническому, что согласуется с результатами, показанными на рис. 7.32. Сильные нелинейные эффекты в основном максимуме начинают проявляться при $I_0 = 20 \text{ Вт/см}^2$; при интенсивности $I_0 = 40 \text{ Вт/см}^2$ в фокусе формируется ударный фронт. При этом профиль волны в боковом фокусе практически не искажается.

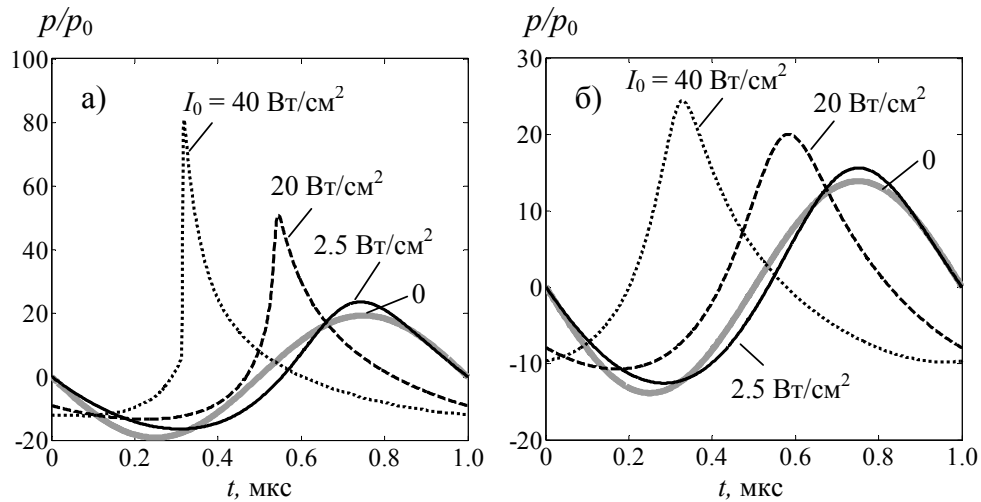


Рис. 7.33. Профили волны в ткани, рассчитанные в основном фокусе (а) и побочных (б) фокусах при различных уровнях интенсивности на элементах решетки: $I_0 = 2.5 \text{ Вт/см}^2$, 20 Вт/см^2 , 40 Вт/см^2 . Профиль (0) соответствует случаю линейной фокусировки.

Используя формулу для поглощения на ударном фронте (7.8), можно получить оценку для увеличения эффективности тепловыделения в ткани в режиме разрывных волн по сравнению с воздействием гармонической волной при той же интенсивности на элементах решетки. Так, при начальной интенсивности $I_0 = 40 \text{ Вт/см}^2$ ($p_0 = 1.1 \text{ МПа}$), амплитуда ударного фронта в фокусе составляет 82 МПа , мощность тепловыделения за счет поглощения на фронте равна $Q_{shock} = 85 \text{ кВт}\cdot\text{см}^{-3}$, что в 60 раз выше по сравнению с мощностью тепловыделения $Q_{lin} = 1.4 \text{ кВт}\cdot\text{см}^{-3}$ (7.7) при линейной фокусировке волны с той же начальной интенсивностью. Оценка времени увеличения температуры ткани в фокусе до 100°C в режиме облучения разрывными волнами составляет всего 2.7 мс .

Таким образом, даже в режимах облучения через кости грудной клетки возможности современных HIFU-решеток позволяют достичь образования высокоамплитудных разрывов в фокусе и использовать механизм сверхбыстрого нагрева ткани за счет эффективного поглощения ультразвуковой энергии на ударных фронтах. В последнее время активно обсуждаются возможности создания решеток с более плотной набивкой элементов при сохранении квази-случайной структуры. Такие решетки при заданной начальной интенсивности на элементах позволят получить большие интенсивности в фокусе и тем самым обеспечить возможность нелинейных режимов облучения на большей глубине в ткани [320, 321].

7.8. Заключительные замечания

Несмотря на то, что HIFU уже используется в клинической практике для лечения некоторых видов опухолей, многие особенности происходящих в ткани физических процессов всё ещё остаются неясными. В частности, по-прежнему до конца не ясна роль эффектов акустической нелинейности и возможность их использования для повышения эффективности теплового воздействия ультразвука на ткань и получения новых биоэффектов. В данной главе диссертации развивается новый подход к использованию высокоамплитудных ударно-волновых пучков в неинвазивной ультразвуковой хирургии. Предлагаемый подход существенно отличается от традиционно используемых подходов в большинстве современных клинических устройств. Отличия и потенциальные преимущества для определенных видов приложений заключаются в использовании гораздо лучшей пространственной локализации ударных фронтов при фокусировке, значительно большей эффективности теплового эффекта и возможности получения новых биоэффектов.

Для планирования облучения и предсказания теплового эффекта с помощью нелинейных волн был развит новый метод нелинейного директинга, позволяющий определять параметры ультразвукового поля в ткани по данным калибровочных измерений либо моделирования в воде. Поскольку мощность тепловыделения очень чувствительна к выходной мощности излучателя и резко увеличивается, когда в фокусе начинает формироваться ударный фронт, для осуществления нового подхода необходима особая точность в определении параметров поля *in situ*. Показано, что развитый метод нелинейного директинга применим как для слабо искаженных, так и для ударно-волновых нелинейных полей и позволяет определить пиковые и средние параметры поля с точностью не ниже 10%. Также обсуждается вопрос о предельных уровнях параметров акустического поля в фокусированных пучках в средах с различным поглощением. Показано, что предельные значения акустического поля в фокусе очень близки между собой в воде и в ткани, при этом уровни насыщения, достигаемые в ткани, ниже, чем в воде; разница между ними составляет менее 10%.

Было показано, что современные ультразвуковые излучатели позволяют достичь уровня интенсивности в ткани, при которой образуются фронты с амплитудой 30 – 100 МПа, которые значительно (в десятки раз) увеличивают её нагрев по сравнению с линейными оценками и вызывают локальное кипение в ткани через миллисекунды после начала облучения. Тепло, выделяющееся на образовавшемся ударном фронте, может быть

достаточно точно предсказано на основе теории слабых ударных волн, зная только амплитуду разрыва, полученную при моделировании профиля волны в фокусе, и физические параметры среды распространения. С другой стороны, измеряя время до возникновения кипения в ткани, например, по началу флуктуации напряжения на PCD или HIFU источнике, можно решать обратную задачу и находить величину акустического давления *in situ* и коэффициент затухания среды. Действительно, когда ударный фронт уже сформировался в фокусе и диффузией тепла можно пренебречь, по времени до начала кипения можно оценить амплитуду разрыва в профиле волны в фокусе. Далее сравнивая ее с данными калибровочных измерений в воде, можно оценить потери на пути к фокусу в ткани, то есть вычислить коэффициент затухания среды [322].

Быстрая инициация кипения в ткани с помощью ударных волн имеет также очень важный клинический аспект, поскольку дает возможность визуализировать область воздействия с помощью ультразвуковых диагностических методов (рис. 7.34). Это может быть использовано для «прицеливания», а также для мониторинга облучения в режиме реального времени, что является критическим фактором для дальнейшего успешного развития HIFU-технологии. Увеличение эффективности теплового эффекта за счет поглощения на разрывах позволяет осуществлять сканирование фокуса для увеличения объема разрушения. Следует отметить, что такой режим был эмпирически подобран в нескольких HIFU-установках, где интенсивность в фокусе по линейным оценкам составляла 5-25 кВт/см² и наблюдались разрушения каплевидной формы, смещенные от фокуса к излучателю. Однако возникающая на ультразвуковом изображении эхогенная область объяснялась кавитацией, а избыточный нагрев – усилением тепловыделения на кавитационных пузырьках. Повышенный по сравнению с линейными оценками нагрев ткани никак не связывался с эффектами акустической нелинейности, а появление яркого пятна на диагностическом изображении - с достижением температуры в ткани 100°C. Такое ошибочное представление о механизмах воздействия ультразвука на ткань и физических явлениях в ткани при ее облучении, конечно, не может обеспечить эффективность, надежность и безопасность применения HIFU в клинической практике. Полученные в данной главе результаты позволяют объяснить и другие наблюдения пузырьковой активности в ткани при больших уровнях облучения, например при MPT – визуализации HIFU, также ошибочно объяснявшиеся кавитацией [39].

Развитый в работе подход послужил основой для нового направления в HIFU, которое получило название “boiling histotripsy”, который, как уже упоминалось во введении к данной главе, является альтернативой интенсивно развиваемому в последние

годы направлению гистотрипсии [278 -280]. Суть предложенного здесь направления состоит в том, чтобы использовать локальное вскипание ткани вместо кавитационного облака. Было показано, что механическое разрушение или эмульсификация ткани может достигаться при ее быстром локальном перегреве до температуры кипения и взаимодействии ультразвука с образующимися в ткани парогазовыми полостями. Как и в случае кавитационной гистотрипсии, предлагаемый новый метод обладает рядом дополнительных преимуществ при облучении через ребра грудной клетки [287, 323]. Результаты моделирования облучения ткани через ребра показали, что предлагаемый метод позволяет существенно подавить побочные эффекты нагрева ткани в паразитных боковых фокусах, возникающих за счет дифракции на периодической структуре ребер, при этом значительно увеличить тепловой эффект в основном фокусе и уменьшить перегрев самих ребер [322]. Недавно были получены результаты, подтверждающие метод в образцах *ex vivo* ткани говяжьей и свиной печени, сердца, почки [295, 322]. Первые успешные эксперименты *in vivo* проведены на подкожных опухолях мышей и свиной печени [324]. Дальнейшее развитие данного направления представляется безусловно перспективным для клинической практики.

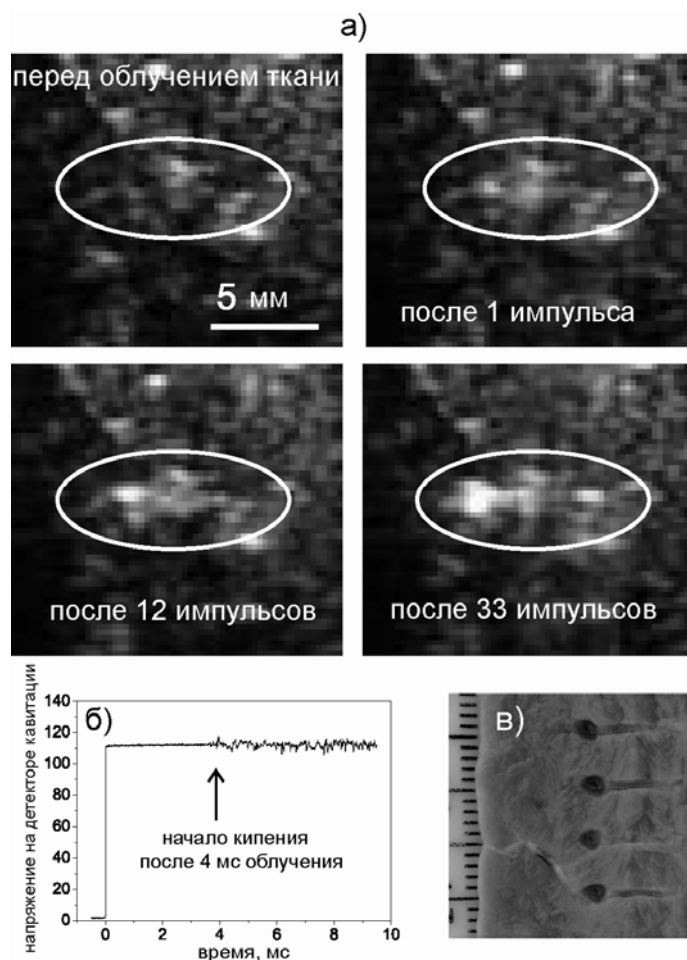


Рис. 7.34. (а) Отдельные кадры ультразвукового изображения в В-режиме записи облучения образца бычьего сердца *ex vivo* при импульсно-периодическом HIFU облучении в режиме высокоамплитудных разрывных волн. Эхогенность в тканях появляется с самого первого импульса, в то время как HIFU-индуцированное кипение наступает в течение 4 мс.

(б) Запись флуктуаций напряжения во время первого импульса воздействия, регистрирующая начало кипения после 4 мс в течение импульса длительностью 10 мс, что согласуется с теоретическими оценками времени до кипения.

(в) механические разрушения, созданные в результате четырех последовательных независимых экспозиций, практически одинаковы по размеру и форме, наполнены жидкостью (удалена), без видимых признаков тепловой денатурации. Форма разрушения соответствует форме эхогенной области на В-режиме изображений [295]

Заключение

Ниже сформулированы основные результаты настоящей диссертационной работы.

1. Развита новые методы исследования статистических характеристик нелинейных дифрагирующих ударно-волновых акустических полей в случайно-неоднородных средах. В рамках этого направления исследований получено следующее.

1.1. Развита теоретическая и численная модель для описания статистических свойств нелинейных пилообразных волн и одиночных N -импульсов за случайным фазовым экраном. В рамках нелинейной геометрической акустики получены аналитические решения, описывающие статистику сходимости лучей и амплитуды давления акустического поля за экраном. Численное моделирование позволило решить дифракционную задачу, показать влияние характерных пространственных масштабов неоднородностей экрана на статистику нелинейного поля, рассмотреть прохождение нелинейных волн через каустики и оценить границы применимости геометрического подхода.

1.2. Показана теоретически и подтверждена экспериментально принципиальная возможность избирательного воздействия случайного фазового экрана на гармоники нелинейной волны, позволяющая управлять каскадными процессами взаимодействия волн в недиспергирующих средах. На основе уравнения Вестервельта разработан новый численный алгоритм, что позволило более точно, без использования параболического приближения, описывать дифракционные эффекты в нелинейных пучках с широким пространственным спектром. Показано, что при фокусировке гармоник ультразвукового пучка конечной амплитуды за фазовым слоем с фиксированным набегом фазы в областях случайно распределенных неоднородностей за счет выбора величины сдвига фазы в слое можно получить избирательное разрушение фокусировки основной гармоники и ближайших нечетных гармоник. Возможна настройка слоя на разрушение и других гармоник.

1.3. Получено модифицированное нелинейное эволюционное уравнение типа Хохлова - Заболотской - Кузнецова для описания распространения мощных акустических сигналов в неоднородной движущейся среде. Исследовано совместное влияние нелинейно-дифракционных эффектов на статистику широкополосного акустического поля в случайно-неоднородной среде в условиях многократного

формирования каустик. В численном эксперименте показано, что нелинейные эффекты приводят к существенному изменению коэффициентов концентрации поля в области случайных фокусировок и, несмотря на сильное поглощение энергии на фронте волны, к более чем четырехкратному увеличению амплитуды давления в областях фокусировки даже на расстояниях нескольких нелинейных длин. Показано, что влияние поперечных флуктуаций скорости усиливается при увеличении характерных пространственных масштабов турбулентной среды, при этом нелинейные эффекты приводят к уменьшению различий в средних характеристиках волны в турбулентной и однородной средах.

1.4. На основе численного моделирования модифицированного уравнения Бюргерса показано, что для характерных параметров N -волны (длительность 15 мкс, пиковое давление 1000 Па), генерируемой искровым источником в условиях лабораторного эксперимента в воздухе, уменьшение амплитуды в равной степени зависит от нелинейных, релаксационных процессов и эффектов термовязкого поглощения в то время как удлинение профиля N -волны определяется только нелинейными эффектами. Используя данный результат, предложен, обоснован и реализован метод калибровки широкополосных датчиков в условиях проявления эффектов вязкости и релаксации по нелинейному удлинению N -волны с использованием определения длительности импульса по положениям нулей в его спектре.

2. Развита новый асимптотический метод решения эволюционных уравнений нелинейной акустики, допускающих разрывные решения. Метод основан на использовании в численном алгоритме известных высокочастотных асимптотик спектра разрывных функций. Получена замкнутая система связанных нелинейных уравнений для конечного числа гармоник, описывающая решения с разрывами. Разработанный метод позволяет значительно сократить время численных расчетов при численном описании нелинейных акустических эффектов и исследовать широкий круг задач нелинейной динамики слабых ударных волн в недиспергирующих средах.

2.1. Исследованы особенности проявления нелинейных эффектов в средах с частотным законом поглощения, близким к линейному. Показано, что при распространении исходно гармонической волны в среде с линейным по частоте законом поглощения ударный фронт образуется раньше, является более узким и сохраняет ударную структуру дольше, чем в среде с классическим термовязким поглощением, квадратичным по частоте. При распространении одиночного импульса

с ударным фронтом параметры закона поглощения по-разному влияют на изменение профиля давления в импульсе. Величина коэффициента поглощения оказывает большее влияние на изменение пикового давления в импульсе, а показатель степени - на ширину ударного фронта. Этот результат показывает принципиальную возможность использования нелинейных импульсных сигналов с ударным фронтом для диагностики параметров степенного закона поглощения среды. Исследована устойчивость бесконечно узкого ударного фронта (разрыва) для нелинейных волн в средах с различными степенными законами поглощения. Показано, что разрыв устойчив, если коэффициент поглощения на высоких частотах растет не быстрее, чем по линейному закону.

2.2. Исследовано влияние селективного поглощения второй гармоники на протекание нелинейных эффектов при распространении плоской периодической волны. Показано, что селективное поглощение задерживает, но не предотвращает образование ударного фронта. В доразрывном режиме распространения селективное поглощение приводит к дополнительному поглощению энергии волны, а при образовании разрывов, напротив, к уменьшению амплитуды разрыва, соответствующему уменьшению нелинейного поглощения энергии волны и росту интенсивности волны на больших расстояниях по сравнению со случаем без поглощения. Происходит также характерное искажение профиля волны: положение ударного фронта удалено от положения максимума давления.

2.3. Исследованы эффекты нелинейной стабилизации акустической волны в активных средах с характерным для термоакустических установок усилением: постоянным по частоте и пропорциональным корню из частоты. Показано, что эффективность усиления и амплитуда установившейся волны увеличиваются при более сильном поглощении и дисперсии на высоких частотах спектра волны.

2.4. Модификация алгоритма для решения дифракционных задач на неоднородной пространственной сетке позволила дополнительно сократить время расчетов при получении численных решений для нелинейных фокусированных и нефокусированных пучков периодических волн с исходной гауссовской аподизацией амплитуды. Исследованы процессы насыщения параметров акустического поля в нелинейных дифрагирующих пучках. Показано, что при рассмотрении нелинейных дифрагирующих полей, создаваемых поршневыми источниками с резкими краями, асимптотический метод приводит к неустойчивости решения. Причиной является

образование двух разрывов на периоде исходно гармонической волны в поле поршневого излучателя со сложной пространственной структурой ближнего поля.

3. Развита новый комбинированный метод характеристики полей, создаваемых современными медицинскими преобразователями мощного ультразвука, сочетающий в себе преимущества физического и численного эксперимента. Получены следующие результаты.

3.1. Предсказан в численном моделировании и затем подтвержден экспериментально новый нелинейно-дифракционный эффект формирования двух разрывов на периоде волны, слияние разрывов и формирование пилообразного профиля. Такая нелинейная эволюция волны в ближнем поле пучка, создаваемого плоским и фокусирующим излучателями с резкими границами, существенно отличается от случая плоской волны и объясняется интерференцией прямой и краевой волн.

3.2. Разработан и программно реализован новый численный алгоритм, позволяющий моделировать трехмерные импульсные ультразвуковые пучки произвольной геометрии в нелинейной среде с произвольным частотным законом поглощения. Результаты численного исследования полей диагностических ультразвуковых сканеров с прямоугольной апертурой, работающих в режиме визуализации по второй гармонике, продемонстрировали преимущества использования высших гармоник для улучшения качества визуализации тканей за счет отсутствия сигналов ближнего поля, снижения уровня боковых лепестков, а также более узкой, плавной и длинной фокальной области. Рассчитанные параметры ультразвуковых полей в воде с высокой точностью соответствуют результатами калибровочных измерений, проведенных для датчиков фирмы Philips.

3.3. Показано, что результаты численного эксперимента на основе уравнения Хохлова-Заболотской с граничным условием в виде фокусирующего поршневого источника могут успешно использоваться для описания полей реальных сильно фокусирующих излучателей для ультразвуковой хирургии, распределение колебательной скорости на поверхности которых является гораздо более сложным. Для каждого конкретного излучателя параметры поршня находятся из результатов сканирования поля при малых амплитудах, что является стандартной процедурой. Предложенный метод получил дальнейшее развитие путем использования методов

акустической голографии для задания граничных условий путем восстановления реального распределения поля на поверхности излучателя, более точного дифракционного подхода и численного моделирования в трехмерной пространственной геометрии

3.4. Развита новая численная модель для описания трехмерных нелинейных полей, создаваемых современными ультразвуковыми терапевтическими решетками. Модель основана на решении уравнения Вестервелта; разработанный алгоритм позволяет рассчитывать нелинейные поля периодических волн при наличии ударных фронтов, локализованных вблизи фокуса. Полученные решения показали, что для характерных режимов эксплуатации современных решеток нелинейные эффекты играют важную роль, и в профиле волны в фокусе происходит образование ударных фронтов. Разработанный алгоритм может быть использован для решения широкого класса практически важных задач нелинейной медицинской акустики. Важной особенностью алгоритма в данных приложениях является возможность расчета трехмерных полей мощных излучателей сложной конфигурации, оставаясь при этом в рамках разумных требований к вычислительным средствам текущего поколения.

3.5. Получены количественные данные для нелинейной коррекции коэффициентов концентрации и насыщения параметров поля в фокусе, позволяющие рассчитать различные характеристики нелинейно-искаженных профилей волны в широком интервале параметров поршневых преобразователей. Показано, что с увеличением амплитуды давления на излучателе коэффициенты концентрации поля в фокусе для пикового положительного давления p^+ и интенсивности I изменяются немонотонно: сначала заметно возрастают (до 3.5 раз для p^+ и 1.4 раза для I), затем уменьшаются. Максимумы кривых усиления соответствуют такой начальной амплитуде, когда в профиле волны вблизи фокуса формируется ударный фронт. Для пикового отрицательного давления коэффициент концентрации монотонно убывает при увеличении исходной амплитуды волны и составляет около 50% от его линейного значения в области максимумов кривых усиления p_+ . Установлено, что существующие аналитические оценки для предельных полей, достигаемых при фокусировке, дают заниженные значения для пикового положительного давления и, напротив, завышенные – для пикового отрицательного (примерно в 2 раза), но в то же время достаточно близки к рассчитанным численно величинам интенсивности и полусумме пиковых значений давления.

4. Исследованы эффекты ударно-волнового воздействия на биологические ткани в режимах, использующихся в ультразвуковой хирургии. Получены следующие результаты.

4.1. Предложен и подтвержден в численном и физическом экспериментах новый метод определения параметров акустического поля в биологической ткани для мощных фокусированных ультразвуковых полей. Показано, что для HIFU излучателей с большими коэффициентами линейного усиления в фокусе параметры акустического поля могут быть получены из результатов моделирования или измерений в воде с точностью 10%. Метод дает достоверные результаты как в режиме формирования разрывов, так и в режиме развитых разрывов.

4.2. Предсказан в численном моделировании и подтвержден в эксперименте эффект сверхбыстрого нагревания ткани до температуры 100°C в течение нескольких миллисекунд при воздействии мощным фокусированным ультразвуком в режиме развитых ударных фронтов большой амплитуды. Показано, что эффективность поглощения на разрывах может в десятки раз превышать линейное поглощение в ткани, при этом время вскипания в ткани может быть определено с помощью простых аналитических оценок на основе теории слабых ударных волн.

4.3. Показано, что при импульсно-периодическом воздействии на биологическую ткань импульсами миллисекундной длительности с амплитудой разрывов в фокусе 40 МПа и выше возможно кратковременное вскипание ткани, приводящее к ее механическому разрушению без видимых тепловых эффектов. Ударно-волновой режим воздействия позволяет существенно увеличить объем разрушения при сканирующем облучении и обеспечивает возможность ультразвуковой визуализации области воздействия в режиме реального времени.

4.4. Разработанные комплексные методы характеристики нелинейных полей источников мощного фокусированного ультразвука в воде, нелинейного дирейтинга для определения параметров полей *in situ*, и метода, получившего название «boiling histotripsy», для контролируемого механического и теплового воздействия на ткань могут служить основой нового направления в неинвазивной ультразвуковой хирургии.

Приложения

Приложение 1. Алгоритм численного моделирования трехмерных нелинейных полей импульсных преобразователей диагностического ультразвука (Гл. 5, модифицированное уравнение ХЗК)

Нелинейные поля, создаваемые импульсными источниками диагностического ультразвука прямоугольной формы, моделировались на основе уравнения ХЗК (5.2):

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - L(P) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\theta} \left(\frac{1}{G_x} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{f_{xy}}{G_y} \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} \right) d\theta'. \quad (\text{П1.1})$$

с граничными условиями (5.6), (5.7), заданными на плоскости при $\sigma = 0$:

$$P(\sigma = 0, \theta, X, Y) = V(\theta + G_x X^2 + G_y Y^2) H(1 - X) H(1 - Y), \quad (\text{П1.2})$$

где
$$V(\theta) = \exp\left[-(\theta/N_c \pi)^4\right] \sin \theta, \quad (\text{П1.3})$$

и H – функция Хевисайда.

Особенностями данной задачи являлись трехмерная геометрия, импульсный характер излучения и линейный по частоте закон поглощения ультразвука в биологической ткани. Основой для разработанного алгоритма послужил развитый ранее в университете Техаса в Остине, США, конечно-разностный метод расчета импульсных аксиально-симметричных пучков в вязкой теплопроводящей среде с использованием временного представления решения [37, 38, 326]. Здесь этот метод был обобщен на случай ультразвуковых полей произвольной геометрии, а также на случай сред с произвольным законом поглощения от частоты. Также, для описания частотно-зависимого поглощения использовалась комбинация временного и частотного представлений.

Решение $P(\theta, \sigma, X, Y)$ (5.2) рассчитывалось последовательно, от слоя σ к слою $\sigma + \Delta\sigma$, с шагом $\Delta\sigma$ вдоль оси пучка в узлах двумерной пространственной сетки поперечных плоскостей (X, Y) , используя метод расщепления по физическим факторам [25]. Дифракционный интеграл в правой части (П1.1) рассчитывался во временном представлении с помощью двух различных схем по поперечным координатам X и Y . Вблизи излучателя ($\sigma < 0.1$) использовалась более устойчивая абсолютно неявная схема первого порядка точности по координате σ , что связано с присутствием особенностей в виде резких краев в пространственном распределении амплитуды сигнала (П1.2) по поверхности излучателя [326]. При удалении от излучателя ($\sigma \geq 0.1$), пространственные

поперечные особенности поля сглаживаются, что позволяет увеличить шаг $\Delta\sigma$ за счет перехода к более точной (второго порядка по σ) продольно-поперечной схеме [26].

Нелинейный оператор в (5.2), $\partial P/\partial\sigma = N \cdot P \cdot \partial P/\partial\theta$, как и в работе [37], рассчитывался для каждого узла поперечной сетки, используя точное неявное аналитическое решение уравнения простых волн $P = P(\theta + NP\sigma)$. Численное решение на каждом шаге сетки тогда задается простым выражением: $P(\sigma + h_\sigma, \theta) = P(\sigma, \theta + NP h_\sigma)$, но при этом возникает необходимость интерполяции с неравномерной сетки на равномерную. Как было показано позже, такой подход вносит сильную искусственную вязкость и обеспечивает хорошую точность при разумном шаге сетки лишь для слабонелинейных пучков, как в рассматриваемой задаче [325]. При описании разрывных волн предпочтительным является использование консервативных удароулавливающих схем типа Годунова [24, 102], к которым перешли далее в работе при моделировании ударно-волновых полей (см. приложения 2,3, 5-7).

Для расчета поглощения и дисперсии скорости звука $\partial P/\partial\sigma = L(P)$ в каждом из узлов сетки по поперечным координатам на расстоянии σ находился спектр импульса:

$$C(\tilde{f}, \sigma, X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta, \sigma, X, Y) \exp(-i\tilde{f}\theta) d\theta. \quad (\text{П1.4})$$

Изменение каждой из компонент спектра, в соответствии с заданным частотным законом поглощения и дисперсии, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial\sigma} = \left(-\alpha(\tilde{f}) + i2\pi\tilde{f} \frac{\Delta c(\tilde{f})}{c_0^2} \right) C F_x. \quad (\text{П1.5})$$

Это уравнение имеет точное решение $C|_{\sigma+\Delta\sigma} = C|_{\sigma} \exp\left[\left(-\alpha + i2\pi\tilde{f} \frac{\Delta c}{c_0^2} \right) F_x \Delta\sigma \right]$. Совершая обратное преобразование Фурье, получим решение для профиля импульса на слое $\sigma + \Delta\sigma$.

$$P(\theta, \sigma + \Delta\sigma, X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tilde{f}, \sigma, X, Y) \exp\left[\left(-\alpha(\tilde{f}) + i2\pi\tilde{f} \frac{\Delta c(\tilde{f})}{c_0^2} \right) F_x \Delta\sigma + i\tilde{f}\theta \right] d\tilde{f}. \quad (\text{П1.6})$$

Для расчета интегралов (П1.4, П1.6) использовалось быстрое преобразование Фурье, оптимизированное для нахождения спектра действительных функций [26]. Переход к спектральному представлению для моделирования поглощения и дисперсии позволяет легко адаптировать численную схему для произвольного частотного поглощения в среде. Альтернативный подход использовался в работе [197], где линейный по частоте закон поглощения аппроксимировался комбинацией двух релаксационных процессов и моделирование нелинейного импульсного поля проводилось полностью на временной

сетке. Отметим, что такой подход позволяет упростить описание, но, в отличие от развитого здесь алгоритма, имеет более ограниченную область применимости.

Пространственные окна $[0, X_{max}]$ и $[0, Y_{max}]$ по поперечным координатам X и Y выбирались достаточно большими, чтобы избежать отражений от границ X_{max} и Y_{max} , на которых задаются нулевые по полю условия. С учетом пространственной симметрии задачи, граничные условия на плоскостях $X\sigma$ и $Y\sigma$ задавались как

$$\partial P / \partial X|_{Y=0} = \partial P / \partial Y|_{X=0} = 0 \quad (\text{П1.4})$$

Временное окно $[-\theta_{min}, \theta_{max}]$ по θ также выбиралось достаточно большим, чтобы учесть интерференцию импульсов от различных точек излучателя, приходящих в каждую из точек моделируемой пространственной области с различной задержкой, а также смещение импульса внутри окна за счет исходной фазовой задержки (5.7). На краях временного окна θ_{min} и θ_{max} задавались нулевые граничные условия. Шаги сетки по всем переменным выбирались, исходя из характерных пространственных и временных масштабов поля, и контролировались таким образом, чтобы разница в результатах расчетов с уменьшенными согласованно по всем переменным шагами не превышала некоторой заранее заданной малой величины (1%).

Приложение 2. Алгоритм численного моделирования поля N -волны за одномерным случайным фазовым экраном (Гл. 1, уравнение ХЗК)

Здесь рассматривалась двумерная дифракционная задача, когда начальные флуктуации временной задержки N -импульса задаются вдоль одной перпендикулярной к направлению распространения волны координаты. Акустическое поле за экраном описывается уравнением ХЗК (1.21), которое в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial \sigma} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}, \quad (\text{П2.1})$$

а граничное условие задается как

$$P(\sigma = 0, \theta, \rho) = P_0(\theta - 2\pi\Psi(\rho)), \quad (\text{П2.2})$$

где функция $P_0(\theta)$ определяет профиль N -волны с безразмерной длительностью 2π . Отметим, что здесь, в отличие от уравнения (П1.1) используется иная нормировка переменных: пространственные координаты нормируются на длину N -волны, время $\theta = 2\pi\tau/T_0$ – на ее начальную длительность N -волны T_0 . (см. §1.4). Модель фазового экрана используется для задания случайных временных задержек $2\pi\Psi(\rho)$ для каждого значения поперечной координаты ρ в граничном условии для N -волны (П2.2).

Конкретные реализации экрана $\Psi(\rho)$ с заданной статистикой второй производной были получены с использованием метода фильтрации белого гауссовского шума [65].

При проведении численных расчетов учитывалось небольшое поглощение, поэтому ударный фронт N -волны не являлся бесконечно тонким. Ширина фронта исходной N -волны (П2.2), определяемая как время нарастания давления с 10% до 90% от его максимума, выбиралась в соответствии с квазистационарным решением уравнения Бюргерса при заданных значениях параметров A и N и приблизительно была равна $10A/N$. Сглаживание фронта идеальной N -волны проводилось с помощью функции гиперболического тангенса в соответствии со значениями параметров A и N :

$$V_0 = \frac{\theta}{2\pi} \left[\tanh\left(\frac{N}{4A}(\theta - \pi)\right) - \tanh\left(\frac{N}{4A}(\theta + \pi)\right) \right]. \quad (\text{П2.3})$$

При $A/N \rightarrow 0$ квазистационарное решение (4.15) принимает форму идеальной N -волны, амплитуда которой стремится к 1.0. В результате такого сглаживания безразмерное пиковое давление в профиле N -волны становилось несколько меньше, чем у идеальной N -волны. Однако во всем интервале параметров, использованных при расчетах, это различие не превышало 8%.

Численное моделирование уравнения (П2.1) проводилось во временном представлении аналогично алгоритму, описанному в приложении 1. Отличие рассматриваемой здесь задачи состояло в записи дифракционного оператора, граничных условиях, задаваемых на краях пространственной сетки по поперечной координате, и перехода к схеме типа Годунова для интегрирования нелинейного оператора [101, 102]. Применялась явная шеститочечная консервативная схема типа Годунова, которая даже при 3-х узлах сетки на фронт волны дает хороший результат, с ошибкой в определении основных параметров волны не более 0.2%. Граничные условия при $\rho = 0$ и $\rho = L$, где L – длина экрана, были выбраны в виде $\partial P / \partial \rho = 0$. Чтобы уменьшить отражения от границ, вблизи них функция фазового экрана полагалась равной нулю, так что волновой фронт N -волны был плоским в областях $[0, L_0]$ и $[L-L_0, L]$, где $L_0 \ll L$. Размер расчетной области по поперечной координате был выбран достаточно большим, чтобы, во-первых, избежать нежелательных отражений от границы на рассматриваемых расстояниях распространения, и, во-вторых, чтобы иметь достаточно большую рабочую область для расчетов статистических распределений. Типичный расчет проводился для фазового экрана с длиной 700λ до расстояний в несколько нелинейных длин с границами временного окна по θ от -9.5 до 28, что составляет приблизительно 6 длительностей начальной N -волны. Шаги сетки выбирались в соответствии с безразмерными параметрами уравнения (П2.1). При величине диссипативного параметра $A = 1.5 \cdot 10^{-4}$ и нелинейного параметра $N = 0.05$

шаг сетки вдоль поперечной координаты был равен $h_p = 0.01$, шаг по времени $h_\theta = 0.009$ и шаг вдоль направления распространения $h_\sigma = 0.025$. Значение диссипативного параметра A было подобрано для обеспечения устойчивости численной схемы во всем интервале изменения нелинейного параметра N и оставалось неизменным.

Функции распределения вероятности акустического поля рассчитывались по результатам моделирования для нескольких достаточно длинных реализаций фазового экрана. Согласно гипотезе эргодичности это эквивалентно усреднению большого числа реализаций в одной пространственной точке. Для каждого значения нелинейного параметра N моделирование акустического поля проводилось с двумя статистически независимыми реализациями фазового экрана. Длина каждой реализации составляла 700λ или примерно 100 и 50 характерных масштабов флуктуаций фазы для $l=3$ и $l=6$, соответственно. Сравнение статистических распределений акустического поля, рассчитанных отдельно по первой и второй реализациям фазового экрана, показало их хорошее согласие между собой. Это являлось подтверждением того, что длина фазовых экранов была достаточной для проведения статистического анализа.

Приложение 3. Двумерный алгоритм численного моделирования поля N -волны в среде с распределенными случайными неоднородностями векторного типа (Гл. 2, модифицированное уравнение ХЗК)

Данная задача решалась для двумерного по пространственным координатам акустического поля. Уравнение типа ХЗК (2.6) для неоднородной движущейся среды записывалось в декартовой системе координат в безразмерных переменных без учета скалярных неоднородностей (2.7):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial \sigma} - NV \frac{\partial V}{\partial \theta} - 2\pi U_{\parallel} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} + U_{\perp} \frac{\partial V}{\partial Y} - A \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} V. \quad (\text{П3.1})$$

Разработанный для решения уравнения (П3.1) разностный алгоритм был во многом аналогичен алгоритму решения уравнения (П2.1) для поля за фазовым экраном, однако имелись и важные отличия. Алгоритм решения (П3.1) строился полностью на временной сетке. Здесь, как и в случае алгоритма для импульсного пучка в биологической ткани (прил. 1), использовалась комбинация временного и спектрального подходов.

Запишем уравнение (П3.1) в более удобном для численного решения виде

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} d\theta + \frac{N}{2} \frac{\partial V^2}{\partial \theta} + A \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + 2\pi U_{\parallel} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} - U_{\perp} \frac{\partial V}{\partial \rho} =$$

$$= L_D + L_N + L_A + L_{I_{\parallel}} + L_{I_{\perp}} \quad , \quad (\text{ПЗ.2})$$

Для перехода к спектральному представлению запишем решение в виде разложения в ряд Фурье: $V(\sigma, Y, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\sigma, Y) \exp(-in\theta)$, подставим в уравнение (ПЗ.1) и получим связанную систему нелинейных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд гармоник $C_n(\sigma, Y)$:

$$\frac{\partial C_n}{\partial \sigma} = \frac{i}{4\pi m} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} C_n - \frac{in}{2} N \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} - An^2 C_n - i \cdot 2\pi m U_{\parallel} C_n - U_{\perp} \frac{\partial C_n}{\partial Y} =$$

$$= L_D + L_N + L_A + L_{I_{\parallel}} + L_{I_{\perp}} \quad , \quad (\text{ПЗ.3})$$

где $-\infty < n < \infty$, $C_{-n} = C_n^*$ (C_n^* обозначает комплексно сопряженное к C_n).

На каждом шаге сетки вдоль координаты распространения σ уравнения (ПЗ.2) и (ПЗ.3) разделялись на пять уравнений, описывающих различные физические эффекты: дифракцию (L_D), нелинейность (L_N), поглощение (L_A), конвекцию в направлении распространения волны ($L_{I_{\parallel}}$) и конвекцию в поперечном направлении ($L_{I_{\perp}}$). Уравнения решались последовательно. Расчет дифракции (L_D) и нелинейности (L_N) проводился, как и в случае (П2.1), во временном представлении. Для дифракции использовалась двухслойная шеститочечная неявная схема Кранка - Николсона второго порядка точности по пространственным координатам [326]. Полученный результат использовался далее в качестве начального условия для расчета нелинейных эффектов по схеме Годунова в каждом узле численной сетки по поперечной координате. Вычисление конвекции волны в направлении ее распространения ($L_{I_{\parallel}}$) и частотно-зависимого термовязкого поглощения (L_A) проводилось в спектральном представлении (ПЗ.3), при этом использовались точные решения для комплексных амплитуд гармоник сигнала [327]. На последнем шаге учитывалась конвекция в направлении, поперечном распространению волны (ПЗ.5). В силу того, что структура акустического поля в поперечном направлении не имеет ярко выраженных разрывов, то для расчета оператора переноса ($L_{I_{\perp}}$) во временном представлении (ПЗ.2) использовалась схема Лакса-Вендроффа второго порядка точности [26]. Более подробно детали алгоритма приводятся в работе [101].

Приложение 4. Алгоритм численного моделирования поля плоского поршневого излучателя гармонических волн (Гл. 4, уравнение ХЗК)

Эта задача решалась полностью в спектральном представлении. Решение системы уравнений (4.5) для амплитуд гармоник C_n в нелинейном пучке

$$\frac{\partial C_n}{\partial Z} = -\frac{inN}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} - An^2 C_n + \frac{i}{4n} \Delta_{\perp} C_n, \quad (\text{П4.1})$$

рассчитывалось на равномерной сетке по поперечной координате R . Здесь координата вдоль оси пучка нормировалась на фокусное расстояние. В режиме развитых разрывов, для используемого в расчетах значения параметра поглощения $A = 0.0293$ и максимального значения параметра нелинейности $N = 10.8$ количество гармоник, необходимое для разрешения фронта, было порядка $n_{\max} \approx \pi N/A \approx 10^3$, что следует из аналитического решения для ширины фронта стационарной ударной волны, описываемой уравнением Бюргерса [1]. Поскольку большое число гармоник было необходимо для описания поля лишь в присутствии разрывов большой амплитуды, т.е., начиная с некоторого расстояния на оси Z и в достаточно узкой приосевой области пучка, для ускорения расчетов и уменьшения размеров массивов данных для различных координат Z и R в алгоритме использовалось изменяющееся количество гармоник.

Опишем более подробно, как реализовался метод расщепления по физическим факторам в этом случае. Пусть $C_n^m(Z)$ – комплексная амплитуда n -й гармоники в узлах сетки по поперечной координате $R_m = m \cdot \Delta R$, $m=0, 1, \dots, m_{\max}^{(n)}$ на расстоянии Z от излучателя; $m_{\max}^{(n)}$ – максимальное количество узлов сетки по R для n -й гармоники. Значения $C_n^m(Z)$ рассчитывались последовательно от плоскости к плоскости вдоль Z с шагом ΔZ . Для учета нелинейных эффектов решалась система связанных нелинейных дифференциальных уравнений для первых $n_{\max}^{(m)}$ гармоник в каждом из узлов с индексом m по поперечной координате методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности [26]:

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial Z} = -\frac{inN}{2} \sum_{k=-n_{\max}^{(m)}}^{n_{\max}^{(m)}} C_k^m C_{n-k}^m. \quad (\text{П4.2})$$

Амплитуды гармоник с номерами $n > n_{\max}^{(m)}$ полагались равными нулю. Количество гармоник $n_{\max}^{(m)}(Z)$ изменялось с расстоянием Z . Вначале, при $Z = 0$, профиль волны был близок к гармоническому, и небольшое количество гармоник, $n_{\max}^{(m)}(0)$, было одинаковым для всех узлов сетки R_m . Далее, на каждом шаге ΔZ , абсолютное значение амплитуды последней из рассчитываемых гармоник во всех узлах m сравнивалось с некоторым малым пороговым

значением. Если хотя бы одна из амплитуд превышала это значение, то количество гармоник, удерживаемых в расчетах, увеличивалось для всех m на величину Δn до некоторого максимального значения $\tilde{n}_{\max}^{(m)}$, так, что $n_{\max}^{(m)}(Z + \Delta Z) = \min\{n_{\max}^{(m)}(Z) + \Delta n, \tilde{n}_{\max}^{(m)}\}$. Поскольку нелинейные эффекты более выражены вблизи оси пучка, то величина $\tilde{n}_{\max}^{(m)}$ уменьшалась в зависимости от расстояния R_m от оси пучка.

Для учета поглощения использовалось точное аналитическое решение соответствующего уравнения для каждой из гармоник $\partial C_n^m / \partial Z = -An^2 C_n^m$, которое рассчитывалось независимо для каждого из узлов поперечной сетки с индексом m и для каждой из гармоник с индексом n :

$$C_n^m(Z + \Delta Z) = C_n^m(Z) \exp(-An^2 \Delta Z) \quad (\text{П4.3})$$

Дифракционные эффекты учитывались независимо для каждой из гармоник. Параболическое уравнение $\partial C_n / \partial Z = i\Delta_{\perp} C_n / 4n$ для гармоники с индексом n решалось с использованием неявной схемы:

$$\frac{C_n^m(Z + \Delta Z) - C_n^m(Z)}{\Delta Z} = \frac{i}{4n\Delta R^2} \left\{ \left[1 - \frac{1}{2m} \right] C_n^{m-1}(Z + \Delta Z) - 2C_n^m(Z + \Delta Z) + \left[1 + \frac{1}{2m} \right] C_n^{m+1}(Z + \Delta Z) \right\}. \quad (\text{П4.4})$$

С учетом аксиальной симметрии задачи производная $\partial C_n / \partial R = 0$ при $R = 0$ (на оси пучка). Правая часть разностного уравнения (П4.4) для $m = 0$ тогда может быть записана как $i(C_n^1 - C_n^0) / n\Delta R^2$. На внешней границе окна используется условие равенства нулю амплитуды гармоник на следующем узле сетки, $m_{\max}^{(n)} + 1$. Величина $m_{\max}^{(n)}$ и соответствующий размер пространственного окна в радиальном направлении $R_{\max}^{(n)} = m_{\max}^{(n)} \Delta R$ выбирались различными для различных гармоник. Поскольку дифракционная расходимость пучка менее выражена для высоких частот, для гармоник с более высокими номерами использовалось меньшее количество узлов сетки.

И, наконец, чтобы избежать численного отражения волны от границы пространственного окна по поперечной координате R при $R_{\max}^{(n)}$, для последних Δm узлов сетки около границы вводилось искусственное поглощение в соответствии с решением:

$$C_n^m(Z + \Delta Z) = C_n^m(Z) \exp(-\alpha_n^m \Delta Z), \quad (\text{П4.5})$$

где коэффициент поглощения α_n^m равен нулю для $m < m_{\max}^{(n)} - \Delta m$ и увеличивается квадратично с ростом m для последних Δm точек: $\alpha_n^m = \alpha_* \left[1 + (m - m_{\max}^{(n)}) / \Delta m \right]^2$, $m_{\max}^{(n)} - \Delta m \leq m \leq m_{\max}^{(n)}$.

Приложение 5. Алгоритм численного моделирования аксиально-симметричных фокусированных пучков периодических волн в воде и биологической ткани (Гл. 6, 7, модифицированное уравнение ХЗК)

Алгоритм, представленный в приложении 4, далее был обобщен для моделирования ударно-волновых фокусированных полей в слабо поглощающей среде (воде) и биологической ткани. Основные изменения состояли в переходе к схеме типа Годунова для расчета нелинейного оператора, введении искусственного поглощения при образовании высокоамплитудных разрывов в фокальной области пучка для сглаживания возникающих сильных градиентов в поперечной пространственной структуре пучка и введении частотно-зависимого поглощения и дисперсии при описании фокусировки в ткани. Рассматривались различные конфигурации, характерные для полей, создаваемых источниками ультразвуковой хирургии. Уравнение ХЗК (6.1) и (7.1), модифицированное для сред с произвольным законом поглощения по частоте, записывалось в следующих безразмерных переменных:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial z} - NP \frac{\partial P}{\partial \theta} - A_b \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - A_t L(P) \right] = \frac{1}{4G} \Delta_{\perp} P, \quad (\text{П5.1})$$

граничное условие для круглого фокусирующего излучателя с равномерным распределением амплитуды задавалось в параболическом приближении на плоскости $z=0$:

$$P(z=0, R, \theta) = \begin{cases} \sin(\theta + GR^2), & R \leq 1 \\ 0, & R > 1 \end{cases}. \quad (\text{П5.2})$$

Здесь $P = p/p_0$ – акустическое давление, нормированное на исходную амплитуду p_0 на источнике; $\theta = \omega_0 \tau$ – безразмерное время; $z = x/F$ – координата вдоль оси пучка, нормированная на фокальную длину, $R = r/a_0$ – поперечная координата, нормированная на радиус излучателя. Δ_{\perp} – лапласиан по поперечным координатам, $\Delta_{\perp} = 1/r \partial/\partial r (r \partial/\partial r)$ в случае осесимметричного пучка.

Уравнение (П5.1) содержит три безразмерных параметра: $N = F/x_p$ – параметр нелинейности, $G = x_0/F$ – параметр дифракции и $A = F/x_n$ – параметр поглощения, где $x_0 = ka_0^2/2$ – характерный дифракционный масштаб задачи, $x_p = c_0^3 \rho_0 / \varepsilon p_0 \omega_0$ – характерный нелинейный масштаб, соответствующий длине образования разрыва в плоской волне, $L(P)$ – линейный оператор, учитывающий частотно зависимое

поглощение и дисперсию звука в ткани $A_b = \alpha_b F = b\omega_0^2 / 2\rho_0 c_0^3 F$ – безразмерный коэффициент поглощения линейной волны в воде. Поскольку поглощение в воде мало, при расчетах малый параметр поглощения $A_b = 5.23 \cdot 10^{-3} \ll 1$ соответствовал параметрам преобразователя, использующегося в экспериментальной части работы. В случае фокусировки в воде, $A_b \ll 1$, и величина A_b оказывает влияние лишь на тонкую структуру образующегося в профиле волны ударного фронта, и нелинейное акустическое поле определяется только двумя параметрами в уравнении (П5.1): нелинейным N и дифракционным G . Частотно зависимое поглощение в ткани $A_t = \alpha_t F$ в численной модели являлось комбинацией линейного и слабого квадратичного закона поглощения, как в воде (7.3), а дисперсия скорости звука рассчитывалась из линейного по частоте закона поглощения с помощью локальных дисперсионных соотношений типа Крамерса-Кронига (7.4).

Для расчета эффектов дифракции, нелинейности и поглощения использовался смешанный частотно-временной подход:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{4G} \Delta_{\perp} \int^{\theta} P d\theta' + NP \frac{\partial P}{\partial \theta} + A \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = L_{дифр} + L_{нелин} + L_{погл}. \quad (\text{П5.3})$$

Временная форма волны и её спектральным представление в решении были связаны между собой преобразованием Фурье:

$$P(z, \theta, R) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_n(z, R) e^{-in\theta}, \quad (\text{П5.4})$$

где C_n – комплексная амплитуда n -й гармоники в спектре распространяющейся волны. На каждом шаге интегрирования вдоль оси пучка от слоя z к слою $z+hz$ метод расщепления по физическим факторам реализовывался в три этапа. На первом этапе, как и в алгоритме для плоского излучателя (прил. 4), дифракционные эффекты рассчитывались для каждой из N_{\max} гармоник волны: $\partial C_n / \partial z = (i / 4nG) \Delta_{\perp} C_n$. В ближней зоне излучателя, где поле имеет сильно изрезанную структуру (на расстояниях $z < 0.1$), использовалась неявная схема с мелким шагом $hz1B$ [26, 326]. Далее, при $z > 0.1$ - схема Кранка-Николсона второго порядка точности с более крупным шагом $hzCN$. Полученное на новом слое $z+hz$ решение дифракционной задачи служило начальным условием (т.е. на слое z) для второго этапа – учета нелинейных эффектов. Для этого система независимых нелинейных уравнений $\partial P / \partial z = L_{нелин}$ решалась на слое $z+hz$ для каждого из узлов сетки по координате R методом Годунова второго порядка точности [102]. Полученное решение нелинейной задачи использовалось как начальное условие для третьего этапа – расчета диссипативных эффектов $\partial C_n / \partial z = L_{погл}$ на основе точного решения для амплитуд гармоник волны:

$C_n(z + hz, R) = C_n(z, R) \exp(hz \cdot iK(n))$, где $K(n) = k(n\omega_0)F = K' + iK''$ – комплексное волновое число в движущейся системе координат; K' и K'' – безразмерные действительная и мнимая части $K(n)$:

$$\begin{aligned} K''(n) &= \alpha(nf_0)F = A_r n + A_b n^2, \\ K'(n) &= n\omega_0(1/c_0 - 1/c(nf_0))F = A_r \frac{2n}{\pi} \ln(n). \end{aligned} \quad (\text{П5.6})$$

Для обеспечения устойчивости численной схемы на стадии развитых разрывов вводилась дополнительная искусственная вязкость, увеличивающаяся с расстоянием вдоль оси пучка и пропорциональная квадрату частоты, что приводило к сглаживанию ударных фронтов: $K''(n)_{\text{иск}} = T \cdot A_b n^2 \exp[-((z - F)/l)^2]$. По мере увеличения параметра нелинейности N , значение коэффициента T изменялось от $T = 0$ (режим до формирования ударных фронтов) до $T = 0.5G$ (на стадии развитых разрывов). Параметр l определяет длину фокальной области; он изменялся от $l = 0.5$ для $G = 5$ до $l = 0.1$ для $G = 60$.

При расчетах использовались следующие значения основных параметров численной схемы: количество рассчитываемых гармоник в спектре $N_{\text{max}} = 256$; количество узлов временной сетки на периоде волны – 512; область интегрирования вдоль оси пучка $0 \leq z \leq 1.5$; область интегрирования по поперечной координате $0 \leq R \leq 3$. Количество узлов сетки по R и шаги по продольной и поперечной координатам $hzCN$ и hr , связанные между собой как $hzCN \sim (hr)^2$, изменялись в зависимости от величины линейного коэффициента фокусировки системы G . Количество узлов по R варьировалось в диапазоне 1500 до 6000. Для малых значений коэффициента фокусировки $G = 10$ шаги выбирались равными $hzCN = 4 \cdot 10^{-4}$, $hr = 2 \cdot 10^{-3}$. С ростом величины параметра G шаг сетки по R уменьшался обратно пропорционально G , в соответствии с уменьшением размера фокальной перетяжки. Минимальный коэффициент поглощения A подбирался для каждого значения N таким образом, чтобы на ударном фронте волны было не менее 6 точек. С ростом параметра нелинейности N значение коэффициента поглощения A увеличивалось от $A = 0.01$ до $A = 0.2$.

Приложение 6. Алгоритм численного моделирования слабо нелинейного фокусированного ультразвукового пучка за двумерным случайным фазовым экраном (Гл. 1, уравнение Вестервельта)

Для описания нелинейных и дифракционных эффектов при фокусировке ультразвукового пучка с широким угловым спектром и прохождения его через фазовый слой использовалось уравнение Вестервельта. Здесь был сделан важный шаг перехода от параболического приближения к более точному описанию эффектов дифракции. Уравнение можно записать в сопровождающей системе координат как:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{c_0}{2} \Delta p. \quad (\text{П6.1})$$

Здесь p – акустическое давление, z – направление вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$, t – время, $\Delta p = \partial^2 p / \partial z^2 + \partial^2 p / \partial y^2 + \partial^2 p / \partial x^2$, x и y – поперечные к z пространственные координаты; ρ_0 , c_0 и β – соответственно плотность, скорость звука и коэффициент нелинейности в среде. Запись уравнения (П6.1) в сопровождающей системе координат удобна для построения численного решения с использованием метода расщепления по физическим факторам [26,25]. Нелинейные и дифракционные эффекты рассчитывались последовательно на каждом шаге сетки вдоль направления распространения волны z в спектральном представлении [180, 203], т.е. решалась система уравнений для конечного числа гармоник исходной волны с частотой f .

$$p(\tau, x, y, z) = \sum_{n=-N}^N p_n(x, y, z) \cdot \exp(-i2\pi n f \tau). \quad (\text{П6.2})$$

Нелинейные эффекты предполагались достаточно слабыми, что позволило проводить расчеты с использованием восьми гармоник, из которых анализировались первые шесть. Нелинейный оператор рассчитывался методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности для каждого из узлов сетки по поперечным пространственным координатам. Решалась система нелинейных связанных уравнений для гармоник исходной волны.

Дифракционный оператор рассчитывался для каждой из гармоник методом углового спектра [328, 234, 329]. В соответствии с этим методом, поле давления $p_n(x, y, z)$ n -ой гармоники в плоскости (x, y) на расстоянии z с помощью быстрого преобразования Фурье

(БПФ) разлагается в двумерный спектр $\hat{p}_n(k_x, k_y, z)$ по пространственным частотам (k_x, k_y) . Компоненты углового спектра на следующем шаге $\hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z)$

$$\hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = \hat{p}_n(k_x, k_y, z) \cdot H(k_x, k_y, \Delta z), \quad (\text{П6.3})$$

получались путем умножения на соответствующий фазовый множитель,

$$H(k_x, k_y, \Delta z) = \exp[i\Delta z \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}], \quad (\text{П6.4})$$

который также называют передаточной функцией или пропагатором для данной компоненты углового спектра [329]. Обратное БПФ давало искомое поле $p_n(x, y, z + \Delta z)$.

При достижении фазового слоя поле каждой гармоники умножалось на фазовый множитель, задаваемый фазовым слоем: $p_n^{scr}(x, y, z) = p_n(x, y, z) \exp[in\varphi(x, y)]$, где $\varphi(x, y)$ – функция, описывающая вариации фазы в слое на основной частоте.

При использовании метода углового спектра, размер области L определяет конечный шаг дискретизации в пространстве частот $\Delta k = 2\pi/L$. Заметим, что передаточный множитель (П2.4) зависит от пространственных частот k_x и k_y осциллирующим образом, причём при $k_x^2 + k_y^2 \rightarrow k_0^2$ частота указанных осцилляций стремится к бесконечности, т.е. при дискретизации с конечным шагом $\Delta k = 2\pi/L$ описание неизбежно становится неточным. Эта проблема решается путем обнуления передаточной функции, начиная с частот, которые не могут быть адекватно представлены отсчетами с шагом Δk [328, 330]. При этом несколько понижается точность расчета дифракционного оператора, поскольку учитываются не все плоские волны с волновыми векторами, образующими угол с осью z в интервале от -90° до $+90^\circ$, а только их часть из этого диапазона. Тем не менее, во многих практически важных случаях такое приближение оказывается достаточно точным [330]. В расчетах размеры пространственных областей представления поля по координатам x и y были равны $L_x = L_y = 143.4$ мм. Обнуление передаточной функции при таких параметрах дает максимальный угол дифракции 36° при $z = 72$ мм (фокусное расстояние). Проверка точности алгоритма проводилась сравнением рассчитанного поля с аналитическим решением для линейного поля круглого фокусирующего поршневого излучателя. Относительная ошибка составила не более 1%. Шаги по пространственным координатам были равны $dx = dy = 0.14$ мм (1024 на 1024 точек), $dz = 0.5$ мм.

Приложение 7. Алгоритм численного моделирования трехмерных полей мощных многоэлементных фокусированных решеток с учетом образования разрывов (Гл. 6, 7, уравнение Вестервельта)

Основой для моделирования нелинейных полей излучателей терапевтического ультразвука трехмерной геометрии послужил представленный в приложении 6 алгоритм, описывающий слабонелинейные фокусированные пучки. Рассматриваемая здесь задача являлась гораздо более сложной с точки зрения численных расчетов. Необходимо было учесть возможность образования ударных фронтов, т.е. включать в расчеты большое число гармоник, и сильную фокусировку пучка, т.е. проводить расчеты на мелкой пространственной сетке. В самой общей постановке для решения такой задачи требовались существенные затраты памяти и машинного времени, превышающие возможности современных SMP-компьютеров, т.е. компьютеров с общей памятью. Поэтому были сделаны существенные изменения в алгоритме, позволяющие уменьшить размеры массивов и повысить эффективность вычислений. Отметим здесь основные особенности проведенной модификации алгоритма: переход к схеме Годунова при достаточном искажении профиля волны, использование переменного числа гармоник, искусственное поглощение вблизи границ пространственного окна и в области разрывов, распараллеливание программы. Более детальное описание приводится в работе [331].

Численное решение уравнения (П6.1) строилось последовательно, переходя от плоскости $(x, y, z = z_1)$ к плоскости $(x, y, z = z_1 + \Delta z)$ с шагом Δz , следуя методу расщепления по физическим факторам [9, 10, 13, 14, 18, 19]. Уравнение (1) разбивалось на более простые уравнения для дифракции:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \Delta p, \quad (\text{П7.1})$$

нелинейности:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau}, \quad (\text{П7.2})$$

и поглощения:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (\text{П7.3})$$

При известном распределении давления в плоскости $(x, y, z = z_1)$, комбинируя определенным образом решения этих уравнений последовательно друг за другом, можно получить решение уравнения (1) в плоскости $(x, y, z = z_1 + \Delta z)$ со вторым порядком

точности, т.е. ошибкой аппроксимации на каждом шаге $O(\Delta z^3)$, а на всем интервале расчета по координате z - $O(\Delta z^2)$ [36, 234, 233]. В данной работе метод расщепления применялся в том варианте, когда каждый шаг по координате z начинается и завершается оператором дифракции, рассчитываемым на половинном шаге сетки. Если обозначить действие оператора дифракции на шаге Δz как $\Gamma_{D, \Delta z}$, а совместное действие операторов нелинейности и поглощения как $\Gamma_{N+A, \Delta z}$, то схема применения метода расщепления выглядит следующим образом:

$$p(\tau, x, y, z + \Delta z) = \Gamma_{D, \Delta z/2} \Gamma_{N+A, \Delta z} \Gamma_{D, \Delta z/2} p(\tau, x, y, z). \quad (\text{П7.4})$$

По мере изменения расстояния z и увеличения амплитуды высокочастотных компонент спектра волны величина шага Δz изменялась с целью обеспечения необходимой точности решения.

Моделирование проводилось с использованием преимуществ как спектрального, так и временного представлений акустического поля. Для перехода к спектру, решение уравнения (1) представлялось в виде разложения решения в конечный ряд Фурье (П6.2) и дифракционный оператор (П7.1) рассчитывался для амплитуд каждой из гармоник методом углового спектра, как и для слабонелинейного пучка (прил. 6) [233, 234, 72, 328]. Для подавления отраженных волн, появление которых связано с использованием конечной пространственной области для поля $p_n(x, y, z)$ и периодическими граничными условиями по координатам x и y , использовался метод обнуления компонент спектра на пространственных частотах вне круга радиуса k_{\max} , т.е. в области $k_x^2 + k_y^2 > k_{\max}^2$ [18]. Радиус круга для каждой из гармоник определялся соотношением $k_{\max} = k_n / \sqrt{z_{prop}^2 \Delta k^2 / \pi^2 + 1}$, где $\Delta k = \sqrt{2} 2\pi / L$ - шаг по пространственной частоте в случае квадратной области с размером L , z_{prop} - пройденное расстояние, различающееся для каждой гармоники, что связано с их постепенным введением в расчет. Кроме этого, на слое вблизи границ области вводилось дополнительное искусственное квадратичное по частоте поглощение. Коэффициент поглощения ν на основной частоте увеличивался по закону $\nu = \nu_0 [(x_1 - x) / \Delta x]^2$, где x_1 - координата начала слоя, Δx - ширина слоя, ν_0 - максимальное поглощение на границе. Типичные значения параметров слоя: $\nu_0 = 1.6 \text{ мм}^{-1}$, $\Delta x = 10 \text{ мм}$. Отметим также, что методом углового спектра можно было также рассчитывать дифракционные эффекты и в параболическом приближении, заменив соответствующим образом фазовый множитель:

$$\hat{p}_n(k_x, k_y, z + \Delta z) = \hat{p}_n(k_x, k_y, z) \cdot \exp[-i\Delta z(k_x^2 + k_y^2)/(2k_n)]. \quad (\text{П7.5})$$

Расчет нелинейного оператора (П7.2) проводился с использованием двух алгоритмов. На малых расстояниях от излучателя интегрирование проводилось в частотном представлении методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Этот алгоритм достаточно эффективен при небольшом (до нескольких десятков) количестве гармоник, поскольку количество операций для его применения пропорционально квадрату числа гармоник N_{max} . Для уменьшения времени расчетов, гармоники включались в алгоритм постепенно, по мере расширения спектра волны с увеличением пройденного расстояния z . Когда крутизна профиля волны превышала величину, соответствующую безразмерному расстоянию 0.1, измеряемому в длинах образования разрыва в плоской волне, происходил переход к использованию консервативной схемы типа Годунова. Эта схема позволяет описывать эволюцию разрывных возмущений во временном представлении, имея всего 2-3 узла сетки на ударном фронте [102,101]. При этом шаг по нелинейности и поглощению в формуле (6) дополнительно дробился для повышения точности расчетов [234]. Оператор поглощения рассчитывался в спектральном представлении, используя точное решение для каждой из гармоник: $p_n(x, y, z + \Delta z) = p_n(x, y, z) \exp(-\Delta z \omega_n^2 \delta / 2c_0^3)$, где $\omega_n = n\omega$ – круговая частота n -ой гармоники.

Переход между спектральным и временным представлениями решения (7) осуществлялся при помощи процедур БПФ, реализованных в библиотеке FFTW. Расчет БПФ производился небольшими блоками, т.е. сразу для некоторого небольшого числа профилей (несколько сотен), взятых для соседних точек вдоль оси x . Такой прием позволил существенно повысить эффективность расчета по сравнению с режимом, когда вычисляются одиночные БПФ для каждой пространственной точки.

Численное моделирование трехмерных нелинейных акустических полей при помощи описанных выше численных методов предъявляет высокие требования к вычислительной мощности компьютера и объему оперативной памяти. Эти требования особенно повышаются при образовании в акустическом поле ударных фронтов, поскольку в этом случае необходимо высокое разрешение численной сетки как по временной, так и по пространственной координатам [10, 13]. Массивы данных становятся слишком большими, и задача не может быть решена на доступных SMP-компьютерах, объем памяти которых сейчас, как правило, не превышает 32 Гб. При расчетной области для поля решетки по поперечным координатам 25 x 25 см, размере шагов сетки $dx = dy = 0.05$ мм, учете 500 гармоник и одинарной точности представления вещественных чисел, объем массивов для

описания поля давления составляет около 90 Гб. Такие размеры массивов не являются проблемой для кластерных систем, однако разработка параллельного алгоритма для кластера является гораздо более сложной, чем для SMP-компьютера. Для решения данной задачи алгоритм был оптимизирован таким образом, чтобы его можно было использовать для расчета на многопроцессорных машинах с общей памятью объемом несколько десятков Гб.

Возможность оптимизации заключалась в том, что нелинейные эффекты в сильно фокусированных полях систем ультразвуковой хирургии значительны только вблизи фокальной области, где необходимо учитывать в расчетах большое число гармоник, при этом используя гораздо меньшее число гармоник вне области фокуса как вдоль, так и поперек оси пучка. Аналогичный подход описан в приложении 4 при моделировании нелинейных эффектов в ближнем поле аксиально-симметричного излучателя [180]. На рис. 2 схематично показан способ размещения различного числа гармоник в случае трех областей, обозначенных на рисунке различными номерами. Гармоники, начиная с 1-ой по n_1 , хранятся в области №1 размером L_1 , с $n_1 + 1$ по n_2 - в области №2 размером L_2 и т.д. Конкретное количество гармоник подбиралось индивидуально для каждого расчетного случая.

При образовании ударных фронтов в профиле волны появляются сильные поперечные пространственные градиенты поля, которые могут приводить к осцилляциям в получаемых решениях. Для устранения осцилляций использовался метод введения искусственного поглощения, которое было локализовано вблизи фокуса [10]. Для коэффициента поглощения была выбрана следующая зависимость от координаты вдоль оси:

$$\alpha = a_1 + 0.5(A - 1) \left[\operatorname{th} \left(\frac{z - z_1}{\Delta z_1} \right) - a_2 \operatorname{th} \left(\frac{z - z_2}{\Delta z_2} \right) \right]. \quad (11)$$

Здесь параметр A определяет увеличение коэффициента поглощения вблизи фокуса по сравнению с коэффициентом поглощения в воде. Коэффициенты $a_1 = (1 + B)/2$ и $a_2 = 1 + (1 - B)(A - 1)$ выражаются через параметр B , который служит для того, чтобы задавать увеличение коэффициента поглощения после фокуса. Геометрические параметры z_1 и z_2 служат для задания размеров области увеличенного поглощения, а Δz_1 и Δz_2 - для задания ширины областей перехода к установленным уровням коэффициента поглощения A и B .

Подбирая конфигурацию областей с различным числом гармоник и параметры искусственного поглощения, удалось достигнуть минимальных поперечных шагов

$dx = dy = 0.025$ мм при максимальном количестве гармоник в центральной области $N_{max} = 500$. Численный алгоритм был реализован на языке FORTRAN 95 в расчете на параллельные вычисления. В дифракционном алгоритме для двумерных БПФ использовался внутренний параллелизм библиотеки FFTW. Остальные алгоритмы были распараллелены при помощи технологии OpenMP. Расчеты проводились в рамках одного узла суперкомпьютера СКИФ МГУ «Чебышев», содержащего 8 процессорных ядер (2 четырехядерных процессора) и 8 - 32 Гб оперативной памяти. При этом было достигнуто общее ускорение в 6 раз по сравнению с последовательным выполнением кода.

Моделирование в линейном случае и для $I_0 = 1$ Вт/см² проводилось на сетке по пространственным поперечным координатам с шагами $dx = dy = 0.05$ мм и числом точек $N_x = N_y = 5000$. Для остальных случаев использовалась сетка с шагами $dx = dy = 0.025$ мм и числом точек $N_x = N_y = 10000$. Расчет поля решетки проводился от начальной плоскости $z_0 = 0$ мм до расстояния $z = 1.3F = 156$ мм. Шаг Δz вдоль оси решетки был равен 0.1875 мм в сегменте от начальной плоскости до $z = 0.8F$, 0.125 мм - в сегменте $[0.8F \ 0.9F]$, 0.0625 мм - в $[0.9F \ 1.1F]$ и 0.125 мм - в $[1.1F \ 1.3F]$. Количество дроблений шага для операторов нелинейности и поглощения увеличивалось от 1 в первом сегменте до 6 в области вокруг фокуса $[0.9F \ 1.1F]$.

Величина параметра искусственного поглощения A в формуле (11) была равна 2.5, 5, 20 и 40 для интенсивностей 2, 2.5, 5 и 10 Вт/см², соответственно, что обеспечивало около 7 точек на разрыв. Значения геометрических параметров в формуле (11) находились вблизи $0.96F$ и $1.03F$ для z_1 и z_2 , и $0.01F$ для Δz_1 и Δz_2 . Время расчетов для указанных выше параметров сетки при слабом проявлении нелинейных эффектов составляло несколько часов, в режиме развитых разрывов – до полутора суток.

Точность получаемых численных решений с использованием нового алгоритма проверялась путем сравнения результатов расчетов с известными аналитическими решениями либо с численными расчетами, выполненными другими методами. Для каждого из операторов (3-5), описывающих тот или иной физический эффект, результаты сравнивались с существующими аналитическими решениями. Комплексная проверка алгоритма, ввиду отсутствия общего аналитического решения, проводилась путем сравнения с известными результатами моделирования нелинейных полей аксиально-симметричных излучателей в параболическом приближении, выполненных в других работах [203, 241]. Подробное описание тестовых расчетов, показавших соответствие результатов известным решениям можно найти в работе [331].

Литература*

- 1 Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
- 2 Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
- 3 Nonlinear Acoustics. Ed. by M. Hamilton and D. Blackstock, London: Academic, 1998.
- 4 Pierce A.D. Acoustics: an introduction to its physical principles and applications. NY: Melville, 1989, p. 678.
- 5 Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
- 6 Ультразвук в медицине. Физические основы применения. Под ред. К. Хилла, Дж. Бэмбера, Г. тер Хаар. Пер. с англ. под ред. Л.Р. Гаврилова, В.А. Хохловой, О.А. Сапожникова. М.: Физматлит, 2008, 544 с.
- 7 Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере, М: Наука, 1967, 548 с.
- 8 Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. с.264.
- 9 Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Каргл С.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань. Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 4, с. 437-464.
- 10 Осипов Л.В. Ультразвуковые диагностические приборы: Практическое руководство для пользователей. М.: Видар, 1999, 256 с.
- 11 Kremkau F.W. Diagnostic ultrasound: principles and instruments. New York: Saunders, 2005, 544 p.
- 12 Преображенский В.Л. Волны с параметрически обращенным фронтом: применение в нелинейной акустоскопии и диагностике. УФН, 2006, т.176(1), с. 108–112.
- 13 Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики. УФН, 2006, т.176(1), с. 77–95.
- 14 Руденко О.В. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения. УФН, 2007, т. 177(4), с. 374–383.
- 15 Duck F. Physical properties of tissue: A comprehensive reference book. London: Academic Press, 1990, 346 p.
- 16 Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981, 220 с.
- 17 Ostashev V.E. Acoustic in moving inhomogeneous media. London: E&Fn Spon, 1997, 259 p.
- 18 Красильников В.А. Линейное и нелинейное распространение звука в турбулентной и неоднородной среде. Акуст. журн. 1998, т. 44, №4, с. 559-569.
- 19 Plotkin K.J. State of the art of sonic boom modeling. J. Acoust. Soc. Am. 2002, v. 111(1), Pt. 2, p. 530-536.

* Порядковые номера, соответствующие публикациям автора, подчёркнуты

- 20 Pierce A.D. Nonlinear acoustics research topics stimulated by the sonic boom problem. In: *Advances in Nonlinear Acoustics*, 13th ISNA Proc., 1993, p. 7-20.
- 21 Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- 22 Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения // Таллинн: Валгус, 1984 г.
- 23 Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны. *Успехи физ. наук*, 1995, т.165, N9, с. 1011-1036.
- 24 Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
- 25 Годунов Н.С., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.:Наука, 1977.
- 26 Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., and Flannery B.P. *Numerical Recipes in FORTRAN* (Cambridge University Press, New York, 1992), 2nd ed.
- 27 Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред. *Акуст. журн.*, 1994, т. 40, №2, с. 290-294.
- 28 Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. *Акуст. журн.*, 1969, т. 15, №1, с. 40-47.
- 29 Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики. *Акуст. журн.*, 1971, т. 16, с. 467-470.
- 30 Westervelt P. Parametric acoustic array. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1963, v. 35(4), p. 535–537.
- 31 Руденко О.В. К проблеме искусственных нелинейных сред с резонансным поглотителем. *Акуст. журн.*, 1983, т. 29, № 3, с. 398-402.
- 32 Lipkens B. Experimental and theoretical study of the propagation of *N*-waves through a turbulent medium, Ph.D. Thesis, Mech. Eng. Dept., The Univ. of Texas at Austin, 1993.
- 33 Cai W., Gottlieb D., Shu C.W. Essentially nonoscillatory spectral Fourier methods for shock wave calculations. *Math. Comp.*, 1989, v. 52, p. 389-410.
- 34 Gusev V., Bailliet H., Lotton P., Bruneau M. Asymptotic theory of nonlinear acoustic waves in a thermoacoustic prime-mover. *Acustica. Acta Acustica*, 1999, v. 85, p. 1–14.
- 35 Nachef S., Cathignol D., Tjotta J.N., Berg A.M., Tjotta S. Investigation of a high intensity sound beam from a plane transducer. Experimental and theoretical results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, v. 98, p. 2303-2323.
- 36 Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O.A. Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, v. 104, p. 2061-2072.
- 37 Lee Y.S. and Hamilton M.F. Time-domain modeling of pulsed finite amplitude sound beams. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1995, v. 97(2), p. 906-917.
- 38 Averkiou M.A., and Hamilton M.F. Nonlinear distortion of short pulses radiated by plane and focused circular pistons. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1997, v. 102(5), p. 2539-2548.
- 39 Sokka S.D., King R., and Hynynen K. MRI-guided gas bubble enhanced ultrasound heating in in vivo rabbit thigh. *Phys. Med. Biol.*, 2003, v. 48, pp. 223–241.
- 40 Руденко О.В. Взаимодействия интенсивных шумовых волн. *УФН*, 1986, т. 149. №3, с. 413-447.
- 41 Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990.

- 42 Руденко О.В., Хохлова В.А. Кинетика одномерных пилообразных волн. Акуст. журн., 1991, т. 37, №1, с. 182-188.
- 43 Руденко О.В., Чиркин А.С. О статистике шумовых разрывных волн в нелинейных средах. ДАН СССР, 1975, т. 255, с. 520-524.
- 44 Иванчик И.М., Хохлова В.А. Нелинейная трансформация двухточечных функций распределения случайных акустических волн. Акуст. журн., 1991, т. 37, №4, с. 709-716.
- 45 Руденко О.В., Хохлова В.А. О нелинейных и дифракционных эффектах в звуковых пучках со случайной поперечной структурой. Акуст. журн., 1987, т. 33, №2, с. 335-341.
- 46 Plotkin K.J. Review of sonic boom theory. Proc. of the AIAA 12th Aeroacoustics Conf. New-York, 1989.
- 47 Chaussi Ch. Extracorporal Shock Wave Lithotripsy. Munich: Karger, 1986.
- 48 Lingeman J.E., McAteer J.A., Gnessin E., Evan A.P. Shock wave lithotripsy: advances in technology and technique. Nature Reviews Urology, 2009, №6, p. 660-670.
- 49 Averkiou M.A., Roundhill D.N., Powers J.E. A new imaging technique based on the nonlinear properties of tissues. IEEE Ultrasonics Symposium, 1997, v.2, p. 1561-1566.
- 50 Jing Y., Cleveland R.O. Modeling the propagation of nonlinear three-dimensional acoustic beams in inhomogeneous media. J. Acoust. Soc. Amer., 2007, v. 122, № 3, p. 1352-1364.
- 51 Pierce A.D., Maglieri D.J. Effects of atmospheric irregularities on sonic boom propagation. J. Acoust. Soc. Am., 1972, v.51, p. 702-721.
- 52 Грачев В.С., Завершнеv Ю.А., Иванов В.Н., Миронов А.Д., Роднов А.Д., Холодков В.А. Экспериментальные исследования влияния турбулентности атмосферы и облачности на звуковой удар. Труды ЦАГИ. 1973, вып. 1489, с. 51-74.
- 53 Жилин Ю.Л., Лавров Ю.В. Предварительные результаты статистической обработки натуральных измерений звукового удара. Труды ЦАГИ. 1973, вып. 1489, с. 75-81.
- 54 Amin V., Roberts R., Long T., Thompson R.B. A study of effects of tissue inhomogeneity on HIFU beam. Therapeutic Ultrasound: 5th International Symposium on Therapeutic Ultrasound. 2006, AIP Conference Proceedings, v. 829, p. 201-205.
- 55 Bilgen M., Insana M.F. Effects of phase aberration on tissue heat generation and temperature elevation using therapeutic ultrasound. IEEE UFFC, 1996, v. 43(6), p. 999-1010.
- 56 Tabei M., Mast T.D., Waag R.C. Simulation of ultrasonic focus aberration and correction through human tissue. J. Acoust. Soc. Am., 2003, v. 113, № 2, p. 1166-1176.
- 57 Christopher P.T. Finite amplitude distortion-based inhomogeneous pulse echo ultrasonic imaging. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1997, v. 44, p. 125-139.
- 58 Brysev A.P., Bunkin F.V., Krutyansky L.M., Klopotov R.V. Acoustic imaging of object in phase inhomogeneous medium using phase conjugation of higher harmonic of ultrasound beam. Phys. Wave Phenomena, 2005, v.13, № 2, p. 81-86.
- 59 Андреев В.Г., Васильева О.А., Руденко О.В., Лапшин Е.А. Процессы генерации второй гармоники и вынужденного параметрического усиления в среде с селективным поглощением. Акуст. журн., 1985, т.31, № 1, с. 12-16.
- 60 Khokhlova V.A., Kashcheeva S.S., Averkiou M.A., Crum L.A. Effect of selective absorption on nonlinear interactions in high intensity acoustic beams. In: "Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millennium". Proc. 15th Int. Symp. on Nonlinear Acoustics,

- Goettingen, Germany, 1999, ed. W. Lauterborn and T. Kurz, Am. Inst. of Phys., 2000, p. 151-154.
- 61 Couture O., Aubry J-F., Montaldo G., Tanter, M. Fink M. Suppression of tissue harmonics for pulse-inversion contrast imaging using time reversal. *Phys. Med. Biol.*, 2008, v. 53, p. 5469–5480.
- 62 Sarvazyan A., Rudenko O., Swanson S., Fowlkes J., Emelianov S. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Med.&Biol.*, 1998, v. 24, № 9, p. 1419–1435.
- 63 Uscinski B.J. The elements of wave propagation in random media. 1977. New-York: McGraw-Hill, p. 153.
- 64 Martin J.M., Flatté S.M. Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media. *Applied optics*, 1988, v. 27, № 11, pp. 2111-2126.
- 65 Vorontsov A.M., Paramonov P.V., Valley M.T., Vorontsov M.A. Generation of infinitely long phase screens for modeling of optical wave propagation in atmospheric turbulence. *Waves in Random and Complex Media*, 2008, v. 18, № 1, pp. 91–108.
- 66 Шленов С.А., Кандидов В.П. Формирование пучка филаментов при распространении фемтосекундного лазерного импульса в турбулентной атмосфере. Часть 1. Метод. *Оптика атмосферы и океана*, 2004, т. 17, № 8, с. 565-571.
- 67 Rudenko O.V., Khokhlova V.A. Statistical properties of spatially modulated nonlinear acoustical waves. In: *Advances in Nonlinear Acoustics (Proc. 13th Int. Symposium on Nonlinear Acoustics, Bergen, Norway)*, World Scientific Publisher, 1993, p. 196-201.
- 68 Руденко О.В., Хохлова В.А. Статистика пилообразных акустических волн со случайной пространственной модуляцией. *Акуст. журн.*, 1994, т.40, №1, с. 126-130.
- 69 Dubrovskii A.N., Khokhlova V.A., Rudenko O.V. Propagation of nonlinear acoustic waves and pulses through thin inhomogeneous layer. In: *Ultrasonics World Congress 1995 Proc. (Berlin, Germany)*, p. 175-178.
- 70 Дубровский А.Н., О.В.Руденко, В.А.Хохлова. Флуктуационные характеристики волны звукового удара после прохождения случайно-неоднородного слоя. *Акуст. журн.*, 1996, т.42, №5, с. 623-628.
- 71 Юлдашев П.В., Брысева Н.А., Аверьянов М.В., Блан-Бенон Ф., Хохлова В.А. Статистические свойства нелинейной N -волны при дифракции за случайным фазовым экраном. *Акуст. журн.*, 2010, т. 56, №2, с. 179–189.
- 72 Юлдашев П.В., Крутянский Л.М., Хохлова В.А., Брысев А.П., Бункин Ф.В. Искажение поля сфокусированного ультразвукового пучка конечной амплитуды за случайным фазовым слоем. *Акуст. журн.*, 2010, т. 56, №4, с. 463–471.
- 73 Руденко О.В., Сухорукова А.К. Нелинейные пилообразные волны в неоднородной среде. *Акуст. журн.*, 1991, т. 37. №4, с. 753-759.
- 74 Lipkens B., Blackstock D. Further report on the propagation of spark produced N -waves through turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, v. 92, № 4(2), p. 2330.
- 75 Lee R.A., Downing J.M. Sonic boom produced by US Air Force and US NAVY aircraft: measured data. Armstrong Lab., Wright - Patterson Air Force Base, Ohio. Rep. AL-TR-1991-0099 (1991).
- 76 Willshire W.J., Devilbiss D.W. Preliminary results from the White Sands Missile Range sonic boom experiment. *Proc. High-Speed Rec. Workshop on SB, NASA langley Research Center*, v.1, pp. 137-149 (1992).

- 77 Lipkens B., Blackstock D.T. Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. Part 1: General results. *J. Acoust. Soc. America*, 1998, v. 103(1), p.148-158.
- 78 Tjøtta J.N., Tjøtta S., Vefring E.H. Effects of focusing on the nonlinear interaction between two collinear finite amplitude sound beam. *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. v. 89(3), p. 1017-1027.
- 79 Брысев А.П., Бункин Ф.В., Клопотов Р.В., Крутянский Л.М., Преображенский В.Л. Фокусировка нелинейной ультразвуковой волны с обращенным фронтом, прошедшей через фазово-неоднородный слой. *Письма в ЖЭТФ*, 2001, т. 73, в. 8, с. 434-437.
- 80 Yan X., Hamilton M.F. Angular spectrum decomposition analysis of second harmonic ultrasound propagation and its relation to tissue harmonic imaging. 4th Int. Workshop on Ultrasonic and Advanced Methods for Nondestructive Testing and Material Characterization, 2006, UMass Dartmouth, MA, Proc. published in www.ndt.net.
- 81 Сапожников О.А., Пищальников Ю.А., Морозов А.В. Восстановление распределения нормальной скорости на поверхности ультразвукового излучателя на основе измерения акустического давления вдоль контрольной поверхности. *Акуст. ж.*, 2003, т.49, №3, с.416-424.
- 82 Гаврилов Л.Р., Хэнд Дж. Двумерные фазированные решетки для применения в хирургии: сканирование одиночного фокуса. *Акуст. журн.*, 2000, т.46, № 4, с. 456-466.
- 83 Selfridge A.R.. Approximate material properties in isotropic materials. *IEEE transactions on sonics and ultrasonics*, 1985, V. SU-32, № 3, P. 381-394.
- 84 Rudenko O.V., Enflo B.O. Nonlinear *N*-wave propagation through a one-dimensional phase screen. *Acta Acustica united with Acustica*, 2000, v. 86, № 2, p. 229-238.
- 85 Гусев В.А., Руденко О.В. Статистические характеристики интенсивной волны за двумерным фазовым экраном. *Акуст. журн.*, 2006, т. 52, № 1, с. 24-35.
- 86 Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Полные решения уравнения геометрической акустики в движущихся стратифицированных средах. *Акуст. журн.*, 1997, т. 43. с. 396 – 401.
- 87 Ostashev V.E., Juve D., Blanc-Benon Ph. Derivation of a wide-angle parabolic equation for sound waves in inhomogeneous moving media. *Acta Acustica united with Acustica*, 1997, v. 83(3), p. 455-460.
- 88 Dallois L., Blanc-Benon Ph., Juvé D. A wide angle parabolic equation for acoustic waves in inhomogeneous moving media: applications to atmospheric sound propagation. *J. Comp. Acoustic*. 2001. v. 9(2), p. 477-494.
- 89 Годин О.А. Широкоугольное параболическое приближение в трехмерно-неоднородной движущейся среде. *Доклады РАН*, 2002, т. 47(9), с. 643-646.
- 90 Blanc-Benon Ph., Lipkens B., Dallois L., Hamilton M.F., Blackstock D.T. Propagation of finite amplitude sound through turbulence: modelling with geometrical acoustics and the parabolic approximation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002, v. 111(2). p. 487-498.
- 91 McDonald B.E., Kuperman W.A. Time domain formulation for pulse propagation including nonlinear behaviour at a caustic. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987, v. 81(5), p. 1406-1417.
- 92 Lipkens B., Blackstock D.T. Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. Part II: Effects of turbulent intensity and propagation distance through turbulence, *J. Acoust. Soc. Am.* 1998, 104(3), 1301-1309.

- 93 Lipkens B., Blackstock D.T. Model experiment to study sonic boom propagation through turbulence. Part III: Validation of sonic boom propagation models, *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002, v. 111(1), p. 509-519.
- 94 Аверьянов М.В., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Блан-Бенон Ф., Кливлэнд Р.О. Параболическое уравнение для описания распространения нелинейных акустических волн в неоднородных движущихся средах. *Акуст. журн.*, 2006, т. 52(6), с. 725-735.
- 95 Юлдашев П.В., Аверьянов М.В., Хохлова В.А., Оливьер С., Блан-Бенон Ф. Сферически расходящиеся ударные импульсы в нелинейной релаксирующей среде. *Акуст. журн.*, 2008, том 54, №1, с. 40-50.
- 96 Averianov M.V., Blanc-Benon Ph., Cleveland R.O., Khokhlova V.A. Nonlinear and diffraction effects in propagation of *N*-waves in randomly inhomogeneous moving media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, v. 129(4), p. 1760-1772.
- 97 Аверьянов М.В., Хохлова В.А., Блан-Бенон Ф., Оливьер С. Экспериментальная модель распространения акустических *N*-волн в турбулентной атмосфере. Сб. трудов семинара научной школы профессора С.А. Рыбака «Акустика неоднородных сред», Москва 2008, с. 168 – 177.
- 98 Averianov M.V., Ollivier S., Khokhlova V.A., Blanc-Benon Ph. Nonlinear acoustic *N*-wave random focusing in fully developed turbulence: laboratory scale experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, v.130(6), pp. 3595-3607.
- 99 Averianov M.V., Ollivier S., Khokhlova V.A., Blanc-Benon Ph. Statistics of high amplitude acoustic pulses propagating in turbulent air flow. In: Proc. of the Trilateral Russian-French-German Workshop “Computational Experiment in Aeroacoustics”, 22-25 September 2010, Svetlogorsk, Russia, p. 5-9.
- 100 Cleveland R.O., Hamilton M.F., Blackstock D.T. Time-domain modeling of finite-amplitude sound in relaxing fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996, v. 99, p. 3312-3318.
- 101 Аверьянов М.В. Экспериментальная и численная модель распространения нелинейных акустических сигналов в турбулентной атмосфере. Дисс. к.ф.-м.н., Москва, 2008.
- 102 Kurganov A.R., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. Comp. Phys.*, 2000, v. 160, p. 241-282.
- 103 Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В., К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде. *Акуст. журн.* 1962, т. 8(1), с. 107-113.
- 104 Wright W.M. Propagation in air of *N*-waves produced by sparks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1983, v. 73(6), p. 1948-1955.
- 105 Ollivier S., Blanc-Benon Ph. Model experiment to study acoustic *N*-wave propagation through turbulence. AIAA-2004-2921, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Manchester, United Kingdom, May 10-12, 2004.
- 106 Barrera-Figueroa S., Rasmussen K. On experimental determination of the random-index response of microphones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, v. 121(5), p. 2628-2637.
- 107 Andreev V.G., Rudenko O.V., Sapozhnikov O.A., Nonlinear effects in the 10 MPa acoustic pulses propagating in water, Proc. of 12th ISNA 1990, Elsevier Science Publishers Ltd., London.
- 108 Андреев В.Г., Карабутов А.А., Руденко О.В. Метод калибровки широкополосных гидрофонов в ультразвуковых пучках конечной амплитуды, *Вестник Моск. ун-та. сер.3, физ. астр.*, 1984, т.25, №4, с.74-77.

- 109 Романенко Е.В. Приемники звука и методы их градуировки. В кн.: Физика и техника мощного ультразвука. Под редакцией Розенберга Л.Д., М.: Наука, 1967, с. 327-377.
- 110 Godin O.A. An effective quiescent medium for sound propagating through an inhomogeneous moving fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002, v. 112(4), p. 1269-1275.
- 111 Годин О.А. Волновое уравнение для звука в среде с медленными течениями. ДАН, 1986, т. 293(1), с. 63-67
- 112 Cleveland R.O., Chambers J.P., Raspet R., Bass H. E., Hamilton M. F., Blackstock D.T. Comparison of computer codes for the propagation of sonic boom waveforms through isothermal atmospheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1996, v. 100, p. 3017-3027.
- 113 Elmer K.R., Joshi M.C., Variability of measured sonic boom signatures, volume 1 – technical report, 1994, contract NAS1-19060 (e-version).
- 114 Haering E.A., Ehernberger, L.J., Whitmore S.A. Preliminary Airborne Measurements for the SR-71 Sonic Boom Propagation Experiment, NASA TM-104307, 1995 (e-version).
- 115 Hilton D.A., Hubbard H.H., Huckel V., Maglieri D.J. Ground measurements of sonic-boom pressures for the altitude range of 10,000 to 75,000 feet, NASA-TR-R-198, 1964 (e-version).
- 116 Blanc-Benon Ph., Juvé D., Comte-Bellot G. Occurrence of caustics for high frequency acoustic waves propagating through turbulent fields. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 1991, 2, 271-278.
- 117 Karweit M., Blanc-Benon Ph., Juvé D., Comte-Bellot G. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v. 81(1), p. 52-62.
- 118 Wert K., Blanc-Benon Ph., Juve D. Effect of turbulence scale resolution on numerical simulation of atmospheric sound propagation, AIAA/CEAS 1998, Paper N° 98-2245, 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Toulouse.
- 119 Gutmark E., Wygnanski I. The planar turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 1976, v. 73 (3), p. 465-495.
- 120 Монин А.С., Яглом А.М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Москва: Наука, 1967. Том 2.
- 121 Годунов С.К. Разностный метод расчета ударных волн. УФН, 1957, №12, вып.1, с. 176-177.
- 122 Pectorius F.M., Blackstock D.T. A computer algorithm for predicting propagation of intensive acoustic signals of arbitrary wave form. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1973, v.53, p. 383.
- 123 Dubrovsky A.N., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A. Nonlinear and diffraction effects in a beam of weak shocks, In: Proc. of 13-th ISNA, Bergen 1993, p.227-232.
- 124 Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.:Наука, 1981.
- 125 Годунов С.К. Математический сборник, 1959, т.47(89), в.3, с.271.
- 126 Hamilton M.F., Tjotta J.N., Tjotta S. Nonlinear effects in the farfield of a directive sound source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1985, v.78, p. 202-216.
- 127 Christopher P.T., Parker K.J. New approaches to nonlinear diffractive field propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v. 90, p.488–499.
- 128 Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A. Modification of the spectral method for describing nonlinear acoustic waves containing shocks. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, v. 96, №11(2), p. 105 (128th Meeting: Acoustical Society of America).

- 129 Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами. Акуст. журн., 1996, т.42, №3, с. 412-417.
- 130 Славнов А.А., Хохлова В.А. Численное моделирование нелинейных волн с особенностями типа «разрыв» и «разрыв производной». Вестн. Моск. ун-та. Сер.3. Физика. Астрономия, 2000, №1, с. 28-31.
- 131 Славнов А.А., Хохлова В.А. Асимптотический спектральный метод моделирования нелинейных волн с несколькими взаимодействующими разрывами. Труды X Сессии Российского Акустического Общества, 2000, с. 183-186.
- 132 Кашеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты. Акуст. журн., 2000, т.46, №2, с. 211-219.
- 133 Кашеева С.С., Хохлова В.А. Нелинейная эволюция импульса с ударным фронтом в среде со степенным частотным законом поглощения. Изв. Акад. Наук, сер. физ., 1998, т.62, №12, с. 2375-2378.
- 134 Кашеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Взаимодействие разрывных акустических волн в средах с частотно - зависимым поглощением. Ежегодник Российского Акустического Общества (Сборник трудов семинара научной школы профессора С.А. Рыбака) «Акустика неоднородных сред», Москва 2002, с. 38-47.
- 135 В.А. Хохлова, С.С. Кашеева. Взаимодействие разрывных волн в средах с селективным поглощением на второй гармонике. Сб. трудов семинара научной школы профессора В.А. Красильникова «Физическая и нелинейная акустика», с. 161 – 173, Москва 2002.
- 136 Хохлова В.А., Сапожников О.А., Кашеева С.С., Лоттон П., Гусев В.Э., Джоб С., Брюно М. Эффекты нелинейного насыщения при распространении акустических волн в среде с частотно зависимым усилением. Изв. Акад. Наук, сер. физ., 2000, т. 64, №12, с. 2334 – 2337.
- 137 Гамильтон М.Ф., Руденко О.В., Хохлова В.А. Новый метод расчета параксиальной области интенсивных акустических пучков. Акуст. журн., 1997, т.43, №1, с.48-53.
- 138 M.F.Hamilton, V.A.Khokhlova, and O.V.Rudenko. Analytical method for describing the paraxial region of finite amplitude sound beams. J.Acoust.Soc.Am. 1997, v. 101(3), p. 1298-1308.
- 139 С.В. Горькова, С. Каргл, В.А. Хохлова. Нелинейные и дифракционные эффекты в акустических пучках цилиндрической симметрии. Акуст. журн., 1999, т.45, N5, с. 615-621.
- 140 F.P. Curra, P.D. Mourad, V.A. Khokhlova and L.A. Crum. Numerical simulations of heating patterns and tissue temperature response due to high-intensity focused ultrasound. – IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., 2000, v. 47, N 4, p.1077-1089.
- 141 Хохлова В.А., Сапожников О.А., Пономарёв А.Е., Руденко О.В. Описание задачи специального физического практикума кафедры акустики «Численное моделирование нелинейных и дифракционных эффектов в звуковых пучках». Москва: Физический факультет МГУ, 2006, 35 с. (учебно-методическая разработка).
- 142 Eckhoff K.S. Accurate and efficient reconstruction of discontinuous functions from truncated series expansions. Math. Comp., 1993, v.61, p. 745-763.
- 143 Eckhoff K.S. Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions. Math. Comp., 1995, v. 64, p. 671-690.

- 144 Eckhoff K.S., Rolfnes J.H. On nonsmooth solutions of linear hyperbolic systems. *J. Comp. Phys.*, 1996, v.125, p.1-15.
- 145 Gottlieb D., Shu C.W. On the Gibbs phenomenon IV: recovering exponential accuracy in a sub-interval from a Gegenbauer partial sum of a piecewise analytic function. *Math. Comput.*, 1995, v.64, pp.1081–1095.
- 146 Jing Y. and Clement G.T. On the use of Gegenbauer reconstructions for shock wave propagation modeling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, v. 130(3), p. 1115-1124.
- 147 Gottlieb D., Orszag S.A., Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications. SIAM: Philadelphia, PA, 1977.
- 148 Бахвалов Н.С. Численные методы I, М.:Наука, 1975.
- 149 Калиткин Н.Н. Численные методы, М.:Наука, 1978.
- 150 Horton C.W. Sr. Dispersion relationships in sediments and sea water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1974, v. 55(3), p.547 - 549.
- 151 Гинзбург В.Л. Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // *Акуст. журн.*, 1955, т. 1, N 1, с. 31-39.
- 152 Szabo T.L. Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, v. 96(1), p. 491-500.
- 153 Bacon D.R. Finite amplitude propagation in acoustic beams. 1986, Ph.D.thesis, Bath University, UK.
- 154 Collins M.D. The time-domain solution of the wide-angle parabolic equation including the effects of sediment dispersion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, v. 84, p. 2114-2125.
- 155 Averkiou M.A., Crum L.A., Khokhlova V.A., Rudenko O.V. Nonlinear waveform distortion and energy attenuation of intense acoustic waves in biological tissue. In: *Nonlinear Acoustics in Perspective (Proc. 14th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Nanjing, China)*, Nanjing University Press. 1996. p. 463-468.
- 156 O'Donnell M., Janes E.T., Miller J.G. Kramers-Kronig relationship between ultrasonic attenuation and phase velocity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1981, v. 69(3), p. 696-701.
- 157 Cranz B. Measurement of shock wave properties after the passage through a tissue mimicking material. *Ultrasonic Symposium*, 1994.
- 158 Coleman A.J., Saunders J.E. A survey of the acoustic output of commercial extracorporeal shockwave lithotripters. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 1989, v.15(3), p. 213-227.
- 159 Андреев В.Г., Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Кливлэнд Р.О. Диагностика релаксирующей среды акустическим импульсом с ударным фронтом. *Акуст.журн.*, 1999, т. 45, № 1, с. 13-19.
- 160 Woodsum H.C. Enhancement of parametric efficiency by saturation suppression. *J. Sound and Vibration*, 1980, v. 69(1), p. 27-33.
- 161 Moffet M.B., Mellen R.H. On absorption as a means of saturation suppression. *J. Sound and Vibration*, 1981, v 76(2), p. 295-298.
- 162 Trivett D.H., Van Buren A.L. Propagation of plane, cylindrical, and spherical finite amplitude waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1981, v. 69(4), p. 943-949.
- 163 Андреев В.Г., Руденко О.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Подавление нелинейного затухания звуковой волны в среде, содержащей резонансный поглотитель с конечной шириной линии. *Вестн. Моск. ун-та, Сер.3. Физ. Астрон.*, 1985, т. 26, №3, с. 58-62.

- 164 Андреев В.Г., Гусев В.Э., Карабутов А.А., Руденко О.В., Сапожников О.А. Повышение добротности нелинейного акустического резонатора с помощью селективного поглощающего зеркала. *Акуст. журн.*, 1985, т. 31, №2, с. 162-163.
- 165 Swift G.W. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, v. 92(3), p. 1551-1563.
- 166 Gaitan G.W. and Atchley A.A. Finite amplitude standing waves in harmonic and anharmonic tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1993, v. 93(5), p. 2489 – 2495.
- 167 Ilinskii Yu.A., Lipkens B, Lucas T.S., Van Doren T.W., Zabolotskaya E.A. Nonlinear standing waves in an acoustical resonator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, v. 104(5), p. 2664–2674.
- 168 Руденко О.В., Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Хедберг К.М. Рост энергии и добротности акустического резонатора с усилением его потерь. *Доклады РАН (Физика)*, 2002, т. 383. №3, с. 330–333.
- 169 Christopher T. Reduced harmonic representation for continuous wave, shock-producing focused beams. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2009, v.56, p. 859–863.
- 170 Буров В.А., Красильников В.А. Непосредственное наблюдение искажения формы интенсивных ультразвуковых волн в жидкости. *ДАН СССР*, 1958, т. 118, № 5, с. 920–923.
- 171 Наугольных К.А., Романенко Е.В. К вопросу о распространении волн конечной амплитуды в жидкости. *Акуст. журн.*, 1958, т. 6, № 2, с. 200–202.
- 172 Михайлов И.Г., Шутилов В.А. Об искажении формы ультразвуковой волны конечной амплитуды в различных жидкостях. *Акуст. журн.*, 1960, т.6(3), с. 340-346.
- 173 Андреев В.Г., Карабутов А.А., Руденко О.В. Экспериментальное исследование звуковых пучков конечной амплитуды. *Вест. Моск. ун-та, сер.3. физ.-астр.*, 1984, т. 25, №3, с. 35-38.
- 174 Bacon D.R. Finite amplitude distortion of the pulsed fields used in diagnostic ultrasound. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 1984, v. 10, p. 189-195.
- 175 Curra F.P., Mourad P.D., Cleveland R.O., Khokhlova V.A., Crum L.A. Numerical simulations of tissue heating created by high intensity focused ultrasound. In: *Proc. of 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of Acoustical Society of America (Seattle WA, 20-26 June 1998)*, v. 2, p. 1059-1060.
- 176 Aanonsen S.I., Barkve T., Naze Tjøtta J., Tjøtta S. Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984, v. 75, p. 749-768.
- 177 Kamakura T., Hamada N., Aoki K., Kumamoto Yu. Nonlinearly generated spectral components in the nearfield of a directive sound source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989, v. 85, p. 2331-2337.
- 178 Bernsten J., Naze Tjøtta J., Tjøtta S. Nearfield of a large acoustic transducer. Part 4: Second harmonic and sum frequency radiation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984, v. 75, p. 1383-1391.
- 179 Baker A.C., Anastasiadis K., and Humphrey V.F. The nonlinear pressure field of a plane circular piston: Theory and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, v. 84, p. 1483-1487.
- 180 Khokhlova V.A., Souchon R., Tavakkoli J., Sapoznikov O.A., and Cathignol D. Numerical modeling of finite amplitude sound beams: Shock formation in the near field of a cw plane piston source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2001, v. 110(1), p. 95-108.

- 181 Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., and Cathignol D. Nonlinear waveform distortion and shock formation in the near field of a continuous wave piston source. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004, v. 115(5), Pt.1, p. 1982-1987.
- 182 D.T. Blackstock. *Fundamentals of Physical Acoustics* (John Wiley&Sons, Inc., New York, 2000), pp. 460-461.
- 183 Hobaek H. and Ystad B. Experimental and numerical investigation of shock wave propagation in the post focal region of a focused sound field. *Acustica. Acta Acustica*, 1997, v. 83, p. 978-986.
- 184 Delannoy B., Bruneel C., Haine F., and Torguet R. Anomalous behavior in the radiation pattern of piezoelectric transducers induced by parasitic Lamb wave generation. *J. Appl. Phys.*, 1980, v. 51, p. 3942-3948 .
- 185 Cathignol D., Sapozhnikov O.A., and Zhang J. Lamb waves in piezoelectric focused radiator as a reason for discrepancy between O'Neil's formula and experiment. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, v. 101, p. 1286-1297.
- 186 Khokhlova V.A., Averkiou M.A., Younghouse S.J., Hamilton M.F., and Crum L.A. Fast spectral algorithm for modeling of focused sound beams in a highly nonlinear regime. In: *Proc. of 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of Acoustical Society of America* (Seattle WA, 20-26 June 1998), v. 4, p. 2875-2876.
- 187 Averkiou M.A. Tissue harmonic imaging. *Proc. of the 2000 IEEE Ultrasonics Symposium*, San Juan, Puerto Rico, 2000, v.1, p. 1563-1572.
- 188 Burns P.N., Powers J.E., Hope Simpson D., Uhlendorf V., Fritzsche T. Harmonic imaging: principles and preliminary results. *Angiology*, 1996, v. 47, pp. 63 -73.
- 189 Burns P.N., Hope Simpson D., Averkiou M.A. Nonlinear imaging. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 2000, v. 26(1), S19-S22.
- 190 Baker A.C., Humphrey V.F. Distortion and high-frequency generation due to nonlinear propagation of short ultrasonic pulses from a plane circular piston. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1992, v. 92(3), p. 1699-1705.
191. Preston R.C. (ed.) *Output Measurements for Medical Ultrasound*. Springer Verlag, Berlin, 1991, 180 p.
- 192 Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука. *Акуст. журн.*, 2006, т.52, №4, с. 560-570.
- 193 Baker A.C., Berg A.M., Sahin A., and J.N. Tjotta. The nonlinear pressure field of plane rectangular apertures: experimental and theoretical results. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1995, v. 97(6), p. 3510-3517.
- 194 Kamakura T., Tani M., Kumamoto Y., and Ueda K. Harmonic generation in finite amplitude sound beams from rectangular aperture source. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1992, v. 91(6), p. 3144-3151.
195. Cahill M.D., Baker A.C. Numerical simulation of the acoustic field of a phased-array medical ultrasound scanner. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1998, v. 104(3), p. 1274-1283.
196. Bouakaz A., Lancee C.T., de Jong N. Harmonic ultrasound field of medical phased arrays: simulations and measurements. *IEEE Trans. UFFC*. 2003, v. 50(6), p. 730-735.
- 197 Yang X., Cleveland R. Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, v. 117(1), p. 113-123.

- 198 Khokhlova V.A., Ponomarev A.E., Averkiou M.A., Crum L.A. Effect of absorption on nonlinear propagation of short ultrasound pulses generated by rectangular transducers. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 2002, v. 112(5), Pt. 2, p. 2370.
- 199 Ponomaryov A.E., Khokhlova V.A., Averkiou M.A., and Crum L.A. Nonlinear propagation of short ultrasound pulses generated by rectangular diagnostic transducers. *Proc. 3rd Int. Symp. Therapeutic Ultrasound*, Lyon, France, 2003, eds. Chapelon J.-Y. and Lafon C., p. 309-315.
- 200 Basova M.S., Khokhlova V.A. Effect of frequency-dependent absorption on propagation of nonlinear acoustic wave with shocks. *Physics of Wave Phenomena*, 2004, v. 12, №3, pp. 126-132.
- 201 Аверьянов М.В., Басова М.С., Хохлова В.А. Стационарные и квазистационарные волны в диссипативных системах четного порядка. *Акуст. журн.*, 2005, т.51, №5, с. 581-588.
- 202 Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука. *Акуст. журн.*, 2006, т.52, №4, с. 560-570.
203. Филоненко Е.А., Хохлова В.А. Эффекты акустической нелинейности при терапевтическом воздействии мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань. *Акуст. журн.*, 2001, т. 47, №4, с. 541-549.
204. Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А. Некоторые свойства интенсивных звуковых пучков, описываемых обобщенным уравнением Хохлова-Заболотской. *Акуст. журн.*, 1998, т. 44, №6, с. 808-813.
- 205 Hope Simpson D., Chin C.T., and Burns P.N. Pulse inversion Doppler: a new method for detecting nonlinear echoes from microbubble contrast agents. *IEEE Trans. UFFC*, 1999, v. 46, p. 372-382.
- 206 Brock-Fisher G.A., Poland M.D., Rafter P.G. Means for increasing sensitivity in non-linear ultrasound imaging systems. *US Patent US5577505 A*, 1996.
- 207 Brock-Fisher G.A., Poland M.D., Rafter P.G., and Mooney M.G. Experimental observations of the sensitivity and frequency response of the power modulation technique for contrast imaging. *Proc. Fifth Heart Centre European Symp. Ultrasound Contrast Imaging*, Rotterdam, Netherlands, 2000, p. 1-77.
- 208 Bouakaz A., de Jong N. Native tissue imaging at superharmonic frequencies, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, 2003, v. 50, pp. 496-506.
- 209 Apfel R.E. and Holland C.K. Gauging the likelihood of cavitation from short-pulse, low-duty cycle diagnostic ultrasound. *Ultrasound Med. Biol.*, 1991, v. 17(2), p. 179-185.
- 210 Huijssen J. and Verweij M.D. An iterative method for the computation of nonlinear wide-angle, pulsed acoustic fields of medical diagnostic transducers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2010, v. 127, pp. 33-44.
- 211 Hynynen K, Clement G. Clinical applications of focused ultrasound: the brain, *Int. J. Hyperthermia*, 2007, v. 23, p. 193-202.
- 212 Ritchie R.W., Leslie T., Phillips R., Wu F., Illing R., ter Haar G. Protheroe A., Cranston D. Extracorporeal high intensity focused ultrasound for renal tumours: a 3-year follow-up. *British Journal Urology International*, 2010, v. 106(7), p. 1004-1009.
- 213 Brown S.A., Greenbaum L., Shtukmaster S., Zadok Y., Ben-Ezra S., Kushkuley L. Characterization of nonthermal focused ultrasound for noninvasive selective fat cell disruption (lysis): technical and preclinical assessment. *Plastic and reconstructive surgery*, 2009, v. 124, № 1, p. 92-101.

- 214 Harris G.R. Medical ultrasound exposure measurements: Update on devices, methods, and problems. IEEE Ultrasonic Symposium, 1999, v. 2, p. 1341-1352.
- 215 Shaw A., ter Haar G. Requirements for measurement standards in High Intensity Focused Ultrasound (HIFU) fields. NPL Report DQL-AC 015, 2006.
- 216 ter Haar G., Shaw A., Pye S., Ward B., Bottomley F., Nolan R., Coady A.-M.. Guidance on reporting ultrasound exposure conditions for bioeffects studies. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 2011, v. 37, p. 177-183
- 217 Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990, 237 с.
- 218 Dalecki D., Carstensen E. Parker K. Absorption of finite amplitude focused ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v. 89, pp. 2435–2447.
- 219 Островский Л.А., Сутин А.М. Фокусировка акустических волн конечной амплитуды. *ДАН СССР*, 1975, т. 221, № 6, с. 1300-1303.
- 220 Наугольных К.А., Романенко Е.В. О зависимости коэффициента усиления фокусирующей системы от интенсивности звука. *Акуст. журн.*, 1959, т. 5, № 2, с. 191-195.
221. Shooter J.A., Muir T.G., Blackstock D.T. Acoustic saturation of spherical waves in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1974, v.55, № 1, p. 54-62.
- 222 Christopher P., Carstensen E. Finite amplitude distortion and its relationship to linear derating formulae for diagnostic ultrasound systems. *Ultrasound Med. Biol.*, 1996, v.22, pp. 1103–1116.
- 223 Duck F. Estimating in situ exposure in the presence of acoustic nonlinearity. *J. Ultrasound Med.*, 1999, v.18, pp. 43–53,.
- 224 National Electrical Manufacturers Association, “NEMA standards publication UD 2-2004, acoustic output measurement standard for diagnostic ultrasound equipment, Revision 3,” 2004.
- 225 Selfridge A., Lewin P. Wideband spherically focused PVDF acoustic sources for calibration of ultrasound hydrophone probes. *IEEE Transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 2000, v.47, № 6, pp. 1372-1376.
226. Carstensen E.L., Dalecki D., Gracewski S., Christopher T. Nonlinear propagation and the output indices. *J. Ultrasound Med.*, 1999, v.18, pp. 69-80.
- 227 Zhou Y., Zhai L., Simmons R., Zhong P. Measurement of high intensity focused ultrasound fields by a fiber optic probe hydrophone. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, v.120, p. 676–685.
- 228 Parsons J., Cain C., Fowlkes J. Cost-effective assembly of a basic fiber-optic hydrophone for measurement of high-amplitude therapeutic ultrasound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, v.119, pp.1432–1440.
- 229 Averkiou M., Cleveland R. Modeling of an electrohydraulic lithotripter with the KZK equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, v.106, pp.102–112.
- 230 Khokhlova V., Bailey M., Reed, J. Cunitz B., Kaczkowski P., Crum L. Effects of nonlinear propagation, cavitation, and boiling in lesion formation by high intensity focused ultrasound in a gel phantom. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, v. 119, pp. 1834–1848.
- 231 Meaney P., Cahill, M. ter Haar G. The intensity dependence of lesion position shift during focused ultrasound surgery. *Ultrasound Med. Biol.*, 2000, v. 26, pp. 441–450.
- 232 Jing Y., Tao M., Clement G.T. Evaluation of a wave-vector-frequency-domain method for nonlinear wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, v. 129(1), p. 32-46.

- 233 Varslot T., Taraldsen G. Computer simulation of forward wave propagation in soft tissue. *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, 2005, v. 52, № 9, pp. 1473-1482.
- 234 Zemp R.J., Tavakkoli J., Cobbold R.S. Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, v. 113, №1, pp. 139-152.
- 235 Hallaj I.M. and Cleveland R.O. FDTD simulation of finite-amplitude pressure and temperature fields for biomedical ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, v. 105, L7-L12.
- 236 Ginter S., Liebler M., Steiger E., Dreyer T., Riedlinger R. Full-wave modeling of therapeutic ultrasound: Nonlinear ultrasound propagation in ideal fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002, v. 111, pp. 2049–2059.
- 237 Canney M.S., Bailey M.R., Khokhlova V.A., and Crum L.A. Measurement and modeling of acoustic fields in a gel phantom at high intensities,” *AIP Conference Proceedings 829: International Symposium of Therapeutic Ultrasound (Boston, MA Oct. 2005)* pp. 107-111.
- 238 Canney M.S., Khokhlova V.A., Bailey M.R., Sapozhnikov O.A., Crum L.A. Characterization of high intensity focused ultrasound fields with a high spatio-temporal resolution. In: *Proc. of the 2006 IEEE Int. Ultrasonics Symposium (Vancouver, Canada, 2006)*, pp.856-859.
- 239 Canney M.S., Bailey M.R., Crum L.A., Khokhlova V.A., and Sapozhnikov O.A. Acoustic characterization of high intensity focused ultrasound fields: A combined measurement and modeling approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008, v.124, N4, pp. 2406-2420.
- 240 Bessonova O.V., Khokhlova V.A. Spatial structure of high intensity focused ultrasound beams of various geometry, *Physics of Wave Phenomena*, 2009, v.17(1), pp. 45–49.
- 241 Бессонова О.В., Хохлова В.А., Бэйли М.Р., Кэнни М.С., Крам Л.А. Фокусировка мощных ультразвуковых пучков и предельные значения параметров разрывных волн. *Акуст. журн.*, 2009, т. 55, №4-5, с. 445-456.
- 242 Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток. *Акуст. журн.*, 2011, т. 57, №3 С. 337-347.
- 243 Khokhlova V.A., Yuldashev P.V., Bessonova O.V., Bailey M.R., Sapozhnikov O.A., Crum L.A. A model of an equivalent focused piston source to characterize nonlinear ultrasound fields of 2D HIFU arrays. In: *Program and Abstract Book “Current and Future Applications of MR-guided Focused Ultrasound 2010”, 2nd International Symposium, 17-20 October 2010, Washington DC, USA*, p.71.
- 244 Wu F., Wang Z., Chen W., Zou, J. Bai J., Zhu H., Li K., Xie F., Jin C., Su H., Gao G. Extracorporeal focused ultrasound surgery for treatment of human solid carcinomas: Early Chinese clinical experience. *Ultrasound Med. Biol.*, 2004, v. 30, pp. 245–260.
- 245 Staudenraus J., Eisenmenger W. Fibre-optic probe hydrophone for ultrasonic and shock-wave measurements in water. *Ultrasonics*, 1993, v. 31, pp. 267–273.
- 246 O’Neil H. Theory of focusing radiators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1949, v. 21, pp. 516–526.
- 247 Harris G. Progress in medical ultrasound exposimetry. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 2005, v.52, pp. 717–736.
- 248 Zeqiri B., Bond A. The influence of waveform distortion on hydrophone spatial-averaging corrections-theory and measurement. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, v.92, pp. 1809–1821.
- 249 Smith R. Are hydrophones of diameter 0.5 mm small enough to characterize diagnostic ultrasound equipment? *Phys. Med. Biol.* 1989, v.34, pp. 1593–1607.
- 250 Radulescu E., Lewin P., Goldstein A., Nowicki A. Hydrophone spatial averaging corrections from 1 to 40 MHz. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 2001, v.48, pp. 1575–1580.

- 251 Maxwell A., Sapozhnikov O., Bailey M. A new PVDF membrane hydrophone for measurement of medical shock waves. *Proc. IEEE Ultrason. Symp.*, 2006, pp. 1608–1611.
- 252 Cathignol D., Sapozhnikov O., and Theillere Y. Comparison of acoustic fields radiated from piezoceramic and piezocomposite focused radiators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1999, v.105, pp. 2612–2617.
- 253 Wang Z., Lauxmann P., Wurster C., Kohler M., Gompf B., and Eisenmenger W. Impulse response of a fiber optic probe hydrophone determined with shock waves in water. *J. Appl. Phys.*, 1999, v. 85, pp. 2514–2516.
- 254 Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах. М.: Физматлит, 2007. 176 с.
- 255 Bessonova O.V., Khokhlova V.A. Spatial distributions of acoustic parameters in nonlinear focused beams of various geometry. In: *Proc.18th International Symposium on Nonlinear Acoustics (2008, Stockholm, Sweden)*, pp. 34-37.
- 256 Bigelow T.A., O'Brien W.D., Jr. Experimental evaluation of indicators of nonlinearity for use in ultrasound transducer characterizations. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 2002, v. 28(11/12), p. 1509-1520.
- 257 Khokhlova V.A., Bessonova O.V., Canney M.S., Bailey M.R. and Crum L.A. Spatial distributions of acoustic parameters in high-intensity focused ultrasound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, Vol. 120, № 5, p. 3194. (4th Joint Meeting of Acoustical Society of America and Acoustical Society of Japan, 2006, Honolulu, USA).
- 258 Makov Y.N., Espinosa V., Sanchez-Morcillo V.J., Ramis J., Cruanes J., Camarena F. Strong on-axis focal shift and its nonlinear variation in low-Fresnel-number ultrasound beams. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, v.119, № 6, pp. 3618-3624.
- 259 Бессонова О.В., Хохлова В.А. Пространственные распределения различных параметров акустического поля в мощных сфокусированных пучках. Сборник трудов XVIII сессии РАО (2006, Таганрог), т. 3, стр. 94-97.
- 260 Cathignol D., Sapozhnikov O., Tavakkoli J. One-dimensional theoretical model of high-intensity pulse focusing. In: *Nonlinear Acoustics in Perspective (Proc. of 14th Int. Symp. on Nonlinear Acoustics, Nanjing, 1996)*, Nanjing University Press, 1996, p. 177-182.
- 261 Pernot M., Aubry J.-F., Tanter M., Thomas J.-L., Fink M. High power transcranial beam steering for ultrasonic brain therapy. *Phys. Med. Biol.*, 2003, v. 48(16), p. 2577-2589.
- 262 Hynynen K., McDannold N., Clement G., Jolesz F.A., Zadicario E., Killiany R., Moore T., Rosen D. Pre-clinical testing of a phased array ultrasound system for MRI-guided noninvasive surgery of the brain-A primate study. *European Journal of Radiology*, 2006, v. 59(2). pp. 149-156.
- 263 Quesson B., Merle M., Köhler M.O., Mougnot C., Roujol S., De Senneville B.D., Moonen C.T. A method for MRI guidance of intercostal high intensity focused ultrasound ablation in the liver. *Med. Phys.*, 2010, v. 37(6), pp. 2533-2540.
- 264 Hand J.W., Shaw A., Sathoo N., Rajagopal S., Dickinson R.J., Gavrillov L.R. A random phased array device for delivery of high intensity focused ultrasound. *Physics in Medicine and Biology*, 2009, v. 54(19), pp. 5675-5693.
- 265 Gavrillov L.R., Hand J.W. A theoretical assessment of the relative performance of spherical phased arrays for ultrasound surgery and therapy. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 2000, v.41 (1), pp. 125-139.
- 266 Гаврилов Л.Р. Двумерные фазированные решетки для применения в хирургии: многофокусная генерация и сканирование. *Акуст. журн.*, 2003, т.49, № 5. с. 604–612.

- 267 Bobkova S., Gavrilov L., Khokhlova V., Shaw A., Hand J. Focusing of high intensity ultrasound through the rib cage using a therapeutic random phased array. *Ultrasound Med. Biol.*, 2010, v.36 (6), pp. 888-906.
- 268 Pernot M., Tanter M., Fink M. 3-D real-time motion correction in high-intensity focused ultrasound therapy. *Ultrasound Med. Biol.*, 2004, v. 30 (9), pp. 1239-1249.
- 269 Kreider W., Sapozhnikov O., Khokhlova V., Farr N., Bailey M., Kaczkowski P., Partanen A., Brazzle D. Acoustic measurements and holographic reconstruction of the Philips MR-guided HIFU source. In: Program and Abstract Book "Current and Future Applications of MR-guided Focused Ultrasound 2010", 2nd International Symposium, 17-20 October 2010, Washington DC, USA, p.79.
- 270 Kennedy J., Wu F., ter Haar G., Gleeson F., Phillips R., Middleton M., Cranston D. High-intensity focused ultrasound for the treatment of liver tumours, *Ultrasonics*, 2004, v. 42, pp. 931–935.
- 271 Буров А.К., Андреевская Г.Д. Воздействие ультразвуковых колебаний высокой интенсивности на злокачественные опухоли у животных и человека. *ДАН СССР*, 1956, т. 106, № 3, стр. 445-448.
- 272 Буров В.А., Дмитриева Н.П., Руденко О.В. Нелинейный ультразвук: разрушение микроскопических биоконплексов и нетепловое воздействие на злокачественную опухоль. *ДАН СССР, Биохимия и Биофизика*, 2002, т. 383, № 3, с. 101-104.
- 273 Muir T.G., Carstensen E.L. Prediction of nonlinear acoustic effects at biomedical frequencies. *Ultrasound Med. Biol.*, 1980, v. 6(4), pp. 345–357.
- 274 Overgaard J., Gonzalez D.G., Hulshof M.C.C.M., Arcangeli G., Dahl D., Mella O., Bentzen S.M. Randomized trial of hyperthermia as adjuvant to radiotherapy for recurrent or metastatic malignant melanoma. *The Lancet*, 1995, v. 345, pp. 540–543.
- 275 Hynynen K., Shimm D., Anhalt D., Stea B., Sykes H., Cassady J.R., Roemer R.B. Temperature distributions during clinical scanned, focussed ultrasound hyperthermia treatments. *Int. J. Hyperthermia*, 1990, v. 6, pp. 891–908.
- 276 Nyborg W.L. Solutions of the bio-heat transfer equation. *Phys Med Biol*, 1988, v. 33(6), p. 785–792.
- 277 Hwang J.H., Wang Y.N., Warren C., Upton M.P., Starr F., Zhou Y.F., Mitchell S. Pre-clinical in vivo evaluation of an extracorporeal HIFU device for the treatment of pancreatic cancer. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 2009, v. 35(6), p. 967-975.
- 278 Parsons J., Cain C., Abrams G., Fowlkes J. Pulsed cavitation ultrasound therapy for controlled tissue homogenization. *Ultrasound Med. Biol.*, 2006, v. 32(1), pp. 115–129.
- 279 Hall T.L., Hempel C.R., Wojno K., Xu Z., Cain C.A., Roberts W.W. Histotripsy of the prostate: dose effects in a chronic canine model. *Urology*, 2009, v. 74(4), pp. 932–937.
- 280 Xu Z., Hall T., Fowlkes J., Cain C. Effects of acoustic parameters on bubble cloud dynamics in ultrasound tissue erosion (histotripsy). *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, v. 122(1), pp. 229–236.
- 281 Филоненко Е.А., Гаврилов Л.Р., Хохлова В.А., Хэнд Д. Акустический нагрев биологической ткани с помощью двумерной фазированной решетки со случайным и регулярным расположением элементов. *Акуст. журн.* 2004, т. 50. № 2. с. 272-282.
- 282 Бессонова О.В., Хохлова В.А., Кэнни М.С., Бэйли М.Р., Крам Л.А.. Метод определения параметров акустического поля в биологической ткани для терапевтических применений мощного фокусированного ультразвука. *Акуст. журн.*, 2010, т. 56, № 2, с. 296–306.

- 283 Bessonova O.V., Khokhlova V.A., Canney, M.S. Bailey M.R., Crum L.A. Nonlinear derating method for high intensity focused ultrasound (HIFU) fields. In: Proc. IEEE International Ultrasonics Symposium (September, 19-23, 2009, Rome, Italy), pp. 216–219.
- 284 Хохлова В.А., Бобкова С.М., Гаврилов Л.Р. Расщепление фокуса при прохождении фокусированного ультразвука сквозь грудную клетку, Акуст. журн., 2010, т. 56, №5, с. 622–632.
- 285 Canney M., Khokhlova V., Bessonova O., Bailey M., Crum L. Shock-induced heating and millisecond boiling in gels and tissue due to high intensity focused ultrasound. *Ultrasound Med. Biol.*, 2010, v. 36(2), p. 250-267.
- 286 Khokhlova T., Canney M., Lee D., Marro K., Crum L., Khokhlova V., Bailey M. Magnetic resonance imaging of boiling induced by high intensity focused ultrasound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2009, v. 125, № 4, pp. 2420-2431.
- 287 Khokhlova V.A., Yuldashev P.V., Bobkova S.M., Ilyin S.A. The role of nonlinear propagation effects in ablation of soft tissue behind the rib cage using a HIFU phased array. In: 11th Intern. Symp. on Therapeutic Ultrasound, New York, April 2011, p.52.
- 288 Bailey M.R., Couret L.N., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., ter Haar G., Vaezy S., Shi X., Martin R., Crum L.A. Use of overpressure to assess the role of bubbles in focused ultrasound lesion shape. *Ultrasound Med. Biol.*, 2000, v. 27, pp. 696–708.
- 289 Filonenko E.A., ter Haar G.R., Rivens I., Khokhlova V.A. Prediction of Ablation Volume for Different HIFU regimes. In: Proc. of 3rd International Symposium on Therapeutic Ultrasound (June 22-25, 2003, Lyon, France), eds. J.-Y. Chapelon and C. Lafon, pp. 268–274.
- 290 Филоненко Е.А., тер Хаар Г.Р., Хохлова В.А. Тепловое воздействие мощного фокусированного ультразвука на биологическую ткань в режимах акустической хирургии. Ежегодник Российского Акустического Общества (Сб. тр. семинара научной школы профессора С.А. Рыбака) «Акустика неоднородных сред», с. 111 – 121, Москва, 2003.
- 291 Duck F.A. Acoustic saturation and output regulation. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 1999, v. 25, № 6, p. 1009–1018.
- 292 Szabo T.L., Clougherty F.C., Grossman C.G. Effects of nonlinearity on the estimation of in situ values of acoustic output parameters. *J Ultrasound Med.*, 1999, v. 18, p. 33–41.
- 293 Schafer M.E. Alternative approaches to in situ intensity estimation. In: Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1990, v. 3, p. 1381–1384.
- 294 Вессонова О.В. Нелинейные эффекты в мощных фокусированных ультразвуковых пучках: моделирование и применение в неинвазивной хирургии. Дисс. к.ф.-м.н., Москва, 2010.
- 295 Khokhlova T.D., Canney M.S., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A., Crum L.A., Bailey M.R. Controlled tissue emulsification produced by high intensity focused ultrasound shock waves and millisecond boiling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, v.130(5), pp. 3498–3510.
- 296 Rivens I.H., Clarke R.L., Ter Haar G.R. Design of focused ultrasound surgery transducers. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 1996, v. 43(6), pp. 1023–1031.
- 297 Chen L., Ter Haar G.R., Hill C.R., Eccles S.A., Box G. Treatment of implanted liver tumors with focused ultrasound. *Ultrasound Med. Biol.*, 1998, v. 24(9), pp. 1475–1488.
- 298 Watkin N.A., ter Haar G.R., Rivence I. The intensity dependence of the site of maximal energy deposition in focused ultrasound surgery. *Ultrasound. Med. Biol.*, 1996, v. 22(4), pp. 483–491.

- 299 Meaney P., Cahill M. D., Gail ter Haar. The intensity dependence of focused fltrasound lesion position. *Proc. SPIE*, 1998, v. 3249. pp. 246-256.
- 300 Sapareto S.A., Dewey W.C. Thermal dose determination in cancer therapy. *Radiation Oncology Biology Physics*, 1984, v. 10, pp. 787–800.
- 301 Hynynen K. The threshold for thermally significant cavitation in dog’s thigh muscle in vivo. *Ultrasound Med. Biol.*, 1999, v. 117, pp. 157–169.
- 302 Holt R.G., Roy R.A. Measurements of bubble-enhanced heating from focused, MHz-frequency ultrasound in a tissue-mimicking material. *Ultrasound Med. Biol.*, 2001, v. 27, pp. 1399–1412.
- 303 Chavier F., Chapelon J.Y., Gelet A., Cathignol D. Modeling of high-intensity focused ultrasound-induced lesions in the presence of cavitation bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2000, v. 108, pp. 432–440.
- 304 McLaughlan J., Rivens I., ter Haar G. Study of acoustic cavitation and boiling in ex vivo tissue exposed to High Intensity Focused Ultrasound (HIFU). *Ultrasound in Medicine & Biology*, 2010, v. 36, p. 1327-1344.
- 305 Lafon C., Zderic V., Noble M., Yuen J., Kaczkowski P., Sapozhnikov O., Chavier F., Crum L., Vaezy S. Gel phantom for use in high-intensity focused ultrasound dosimetry. *Ultrasound Med. Biol.*, 2005, v. 31(10), pp. 1383–1389.
- 306 Fry F.J., Sanghvi N.T., Foster R.S., Bihrl R., Hennige C. Ultrasound and microbubbles: their generation, detection, and potential utilization in tissue and organ therapy - experimental. *Ultrasound Med. Biol.*, 1995, v. 21, pp. 1227–1237.
- 307 Rabkin B.A., Zderic V., Vaezy S. Hyperecho in ultrasound images of HIFU therapy: involvement of cavitation. *Ultrasound Med. Biol.*, 2005, v. 31, pp. 947–956.
308. Morse P., Feshbach H. *Methods of theoretical physics, Part I* // New York: McGraw-Hill, 1953, p. 997.
- 309 Thomas C., Farny C., Wu T., Holt R., Roy R. Monitoring HIFU lesion formation in vitro via the driving voltage. In: Clement G., McDannold N., Hynynen K., (eds). *Therapeutic Ultrasound: 5th ISNA*. Amer. Inst. of Phys.: 2006, p. 293–297.
- 310 Farny C., Holt R., Roy R. Temporal and spatial detection of HIFU-induced inertial and hot-vapor cavitation with a diagnostic ultrasound system. *Ultrasound in Med. & Biol.*, 2009, v. 35, p. 603–615.
- 311 Roy R.A., Atchley A.A., Crum L.A., Fowlkes J.B., Reidy J.J. A precise technique for the measurement of acoustic cavitation thresholds and some preliminary results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1985, v. 78, p. 1799–1805.
- 312 Гаврилов Л.Р., Хохлова В.А., Бобкова С.М., Шоу А., Хэнд Дж. Возможна ли неинвазивная ультразвуковая хирургия за грудной клеткой? *Медицинская физика*, 2010, №3, с. 53-64.
- 313 Li F., Gong X., Hu K. et al. Effect of ribs in HIFU beam path on formation of coagulative necrosis in goat liver. *Therapeutic Ultrasound: 5th International Symposium on Therapeutic Ultrasound*, 2006, AIP Proceedings, pp. 477-480.
- 314 Wu F., Zhi-Biao W., Wen-Zhi C. et al. Extracorporeal high intensity focused ultrasound ablation in the treatment of patients with large hepatocellular carcinoma. *Ann. Surg. Oncol.*, 2004, v. 11, pp. 1061–1069.
- 315 Liu H.-Li, Chang H., Chen W.-S., Shih T.-C., Hsiao J.-K., Lin W.-L. Feasibility of transrib focused ultrasound thermal ablation for liver tumors using a spherically curved 2D array: A numerical study. *Med. Phys.*, 2007, v. 34(9), pp. 3436–3448.

- 316 Aubry J.-F., Pernot M., Marquet F., Tanter M., Fink M. Transcostal high-intensity-focused ultrasound: ex vivo adaptive focusing feasibility study. *Physics in Medicine and Biology*, 2008. v. 53, pp. 2937–2951
- 317 Quesson B., Merle M., Kohler M.O., Mougnot C., Roujol S., de Senneville B.D., Moonen C.T. A method for MRI guidance of intercostal high intensity focused ultrasound ablation in the liver. *Med. Phys.* 2010, v.37(6), pp. 2533-2540.
- 318 Gélat P., Ter Haar G., Saffari N. Modelling of the acoustic field of a multi-element HIFU array scattered by human ribs. *Phys Med Biol*, 2011, v.56(17), pp.5553-5581.
- 319 Aubry J.-F., Pernot M., Marquet F. et al. Transcostal high-intensity-focused ultrasound: ex vivo adaptive focusing feasibility study. *Phys. Med. Biol.*, 2008, v. 53, pp. 2937–2951.
- 320 Raju B.I., Hall C.S., Seip R. Ultrasound therapy transducers with space-filling non-periodic arrays. *IEEE Transactions UFFC*, 2011, v. 58(5), pp. 944-954.
- 321 Stephens D.N., Kruse D.E., Qin S., Ferrara K.W. Design aspects of focal beams from high-intensity arrays. *IEEE Transaction UFFC*. 2011, v. 58(8), p. 1590–1602.
- 322 Khokhlova T.D., Canney M.S., Khokhlova V.A., Sapozhnikov O.A., Crum L.A., Bailey M.R. Millisecond bursts of focused ultrasound shock waves to produce boiling and tissue emulsification. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, v. 130(5), pp. 3498-3510.
- 323 Kim Y., Wang T.Y., Xu Z., C. A. Cain. Lesion generation through ribs without aberration correction using cavitation therapy. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 2011, v. 58(11), p. 346-349.
- 324 Khokhlova T.D., Simon J., Wang Y.-N., Khokhlova V.A., Praun M., Starr F., Kaczkowski P., Crum L.A., Hwang J.-H., Bailey M.R. In vivo tissue emulsification using millisecond boiling induced by high intensity focused ultrasound. 161st Meeting of the Acoustical Society of America, Seattle, Washington, 23-27 May 2011. *J. Acoust. Soc. Am.* 129, 2477 (2011).
- 325 Averiyarov M.V., Yuldashev P.V., Blanc-Benon Ph., Khokhlova V.A. Comparison of time and frequency domain approaches to simulate propagation of weak shocks. *J. Acoust. Soc. Am.* 2009, v. 125, p. 2601.
- 326 Lee Y.S., Numerical solution of the KZK equation for pulsed finite amplitude sound beams in thermoviscous fluids, PhD thesis (The University of Texas at Austin, 1993); as cited by *Dissertation Abstracts International*, 54-12 (B), 6246 (1993).
- 327 Аверьянов М.В., Басова М.С., Хохлова В.А. Стационарные и квазистационарные решения уравнения типа Бюргерса, *Акуст. журн.*, 2005, 51(5), 581-588.
- 328 Christopher P.T., Parker K.J. New approaches to the linear propagation of acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v. 90, № 1, p. 507-521.
- 329 Дж. Гудмен. Введение в Фурье-оптику. 1970, Москва «Мир», пер. с англ., 364 с.
- 330 Wu P., Kazys R., Stepinsky T. Optimal selection of parameters for the angular spectrum approach to numerically evaluate acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1997, v. 101, № 1, P. 125-134.
- 331 Юлдашев П.В. Нелинейные взаимодействия разрывных акустических волн в средах с распределенными в объеме и на границах случайными неоднородностями. Дисс. к.ф.-м.н., Москва, 2011.