

УДК 534.222

УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

© 2002 г. Член-корреспондент РАН О. В. Руденко, В. А. Робсман

Поступило 05.02.2002 г.

Одним из наиболее известных уравнений, описывающих распространение нелинейных волн в диссипативной среде, является уравнение Бюргера (см., например, [1]):

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Здесь для определенности использованы обозначения, принятые в теории интенсивных акустических возмущений [1]: p – приращение давления, x – координата, отсчитываемая вдоль направления распространения плоской волны, $\tau = t - \frac{x}{c}$ – время в системе координат, движущейся со скоростью звука c , ρ – плотность среды, ε и b – коэффициенты нелинейности и эффективной вязкости.

Диссипативные эффекты описываются членом в правой части (1), содержащим вторую производную. Эволюционное уравнение (1) служит универсальной моделью для бегущих волн различной физической природы, если только закон дисперсии для соответствующих бесконечно малых возмущений имеет вид [2]

$$k = \frac{\omega}{c} + i \frac{b}{2c^3 \rho} \omega^2, \quad (2)$$

т.е. содержит мнимую добавку к основному члену, квадратично зависящую от частоты. Согласно (1) и (2), коэффициент затухания слабого гармонического сигнала растет с частотой как ω^2 . В случае упругих волн такая зависимость обусловлена процессами вязкости и теплопроводности в сплошной среде.

Стационарный (не зависящий от координаты) профиль волны для (1) представляет собой оди-

ночный скачок – ударную волну с конечной шириной фронта

$$p = p_0 \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon}{b} p_0 \tau \right). \quad (3)$$

Профиль (3) формируется в результате конкуренции между нелинейным “укручением” переднего фронта бегущей волны и его диссипативным “сглаживанием”. Решения (1) и соответствующие им нелинейные волновые процессы хорошо изучены [1].

Если добавочный член в законе дисперсии (2) действителен и пропорционален кубу частоты, соответствующее дифференциальное уравнение отличается от (1) своей правой частью, которая теперь содержит третью производную по τ (вместо второй). Это уравнение Кортевега–де Фриса (КдФ), решения которого также изучены детальным образом (см., например, [3–5]).

Стационарный профиль для КдФ имеет вид уединенного незатухающего импульса (солитона); он формируется в результате конкуренции между нелинейным “укручением” и дисперсионным “разбеганием” гармоник, формирующих импульс.

Во многих экспериментах наблюдалось затухание сигнала, пропорциональное четвертой степени его частоты. Такая зависимость имела место в средах, содержащих неоднородности малых волновых размеров, например, в горных породах [6], губчатых костях черепа [7], а также в любых других средах с мелкомасштабными флуктуациями параметров, когда справедлив рэлеевский закон рассеяния [8]. Сильное рассеяние монопольного типа наблюдается в жидкостях, содержащих пузырьки газа; коэффициент затухания звука при этом [9]

$$\alpha = \beta \omega^4, \quad \beta = \frac{4\pi n a^2}{\omega_*^4}, \quad (4)$$

где a – радиус пузырьков, n – их объемная концентрация, ω_* – резонансная частота. Во всех пере-

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Институт транспортного строительства,
Москва

численных случаях закон дисперсии (2) должен иметь вид

$$k = \frac{\omega}{c} + i\beta\omega^4, \quad (5)$$

а эволюционное уравнение (1) будет таким:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\beta \frac{\partial^4 p}{\partial \tau^4}. \quad (6)$$

В отличие от уравнений Бюргерса и КдФ, процессы, описываемые уравнением (6), насколько нам известно, не исследовались.

Удобно записать (6) в безразмерных обозначениях:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = -R \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4}, \quad (7)$$

где

$$V = \frac{p}{p_0}, \quad \theta = \omega_0 \tau, \quad z = \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} \omega_0 p_0 x = \frac{x}{x_s}, \quad (8)$$

$$R = \alpha x_s = \frac{\beta \omega_0^3 c^3 \rho}{\varepsilon p_0},$$

x_s – характерная нелинейная длина (расстояние образования разрыва [1]), ω_0 – характерная частота, а R – безразмерное число – единственный критерий подобия, аналогичный обратному акустическому числу Рейнольдса–Гольдберга [1] в уравнении (1).

Если в уравнении (7) пренебречь нелинейным членом, его решение, отвечающее исходному возмущению

$$V(z=0, \theta) = V_0(\theta), \quad (9)$$

будет иметь вид

$$V(z, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, \theta - \theta') V_0(\theta') d\theta' = \exp\left(-Rz \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}\right) V_0(\theta), \quad (10)$$

где

$$G(z, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-R\omega^4 z - i\omega\theta) d\omega \quad (11)$$

есть функция Грина. В частности, ступенчатое исходное возмущение (9) $V_0 = \text{sign}(\theta)$ эволюционирует по закону

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega\theta)}{\omega} \exp(-R\omega^4 z) d\omega = V_0(z^{-1/4}\theta). \quad (12)$$

Решение (12) является автомодельным; ширина бесконечно крутого (при $z=0$) фронта с увеличением пройденного волной расстояния растет как $z^{1/4}$.

Если в уравнении (7) пренебречь старшей производной, ответственной за рассеяние, нелинейные эффекты вызовут сужение фронта по закону $(z_0 - z)^{-1}$ вплоть до точки $z = z_0$, где образуется разрыв. Очевидно, две противоположные тенденции могут привести к формированию стационарной волны типа (3). Динамику формирования фронта можно описать, отыскивая решение уравнения

(7) в виде $V = \text{th} \frac{\theta}{\theta_f}$, где $\theta_f = \theta_f(z)$ – неизвестная ширина фронта.

Подставляя указанную форму в (7) и ограничиваясь в полученном выражении линейными по θ членами, ответственными за наклон фронта в окрестности его центра $\theta = 0$, получим уравнение

$$\frac{d\theta_f}{dz} = -1 + 16R\theta_f^{-3}. \quad (13)$$

Решение (13)

$$\frac{z - C}{(16R)^{1/3}} = \frac{1}{6} \ln \frac{S^2 + S + 1}{(S-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arctg} \frac{2S+1}{\sqrt{3}} - S, \quad (14)$$

$$S = \frac{\theta_f}{(16R)^{1/3}},$$

где константа C определяется по заданной исходной ширине фронта $\theta_f(z=0)$, описывает приближение ширины $\theta_f(z)$ к своему “стационарному” значению $(16\Gamma)^{1/3} = \lim_{z \rightarrow \infty} \theta_f(z)$.

Заметим, однако, что стационарный профиль

$$V = \text{th} \frac{\theta}{(16R)^{1/3}} \quad (15)$$

не является точным решением (7), зато удовлетворяет другому уравнению

$$R \frac{d^4 V}{d\theta^4} = \left(V - \frac{3}{4}V^3\right) \frac{dV}{d\theta}, \quad (16)$$

являющемуся “стационарной версией” обобщенного эволюционного уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f(V)}{\partial \theta} = -R \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4} \quad (17)$$

при законе нелинейности $f(V) = \frac{V^2}{2} - \frac{3V^4}{16}$. Обыкновенное дифференциальное уравнение типа (16)

$$R \frac{d^4 V}{d\theta^4} = V \frac{dV}{d\theta}, \quad (18)$$

которое отвечает (7) и описывает стационарную волну в квадратично-нелинейной среде, имеет монотонно возрастающее частное решение в квадратурах

$$\theta = \left(\frac{40}{9}R\right)^{1/3} \int_0^V \frac{dy}{(1-y^2)^{2/3}}, \quad (19)$$

достигающее значения $V = 1$ за конечное время $\theta = \theta_*$,

$$\theta_* = \left(\frac{20}{9}R\right)^{1/3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 3.4R^{1/3}, \quad (20)$$

где Γ – гамма-функция. Решение (19) изображено на рис. 1. Кривые 1–5 отвечают значениям числа R , равным соответственно $2.2 \cdot 10^{-4}$, $6.1 \cdot 10^{-3}$, $2.8 \cdot 10^{-2}$, $7.7 \cdot 10^{-2}$, $2.2 \cdot 10^{-1}$. С увеличением R процесс рассеяния усиливается и фронт становится шире.

Заметим, что в точке $\theta = \theta_*$ первая и вторая производные функции V обращаются в нуль, однако третья производная положительна, поэтому рост V в области $\theta > \theta_*$ продолжается. Таким образом, стационарный фронт, описываемый решением (19), формируется для возмущения, неограниченно растущего на бесконечности. Отличие от поведения стационарного решения (3) уравнение Бюргера (1) (для которого $V \rightarrow 1$ при $\theta \rightarrow \infty$) связано с тем, что более сильная частотная зависимость потерь на рассеяние (ω^4 вместо ω^2) может быть скомпенсирована усиленным притоком энергии к области фронта, который обеспечивается неограниченным ростом V при $\theta \rightarrow \infty$.

На рис. 2 изображено другое стационарное решение уравнения (18), полученное численным интегрированием для значения числа $R = 0.5$. Кривая 1 изображает функцию $V(\theta)$, кривые 2 и 3 – ее первую и вторую производные. Видно, что ограниченное (при $\theta \rightarrow \infty$) решение получается при немонотонном характере нарастания фронта: функция $V(\theta)$ асимптотически стремится к единице, совершая сильно затухающие осцилляции с периодом, равным времени установления.

Следует указать, что эволюционное уравнение (7) для квадратично-нелинейной рассеивающей среды имеет автомодельное решение вида

$$V = \frac{1}{z^{3/4}} \Phi\left(\xi = \frac{\theta}{z^{1/4}}\right). \quad (21)$$

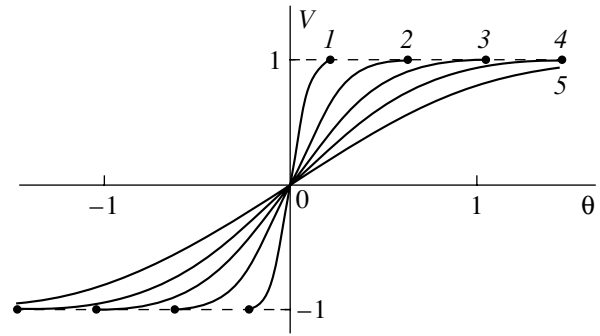


Рис. 1. Форма ударного фронта, описываемая точным решением (19) уравнения (7), для различных значений числа R .

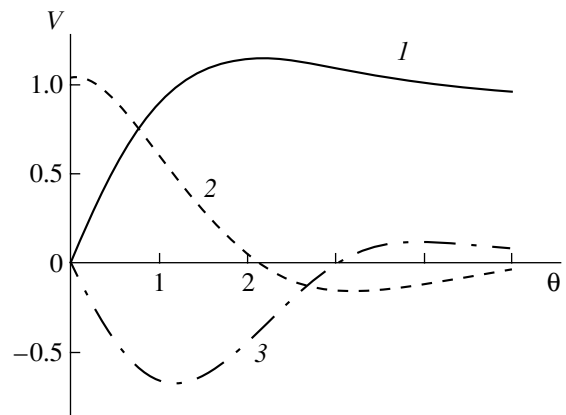


Рис. 2. Форма ограниченной стационарной волны (1) и ее производные: первая (2) и вторая (3) для значения $R = 0.5$.

Подстановка (21) сводит (7) к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$R\Phi^{(4)} = \Phi\Phi' + \frac{1}{4}\xi\Phi' + \frac{3}{4}\Phi. \quad (22)$$

Если пренебречь нелинейным членом, решением (22) будет функция

$$\Phi(\xi) = C \int_0^\infty \omega^2 \sin(\omega\xi) \exp(-R\omega^4) d\omega. \quad (23)$$

Профиль волны (23) ведет себя как третья производная по ξ от ступенеобразного возмущения типа (12), т.е. описывает одиночный трехполярный импульс. Форма этого импульса с учетом нелинейности может быть построена лишь с помощью численного интегрирования (22).

Посмотрим теперь, как убывает плотность энергии волны $E = \langle V^2 \rangle$, где угловые скобки обозначают среднее по периоду (для периодических по θ сигналов), либо интеграл по промежутку

времени, в течение которого $V \neq 0$ (для ограниченных по θ возмущений). Умножим уравнение (7) на $2V$, проинтегрируем по θ и придем к соотношению

$$\frac{dE}{dz} = -2R \left\langle \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right)^2 \right\rangle. \quad (24)$$

Для линейной задачи, пользуясь формулами (10), (11), можно получить выражение

$$\frac{dE}{dz} = -4\pi R \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 |S_0(\omega)|^2 \exp(-2Rz\omega^4) d\omega \quad (25)$$

(S_0 – исходный спектр), из которого следует, что скорость уменьшения E по мере распространения волны пропорциональна числу R (8). Поскольку явный вид (10), (11) линейного решения известен, можно непосредственно вычислить левую часть (25) и показать, что соотношение (24) выполняется тождественно.

Общее решение уравнения (7) с учетом нелинейного члена получить не удастся, однако можно рассчитать убыль энергии при распространении стационарной волны. С помощью интегрирования по частям и перехода к новой переменной интегрирования (от θ к V) среднее в правой части (24) преобразуется следующим образом:

$$\left\langle \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right)^2 \right\rangle = - \int_{-1}^1 \frac{d^3 V}{d\theta^3} dV = \frac{2}{3R}. \quad (26)$$

При вычислении интеграла было использовано “стационарное” уравнение (18). Подставляя результат (26) в соотношение (24), получим

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{4}{3}. \quad (27)$$

Следовательно, скорость убывания плотности энергии в области ударного фронта не зависит от коэффициента линейных потерь R – точно так же, как и в случае стационарной волны, описываемой уравнением Бюргерса.

В некоторых рассеивающих средах зависимость коэффициента затухания волны от частоты отличается от закона ω^4 . Примерами могут служить биологические ткани [7], а также случайно-неоднородные среды [8], в которых указанная зависимость ω^4 с увеличением частоты переходит в более медленную ω^2 . Так, для сред с

флуктуациями показателя преломления закон дисперсии (5) следует переписать в виде

$$k = \frac{\omega}{c} + i \frac{\beta \omega^4}{1 + \gamma \omega^2} \quad (28)$$

$$\beta = \frac{8 \langle \mu^2 \rangle a^3}{c^4}, \quad \gamma = \frac{4a^2}{c^2},$$

где $\langle \mu^2 \rangle$ – средний квадрат флуктуаций показателя преломления, a – радиус корреляции. Соответствующее обобщение эволюционного уравнения (7) имеет вид

$$\left(A^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1 \right) \left(\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = R \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4}. \quad (29)$$

При записи (29) использованы безразмерные обозначения (8) и $A^2 = \gamma \omega_0^2$.

Уравнение (29) может быть записано в нескольких интегро-дифференциальных формах; одна из них

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{R}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_0^\infty K(\xi) V(\theta - \xi) d\xi. \quad (30)$$

где ядро дается выражением

$$K(\xi) = \delta(\xi) + \frac{1}{A} \operatorname{sh} \left(\frac{\xi}{A} \right). \quad (31)$$

Нетрудно видеть, что при больших значениях числа A модель (29)–(31) переходит в обычное уравнение Бюргерса (1), а в другом предельном случае, при малых A , – в уравнение (7).

Свойства затухающих нелинейных волн, распространение которых описывается эволюционными уравнениями, содержащими диссипативные члены четвертого и более высоких порядков (а также их комбинации), важно исследовать в связи с рядом приложений к геофизике, нелинейной диагностике и медицине.

Разумеется, в конкретных задачах будут использованы численные методы. Вместе с тем, универсальность таких уравнений делает желательным изучение их общих свойств и построение аналитических решений.

Работа частично поддержана грантами РФФИ, ИНТАС и “Университеты России”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. С. 44.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990. С. 335.
3. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981.

4. Нелинейные волны / Под ред. С. Лейбовича, А. Сибасса. М.: Мир, 1977.
5. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1984.
6. *Ямицков В.С.* Волновые процессы в массиве горных пород. М.: Недра, 1984. С. 25, 26.
7. Применение ультразвука в медицине / Под ред. К. Хилла. М.: Мир, 1989. С. 146.
8. *Чернов Л.А.* Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1975. С. 42.
9. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. С. 363.