АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2004, том 50, № 4, с. 1–15

УДК 534.222

ПРИНЦИП АПРИОРНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИММЕТРИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

© 2004 г. Н. Х. Ибрагимов, О. В. Руденко*

Центр исследований по групповому анализу
Технологический институт Блекинге
371 79 Карлскрона, Швеция
E-mail:nib@bth.se
**Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова*
119992 Москва, Ленинские горы
E-mail:rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 10.02.2004 г.

Предлагается принцип априорного использования симметрий как новый подход к решению нелинейных задач, основанный на разумном усложнении математической модели. Такое усложнение часто приводит к возникновению дополнительной симметрии и, следовательно, открывает возможности для поиска новых аналитических решений. Кратко изложены основы методов группового анализа задач нелинейной акустики. Возможности подхода иллюстрированы точными решениями, имеющими самостоятельное значение для теории волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Математические модели физических процессов, полученные на основе общих представлений (“из первых принципов”), часто имеют очень сложный вид. Примерами могут служить системы уравнений механики сплошных сред или электродинамики, которые очень трудно решать в общем виде с помощью известных аналитических и численных методов, особенно когда нужно учесть нелинейность, неоднородность, наследственные и другие свойства реальной среды. Естественно поэтому максимально упрощать модельные уравнения, учитывая специфику конкретной задачи. Кажется очевидным, что для более простых моделей легче подыскать подходящий метод решения. Упрощение достигается за счет абстрагирования от менее существенных деталей явления и фокусировки внимания на наиболее важных его свойствах. Глубокое описание идей, лежащих в основе такого подхода, дано А.А. Андроновым, А.А. Виттом и С.Э. Хайкиным в их классической монографии по теории колебаний [1]. Исторически важным примером использования этих идей в теории волн служит развитие Р.В. Хохловым [2] метода медленно изменяющегося профиля [3] , позволившего значительно расширить возможности аналитического решения нелинейных волновых задач [4] .

Казалось бы, иной путь – усложнение модели с целью отыскания решений интересующей нас более простой задачи – логически абсурден. Тем не менее, иногда сложная модель анализируется проще. Известным в акустике примером такого “полезного усложнения” служит уравнение Бюргерса (см., например, [4] и принятые там обозначения):

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

Добавление в правую часть “вязкого” члена, пропорционального высшей (второй) производной, удивительным образом не усложняет исходное уравнение первого порядка, а напротив, дает возможность решить задачу. Как известно, уравнение Бюргерса с помощью преобразования

$$V = 2\Gamma\frac{\partial}{\partial \theta}\ln U$$

удается линеаризовать и свести к уравнению теплопроводности для U. Затем можно совершить предельный переход $\Gamma \longrightarrow 0$ и получить физически корректное решение соответствующей задачи для “невязкой” среды.

Этот пример, конечно, случаен и не дает общего подхода. Однако опыт групповой классификации дифференциальных уравнений показывает, что очень часто усложнение модели обогащает ее новыми симметриями. Напротив, упрощение может привести к потере ряда свойств симметрии, присущих более общей модели, и к утрате физически важных решений.

Как известно, регулярным и эффективным методом нахождения симметрий является теория непрерывных групп Ли [5, 6]. Традиционный путь использования групп Ли для отыскания аналитических решений дифференциальных уравнений состоит в следующем. Рассматриваются конкретные уравнения или системы уравнений. Для них вычисляются группы симметрии. Затем эти группы используются для построения частных точных решений, законов сохранения, инвариантов. Более сложной и интересной представляется проблема “групповой классификации” уравнений, содержащих неизвестные параметры или функции. Под групповой классификацией понимается выбор таких параметров (функций), при котором допускаемая группа более широка, чем группа симметрии исходного общего уравнения. На этом пути уже получено множество уравнений, обладающих физически интересными решениями (см., например, [7–10]. Описанный выше подход может быть назван апостериорным, поскольку анализируются данные системы уравнений.

В настоящей работе предлагается принципиально иной и весьма простой подход к выявлению новых симметричных моделей, основанный на разумном усложнении данной модели без потери ее физического содержания. Основой этого подхода, который мы называем принципом априорного использования симметрий, является теорема Н.Х.Ибрагимова о проекциях групп эквивалентности (см. раздел 4.2).

Для лучшего понимания проблемы начнем с изложения стандартных методов группового анализа дифференциальных уравнений, адаптировав его к моделям теории нелинейных волн и нелинейной акустики.

2. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

2.1. Вычисление симметрий дифференциальных уравнений

Рассмотрим эволюционное уравнение в частных производных второго порядка:

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}), \quad \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \neq 0. \tag{1}$$

Определение. Совокупность G обратимых преобразований переменных t, x, u

$$\bar{t} = f(t, x, u, a), \quad \bar{x} = g(t, x, u, a), \quad \bar{u} = h(t, x, u, a), \tag{2}$$

зависящая от непрерывного параметра a, называется однопараметрической группой, допускаемой уравнением (1), или группой симметрии уравнения (1), если уравнение (1) сохраняет свою форму в новых переменных $\bar{t}$, $\bar{x}$, $\bar{u}$, а также если G содержит все обратные преобразования, тождественное преобразование

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{u} = u,$$

и композиции любых двух последовательных преобразований, то есть

$$\bar{\bar{t}} \equiv f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b) = f(t, x, u, a+b),$$

$$\bar{\bar{x}} \equiv g(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b) = g(t, x, u, a+b),$$

$$\bar{\bar{u}} \equiv h(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, b) = h(t, x, u, a+b).$$

Таким образом, группа G допускается уравнением (1), если преобразование (2) группы G переводит любое решение $u = u(t, x)$ уравнения (1) в решение $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x})$ уравнения

$$\bar{u}_{\bar{t}} = F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}), \tag{3}$$

где F – та же самая функция, что и в уравнении (1).

Согласно теории Ли, нахождение группы симметрии G эквивалентно вычислению ее инфинитезимального преобразования

$$\bar{t} \approx t + a\tau(t, x, u), \quad \bar{x} \approx x + a\xi(t, x, u), \quad \bar{u} \approx u + a\eta(t, x, u), \tag{4}$$

получаемого из общих формул (2) их разложением в ряд Тейлора по параметру a с удержанием только линейных членов. Следуя Ли, удобно ввести символ преобразования (4) – дифференциальный оператор

$$X = \tau(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{5}$$

действие которого на любую дифференцируемую функцию $J(t, x, u)$ дается формулой

$$X(J) = \tau(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial J}{\partial u}. \tag{6}$$

Оператор (5) называют также инфинитезимальным оператором или генератором группы G.

Преобразование (2), отвечающее оператору (5), находится как решение уравнений Ли

$$\frac{d\bar{t}}{da} = \tau(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \quad \frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \quad \frac{d\bar{u}}{da} = \eta(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \tag{7}$$

с начальными условиями

$$\bar{t}|_{a=0} = t, \quad \bar{x}|_{a=0} = x, \quad \bar{u}|_{a=0} = u.$$

Обратимся теперь снова к уравнению (3). Выражения для производных $\bar{u}_{\bar{t}}$, $\bar{u}_{\bar{x}}$, $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ в уравнении (3) получаются с помощью преобразования (2), рассматриваемого как обычная замена переменных. Затем, разлагая выражения для этих производных в ряд по параметру a, получаем инфинитезимальную форму преобразований

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\bar{t}} &\approx u_t + a\varsigma_0(t, x, u, u_t, u_x),\\ \bar{u}_{\bar{x}} &\approx u_x + a\varsigma_1(t, x, u, u_t, u_x),\\ \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &\approx u_{xx} + a\varsigma_2(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}),\end{aligned} \tag{8}$$

где функции ς_0, ς_1, ς_2 даются следующими “формулами продолжения”

$$\begin{aligned}\varsigma_0 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\ \varsigma_1 &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\ \varsigma_2 &= D_x(\varsigma_1) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{tx} D_x(\tau).\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь D_t и D_x обозначают полные производные по t и x:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x},$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Подстановка (4) и (8) в уравнение (3) дает

$$\bar{u}_{\bar{t}} - F(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{\bar{x}}, \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}) \approx u_t - F(t, x, u, u_x, u_{xx}) +$$
$$+ a\left(\varsigma_0 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\varsigma_1 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\varsigma_2 - \frac{\partial F}{\partial t}\tau - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial u}\eta\right).$$

Поэтому, в силу уравнения (1), уравнение (3) приводит к условию

$$\varsigma_0 - \frac{\partial F}{\partial u_x}\varsigma_1 - \frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\varsigma_2 - \frac{\partial F}{\partial t}\tau - \frac{\partial F}{\partial x}\xi - \frac{\partial F}{\partial u}\eta = 0, \tag{10}$$

где u_t заменено на $F(t, x, u, u_x, u_{xx})$ в выражениях для ς_0, ς_1, ς_2.

Уравнение (10) определяет все инфинитезимальные симметрии уравнения (1) и поэтому называется определяющим уравнением. Его удобно записать в компактной форме

$$X[u_t - F(t, x, u, u_x, u_{xx})] = 0. \tag{11}$$

Здесь X означает продолжение оператора (5) на производные первого и второго порядка:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\nabla}{\partial u} + \varsigma_0\frac{\partial}{\partial u_t} + \varsigma_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \varsigma_2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

Определяющее уравнение (10) (или его эквивалент (11)) является однородным линейным уравнением в частных производных второго порядка для неизвестных функций τ, ξ, η. Поэтому множество L всех решений определяющего уравнения образует векторное пространство. Более того, оно замкнуто относительно взятия коммутатора, то есть пространство L вместе с операторами $X_1, X_2 \in L$ содержит также их коммутатор $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$. Это свойство означает, что множество всех решений определяющего уравнения является алгеброй Ли. В частности, если L есть конечномерное пространство L_r с базисом $X_1, \ldots, X_r$, то $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, где c_{ij}^k – числа, называемые структурными константами алгебры Ли L_r.

Заметим, что уравнение (10) должно выполняться тождественно по отношению ко всем входящим в него переменным $t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}$; последние должны рассматриваться как 6 независимых переменных. В результате определяющее уравнение распадается на систему нескольких уравнений, и получается переопределенная система (она содержит больше уравнений, чем 3 неизвестных функции τ, ξ, η). Поэтому практически всегда определяющее уравнение удается легко решить. Для упрощения расчетов воспользуемся следующей леммой.

Лемма. В случае уравнения вида (1) преобразование симметрии (2) имеет вид

$$\bar{t} = f(t, a), \quad \bar{x} = g(t, x, u, a), \quad \bar{u} = h(t, x, u, a). \tag{12}$$

Это означает, что инфинитезимальные симметрии можно искать в виде

$$X = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{13}$$

Доказательство. Выделим в определяющем уравнении (10) члены, содержащие переменную u_{tx}. Как следует из формул продолжения (9), u_{tx} содержится только в ς_2, а именно, в последнем его слагаемом $u_{tx}D_x(\tau)$. Так как определяющее уравнение (10) выполняется тождественно по всем переменным $t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{tx}$, можно заключить, что $D_x(\tau) \equiv \tau_x + u_x\tau_u = 0$, откуда $\tau_x = \tau_u = 0$. Таким образом, $\tau = \tau(t)$ и генератор (5) принимает форму (13), что и доказывает теорему. Итак, формулы продолжения (9) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\varsigma_0 &= D_t(\eta) - u_x D_t(\xi) - \tau'(t)u_t,\\ \varsigma_1 &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi),\\ \varsigma_2 &= D_x(\varsigma_1) - u_{xx} D_x(\xi) \equiv\\ &\equiv D_x^2(\eta) - u_x D_x^2(\xi) - 2u_{xx} D_x(\xi).\end{aligned} \tag{14}$$

2.2. Точные решения, получаемые с помощью групп симметрии

Методы группового анализа открывают два основных пути конструирования точных решений: групповые преобразования известных решений и нахождение инвариантных решений.

Групповые преобразования известных решений. Этот путь основан на том факте, что группа симметрии преобразует любое решение исследуемого уравнения в решение того же уравнения.

Именно, пусть (2) есть группа преобразований симметрии уравнения (1) и пусть функция

$$u = \Phi(t, x)$$

есть решение уравнения (1). Поскольку (2) есть преобразование симметрии, решение (12) может быть записано в новых переменных

$$\bar{u} = \Phi(\bar{t}, \bar{x}).$$

Заменяя здесь $\bar{u}$, $\bar{t}$, $\bar{x}$ с помощью (2), получим

$$h(t, x, u, a) = \Phi(f(t, x, u, a), g(t, x, u, a)). \quad (15)$$

Решив это уравнение относительно u, получим однопараметрическое (с параметром a) семейство новых решений уравнения (1). Следовательно, любое известное решение может служить источником многопараметрического класса новых решений при условии, что рассматриваемое дифференциальное уравнение допускает многопараметрическую группу симметрии. В следующем разделе описанная процедура иллюстрирована на примере уравнения Бюргерса.

Инвариантные решения. Если групповое преобразование переводит решение в себя, получаем так называемое инвариантное решение. При известной инфинитезимальной симметрии (5) уравнения (1), инвариантное решение получается следующим образом. Вычисляются два независимых инварианта $J_1 = \lambda(t, x)$ и $J_2 = \mu(t, x, u)$ путем решения уравнения $X(J) = 0$ (см. (6)) или его характеристической системы

$$\frac{dt}{\tau(t, x, u)} = \frac{dx}{\xi(t, x, u)} = \frac{du}{\eta(t, x, u)}. \quad (16)$$

Затем следует выразить один из инвариантов как функцию другого

$$\mu = \phi(\lambda), \quad (17)$$

решить уравнение (17) относительно u и подставить полученное выражение в уравнение (1). Как показал еще Ли, в результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\phi(\lambda)$ одной переменной. Эта процедура уменьшает число независимых переменных на единицу. Дальнейшее упрощение может быть достигнуто рассмотрением инвариантных решений, порождаемых двумя инфинитезимальными симметриями.

3. УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА КАК ПРИМЕР

Методы, описанные в предыдущем разделе, иллюстрированы ниже на примере уравнения Бюргерса [11]

$$u_t = uu_x + u_{xx}. \quad (18)$$

3.1. Вычисление инфинитезимальных симметрий

Определяющее уравнение (10) имеет вид

$$\varsigma_0 - \varsigma_2 - u\varsigma_1 - \eta u_x = 0, \quad (19)$$

где ς_0, ς_1, ς_2 даются формулами (14). Выделим и приравняем нулю члены, содержащие u_{xx}. Имея в виду, что u_t должно быть заменено на $uu_x + u_{xx}$, и подставляя в ς_2 выражения

$$\begin{aligned} D_x^2(\xi) &= D_x(\xi_x + \xi_u u_x) = \\ &= \xi_u u_{xx} + \xi_{uu} u_x^2 + 2\xi_{xu} u_x + \xi_{xx}, \\ D_x^2(\eta) &= D_x(\eta_x + \eta_u u_x) = \\ &= \eta_u u_{xx} + \eta_{uu} u_x^2 + 2\eta_{xu} u_x + \eta_{xx}, \end{aligned} \quad (20)$$

придем к следующему уравнению:

$$2\xi_u u_x + 2\xi_x - \tau'(t) = 0.$$

Оно дает два уравнения, а именно, $\xi_u = 0$ и $2\xi_x - \tau'(t) = 0$. Следовательно, ξ зависит только от t, x и имеет вид

$$\xi = \frac{1}{2}\tau'(t)x + p(t). \quad (21)$$

Из (21) следует $D_x^2(\xi) = 0$. Теперь определяющее уравнение (19) сводится к следущей форме:

$$u_x^2\eta_{uu} + \left[\frac{1}{2}\tau'(t)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta\right]u_x + $$
$$+ u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0$$

и распадается на три уравнения

$$\begin{gathered} \eta_{uu} = 0, \\ \frac{1}{2}\tau'(t)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\eta_{xu} + \eta = 0, \\ u\eta_x + \eta_{xx} - \eta_t = 0. \end{gathered} \quad (22)$$

Первое уравнение (22) дает $\eta = \sigma(t, x)u + \mu(t, x)$, при этом второе уравнение (22) становится таким:

$$\left(\frac{1}{2}\tau'(t) + \sigma\right)u + \frac{1}{2}\tau''(t)x + p'(t) + 2\sigma_x + \mu = 0,$$

откуда

$$\sigma = -\frac{1}{2}\tau'(t), \quad \mu = -\frac{1}{2}\tau''(t)x - p'(t).$$

Таким образом, мы имеем

$$\eta = -\frac{1}{2}\tau'(t)u - \frac{1}{2}\tau''(t)x - p'(t). \quad (23)$$

Наконец, подстановка (23) в третье уравнение (22) дает

$$\frac{1}{2}\tau'''(t)x + p''(t) = 0,$$

откуда $\tau'''(t) = 0$, $p''(t) = 0$ и поэтому

$$\tau(t) = C_1t^2 + 2C_2t + C_3, \quad p(t) = C_4t + C_5.$$

Принимая во внимание (21) и (23), мы в конечном счете приходим к следующему общему решению определяющего уравнения (19):

$$\tau(t) = C_1t^2 + 2C_2t + C_3, \quad \xi = C_1tx + C_2x + C_4t + C_5,$$
$$\eta = -(C_1t + C_2)u - C_1x - C_4.$$

Оно содержит пять произвольных констант C_i. Это означает, что инфинитезимальные симметрии уравнения Бюргерса (18) образуют пятимерную алгебру Ли, "натянутую" на следующие линейно независимые операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{24}$$
$$X_5 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x + tu)\frac{\partial}{\partial u}.$$

3.2. Решения, получаемые с помощью группы симметрии

Нетрудно найти преобразование (12) группы, допускаемое уравнением Бюргерса, путем решения уравнений Ли для основных инфинитезимальных симметрий (24). Для генераторов (24) уравнения Ли (7) имеют "треугольную" форму

$$\frac{d\bar{t}}{da} = \tau(\bar{t}), \quad \frac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{t}, \bar{x}), \quad \frac{d\bar{u}}{da} = \eta(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \tag{25}$$

которая удобна для последовательного интегрирования с использованием соответствующих начальных условий (см. (7))

Рассмотрим, например, генератор X_5 из набора (24). Уравнения Ли (25) для этого случая имеют вид

$$\frac{d\bar{t}}{da} = \bar{t}^2, \quad \frac{d\bar{x}}{da} = \bar{t}\bar{x}, \quad \frac{d\bar{u}}{da} = -(\bar{x} + \bar{t}\bar{u}).$$

Интегрирование первого уравнения дает

$$\bar{t} = -\frac{1}{a + C_1}.$$

Требуя в соответствии с начальным условием для уравнений Ли, чтобы $\bar{t} = t$ при $a = 0$, найдем значение постоянной C_1 (константы по отношению к переменной a в уравнениях Ли): $C_1 = -1/t$. Таким образом,

$$\bar{t} = \frac{t}{1 - at}. \tag{26}$$

Подставляя (26) во второе уравнение Ли, найдем

$$\bar{x} = \frac{x}{1 - at}. \tag{27}$$

Уравнения (26) и (27) определяют специальную группу проективного преобразования (преобразование Мёбиуса) на плоскости. Подставляя (26) и (27) в третье уравнение Ли, получим линейное неоднородное уравнение

$$\frac{d\bar{u}}{da} + \frac{t}{1 - at}\bar{u} + \frac{x}{1 - at} = 0.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием: $\bar{u} = u$ при $a = 0$, найдем

$$\bar{u} = u(1 - at) - ax. \tag{28}$$

Используя проективные преобразования (26)–(28) и применяя уравнение (15) к любому известному решению $u = \Phi(t, x)$ уравнения Бюргерса, можно получить следующее однопараметрическое семейство новых решений:

$$u = \frac{ax}{1 - at} + \frac{1}{1 - at}\Phi\left(\frac{t}{1 - at}, \frac{x}{1 - at}\right). \tag{29}$$

Выражение (29) имеет важный физический смысл. Оно описывает взаимодействие сигнала $u = \Phi(t, x)$ с линейным участком профиля пилообразной волны. Например, если высокочастотный цуг квазигармонического сигнала помещен на задний "склон пилы", крутизна которого в процессе распространения волны убывает (отрицательные значения константы a), происходит уменьшение амплитуды сигнала и его частоты. Напротив, на укручающемся переднем склоне низкочастотной волны (константа a положительна) сигнал усиливается, а частота его растет. Эти явления описаны теоретически и наблюдались в экспериментах (см. [12, 13]).

Пример 1. Можно получить множество новых решений, выбирая в качестве исходного $u = \Phi(t, x)$ любое инвариантное решение. Возьмем, к примеру, решение, инвариантное относительно сдвига вдоль координаты x, генерируемое оператором X_2 из (24). В этом случае инвариантами будут $\lambda = t$, $\mu = u$, и уравнение (17) запишется как $u = \phi(t)$. Подстановка этого выражения в уравнение Бюргерса приводит к тривиальному решению в виде константы: $u = k$. Оно преобразуется по формуле (29) в следующее однопараметрическое семейство решений:

$$u = \frac{k + ax}{1 - at},$$

используемых в нелинейной акустике для описания гладких участков профиля пилообразных волн [4].

Пример 2. Одним из наиболее интересных с физической точки зрения решений является стационарное решение

$$u = \Phi(x),$$

полученное из условия инвариантности относительно группы переносов по времени, генерируемой оператором X_1. Подстановка в уравнение Бюргерса приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi'' + \Phi\Phi' = 0. \tag{30}$$

Интегрируя его один раз: $\Phi' + \Phi^2/2 = C_1$ и интегрируя снова, полагая константу равной $C_1 = 0$, $C_1 = \nu^2 > 0$, $C_1 = -\nu^2 < 0$, получим

$$\Phi = \frac{2}{x + C}, \quad \Phi = \nu\,\mathrm{th}\left(C + \frac{\nu}{2}x\right),$$
$$\Phi = \nu\,\mathrm{tg}\left(C - \frac{\nu}{2}x\right). \tag{31}$$

Заметим, что преобразование Галилея $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x + at$, $\bar{u} = u - a$, генерируемое оператором X_3, отображает X_1 в сумму $X_1 + cX_2$. Соответственно, оно отображает стационарное решение в бегущую волну $u = u(x - ct)$, легко получаемую из решений (31).

Как известно, решение в виде “гиперболического тангенса” описывает одиночную ударную волну с конечной шириной фронта [4, 14]. Профили других двух стационарных волн (31) содержат особенности; поэтому эти решения в физических задачах используются реже.

Пример 3. Если применить преобразование (29) к стационарным решениям (31), получатся следующие новые нестационарные решения:

$$u = \frac{ax}{1 - at} + \frac{2}{x + C(1 - at)},$$
$$u = \frac{1}{1 - at}\left[ax + \nu\,\mathrm{th}\left(C + \frac{\nu x}{2(1 - at)}\right)\right], \tag{32}$$
$$u = \frac{1}{1 - at}\left[ax + \nu\,\mathrm{tg}\left(C - \frac{\nu x}{2(1 - at)}\right)\right].$$

Пример 4. Найдем инвариантные решения для проективной группы, генерируемой оператором X_5. Характеристическая система (16) запишется так:

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{tx} = -\frac{du}{x + tu}.$$

Решая ее, найдем два инварианта $\lambda = x/t$, $\mu = x + tu$. Таким образом, общее выражение (17) для инвариантного решения примет вид

$$u = -\frac{x}{t} + \frac{1}{t}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{t}. \tag{33}$$

Подставляя это выражение в уравнение Бюргерса (18), получим для $\Phi(\lambda)$ в точности уравнение (30). Следовательно, его общее решение получается из (31) заменой x на λ. Соответствующие инвариантные решения получаются подстановкой в (33) результата для $\Phi(\lambda)$. Например, используя для $\Phi(\lambda)$ вторую формулу (31) и полагая в ней $\nu = \pi$, приходим к решению

$$u = \frac{1}{t}\left[-x - \pi\,\mathrm{th}\left(C + \frac{\pi x}{2t}\right)\right], \tag{34}$$

выведенному Р.В.Хохловым путем физических рассуждений (см., например, [14], гл. 9, § 4). Заметим, что формула (34) получается также из второй формулы (32), если положить $\nu = -\pi a$ и устремить a к бесконечности.

Пример 5. Решения, инвариантные относительно группы растяжений, генерируемой оператором X_4, в физической литературе часто называют автомодельными решениями. В этом случае характеристическая система

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = -\frac{du}{u}$$

дает следующие инварианты: $\lambda = x/\sqrt{t}$, $\mu = \sqrt{t}\,u$. Следовательно, инвариантное решение нужно искать в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

В результате получается уравнение [4] для нахождения автомодельных решений уравнения Бюргерса:

$$\Phi'' + \Phi\Phi' + \frac{1}{2}(\lambda\Phi' + \Phi) = 0. \tag{35}$$

Интегрируя его один раз, получим

$$\Phi' + \frac{1}{2}(\Phi^2 + \lambda\Phi) = C.$$

При $C = 0$ это уравнение легко интегрируется и дает решение, исчезающее на $\pm\infty$ (см. [14], гл. 9, §4 или [10], т. 1, секц.11.4):

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)}{B + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}, \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2)ds,$$

где B – произвольная константа и erf – функция ошибок.

Пример 6. Конструирование точных решений может быть основано не только на основных инфинитезимальных симметриях (24), но также на их линейных комбинациях. Рассмотрим, к примеру, оператор

$$X_1 + X_5 = (1 + t^2)\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} - (x + tu)\frac{\partial}{\partial u}. \quad (36)$$

Характеристическая система дает следующие инварианты:

$$\lambda = \frac{x}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \mu = \frac{tx}{\sqrt{1 + t^2}} + u\sqrt{1 + t^2}. \quad (37)$$

Таким образом, инвариантное решение имеет вид

$$u = -\frac{tx}{1 + t^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение Бюргерса, придем к следующему уравнению для $\Phi(\lambda)$:

$$\Phi'' + \Phi\Phi' + \lambda = 0. \quad (38)$$

Интегрируя (37) один раз, получим

$$\Phi' + \frac{1}{2}(\Phi^2 + \lambda^2) = C_1. \quad (39)$$

Когда постоянная $C_1 = 0$, решение этого уравнения удается выразить через функции Бесселя:

$$\Phi = 2\frac{d}{d\lambda}\ln\left[\sqrt{\lambda}J_{1/4}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) + C\sqrt{\lambda}Y_{1/4}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)\right],$$

где C – вторая константа.

4. МЕТОД АПРИОРНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ

В разделе 3 даны примеры использования групп симметрии. Но во многих задачах группа симметрии отсутствует или бывает недостаточно широкой для решения данного модельного уравнения. Предлагаемый метод нацелен на построение моделей с повышенной симметрии без потери физического содержания исходной модели. Суть метода состоит в следующем.

Если модель содержит "произвольные элементы" и допускает достаточно широкую группу эквивалентности (см. определение 2 в разделе 4.2.), то группа симметрии находится как подходящая подгруппа группы эквивалентности. В противном случае рассматриваемая нелинейная модель обобщается путем ее "погружения" в более широкую модель достаточно "разумным" образом, чтобы не потерять исходный физический смысл и в то же время достичь желаемого расширения группы эквивалентности. При этом нелинейность модели существенна, так как она придает достаточную гибкость в подборе модели и обеспечивает общность метода.

4.1. Погружение и применение инвариантов Лапласа

Рассмотрим уравнение Ирншоу (см., например, [15]):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\left(1 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^{-(\gamma + 1)}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0, \quad (38)$$

описывающее в переменных Лагранжа одномерное движение сжимаемого газа. Физический смысл переменных: v – смещение частиц среды, c – скорость звука, γ – показатель адиабаты в уравнении состояния.

Уравнение (3) может быть линеаризовано "преобразованием годографа":

$$x = v_\xi, \quad y = v_t, \quad \xi = X(x, y), \quad t = u(x, y), \quad (39)$$

то есть лагранжева координата ξ и время t считаются функциями новых независимых переменных x, y – первых производных от искомой функции v.

Соответствующее линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2(1 + x)^{-(\gamma + 1)}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (40)$$

При малом акустическом числе Маха $|v_x| = |x|$ уравнение (40) аппроксимируют более простым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2[1 - (\gamma + 1)x]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (41)$$

Однако ни уравнение (40), ни его упрощенная версия (41) не решаются, поскольку не обладают достаточно широкой группой симметрии.

Поэтому выберем аппроксимирующее уравнение не по простоте его вида, а по принципу наличия симметрии, достаточной для его разрешимости. Именно, рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\psi^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (42)$$

обобщающее (40) и (41) и зададимся целью найти такую функцию $\psi(x)$, которая, во-первых, совпадала бы при малых $|x|$ с соответствующей функцией в исходном уравнении и, во-вторых, открывала возможность найти общее решение уравнения (42). Выберем $\psi(x)$ так, чтобы уравнение (42) допускало максимально широкую группу.

Хорошо известно, что уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + A(\alpha, \beta)\frac{\partial u}{\partial\alpha} + B(\alpha, \beta)\frac{\partial u}{\partial\beta} + P(\alpha, \beta)u = 0 \quad (43)$$

допускает максимально широкую группу [16, 17] и тем самым может быть решено сведением к обычному волновому уравнению, если инварианты Лапласа [18] для уравнения (43)

$$h = \frac{\partial A}{\partial\alpha} + AB - P, \quad k = \frac{\partial B}{\partial\beta} + AB - P \quad (44)$$

обращаются в нуль. Поэтому вычислим инварианты Лапласа уравнения (42), переписав его в характеристических переменных

$$\alpha = c\int\psi(x)dx - y, \quad \beta = c\int\psi(x)dx + y. \quad (45)$$

В этих переменных (42) принимает каноническую форму (43)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\psi'(x)}{4c\psi^2(x)}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0 \quad (46)$$

с коэффициентами

$$A = B = \frac{\psi'(x)}{4c\psi^2(x)}, \quad P = 0, \quad (47)$$

где x выражается через α и β согласно (45), а именно

$$x = \Psi^{-1}(z), \quad z = \frac{\alpha+\beta}{2c} = \Psi(x) \equiv \int\psi(x)dx. \quad (48)$$

Из уравнений (47) и (48) находим

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{z_\alpha}{z_x} = \frac{1}{2c\psi(x)}\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\psi''}{8c^2\psi^3} - \frac{\psi'^2}{4c^2\psi^4} = \frac{\partial B}{\partial\beta}.$$

Пользуясь этим соотношением, вычисляем инварианты Лапласа (44) для уравнения (46):

$$h = k = \frac{1}{8c^2\psi^4}\left(\psi\psi'' - \frac{3}{2}\psi'^2\right). \quad (49)$$

Следовательно, условия $h = k = 0$ сводятся к одному уравнению, решение которого

$$\psi(x) = (l + sx)^{-2}, \quad s, l = \text{const}.$$

Итак, уравнение (42) с максимально широкой группой симметрии имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2[l + sx]^{-4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Сравнивая его с уравнением (41), видим, что нужно положить константы равными $l = 1$, $s = (\gamma + 1)/4$. Таким образом, находим искомое разрешимое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}x\right]^{-4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \varepsilon = \frac{\gamma+1}{2}, \quad (50)$$

которое аппроксимирует уравнение (40) с достаточной степенью точности при $\varepsilon|x| \ll 1$.

Для решения уравнения (50) перепишем его в канонической форме (46)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = 0. \quad (51)$$

Согласно общей теории, уравнение (51) сводится к простейшему волновому уравнению $w_{\alpha\beta} = 0$ заменой $w = (\alpha + \beta)u$. Поэтому общее решение уравнения (51) дается формулой

$$u(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha+\beta}[\Phi_1(\alpha) + \Phi_2(\beta)] \quad (52)$$

с двумя произвольными функциями Φ_1, Φ_2. Теперь можно вернуться в (52) к переменным x, y. Формулы (45) дают

$$\alpha = -\left[\frac{2c}{\varepsilon(1 + \varepsilon x/2)} + y\right], \quad \beta = -\left[\frac{2c}{\varepsilon(1 + \varepsilon x/2)} - y\right],$$

$$\alpha + \beta = -\frac{4c}{\varepsilon(1 + \varepsilon x/2)}.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (52) с заменой несущественного знака в произвольных функциях дает следующее общее решение уравнения (50):

$$u(x, y) = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon x/2)}{4c}\times$$
$$\times\left[\Phi_1\left(\frac{2c}{\varepsilon(1 + \varepsilon x/2)} + y\right) + \Phi_2\left(\frac{2c}{\varepsilon(1 + \varepsilon x/2)} - y\right)\right]. \quad (53)$$

Суммируя, можно констатировать, что решение (53) удалось найти путем “погружения” интересующей нас модели (38) в более общую модель

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\psi^2\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} = 0. \quad (54)$$

Важно подчеркнуть, однако, что возможность построения решения (53) существенно связана с тем случайным обстоятельством, что уравнение (38) и его обобщение (50) линеаризуются преобразованием (39). Поэтому, хотя этот пример наглядно иллюстрирует идею погружения и показывает, как обобщение модели может привести к ее разрешимости, но он еще не дает практического метода, позволяющего отбирать из обобщенной модели наиболее симметричные уравнения. Такой метод обсуждается в следующем разделе на конкретном примере.

4.2. Метод, основанный на теореме о проекциях

Теорема о проекциях была доказана Н.Х. Ибрагимовым в 1987 году [19] и затем использована в задачах групповой классификации [20], став основой метода "предварительной групповой классификации" (см.также [21–23]).

Перейдем теперь к основным примерам, иллюстрирующим возможности предлагаемого подхода. Эти примеры интересны и сами по себе, поскольку рассматриваются новые нелинейные уравнения. Их физическое содержание обсуждается в следующем разделе.

Начнем с нелинейного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -\beta u, \quad \beta = \mathrm{const} \neq 0. \tag{55}$$

Оно допускает трехмерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{56}$$

Соответственно, уравнение (55) не богато инвариантно-групповыми решениями; их класс ограничен решениями типа бегущих волн, построенными с помощью генераторов переноса X_1, X_2, и автомодельными решениями, построенными с помощью генератора растяжения X_3.

Поэтому используем идею погружения, рассматривая два типа моделей, обобщающих уравнение (55). Первая из них имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - P(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = F(x, u), \tag{57}$$

а в качестве второй возьмем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - Q(x, u)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = F(x, u). \tag{58}$$

Вычисления показывают, что второе обобщение наиболее удачно и является источником группы симметрии, которая значительно богаче, чем у уравнений (55) и (57). Поэтому мы проиллюстрируем основные положения метода априорных симметрий именно на модели (58).

Определение 2. Группа преобразований (2) называется *группой эквивалентности*, если каждое уравнение данного семейства (в рассматриваемом случае семейства (58) с любыми функциями Q, F) переходит в уравнение того же семейства, то есть

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{Q}(\bar{x}, \bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}\right] = \bar{F}(\bar{x}, \bar{u}),$$

где, вообще говоря, функции $\bar{Q}$, $\bar{F}$ не совпадают с Q, F. Генераторы группы эквивалентности имеют вид

$$Y = \xi^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial Q} + \xi^2\frac{\partial}{\partial F}, \tag{59}$$

где

$$\xi^1 = \xi^1(t, x, u), \quad \eta = \eta(t, x, u),$$
$$\mu^1 = \mu^1(t, x, u, Q, F), \quad i = 1, 2.$$

Они образуют алгебру Ли, которая называется алгеброй эквивалентности и обозначается как L_ε. В операторе (59) и ее координатах функции Q, F рассматриваются как новые переменные наряду с физическими переменными t, x, u.

Как показал Л.В.Овсянников [8], алгебру эквивалентности можно найти с помощью инфинитезимальной техники Ли (см. раздел 2.1), определив группу эквивалентности как группу, допускаемую следующей расширенной системой, равносильной семейству уравнений вида (58):

$$u_{tx} - Qu_{tt} - Q_u u_t^2 - F = 0, \quad Q_t = 0, \quad F_t = 0. \tag{60}$$

Несмотря на принципиальное сходство с классической теорией Ли, имеются значительные технические различия между вычислением инфинитезимальных симметрий и генераторов (59) группы эквивалентности. Подробные вычисления можно найти в [20] и [21].

Используя этот подход, можно вычислить, что для уравнения (58) генераторры (59) группы эквивалентности имеют следующие координаты:

$$\xi^1 = C_1 t + \varphi(x), \quad \xi^2 = \psi(x),$$
$$\eta = (C_1 + C_2)u + \lambda(x), \tag{61}$$
$$\mu^1 = -\varphi'(x) + [C_1 - \psi'(x)]Q, \quad \mu^2 = [C_2 - \psi'(x)]F,$$

где φ, ψ, λ – произвольные функции от x. Это означает, что уравнение (58) имеет бесконечномерную алгебру L_ε с базисом

$$Y_1 = \varphi(x)\frac{\partial}{\partial t} - \varphi'(x)\frac{\partial}{\partial Q},$$

$$Y_2 = \psi(x)\frac{\partial}{\partial x} - \psi'(x)Q\frac{\partial}{\partial Q} - \psi'(x)F\frac{\partial}{\partial F},$$
$$Y_3 = \lambda(x)\frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} + Q\frac{\partial}{\partial Q}, \tag{62}$$

$$Y_5 = u\frac{\partial}{\partial u} + F\frac{\partial}{\partial F}.$$

Замечание 1. Аналогично можно показать, что уравнение (57) имеет семимерную алгебру L_ε, натянутую на операторы

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} + P\frac{\partial}{\partial P}, \quad Y_5 = u\frac{\partial}{\partial u} + F\frac{\partial}{\partial F}, \quad (63)$$

$$Y_6 = x\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial P}, \quad Y_7 = x\frac{\partial}{\partial x} - P\frac{\partial}{\partial P} - F\frac{\partial}{\partial F}.$$

Дальнейшие вычисления основаны на теореме о проекциях, упомянутой в начале раздела 4.2. Обозначим через X, Z проекции генератора (59) группы эквивалентности на физические переменные t, x, u и переменные x, u, Q, F произвольных элементов, соответственно:

$$X = pr_{(t,x,u)}(Y) \equiv \xi^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u}, \quad (64)$$

$$Z = pr_{(x,u,Q,F)}(Y) \equiv \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial Q} + \mu^2\frac{\partial}{\partial F}. \quad (65)$$

Подставляя (61) в (64) и (65), получим проекции, определенные корректно в том смысле, что координаты X зависят только от t, x, u, а координаты Z – от переменных x, u, Q, F:

$$X = [C_1 t + \varphi(x)]\frac{\partial}{\partial t} + \psi(x)\frac{\partial}{\partial x} + [(C_1 + C_2)u + \lambda(x)]\frac{\partial}{\partial u}, \quad (66)$$

$$Z = \psi(x)\frac{\partial}{\partial x} + [(C_1 + C_2)u + \lambda(x)]\frac{\partial}{\partial u} + [-\varphi'(x) + (C_1 - \psi'(x)Q)]\frac{\partial}{\partial Q} + (C_1 - \psi'(x))F\frac{\partial}{\partial F}. \quad (67)$$

Применительно к уравнению (58) теорема о проекциях звучит так.

Теорема о проекциях. Оператор X, определенный формулой (66), является инифинитезимальной симметрией уравнения (58) с функциями

$$Q = Q(x, u), \quad F = F(x, u) \quad (68)$$

тогда и только тогда, когда система урамвнений (68) инвариантна относительно группы с генератором Z, определенным формулой (67), то есть когда

$$Z[Q - Q(x, u)] = 0, \quad Z[F - F(x, u)] = 0, \quad (69)$$

где переменные Q, F надо заменить на функции $Q(x, u)$, $F(x, u)$ в соответствии с уравнениями (68). Ввиду (67), уравнения (69) можно переписать в виде следующей системы линейных уравнений в частных производных первого порядка для функций $Q(x, u)$, $F(x, u)$:

$$\psi(x)\frac{\partial Q}{\partial x} + [(C_1 + C_2)u + \lambda(x)]\frac{\partial Q}{\partial u} + [\psi'(x) - C_1]Q + \varphi'(x) = 0, \quad (70)$$

$$\psi(x)\frac{\partial F}{\partial x} + [(C_1 + C_2)u + \lambda(x)]\frac{\partial F}{\partial u} + [\psi'(x) - C_2]F = 0.$$

Замечание 2. Эта теорема формулируется аналогично для уравнения (57) с заменой операторов (62) на операторы (63), а уравнений (68) на

$$P = P(u), \quad F = F(x, u).$$

Пример 1. Возьмем в (61)

$$C_1 = 1, \quad \varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = k - x,$$
$$C_2 = 0, \quad \lambda(x) = 0,$$

то есть выберем $Y' \in L_\varepsilon$ частного вида

$$Y' = t\frac{\partial}{\partial t} + (x - k)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} - F\frac{\partial}{\partial F}. \quad (71)$$

Тогда решением системы уравнений (70) получаем функции

$$Q = \Phi\left(\frac{u}{x - k}\right), \quad F = \frac{1}{x - k}\Gamma\left(\frac{u}{x - k}\right), \quad (72)$$

где Φ, Γ – произвольные функции одного аргумента. Теорема о проекциях дает, что уравнение (58) вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \Phi\left(\frac{u}{x - k}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{1}{x - k}\Gamma\left(\frac{u}{x - k}\right) \quad (73)$$

допускает, наряду с очевидным генератором переноса по времени $X_0 = \partial/\partial t$, один дополнительный оператор

$$X' = t\frac{\partial}{\partial t} + (x - k)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}. \quad (74)$$

Из уравнения $X'(J) = 0$ находим инварианты

$$\lambda = \frac{t}{x - k}, \quad \mu = \frac{u}{x - k}.$$

Инвариантное решение $u = (x - k)G(\lambda)$ уравнения (73) должно удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\lambda G'' + (\Phi(G)G')' + \Gamma(G) = 0.$$

Интерес представляет частный случай уравнения (73) с линейными функциями Φ, Γ, соответствующий появлению в левой части уравнения (73) квадратично-нелинейного члена:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{u}{k - x}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -\beta\frac{u}{(k - x)^2}. \quad (75)$$

Этот случай отдельно рассмотрен в разделе 5.

Пример 2. Приведем теперь пример уравнения, имеющего две дополнительные симметрии. Для этого надо взять два генератора эквивалентности, образующих двумерную алгебру. В качестве первого из них выберем снова (71), а второй генератор Y'' найдем, положив в (61)

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad \varphi(x) = \psi(x) = \lambda(x) = x - k,$$

то есть выберем

$$Y'' = (x-k)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) + (u + x - k)\frac{\partial}{\partial u} - (1+Q)\frac{\partial}{\partial Q}.$$

Операторы Y', Y'' коммутируют и, значит, образуют абелеву алгебру Ли. Применив к этим двум операторам теорему о проекциях, то есть на практике решив уравнения (70) с координатами оператора Y'' и с функциями Q, F вида (70), получим:

$$Q = -1 + A\exp\left(-\frac{u}{x-k}\right), \quad F = \frac{B}{x-k}\exp\left(\frac{u}{x-k}\right),$$
$$A, B = \text{const}.$$

По теореме о проекциях, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - A\exp\left(-\frac{u}{x-k}\right)\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{B}{x-k}\exp\left(\frac{u}{x-k}\right) \tag{76}$$

допускает два дополнительных оператора:

$$X' = t\frac{\partial}{\partial t} + (x-k)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X'' = (x-k)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) + (u + x - k)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{77}$$

В частности, можно найти решение, инвариантное относительно двухпараметрической группы симметрии с двумя генераторами (77). А именно, надо решить систему уравнений $X'(J) = 0$, $X''(J) = 0$. Из первого уравнения получаем два инварианта

$$\lambda = \frac{x-k}{t}, \quad \mu = \frac{u}{t},$$

а второе уравнение дает

$$\mu = L\lambda + \lambda\ln\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right), \quad L = \text{const}.$$

Подставив сюда значения μ, λ получаем такой вид инвариантного решения:

$$u = (x-k)\left[L + \ln\left(\frac{x-k}{t-x+k}\right)\right].$$

Постоянная L находится подстановкой в уравнение (76).

Пример 3. Теперь обратимся к уравнению (57) и применим теорему о прекциях к комбинации $Y = Y_3 + Y_5 + Y_6 + Y_7$ базисных операторов (63), то есть к следующему генератору эквивалентности:

$$Y = x\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u} - (1+P)\frac{\partial}{\partial P}.$$

По формулам, аналогичным (64) и (65), получаем его проекции

$$X = x\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{78}$$

$$Z = x\frac{\partial}{\partial x} + (1+u)\frac{\partial}{\partial u} - (1+P)\frac{\partial}{\partial P}. \tag{79}$$

Решив уравнения $Z[P(u) - P] = 0$, $Z[F(x, u) - F] = 0$ (ср. (69) и см. Замечание 2), которые имеют конкретный вид

$$(1+u)\frac{dP}{du} + (1+P) = 0, \quad x\frac{\partial F}{\partial x} + (1+u)\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

находим

$$F = \Gamma\left(\frac{x}{1+u}\right), \quad P = \frac{K}{1+u} - 1, \quad K = \text{const}.$$

Следовательно, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{K}{1+u}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \Gamma\left(\frac{x}{1+u}\right) \tag{80}$$

вида (57) допускает, наряду с $X_0 = \partial/\partial t$, дополнительный оператор X, определенный в (78). Воспользуемся им, чтобы построить инвариантное решение. Найдя инварианты $\lambda = t - x$, $\mu = (u+1)/x$ оператора X, имеем следующий вид инвариантного решения:

$$u = x\Phi(\lambda), \quad \lambda = t - x.$$

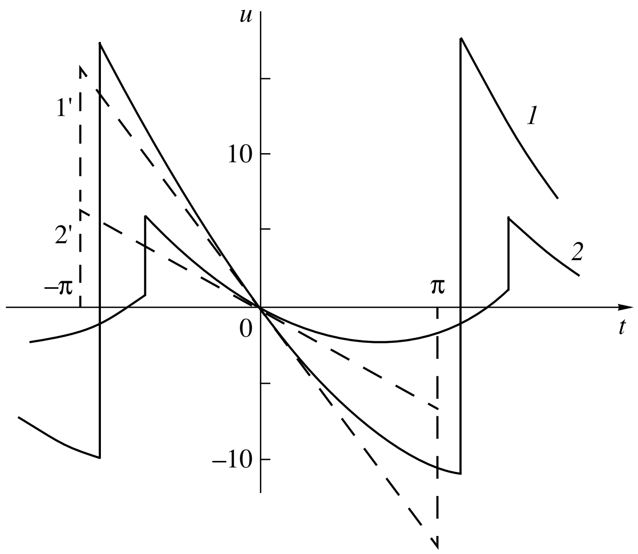
Подстановкой в (80) находится обыкновенное дифференциальное уравнение

$$K(\Phi'/\Phi)' + \Phi' = \Gamma(\Phi). \tag{81}$$

Заметим, что при малых u уравнение (80) является хорошей аппроксимацией, обладающей дополнительной симметрией, для моделей, описываемых уравнениями типа (55).

5. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ И ОБСУЖДЕНИЕ ФИЗИКИ ПРОЦЕССОВ

Модель (55) возникает в нескольких задачах. Рассмотрим вначале колебания сжимаемого газа внутри цилиндра с поперечным сечением S, который закрыт подвижным поршнем массы m. Дно цилиндра ($x = 0$) неподвижно, координата x отсчитывается вдоль образующей вверх. Поршень мо-



Влияние низкочастотной дисперсии на процесс искажения волны. Профили построены для расстояний $x = 0.2$ (кривые *1* и *1'*) и $x = 0.5$ (кривые *2* и *2'*). Сплошные кривые описываются автомодельным решением (84) для $\beta = 3$. Штриховые кривые построены с учетом только нелинейности ($\beta = 0$, дисперсии нет) и приведены для сравнения с профилями, изображенными сплошными кривыми.

жет совершать колебания, смещаясь на расстояние ζ относительно среднего положения $x = H$. Система, описывающая движение поршня с учетом нелинейных волновых движений газа, имеет вид

$$\rho c\frac{\partial\zeta}{\partial t} = p(t_-) - p(t_+), \quad \frac{m}{S}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = p(t_+) + p(t_-). \quad (82)$$

Здесь ρ и c – плотность и скорость звука в газе, $p(t)$ – форма любой из двух бегущих навстречу друг другу волн акустического давления. Аргументы содержат сдвиг во времени, определяемый длиной H резонатора и нелинейными свойствами газа:

$$t_\pm = t \pm \frac{H}{c}\left(1 - \varepsilon\frac{p}{c^2\rho}\right).$$

Используя способ преобразования функциональных уравнений типа (82) к дифференциальным эволюционным уравнениям, описанный в работе [24], в окрестности основного акустического резонанса $\omega H/c = \pi + \Delta$ (где Δ – малая расстройка частоты), удается получить [25]

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial U}{\partial T} + \Delta\frac{\partial U}{\partial\xi} - \pi\varepsilon U\frac{\partial U}{\partial\xi}\right] = -\beta U. \quad (83)$$

В уравнении (84) использованы безразмерные обозначения

$$u = \frac{p}{c^2\rho}, \quad \xi = \omega t + \pi, \quad T = \frac{\omega t_1}{\pi}, \quad \beta = \frac{1}{\pi}\frac{m_g}{m},$$

где t_1 – “медленное” время, описывающее установление колебаний в резонаторе, $m_g = \rho SH$ – масса газа в цилиндре. Очевидно, заменой переменных и переобозначением констант

$$t = \xi - \Delta T, \quad T = x, \quad u = \pi\varepsilon U$$

уравнение (83) удается преобразовать к виду (55).

Приближенные решения уравнения (83), отвечающие физически интересным постановкам задачи, получены в работе [25]. Однако и ряд точных решений имеет важный физический смысл. Рассмотрим, например, точное решение, получаемое с помощью генератора растяжения X_3 (56). Соответствующие инварианты и автомодельная форма имеют вид

$$\lambda = xt, \quad \mu = ux^2, \quad u(x,t) = \frac{1}{x^2}\Phi(\lambda).$$

Подстановка последнего выражения в (55) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi\Phi'' + \Phi'^2 - \lambda\Phi'' + \Phi' - \beta\Phi = 0.$$

Его частным решением, в пределе $\beta \longrightarrow 0$ переходящим в решение $u = -x/t$ для римановых волн, будет

$$\Phi(\lambda) = -\lambda + \frac{\beta}{6}\lambda^2, \quad u(x,t) = \frac{\beta}{6}t^2 - \frac{t}{x}. \quad (84)$$

По аналогии с известной процедурой построения пилообразного сигнала [4], в которой периодически продолженное решение $u = -x/t$ используется для описания гладких линейных участков профиля (см. рис. 1, штриховые кривые), здесь также необходимо продолжить решение (84) с периодом 2π. Ударные фронты локализуются в точках

$$t_n = \pi(2n+1) + \frac{3}{\beta x} - \sqrt{\left(\frac{3}{\beta x}\right)^2 - \frac{\pi^2}{3}},$$
$$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

координаты которых вычисляются из условия равенства нулю среднего за период значения функции $u(x, t)$.

Как показано на рис. 1, учет низкочастотной дисперсии ($\beta \neq 0$) приводит к несимметричному искажению формы волны. Длительность фазы сжатия оказывается более короткой, а разрежения – увеличенной. Кривые на рис. 1 построены для $\beta = 3$ и безразмерных расстояний $x = 0.2$ (кривые 1 и 1'), $x = 0.5$ (кривые 2 и 2'). Разумеется, построение справедливо вплоть до расстояний $x \le 3\sqrt{3}/\pi\beta$.

Описываемый рис. 1 характер искажений профиля волны аналогичен наблюдаемому в экспериментах с дифрагирующими пучками большой интенсивности. Такое же поведение предсказывает теория (см. [26, 14]). Именно поэтому вторая физическая задача, связанная с моделью (55), относится к теории нелинейных акустических пучков [26]. Рассмотрим уравнение Хохлова-Заболотской в форме (см. [14], стр. 346):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau} - \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2\right) + \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{p}{2}\Delta_\perp\Psi\right] = \frac{c}{2}\Delta_\perp p. \tag{85}$$

Уравнение (85) описывает круглые в поперечном сечении пучки, для которых

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \tau = t - \frac{x}{c} - \frac{1}{c}\Psi(x, r),$$

$\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ – нелинейный параметр, Ψ – эйконал. Для однородной среды расстояние x, пройденное волной, отсчитывается вдоль некоторой прямой; в неоднородной среде x может измеряться вдоль луча, являющегося осью пучка [27] . Ограничиваясь рассмотрением поля вблизи оси, положим в (85)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2 = \frac{r^2}{2}f(x) + q'(x), \tag{86}$$

где f, q' – известные функции, описывающие изменение показателя преломления в среде. Определяя эйконал из (86),

$$\Psi = \frac{r^2}{2}\Phi(x) + q(x), \quad \Phi' + \Phi^2 = f,$$

приведем (85) к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{\Phi}\nu\frac{\partial p}{\partial\nu} - \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial\tau}\left(\frac{\nu^2}{2}\frac{f}{\Phi^2} + q'\right) - \frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau} + \Phi p\right] = \frac{c}{2}\Phi^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial p}{\partial\nu}\right), \tag{87}$$

$\nu = r\Phi(x)$. В приближении нелинейной геометрической акустики правую часть (85) или (87) полагают равной нулю. Можно уточнить это приближение и учесть дифракционные поправки, если воспользоваться для правой части (87) следующей моделью:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial\nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial p}{\partial\nu}\right) \longrightarrow -\frac{2}{a^2}p, \tag{88}$$

где a – исходная ширина пучка. Заметим, что для поперечной структуры, описываемой функцией Бесселя $J_0(\sqrt{2}\,\nu/a)$, представление (88) оказывается точным. Изменяя теперь правую часть (87) в соответствии с (88) и устремляя ν к нулю, получим уравнение, описывющее поле акустических пучков вблизи оси:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{q'(x)}{c}\frac{\partial p}{\partial\tau} - \frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau} + \Phi(x)p\right] = -\frac{c}{a^2}\Phi^2(x)p. \tag{89}$$

В частности, для сфокусированной волны, полагая $\Phi = 1/(x - k)$, $q' = 0$ (k – фокусное расстояние), сведем уравнение (89) к виду (75), где теперь $u = p(x - k)$, $a = \varepsilon/c^3\rho$, $\beta = c/a^2$.

Заменой переменных

$$t = c\left[\tau + \frac{1}{c}q(x)\right], \quad u = \frac{\varepsilon}{c^3\rho}\exp\left(\int\Phi(x)dx\right)$$

уравнение (89) сводится к более простой форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - Q(x)u\frac{\partial u}{\partial t}\right] = -\frac{\Phi^2(x)}{a^2}u, \tag{90}$$

где

$$Q(x) = \exp\left(-\int\Phi(x)dx\right).$$

В общем случае, когда от координаты x могут зависеть все характеристики среды, включая параметр нелинейности, обобщенное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - Q(x, u)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = F(x, u). \tag{91}$$

В уравнении (91) учтена также возможность появления более сложного нелинейного отклика среды, не описываемого обычной квадратичной нелинейностью.

Если в уравнении (91) положить

$$Q = -\frac{\alpha}{k - x}, \quad F = -\frac{\beta}{(k - x)^2}u,$$

оно примет вид (75) и будет описывать фокусировку пучка в однородной среде. Инвариантное решение, отвечающее оператору (74), есть

$$u = (k - x)G(\lambda), \quad \lambda = \frac{t}{k - x}.$$

Функция $G(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda G'' - \alpha(GG') + \beta G = 0. \tag{92}$$

Точное решение уравнение (92) при $\alpha = 0$ записывается через функции Бесселя

$$G = \sqrt{\lambda}\lfloor C_1 J_1(2\sqrt{\beta\lambda}) + C_2 Y_1(2\sqrt{\beta\lambda})\rfloor,$$

а при $\beta = 0$ оно имеет вид

$$\lambda = -\alpha D_1 + D_2(G + D_1) - \alpha(G + D_1)\ln|G + D_1|.$$

Разумеется, к моделям (55), (57), (58) приводят не только обсуждавшиеся выше те две задачи. Очевидно, что любой линейной распределенной системе с низкочастотной дисперсией, описываемой законом

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} - \frac{\beta}{\omega}$$

можно сопоставить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\beta u. \tag{93}$$

Если нелинейность слабая, соответствующий член добавляется в эволюционное уравнение аддитивно, и (93) переходит, например, в (55).

Заметим, что "общая" форма (91) все же достаточно конкретна. Ее свойства симметрии, очевидно, более точно отражают физику исследуемых процессов, чем, например, симметрии упрощенной модели (55) или совершенно общей модели

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = G\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right),$$

которую можно было бы изучать предложенным методом, не слишком сильно ограничивая класс рассматриваемых задач.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе данной работы лежит парадоксальное, на первый взгляд, утверждение о целесообразности анализа интересующих нас нелинейных задач путем их "погружения" в класс более общих и, следовательно, более сложных моделей. Опыт теории нелинейных колебаний и волн, основанный на физически обоснованном упрощении моделей, казалось бы, противоречит описанному выше подходу, в основе которого – принцип априорного использования симметрий. Вместе с тем, за внешними различиями скрыто внутреннее единство двух подходов. Очевидно, что более симметричная модель должна содержать больше точных решений. Как можно добиться большей симметрии? С одной стороны, можно двигаться по традиционному пути упрощения, "отсекая" элементы модели, нарушающие ее симметрию (пренебрегая некоторыми членами уравнения или как-то видоизменяя их). С другой стороны, можно "достроить" модель до более симметричной путем ее усложнения. Если сложная модель допускает подходящее точное решение, необходимые упрощения можно произвести на завершающем этапе расчета, то есть в окончательных формулах.

Работа выполнена в рамках Договора о сотрудничестве между кафедрой акустики физического факультета МГУ и Центром ALGA BTH. Она частично поддержана грантами Ведущих научных школ, РАН и РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний (3-е изд.). М.: Наука, 1981.
2. *Хохлов Р.В.* К теории нелинейных волн в недиспергирующих линиях передачи // Радиотехника и электроника. 1961. Т. 6. № 6. С. 917–926.
3. *Ахманов С.А.* Метод Хохлова в теории нелинейных волн // Успехи физ. наук. 1986. Т. 149. № 3. С. 917–926.
4. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
5. Собрание сочинение Софуса Ли в 6-ти томах: Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen, 1–6, Leipzig-Oslo: B.G. Teubner-H. Aschehoug, 1922–37.
6. *Lie S.* Forlesungen uber Differentialglechungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers, Leipzig: B.G. Teubner, 1891.
7. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.
8. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. *Ibragimov N.H.* (ed), CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Boca Raton, Florida: CRC Press. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws, 1994. Vol. 2: Applications in engineering and physical sciences, 1995. Vol. 3: New trends in theoretical developments and computational methods, 1996.
11. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201–230.
12. *Руденко О.В.* Взаимодействия интенсивных шумовых волн // Успехи Физ. Наук. 1986. Т. 149. № 3. С. 413–447.
13. *Маков Ю.Н., Руденко О.В.* Динамика возмущений нелинейных пилообразных волн. границы // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 824–828.
14. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн (2-е изд.). М.: Наука, 1990.
15. Акустика в задачах (под ред. С.Н. Гурбатова и О.В. Руденко). М.: Наука, 1996.
16. *Ibrabimov N.H.* Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. Chichester: Wiley, 1999.

17. *Ибрагимов Н.Х.* Семь миниатюр по групповому анализу // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 10. С. 1739–1750.

18. *Laplace P.S.* Traite de Mechanique Celeste, t. 1, Paris, 1798. Reprinted in Ouvres completes, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1878. English translation: New York, 1966.

19. *Ibragimov N.H.* Theorem on projections of equivalence Lie algebras. Unpublished. 1987.

20. *Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход. Итоги Науки и Техники, сер. Совр. проблемы математики: новейшие достижения, том 34, с. 3–83. М.: Изд. ВИНИТИ, 1989.

21. *Ibrabimov N.H., Torrisi M., Valenti A.* Preliminary group classification of equations // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 11. P. 2988–2995.

22. *Ibragimov N.H., Torrisi M.* A simple method for group analysis and its application to a model of detonation // J. Math. Phys. 1992. V. 33. № 11. P. 3931–3937.

23. *Ibragimov N.H., Safstrom N.* The equivalence group and invariant solutions of a tumor growth model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (to be published).

24. *Руденко О.В., Шанин.* Нелинейные явления при установлении колебаний слоя линейной диссипативной среды, возбуждаемых конечными смещениями его границы // Акуст. журн. 2000. Т.46. № 3. С. 392–400.

25. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* Interaction between low and high-frequency modes in a nonlinear system: gas-filled cylinder covered by movablw piston // Nonlinear Dynamics. 2003. V. 32. P. 405–416.

26. *Rudenko O.V., Solyan S.I., Khokhlov R.V.* Towards the nonlinear theory of paraxial sound beams // Sov. Physics Doklady. 1975. V. 225. № 5. P. 1053–1055.

27. *Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П.* Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 2. С. 294–294.