

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики

О.В. Руденко

Изложены основные представления о механизмах, ответственных за появление аномально больших акустических нелинейностей неоднородных, дефектных и структурно-неоднородных сред. Дан обзор методов нелинейной диагностики — прикладного направления, интенсивно развивающегося в последние годы, а также областей их применения. Статья является расширенной версией вводного доклада, представленного на сессии Отделения физических наук РАН, состоявшейся 28 сентября 2005 г. Краткое содержание других докладов публикуется в этом выпуске УФН.

PACS numbers: 43.25.+y, 62.20.Mk, 62.65.+k

Содержание

1. Введение (77).
 2. Классификация типов акустической нелинейности (79).
 3. Механизмы структурной нелинейности (82).
 4. О нелинейной диагностике (87).
 5. Некоторые приложения (90).
 6. Нетипичные нелинейные явления в структурно-неоднородных средах (93).
- Список литературы (94).

1. Введение

Нелинейные упругие свойства конденсированных сред и нелинейные волны в таких средах интенсивно изучаются уже более 50 лет в рамках сложившегося направления — нелинейной акустики [1–3]. В последние годы большой интерес вызывают аналогичные исследования для неоднородных систем (газожидкостных сред, гранулированных и флюидонасыщенных пористых сред, геологических структур, гелей, композитов), а также твердых тел с дефектами и неоднородностями мезоскопического (надмолекулярного) масштаба. Этот интерес связан с необычно большими нелинейностями таких сред. В структурно-неоднородных средах часто удается наблюдать сильно выраженные нелинейные явления при умеренных значениях интенсивности звука, что открывает возможности для развития высокочувствительных методов нелинейной диагностики, а также других приложений.

О.В. Руденко. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 119992 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация
Тел./Факс (495) 939-29-36
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Статья поступила 14 ноября 2005 г.

Как считалось ранее, макроскопические упругие свойства формально определяются разложением внутренней энергии слабо деформированной среды в степенной ряд по инвариантам тензора деформаций [4]; коэффициенты при квадратичных членах разложения являются линейными модулями упругости, при кубических членах — нелинейными модулями Ландау (или модулями третьего порядка). Такую нелинейность принято называть "физической" [5], поскольку она связана с нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия в конденсированной среде и, естественно, различна для разных конкретных сред. Наряду с эффектами взаимодействия акустических волн, эта нелинейность ответственна за многие известные явления — тепловое расширение тел, отклонения от закона Дюлонга и Пти при высоких температурах, затухание звука в результате взаимодействия когерентных фононов с тепловым шумом [6] (механизм Ландау–Румера) и др.

Второй тип нелинейности определяется нелинейной связью между компонентами тензора деформаций и производными от компонент вектора смещений по координатам. Эта связь, которая не зависит от физических свойств деформируемого тела, называется "геометрической" [5] нелинейностью.

Напомним, как выделяют физическую и геометрическую нелинейность в уравнениях гидродинамики [7]:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad p = p(\rho), \quad (2)$$

где η , ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно. Для простоты изменение энтропии в системе (1), (2) не учитывается. Пусть невозмущенное состояние среды есть $\rho = \rho_0$, $p = p_0$, $\mathbf{u} = 0$. Возмущения параметров, связанные с волной, обозначим как ρ' , p' и

положим в (1), (2)

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \frac{\rho'}{\rho} \sim \frac{p'}{p_0} \sim \frac{|\mathbf{u}|}{c_0} \sim \mu \ll 1.$$

Уравнения движения и непрерывности с удержанием малых членов порядка μ^2 тогда примут вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p' - \eta \Delta \mathbf{u} - \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{u} = \\ = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\rho_0 + \rho') (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{u} = -\text{div} (\rho' \mathbf{u}). \end{aligned}$$

В левых частях этих уравнений собраны линейные, в правых — нелинейные члены. Появление последних обусловлено нелинейностью исходных уравнений, а не свойствами среды, поэтому такую нелинейность и называют геометрической.

Напротив, при разложении в ряд уравнения состояния

$$\begin{aligned} p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right) \rho'^2 + \dots = \\ = C_1 \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

в зависимости, связывающей между собой приращения давления и плотности, появляются нелинейные члены, т.е. это — физическая нелинейность.

Для изотропных твердых тел уравнение движения и связь тензоров напряжений σ_{ik} и деформаций e_{ik} имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}, \quad (4)$$

$$\sigma_{ik} = K e_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(e_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} e_{ll} \right) + O(e_{ik}^2),$$

где U_i — вектор смещений, K, μ — модули всестороннего сжатия и сдвига [4],

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \right), \quad (5)$$

$O(e_{ik}^2)$ включает в себя нелинейные члены, описывающие отклонения от закона Гука:

$$\begin{aligned} O(e_{ik}^2) = \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_i} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(K - \frac{2}{3} \mu + B \right) \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) + \\ + \frac{A}{4} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_i} + B \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial U_m}{\partial x_l} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) + \\ + C \frac{\partial U_l}{\partial x_i} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Здесь A, B, C — нелинейные модули упругости третьего порядка (коэффициенты Ландау [5] в разложении внутренней энергии по степеням тензора деформаций):

$$E = \mu e_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) e_{ll}^2 + \frac{A}{3} e_{ik} e_{il} e_{kl} + B e_{ik}^2 e_{ll} + \frac{C}{3} e_{ll}^3.$$

Очевидно, что геометрическая нелинейность появляется в зависимости (5) тензора деформаций от компонент вектора смещений, а физическая нелинейность — это все члены в выражении $O(e_{ik}^2)$, содержащие коэффициенты A, B и C .

Для жидкостей и газов коэффициент физической нелинейности принято вводить, основываясь на разложении (3): $\varepsilon_{\text{ph}} = C_2/2C_1$. Коэффициент геометрической нелинейности равен $\varepsilon_g = 1$. Сумму этих величин

$$\varepsilon = \varepsilon_g + \varepsilon_{\text{ph}} = 1 + \frac{C_2}{2C_1} \quad (6)$$

называют просто коэффициентом акустической нелинейности. Для газов этот коэффициент выражается через показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_v$ следующим образом: $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$. Очевидно, что для воздуха (двухатомный газ) $\varepsilon = 1,2$. В случае жидкостей ε измеряется экспериментально, например, по генерации второй гармоники [1–3]. Типичные значения при температуре 20 °С: $\varepsilon = 3,5$ (дистиллированная вода), $\varepsilon = 5,6$ (ацетон), $\varepsilon = 6,3$ (алкоголь).

Заметим, что коэффициент ε , введенный формулой (6), присутствует в основных математических моделях, описывающих распространение нелинейных волн в жидкостях и газах: в уравнениях римановых волн, уравнениях Бюргера, Хохлова–Заболотской и различных модификациях этих уравнений [8].

Примеры таких моделей приведены ниже. Общее одномерное уравнение, описывающее распространение расходящихся и сходящихся волн (рупоры, концентраторы, лучевые трубки в приближении нелинейной геометрической акустики), имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{2} \frac{d}{dx} \ln S(x) - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0, \quad (7)$$

где $S(x)$ — площадь сечения трубки, $\tau = t - x/c_0$. Важные частные случаи: при $S(x) = \text{const}$ (7) переходит в уравнение Бюргера для плоских волн, $S(x) \sim x$ соответствует цилиндрическому, $S(x) \sim x^2$ — сферическому волнам. Диссипация (вторая производная) связана с эффектами вязкости и теплопроводности. Для учета потерь при рассеянии на мелких неоднородностях используется аналогичное уравнение с четвертой производной [9].

Интегро-дифференциальное уравнение [2]

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{m}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau - \tau') \frac{\partial p}{\partial \tau'} d\tau' = 0 \quad (8)$$

описывает нелинейные волны в наследственных средах. Важный случай ядра $K(t) = \exp(-t/T)$ соответствует релаксирующей среде, для биотканей используются степенные ядра, для расплавов и сильно вязких жидкостей — модели с несколькими временами релаксации.

Базовым уравнением для интенсивных акустических пучков является уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК) [10]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (9)$$

где Δ_{\perp} — "поперечный" оператор Лапласа. Общая конструкция уравнения для дифрагирующих пучков

такова:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{P}(p)] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p. \quad (10)$$

Здесь $\hat{P}(p)$ — левая часть соответствующего уравнения для одномерных волн (например любого из уравнений (7), (8)).

С присутствием в этих уравнениях квадратично-нелинейных членов связано появление характерного параметра — нелинейной длины

$$l_{NL} = \frac{c_0^3 \rho_0}{\varepsilon \omega P_0} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon M_{\omega}}, \quad (11)$$

где λ — длина волны, $M_{\omega} = P_0/c_0^2 \rho_0$ — акустическое число Маха для волны с частотой ω . В идеальном случае, когда нет затухания, дифракции и других конкурентов нелинейности, на расстоянии l_{NL} от входа в среду в исходной плоской гармонической волне образуется разрыв (ударный фронт). Например, для волны с амплитудой акустического давления $P_0 = 5,5 \times 10^5$ Па (интенсивность 10 Вт см $^{-2}$) и частотой 1 МГц в воде длина $l_{NL} \approx 25$ см. Амплитуда второй гармоники P_2 без учета перераспределения ее энергии по высшим гармоникам [8] возросла бы с увеличением x линейно и на расстоянии $x = l_{NL}$ достигала бы величины $0,5P_0$ (эксперимент и теория, учитывающая высшие гармоники, дают меньшее значение: $P_2 = J_2(2)P_0 \approx 0,35P_0$, где J_2 — функция Бесселя). Таким образом, простейший способ оценить нелинейный параметр ε — это определить нелинейную длину или измерить амплитуду второй гармоники P_2 на небольших расстояниях $x \leq 0,5l_{NL}$:

$$\varepsilon = \frac{2c_0^3 \rho_0}{\omega x} \frac{P_2}{P_0^2} = \frac{1}{\pi N} \frac{M_{2\omega}}{M_{\omega}^2}, \quad (12)$$

где $N = x/\lambda$ — число длин волн, укладывающихся на расстоянии x . Существует много других способов оценки ε , основанных на измерении пространственно-временных и спектральных характеристик бегущих волн, а также на резонансных методах (см. [1–3, 11–13]). Последние нашли широкое применение в биомедицинских исследованиях [14, 15], в которых для правильной диагностики тканей, органов и биологических растворов необходима высокая точность измерения физической нелинейности.

В твердых телах могут взаимодействовать различные типы волн, поэтому универсального выражения для нелинейного коэффициента (6) не существует. В частном случае плоских продольных волн в изотропной среде [1]

$$\varepsilon = -\frac{3}{2} - \frac{1}{c_0^2 \rho_0} (A + 3B + C).$$

Измерения показали, что для однородных тел ε имеет тот же порядок, что и для жидкостей (например для алюминия $\varepsilon = 7,2$), и редко превышает значение 10^1 .

Однако во многих экспериментах наблюдались для структурно-неоднородных сред значения $\varepsilon \sim 10^2 - 10^3$. Причины появления столь больших значений отличаются от тех, которые обсуждались выше в связи с физической и геометрической нелинейностями. Это служит основанием для выделения нелинейности третьего типа — "структурной".

2. Классификация типов акустической нелинейности

Итак, целесообразно различать три типа нелинейности: геометрическую, физическую и структурную. При этом каждая из них может быть или распределена в объеме среды, или сосредоточена в области пространства, малой по сравнению с длиной волны [16]. Эффекты объемных нелинейностей способны накапливаться при распространении волны (если конкурирующие процессы — затухание, дифракция, дисперсия и др. — достаточно слабы), проявляясь тем сильнее, чем больше пройденное волной расстояние, и могут стать сильно выраженными даже при слабой нелинейности. Напротив, накопление эффектов граничной нелинейности возможно только при многократном воздействии волны на нелинейный элемент (границу), например, когда этот элемент помещен в резонатор.

Обсудим примеры граничных нелинейностей.

Пример 1. Геометрическая граничная нелинейность. Рассмотрим плоский поршень, совершающий колебания по нормали (совпадающей с осью x) к своей поверхности и возбуждающий в упругом полупространстве $x > 0$ бегущую волну. Смещение поршня из среднего положения $x = 0$ описывается законом $x = X(t)$. От поршня убегает волна, в которой скорость частиц среды изменяется как $u = u_0 \Phi(t - x/c)$.

Поскольку скорость поверхности поршня равна скорости частиц среды, находящихся на этой поверхности, для неизвестной Φ получаем функциональное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = u_0 \Phi \left(t - \frac{X(t)}{c} \right), \quad (13)$$

решение [17] которого нелинейно зависит от известной функции $X(t)$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \frac{d\omega}{\omega} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 X}{d\xi^2} \exp \left[i \frac{\omega}{c} X(\xi) - i\omega \xi \right] d\xi. \quad (14)$$

В частности, если поршень движется по гармоническому закону $X(t) = -X_0 \cos \omega t$, то уравнение (13) принимает вид

$$\frac{u}{u_0} = \Phi \left(\omega t + \frac{u_0}{c} \cos \omega t \right) = \sin \omega t, \quad u_0 = \omega X_0. \quad (15)$$

Очевидно, что при гармонической зависимости $X(t)$ форма бегущей волны $\Phi(t)$ содержит как постоянную составляющую, так и высшие гармоники. Различие между $X'(t)$ и $\Phi(t)$ усиливается с ростом числа Маха $M = u_0/c$ и становится особенно заметным при скоростях движения поршня, сравнимых со скоростью звука. Такая ситуация может возникнуть в жидкостях, содержащих пузырьки газа, в которых скорость звука может быть очень мала, а также в резонаторах, где эффекты граничной нелинейности могут накапливаться со временем. Поскольку нелинейность связи (13) не зависит от свойств среды, ее имеет смысл называть геометрической.

Форма волны (15) при малых числах Маха почти синусоидальна, а при конечных M ее положительный и отрицательный "полупериоды" искажены неодинаково:

фаза положительных значений u укорочена по длительности и имеет больший максимум по сравнению с абсолютной величиной максимума фазы отрицательных u . Спектральные компоненты (14) этой волны определяются разложением в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_0} &= \Phi(\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{-n}}{n} J'(nM) \exp(in\omega t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t). \end{aligned} \quad (16)$$

В частности, для постоянной составляющей и амплитуд первых двух гармоник имеем

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{M}{2}, \\ B_1 &= J_0(M) - J_2(M), \\ A_2 &= -\frac{1}{2} [J_1(2M) - J_3(2M)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Постоянная составляющая скорости направлена в сторону поршня. Появление этой составляющей связано с представлением колеблющейся границы в виде бесконечной плоскости: поскольку давление в любом ортогональном к x направлению одинаково (в отличие от давления в случае поршня конечного размера) жидкость не может подтекать к оси (см., например, задачу 4 в [7, § 101]).

Итак, проявления геометрической граничной нелинейности не зависят от свойств среды и пройденного волной расстояния — они усиливаются с ростом числа Маха M .

Геометрическая граничная нелинейность может стать заметной, когда в жидкости вблизи мощного ультразвукового излучателя возникает облако кавитационных пузырьков. Скорость звука в такой среде иногда уменьшается до 20–40 м с⁻¹. Пузырьки колеблются, схлопываются, излучая широкополосный шум. Этот шум взаимодействует с колебаниями границы, и его спектр воспроизводится у "подножия" дискретных составляющих — высших гармоник основной частоты (рис. 1а). В результате шум усиливается, а спектр эффективно расширяется [17]. Описанный механизм этого явления дополняет известные [6] механизмы уширения спектров под действием объемной нелинейности.

Другие задачи, требующие учета конечности смещения границы, связаны с накоплением нелинейных искажений в добротных резонаторах. Поскольку форма интенсивных "стоячих" волн сильно искажена, происходит их насыщение при использовании гармонической накачки. Следовательно, для того чтобы продолжить процесс "закачивания" энергии в резонатор, нужно изменить форму колебаний границы [18] (подобно тому, как мы увеличиваем промежуток времени между толчками при раскачивании качелей). Необходимая для поддержания резонансного возбуждения форма движения стенки (один период) изображена на рис. 1б. Интересно, что резонанс в системе с граничной нелинейностью наблюдается не на определенных дискретных собственных частотах, а в полосах частот, ширина которых растет с увеличением амплитуды колебаний границы [19].

Пример 1а. Этот пример относится к нелинейности того же типа, что и пример 1, но приводится потому, что

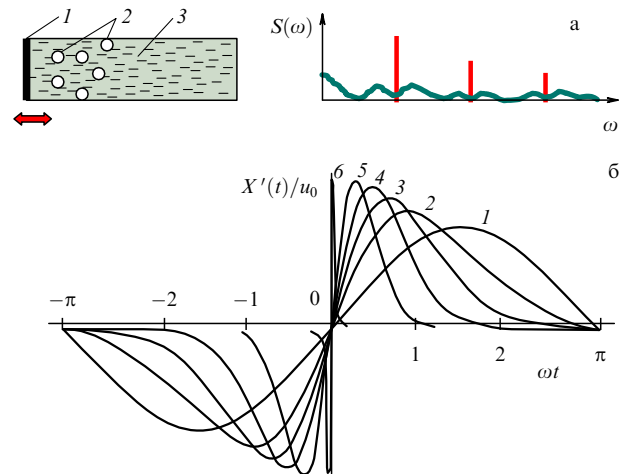


Рис. 1. (а) Уширение спектра кавитационного шума $S(\omega)$ при взаимодействии с границей (1), колеблющейся по гармоническому закону, 2 — кавитационные пузырьки, 3 — жидкость. (б) Форма одного периода колебаний границы, обеспечивающая накопление энергии в полости резонатора в условиях проявления граничной нелинейности. Кривые 1–6 отвечают возрастающим значениям u_0 .

он связан с хорошо известными устройствами — резонансными звукопоглотителями, которые используются для снижения шума в помещениях. Резонансный звукопоглотитель обычно представляет собой перфорированную панель, которая монтируется на стене таким образом, чтобы между стеной и панелью образовался небольшой зазор. Такое устройство эквивалентно системе связанных резонаторов Гельмгольца; каждое отверстие служит "горлом" резонатора, а находящийся за ним воздух в зазоре — почти неподвижным сжимаемым объемом. Колебания воздуха в отверстиях затухают из-за трения о стенки отверстий и помещенные внутрь них сеточки или специальный волокнистый материал. При правильном выборе параметров на определенной частоте можно добиться полного поглощения падающей волны. Нелинейность может ослабить эффект для поглотителя, настроенного на резонанс по линейным параметрам, или, наоборот, улучшить поглощение плохо настроенной системы, приблизив ее к точному резонансу [20]. Таким образом, при создании поглотителей для интенсивного звука нужно учитывать эффекты граничной нелинейности. Природа этой нелинейности носит общий характер и проявляется при обтекании осциллирующим потоком тел с острыми кромками. Градиенты потока здесь имеют порядок $u/\max(r_0, \delta)$, где $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$ — толщина акустического пограничного слоя, r_0 — минимальный радиус кривизны препятствия, ν — кинематическая вязкость. При обтекании тел с острыми кромками толщина δ является определяющей. Нелинейность существенна при числе Рейнольдса $Re \sim 1$, пропорциональном отношению членов в левой части уравнения движения (1), которое можно оценить как

$$Re \sim \left| (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^{-1} \right| \sim \frac{u}{\sqrt{\omega \nu}} = \sqrt{\frac{2I}{c\omega \eta}}, \quad (18)$$

где I — интенсивность звука. Согласно (18) в воздухе ($\eta = 0,018 \times 10^{-3}$ Па с) на частоте 500 Гц нелинейность проявляется при уровнях звука ~ 120 дБ. Эта оценка согласуется с данными экспериментов; если же на краях

отверстий образуются вихри, нелинейные явления наблюдаются уже начиная с уровня звука 90 дБ [20].

Пример 2. Физическая граничная нелинейность. Во многих задачах известным следует считать не закон смещения поршня $x = X(t)$, как в примере 1а, а приложенную к поршню силу $F(t)$. Например, когда на электромеханический преобразователь подается переменное электрическое напряжение V , известен именно закон $V(t)$ и, следовательно, $F(t)$. Уравнение колебаний поршня массой m и площадью поверхности S

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = F(t) - p_a S \quad (19)$$

учитывает реакцию p_a — давления, создаваемого убегающей волной. Это давление связано с колебательной скоростью u нелинейным соотношением $p_a = p_a(u)$, известным из теории римановых волн [7]. Поскольку на поверхности поршня $u = X'(t)$, в уравнении (19) нужно положить $p_a = p_a(dX/dt)$. Если нелинейность слаба и можно ограничиться квадратично-нелинейной связью, то уравнение (19) примет вид

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{c\rho S}{m} \frac{dX}{dt} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2c} \frac{dX}{dt} \right) = \frac{1}{m} F(t). \quad (20)$$

Ясно, что реакция убегающей волны на поршень также нелинейна. При гармоническом законе изменения $F(t)$ функция $X(t)$ будет содержать высшие гармоники. Нелинейность проявится тем сильнее, чем больше произведение нелинейного параметра среды и числа Маха, т.е. εM . Реакция обусловлена нелинейной зависимостью давления от скорости или от возмущения плотности среды (в твердых телах можно говорить о нелинейной зависимости напряжения от деформации), поэтому описанную нелинейность имеет смысл называть физической.

Пример 3. Структурная граничная нелинейность. На рисунке 2а изображена система из двух пластин, одна из которых (нижняя) является гладкой, а другая — шероховатой. Очевидно, что с ростом прижимающего усилия P все большее число "зубцов" (т.е. микровыступов на контакте) деформируется и жесткость контакта возрастает.

Структурная нелинейность наблюдается в простом эксперименте [21], схема которого показана на рис. 3; в этом случае структурную нелинейность удастся использовать для оценки качества контактирующих шероховатых поверхностей [22]. При $P \rightarrow 0$ падающая волна с частотой ω почти полностью отразится от границы раздела. Напротив, если $P \rightarrow \infty$, то волна пройдет через границу, поскольку акустический контакт будет идеаль-



Рис. 3. Схема диагностики шероховатой поверхности на основе генерации гармоник, возникающих благодаря структурной нелинейности.

ным. В обоих случаях отраженной волны на частоте 2ω не возникнет. Вторая гармоника рождается при промежуточных значениях P , а зависимость амплитуды смещения $U_{2\omega}$ от P имеет максимум. Интересно, что кривая $U_{2\omega}(P)$ представляет собой статистическое распределение высот микровыступов [22] (в рамках модели, показанной на рис. 2б).

Нелинейность контактов [23] уже используется для измерений и реализации взаимодействий различных типов объемных и поверхностных волн (в частности применительно к устройствам акустоэлектроники для обработки сигналов). Появился термин "контактная акустическая нелинейность" (КАН). Эти вопросы подробно изложены в обзоре [24].

Величина сигнала, возникающего при отражении от нелинейного элемента, зависит от ряда параметров. Поэтому говорить о "гигантских нелинейностях среды" здесь нужно с осторожностью. Обсудим для примера задачу об отражении в простейшей одномерной постановке. Пусть смещение $X(t)$ элемента, находящегося в точке $x = 0$, под действием акустического давления описывается уравнением $\hat{L}(X) = p_a(t)$, где поле давления есть сумма падающей (из $-\infty$) и отраженной волн:

$$p_a(x, t) = p_+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + p_- \left(t + \frac{x}{c} \right).$$

Для нахождения отраженной волны получается система

$$\rho c \frac{dX}{dt} + \hat{L}(X) = 2p_+(t), \quad p_- = p_+ - \rho c \frac{dX}{dt}.$$

В частности, для гармонической падающей волны и слабой безынерционной квадратичной нелинейности $\hat{L}(X) = E(1 + \varepsilon X/h)X/h$, где E , ε — модуль Юнга и коэффициент нелинейности материала соответственно, h — толщина нелинейного слоя, получаем

$$\frac{M_{2\omega}}{M_\omega^2} = 4 \frac{c^2 \rho}{E} \frac{G}{1 + G^2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4G^2}} \varepsilon, \quad G = \frac{\omega}{c} h \frac{c^2 \rho}{E}. \quad (21)$$

Видно, что отношение числа Маха второй гармоники и квадрата числа Маха первой гармоники может увеличиться не только при возрастании нелинейного параметра ε , но также с ростом отношения сжимаемостей $c^2 \rho / E$ нелинейного материала и "буферной" среды, в которой происходит возбуждение падающего и регистрация отраженного сигнала.

Сравнивая (21) в предельном случае низких частот (для малых значений G) с аналогичным выражением (12) для объемной нелинейности, видим, что коэффициент перед ε в (21) вместо числа длин волн πN содержит произведение малой волновой толщины слоя на квадрат отношения сжимаемостей $4kh(c^2 \rho / E)^2$. Если нелинейный

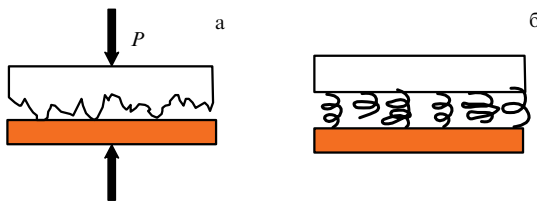


Рис. 2. (а) Схематический вид шероховатой поверхности. (б) Модель шероховатой поверхности в виде ансамбля пружин с разной длиной, но одинаковой жесткостью.

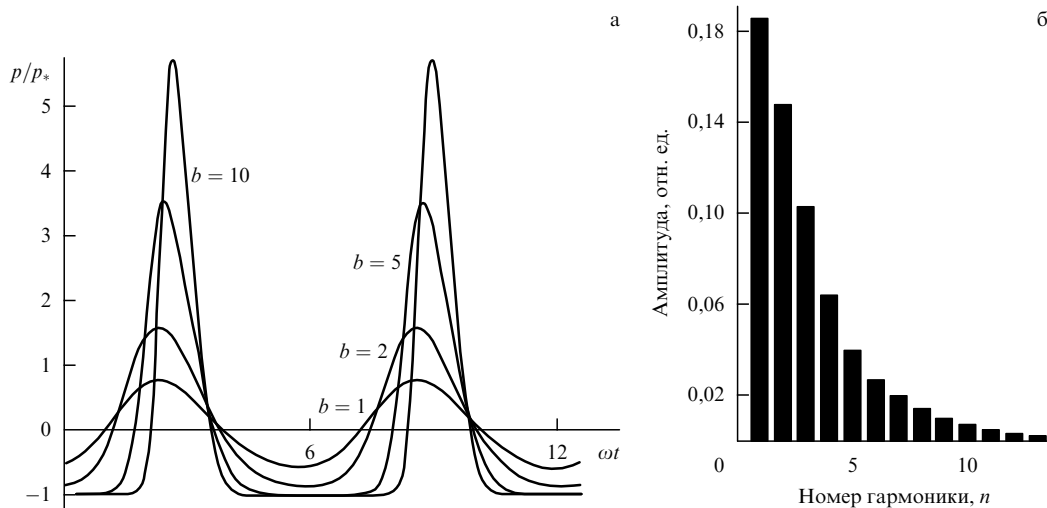


Рис. 4. Форма периодического во времени сильно нелинейного отклика слоя (а) при различных значениях b и спектр отклика (б) при $b = 10$.

элемент имеет линейный модуль Юнга, малый по сравнению с модулем для "буферной" среды, то правильнее говорить не о сильной нелинейности, а о сильном проявлении слабой нелинейности.

Примером может служить отклик тонкого слоя газа (ρ_G, c_G), находящегося в жидкой (ρ_L, c_L) среде (рис. 4). Точное решение задачи [25] об отражении гармонического сигнала от слоя, зависимость плотности которого от акустического давления моделируется выражением $c^2 \rho/p_* = \ln(1 + p/p_*)$, имеет вид

$$\frac{p}{p_*} = \exp\left(-\frac{\zeta}{\Delta} \cos \omega t\right) \times \left[I_0\left(\frac{\zeta}{\Delta} b\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{\zeta}{\Delta} b\right) \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + n^2 \Delta^2}} \times \cos\left(n\omega t - \arctan\left(\frac{\zeta}{\Delta}\right)\right) \right]^{-1} - 1, \quad (22)$$

где I_0, I_n — модифицированные функции Бесселя. Здесь присутствует отношение двух малых параметров $\zeta = \rho_G c_G / (\rho_L c_L)$ и $\Delta = \omega h / 2c_L$. Кривые на рис. 4а построены для отношения $\zeta/\Delta = 1$ и значений параметра $b = P_0/p_*$, равных 1, 2, 5 и 10. Видно, что с ростом b нелинейные искажения усиливаются. Отраженный спектр при $b = 10$ (рис. 4б) содержит порядка десяти гармоник частоты падающей волны. Как показано в [25], обрабатывая широкий спектр отраженного сигнала, удается решить обратную задачу — восстановить уравнение состояния слоя.

В отличие от отдельного слабо нелинейного элемента, формирующего сильно нелинейный отклик, для распределенной системы, составленной из таких элементов, термин "сильная" или даже "гигантская" нелинейность представляется вполне уместным, поскольку речь идет об эффективных характеристиках упругости структурно-неоднородной среды.

Сказанное не относится к отдельным элементам, обнаруживающим сильно нелинейное поведение уже при слабом акустическом воздействии. Примерами могут служить нелинейности систем со связями, ограничениями (о "хлопающей" нелинейности см. раздел 3), испытывающих удары или содержащих особенности в

уравнении состояния; в таких системах, как известно, может вообще не существовать линейного режима даже при малом отклонении от равновесия. Если среда содержит ансамбль таких сильно нелинейных элементов, то термин "гигантская нелинейность" применим к ней с еще большими основаниями.

3. Механизмы структурной нелинейности

Обсудим некоторые причины, приводящие к появлению больших объемных нелинейностей структурно-неоднородных сред.

В жидкостях этот тип нелинейности возникает при введении сильно сжимаемых включений, например пузырьков газа; известно, что нелинейный параметр газированной воды может на 2–3 порядка превысить нелинейность каждой из составляющих смеси — как газа ($\varepsilon = 1, 2$), так и воды ($\varepsilon = 3, 5$).

Такие нелинейности неоднократно наблюдались и использовались для реализации различных акустических взаимодействий в жидкостях (см., например, [26–30]). Большие нелинейности паро- и газожидкостных систем характерны для ряда волновых задач механики и теплофизики [31, 32].

Гигантская нелинейность пузырьков жидкостей открыла возможность решения ряда прикладных проблем, таких как детектирование небольшого числа (и даже одиночных) пузырьков с целью обнаружения кильватерного следа прошедшего морского судна, мониторинг процессов ферментации и процесса закипания теплоносителя в ядерных реакторах, диагностика кессонной болезни при декомпрессии. Нелинейность пузырьков жидкостей предлагается также использовать в различных промышленных технологиях. Эти работы в 1980-х годах интенсивно велись в Институте прикладной физики РАН [33, 34]. Сейчас большое развитие получили медицинские диагностические технологии, основанные на инъекции в кровеносные сосуды специальных контрастных агентов — стабильных микропузырьковых взвесей (см. раздел 5).

Значительный рост нелинейности сред, содержащих сильно сжимаемые включения, можно пояснить на простом примере. Пусть тонкий слой легкой сжимаемой

среды окружен более плотной средой с большим значением скорости звука (пример — тонкий слой воздуха в воде или водном геле). Здесь есть два малых параметра — отношение акустических импедансов и волновая толщина слоя: $\rho_G c_G / \rho_L c_L \sim \omega h / c_G \ll 1$. Решение задачи о прохождении волны через этот слой [25] показывает, что вторая гармоника на его выходе оказывается в $K \gg 1$ раз сильнее, когда легкий слой окружен плотной средой (по сравнению со второй гармоникой в случае отсутствия плотной среды). Величина "усиления" нелинейности для генерации второй гармоники равна

$$K = \frac{P_2^{\text{inh}}}{P_2^{\text{hg}}} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_G}{\varepsilon_L} \left(\frac{c_L^2 \rho_L}{c_G^2 \rho_G} \right)^2. \quad (23)$$

Для воздушного слоя в воде $K \approx 5,5 \times 10^7$. Слой, состоящий из воды с пузырьками, объемная концентрация которых $\sim 10^{-4}$, обеспечивает усиление порядка 5000.

Объяснение гигантскому усилению нелинейности очень простое. Пусть в слое воды распространяется волна с характерным давлением порядка нескольких атмосфер. Это — слабая волна, потому что внутреннее давление в воде $c_L^2 \rho_L$ составляет порядка 23000 атм. Однако, когда такое давление начинает действовать на слой воздуха, его объем изменяется в несколько раз — это сильные деформации, приводящие к генерации гармоник.

Несмотря на простоту явления, до сих пор нет хорошей теории, позволяющей количественно оценить предельно возможные значения параметра нелинейности газожидкостных сред. Формула (23) получена из слишком упрощенной модели и дает, конечно, лишь оценку сверху. Можно, следуя [30], рассмотреть динамику одиночного пузырька и затем перейти к жидкости, содержащей ансамбль пузырьков (нелинейных осцилляторов). Уравнение колебаний пузырька в поле акустического давления в жидкости $p(t)$ выводится из уравнения Рэлея [7] и с учетом сжимаемости газа внутри пузырька имеет вид

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{1}{6} \left[2w \frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] + \omega_0^2 w (1 - \varepsilon_G w) = -\omega_0^2 \frac{p(t)}{c_G^2 \rho_G}. \quad (24)$$

Здесь w , ω_0^2 — относительное возмущение объема пузырька и квадрат собственной частоты его линейных колебаний,

$$w = \frac{V'}{V_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{3c_G^2 \rho_G}{R_0^2 \rho_L}, \quad (25)$$

V_0 , R_0 — равновесный объем сферического пузырька и его радиус, ε_G — нелинейный параметр газа (6). Резонансная длина волны в соответствии с (25) оказывается намного большей радиуса пузырька, поскольку осциллятор имеет малую сжимаемость (газ) и большую присоединенную массу соколеблющейся жидкости. Так, длина волны в воде на частоте 1 МГц составляет 1,5 мм, а радиус "резонансного" пузырька — лишь 4 мкм.

Уравнение (24) содержит как геометрическую нелинейность (член в квадратных скобках, появляющийся в уравнении Рэлея вследствие нелинейности уравнения Эйлера), так и физическую, пропорциональную ε_G . Их отношение — величина порядка $\omega^2 / (2\varepsilon_G \omega_0^2)$, где ω —

частота акустических колебаний. Таким образом, для низкочастотных (нерезонансных) пузырьков физическая нелинейность существенно превосходит геометрическую, поэтому последней можно пренебречь. Именно большой нелинейный отклик на низких частотах, связанный с сильной сжимаемостью газа в пузырьке, является основой нелинейной диагностики отдельных микропузырьков. При приближении частоты к резонансной преобладающим становится линейное рассеяние; резонансное сечение рассеяния превышает поперечное сечение пузырька в $4/(kR_0)^2$ раз (для пузырька в воде достигается относительное увеличение порядка 2×10^4 [35]).

Сохраняя в уравнении (24) только нелинейный член $\sim \varepsilon_G$ и дополняя его волновым уравнением для акустического давления, которое выводится из линеаризованных уравнений гидродинамики для жидкости с эффективной плотностью $\rho = \rho_L(p)(1 - nV(p))$, где n — число пузырьков в единице объема, удается получить систему уравнений [30]

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega_0^2 w (1 - \varepsilon_G w) = -\omega_0^2 \frac{p(t)}{c_G^2 \rho_G}, \quad (26)$$

$$\Delta p - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_L n V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (27)$$

Система (26), (27) совпадает с уравнениями, используемыми в нелинейной оптике диэлектриков [36], где p — электрическое поле, w — поляризация среды в модели типа Друде–Лоренца. Эту систему удобно использовать для решения вопроса о предельно возможных нелинейностях.

Не интересуясь резонансными явлениями, пренебрежем второй производной в (26). Эффективная низкочастотная скорость звука

$$c_{\text{eff}} = \frac{c_L}{1 + nV_0 \beta}, \quad \beta = \frac{c_L^2 \rho_L}{c_G^2 \rho_G}, \quad (28)$$

при этом падает как с ростом газосодержания nV_0 , так и с ростом отношения сжимаемостей β сред. Система (26), (27) является слабо диспергирующей, и может быть с помощью метода медленно изменяющегося профиля [36] сведена к уравнению римановых волн (ср. с (7)):

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{c_{\text{eff}}^3 \rho_{\text{eff}}} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{c_{\text{eff}}^3 \rho_{\text{eff}}} \equiv \varepsilon_G c_{\text{eff}} \frac{\rho_L n V_0}{(c_G^2 \rho_G)^2}, \quad (29)$$

где $\tau = t - x/c_{\text{eff}}$ — время в "сопровождающей" волну системе координат. Отсюда находим значение эффективного коэффициента нелинейности:

$$\frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_G} = \frac{\beta^2 n V_0 (1 - n V_0)}{(1 + \beta n V_0)^2}. \quad (30)$$

Видно, что максимальная нелинейность

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_G \frac{\beta^2}{4(\beta + 1)} \quad (31)$$

достигается при газосодержании $nV_0 = (\beta + 2)^{-1}$. Оценки для двухфазной системы, состоящей из воды и содержащихся в ней воздушных пузырьков, показывают, что эффективная нелинейность может вырасти по сравне-

нию с нелинейностью двухатомного газа в $K = \varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_G \approx 3900$ раз и достичь максимального значения $\varepsilon_{\text{eff}} \approx 4700$, причем это происходит при относительном объемном содержании газа всего лишь $0,7 \times 10^{-4}$.

Указанные значения согласуются с оценками многих измерений, а также с оценкой по формуле (23). Вместе с тем говорить об окончательной ясности нельзя. Пузырек рассматривался выше как осциллятор без потерь, деформации предполагались конечными, но малыми, не учитывались рассеяние и ряд других факторов. Казалось бы, для принципиального решения вопроса о максимуме ε_{eff} можно рассмотреть одномерную задачу о периодически чередующихся плоскопараллельных слоях двух сред $\rho_G c_G$, $\rho_L c_L$ с толщинами h_G , h_L . В линейной постановке такая задача давно решена (см., например, [36, 37]). Соответствующее дисперсионное уравнение

$$\cos(k_{\text{eff}}(h_G + h_L)) = \cos(k_G h_G) \cos(k_L h_L) - \frac{1}{2} \left(\frac{k_G}{k_L} + \frac{k_L}{k_G} \right) \sin(k_G h_G) \sin(k_L h_L) \quad (32)$$

получается в результате сшивания на границах решений волнового уравнения для каждого из слоев. В длинно-волновом приближении из (32) следует

$$\frac{h_G + h_L}{c_{\text{eff}}^2} = \frac{h_G}{c_G^2} + \frac{h_L}{c_L^2}. \quad (33)$$

При условии $c_G^2 \ll c_L^2$ из формулы (33) получается неправильный результат, не согласующийся с экспериментальными данными. Так, при одинаковых толщинах слоев воды и воздуха наблюдаются малые скорости звука (30–100 м с⁻¹), а согласно формуле (33) скорость звука достигает 235 м с⁻¹. Дело в том, что в классической теории (32) не учтены смещения границ, существенные при большой сжимаемости воздуха, т.е. граничная нелинейность (см. пример 1 из раздела 2). Правильный результат, полученный в рамках квазистатического подхода (формула Мэллока [31]),

$$\frac{(h_G + h_L)^2}{h_G h_L} \frac{1}{c_{\text{eff}}^2} = \frac{\rho_L}{\rho_G} \frac{1}{c_G^2} + \frac{\rho_G}{\rho_L} \frac{1}{c_L^2} \quad (34)$$

показывает, что при одинаковых толщинах слоев $h_G = h_L$ получается минимально возможная скорость $c_{\text{eff}} = 23,8$ м с⁻¹, гораздо меньшая скорости звука как в воде, так и в воздухе. Расхождение на порядок решения линейной задачи и реальных данных, связанное с неучетом смещения границ, демонстрирует трудности строгого решения задачи в "физически нелинейной" постановке.

К неясности ответа на вопрос о том, насколько большими могут быть нелинейные модули, добавляется другой, не менее важный вопрос: насколько большими можно сделать акустические числа Рейнольдса [1–3], характеризующие относительные вклады нелинейных эффектов и конкурирующего с ними затухания (вследствие диссипации, отражения, рассеяния волн и т.д.)? Часто рост нелинейности сопровождается еще бóльшим увеличением потерь, что затрудняет проведение измерений.

Перейдем теперь к твердым структурно-неоднородным средам. В таких средах (гранулированных, флюидо-

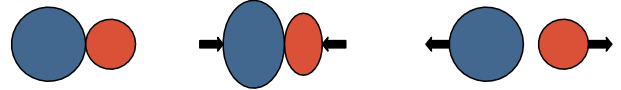


Рис. 5. Нелинейный контакт Герца.

насыщенных, трещиноватых, пористых и др.) усиление нелинейности K также достигает, по данным многих экспериментов, $10^2 - 10^4$. Здесь рост K — признак наличия дефектов.

Примером среды, обладающей сильно нелинейными свойствами, служит система гранул. Площадь контактов между гранулами зависит от приложенного напряжения, т.е. система деформируется как ансамбль нелинейных пружинок. Пример дает классическая контактная задача теории упругости — задача о двух шарах (контакт Герца [4], рис. 5). Сила, с которой отталкиваются шарики радиусами R_1 и R_2 , нелинейно зависит от разности смещений их центров $(\xi_2 - \xi_1)$, появившейся вследствие деформирования:

$$F = E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} (\xi_2 - \xi_1)^{3/2} \theta(\xi_2 - \xi_1). \quad (35)$$

Здесь θ — функция Хевисайда, E — эффективный модуль, зависящий от модулей Юнга материалов сфер и их коэффициентов Пуассона. При отрицательных значениях разности смещений $(\xi_2 - \xi_1)$ шары расходятся, не деформируясь, и сила F равняется нулю. При положительных значениях этой разности сила F зависит от нее как $(\xi_2 - \xi_1)^{3/2}$. Очевидно, что при колебаниях системы из двух шариков под действием периодической внешней силы нелинейность будет существенной только в случае сильного изменения площади соприкосновения тел. Если контакт "поджать" большим статическим усилием, то нелинейность уменьшится. При слабом поджатии, когда растягивающие силы могут разорвать контакт, в фазе сжатия гранулы соударяются; о таком механизме говорят как о "хлопающей" нелинейности. Модель системы, в которой деформации сжатия и растяжения описываются линейным законом Гука, но с разными модулями упругости, называют "бимодульной"; очевидно, что система с "хлопающими" контактами есть частный случай бимодульной системы, в которой отсутствует упругое сопротивление растяжению.

Нелинейные механизмы, подобные описанному механизму герцевских контактов, используются при описании динамики гранулированных сред (см. [38]), контакта шероховатых поверхностей [22] и ряда других систем.

Еще одним важным примером сред с большой структурной нелинейностью являются трещиноватые среды (рис. 6). Известно, что приложенное к образцу среды напряжение σ усиливается на кончике острой трещины ($\sigma^* = K\sigma$) в $K = 1 + 2\sqrt{l/2r_0}$ раз, где l — длина трещины, r_0 — радиус кривизны в вершине выреза (см., например, [39]). Когда $r_0 \rightarrow 0$, усиление $K \rightarrow \infty$. При больших напряжениях вблизи острой вершины трещины среда обычно пластически деформируется и r_0 принимает некоторое конечное значение.

Пусть к твердому образцу с внутренними трещинами (рис. 6а) приложено переменное напряжение, например, посредством облучения его волной с частотой ω или двумя частотами ω , Ω . Однородный объем деформи-

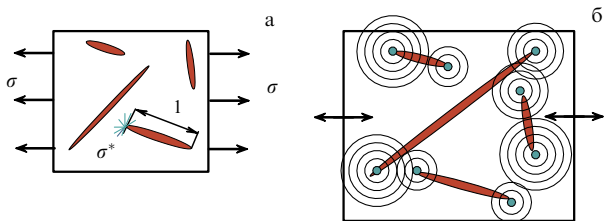


Рис. 6. (а) Вблизи острой вершины трещины приложенное напряжение усилено в $K \gg 1$ раз. (б) Вершины трещин излучают гармоники и комбинационные частоты спектра падающей волны.

руется линейно, однако вершины трещины генерируют вторую гармонику 2ω или комбинационные частоты $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ (рис. 6б). С увеличением числа трещин уровень нелинейного отклика должен возрастать.

Влияние дефектов структуры на нелинейность деформирования бетона наблюдалось при ультразвуковых и тензометрических измерениях [40–42]. Установлено, что водонасыщенные образцы имеют псевдоупругие свойства, а при испарении влаги (высыхании трещин) нелинейность усиливается. Отмечены появление зависимости нелинейных эффектов от частоты, а также гистерезисные явления.

Прямое подтверждение усиления нелинейных свойств среды с ростом числа трещин дано Робсманом [43, 44] (рис. 7). Бетонная балка нагружалась на стенде статическим напряжением, возрастающим вплоть до ее разрушения. С повышением нагрузки увеличивалось число трещин, и структурная нелинейность среды возрастала. При одних и тех же значениях длины балки (6 м) и уровня исходного сигнала наблюдалось усиление нелинейных волновых взаимодействий. На рисунке 7 в качестве примера показано взаимодействие узкой линии акустического сигнала с широким шумоподобным спектром, производимым ударом (ср. с рис. 1а). Процессы генерации высших гармоник, появление широких "пьедесталов" у каждой спектральной линии выражены сильнее при больших нагрузках. Отмечалось появление сигналов акустической эмиссии, рождающихся при образовании новых трещин, которые тоже вступали во взаимодействие. Непосредственно перед внезапным разрушением образца спектр становился очень сложным; заметно усиливалась его сплошная составляющая (белый шум).

Очевидно, что с развитием системы трещин уменьшается прочность материала, поэтому усиление нелинейных эффектов в дефектной среде может служить критерием потери прочности.

В последние годы публикуется много работ по нелинейной акустике сред с наследственными, в том числе гистерезисными, свойствами. Эти работы пока слабо связаны с многолетними исследованиями по механике наследственных сред, начало которым положили Больцман (1876 г.), Рэлей (1887 г.) и Вольтерра (1913 г.). Вместо "уравнений состояния", содержащих физическую нелинейность, здесь принято говорить об "определяющих уравнениях".

Еще Вольтерра при построении нелинейной теории наследственной упругости использовал представление Фреше для функционала в виде ряда кратных интегралов, обобщающее ряд Тейлора. Для одномерного случая разложения Вольтерра–Фреше в скалярном варианте

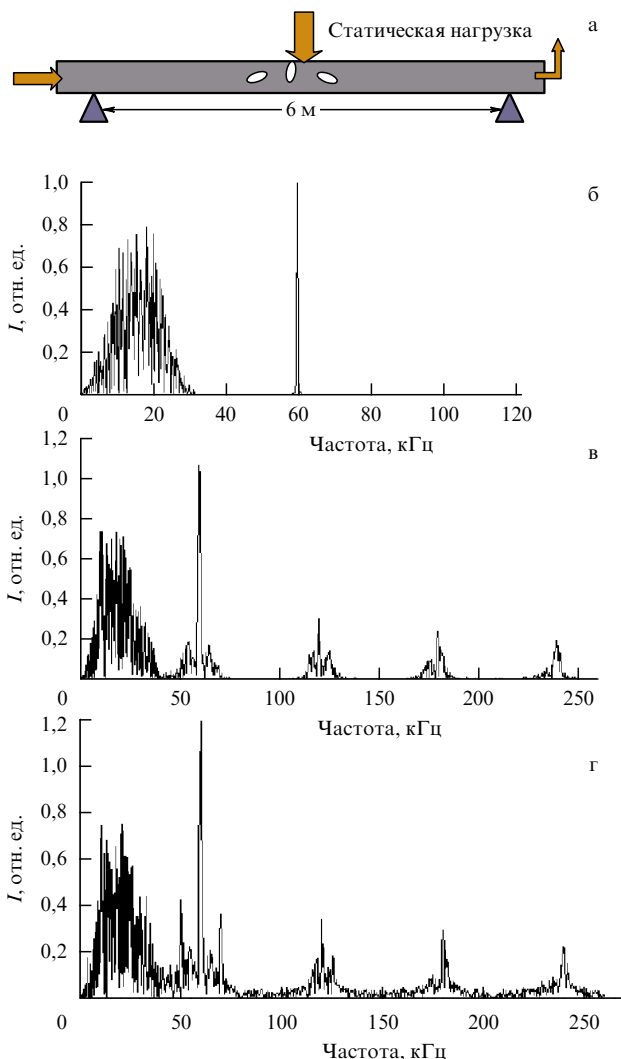


Рис. 7. Нелинейные взаимодействия широкополосного шума и монохромной волны в железобетонной балке (а) на разных уровнях развития трещин: (б) в отсутствие трещин, (в) при появлении одиночных несвязанных микротрещин, (г) при развитии системы связанных трещин перед внезапным разрушением балки, I — интенсивность выходного сигнала.

имеют вид

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G_1(t - \tau) d\epsilon(\tau) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t G_2(t - \tau_1, t - \tau_2) d\epsilon(\tau_1) d\epsilon(\tau_2) + \dots, \quad (36)$$

$$e(t) = \int_{-\infty}^t J_1(t - \tau) d\sigma(\tau) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_2(t - \tau_1, t - \tau_2) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2) + \dots,$$

где σ, e — напряжение и деформация, G_n, J_n — функции релаксации и ползучести [45]. Иногда используют модельные разложения, например, уравнение Работнова

$$\varphi[e(t)] = \sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (37)$$

или Линдермана – Розовского

$$e(t) = \psi[\sigma(t)] + \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \chi[\sigma(\tau)] d\tau, \quad (38)$$

в которых $\varphi(e)$, $\psi(\sigma)$ — некоторые функции; функциональные ряды (36) здесь предполагаются частично просуммированными. Эти функции, как и ядра под интегралами (36), в механике подбираются на основе больших объемов экспериментальных данных для каждого конкретного материала [45]. В акустике, где диапазон частот шире и структура ядер (или их спектров) гораздо сложнее, экспериментальных данных крайне мало. Такие данные могли бы быть получены на основе нелинейной спектроскопии, по аналогии с оптикой (см., например, [46]), однако о развитии этого направления и о проведении подобных измерений у нас сведений нет. В акустике этот термин используют в другом смысле; например, "нелинейная резонансная спектроскопия" может означать простое измерение амплитудно-зависимой частоты колебаний резонатора [47].

Теории, подобные теории Вольтерра, относятся к процессам с запаздыванием, но обратимым, в том смысле, что кривые мгновенного деформирования (в зависимости напряжения от деформации) при нагрузке и разгрузке совпадают. В гистерезисных средах ситуация может быть иной. Нелинейность в металлах, например, связана с накоплением существенно необратимой пластической деформации и закон разгрузки близок к линейному. В материалах с деструкционной псевдопластичностью (пример: армированные пластики с концентрацией напряжений на изгибах волокон, трещинах) при разгрузке часть трещин "закрывается", и график разгрузки приближается к началу координат: $\sigma = e = 0$ [45]. "Залечивание" трещин в процессе деформирования наблюдалось в бетоне. Недавно явление рождения – исчезновения дефекта наблюдали в металле по генерации высших гармоник [48]. Для циклических процессов удобна модель зависимости напряжения от деформации в виде гистерезисной зависимости Рэлея. Такая гистерезисная петля на рис. 8а задана формулами (участки A'B'A, ABA')

$$\sigma = (E + be_m)e + \frac{b}{2}(e^2 - e_m^2),$$

$$\sigma = (E + be_m)e - \frac{b}{2}(e^2 - e_m^2)$$

и $\sigma = Ee - be^2$ на участке OA'. Остаточные напряжения и гистерезисные потери (за цикл) даются следующими выражениями:

$$\sigma^* = \frac{b}{2} e_m^2, \quad W = \oint e d\sigma = \frac{4}{3} e_m^3.$$

Однако эта модель справедлива только для квазистационарных процессов: очевидно, что при быстром изменении приложенного акустического давления внутренняя перестройка среды не будет успевать следовать за ним, а на очень высоких частотах внутренние процессы окажутся совсем "замороженными". Гистерезисные потери, определяемые площадью петли на рис. 8а, с ростом частоты должны уменьшаться. В целом картина напоминает ту, которая описана релаксационной теорией Мандельштама и Леонтовича [7]. Однако в последней релаксирует линейный внутренний параметр (концентрация

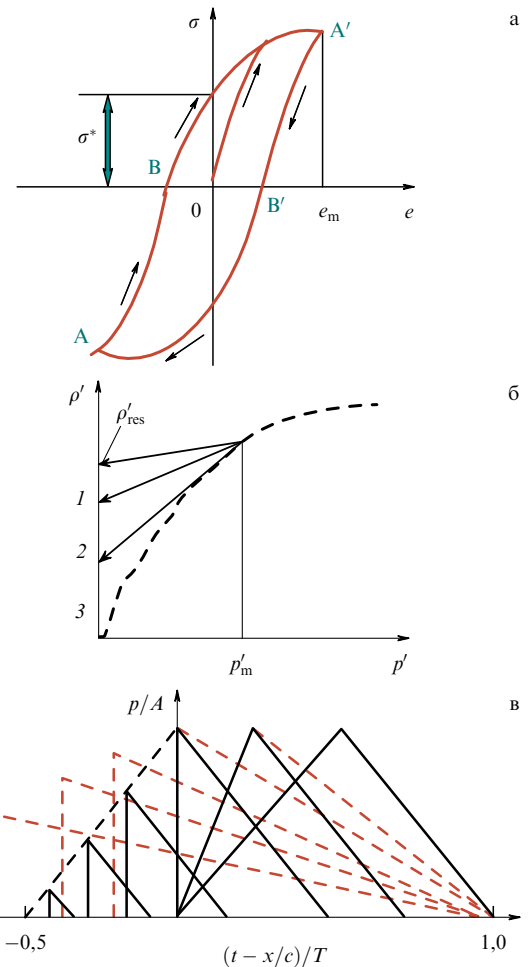


Рис. 8. (а) Гистерезис Рэлея. (б) Процесс уплотнения среды волной: нагружение идет по штриховой кривой, разгрузка — по прямым 1–3. (в) Искажение профиля однополярного импульса при распространении в гистерезисной среде (сплошные кривые) и в обычной нелинейной среде (штриховые кривые).

одной из химически реагирующих компонент, колебательно-возбужденных молекул и др.), приближающийся к равновесному значению со своим собственным характерным временем T , в результате чего появляется "линейная память" в зависимости возмущения плотности среды от акустического давления [2]:

$$\rho' = \frac{p}{c^2} - \frac{\varepsilon}{c^4 \rho} p^2 + \frac{m}{c^2 \rho T} \int_{-\infty}^t \frac{\partial p(x, t')}{\partial t'} \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) dt'. \quad (39)$$

Хотя внутренние движения вносят дополнительные потери ("вторая вязкость" [7]), реакция обратима, и после прохождения волны среда возвращается к равновесию. Напротив, в гистерезисных средах после снятия нагрузки возникает "нелинейная память" — необратимые деформации или остаточные напряжения.

В работе [49] рассмотрена среда типа грунта, уплотняющегося при однократном нагружении (рис. 8б), в которой процесс разгрузки в зависимости от его скорости идет по разным путям. Прямая 1 на рис. 8б соответствует медленному процессу; остаточные деформации при этом максимальны. При быстром цикле прямая 3 близка к нагрузочной кривой. В отличие от (39), здесь

внутренняя динамика описана нелинейным интегральным членом:

$$\rho' = \frac{p}{c^2} - \frac{\varepsilon}{c^4 \rho} p^2 + \frac{\varepsilon}{c^4 \rho} \frac{1}{T} \int_{t_m}^t [p(x, t') - p_m(x)]^2 \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) dt'. \quad (40)$$

Волновые уравнения эволюционного типа для этих случаев выглядят по-разному. Для определяющего уравнения (39) волновое уравнение имеет вид [2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{T}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau}\right) = \frac{m}{2c} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2},$$

а для (40) записывается [49] как

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{T}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau}\right) = -\frac{\varepsilon}{2c^3 \rho T} \frac{\partial}{\partial \tau} (p - p_m(x))^2.$$

На рисунке 8в показан процесс трансформации однополярного импульса в обычной нелинейной среде и в среде с остаточными деформациями. Видны принципиальные различия: 1) в обычной среде площадь импульса постоянна, а в необратимо деформируемой среде уменьшается при распространении; 2) скорость заднего фронта больше, чем переднего, поскольку задний фронт движется по среде, уплотненной передним фронтом; 3) фронты сближаются, вследствие чего наступает "коллапс" импульса; 4) в обычной среде импульс асимптотически затухает при $x \rightarrow \infty$, но потери на остаточные деформации приводят к его исчезновению на конечном расстоянии.

По-видимому, наибольший интерес в этой области представляет анализ прямых и обратных волновых задач, в том числе для целей нелинейной диагностики. Однако большинство акустических работ по изучению наследственных сред носит скорее материаловедческий и описательный характер. Как видно из рис. 8в, волны ведут себя в таких средах иначе, чем при обычной алгебраической зависимости напряжения от деформации. В случае "релаксирующих" (в смысле Мандельштама – Леонтовича) зависимостей между параметрами нелинейные волны исследованы подробно [2], но для гистерезисных сред таких результатов недостаточно (см. обзор проблемы в [49–53]).

4. О нелинейной диагностике

В основе обычной акустической диагностики лежит способность акустических волн проникать в среды, непрозрачные для иных видов излучения. Известно, что волны низких частот способны распространяться на несколько тысяч километров в океане и под землей; высокочастотные волны можно сфокусировать на любой внутренней орган человеческого тела и получить его ультразвуковое изображение. Именно по этой причине акустическая диагностика широко распространена в геофизике, медицине, промышленности. Линейные методы позволяют исследовать объекты, варьируя частоту, фазу, поляризацию и направление распространения волны. С использованием нелинейных явлений возникает зависимость отклика среды от амплитуды (интенсивности) сигнала. Тем самым во множестве методов и схем акустической диагностики появляется

"новое измерение"; в принципе любой из существующих методов обобщается и распространяется на нелинейный случай, и число таких модификаций может быть очень большим. Поэтому имеет смысл обсудить только некоторые схемы, в которых нелинейность уже сегодня открыла новые интересные возможности.

Идеи, лежащие в основе нелинейных методов диагностики и неразрушающего контроля, хорошо известны. С ростом амплитуд волн нарушается принцип суперпозиции: пересекаясь во времени и в пространстве, сильные волны начинают взаимодействовать, обмениваясь энергией. При этом каждая из волн "запоминает" как характеристики своих "партнеров", так и материальные характеристики среды (в той области, где произошло такое взаимодействие). Эта информация может быть "доставлена" к приемнику как самими исходными волнами, испытавшими кроссмодуляцию, так и излучением непосредственно из области взаимодействия в виде новых спектральных компонент, отсутствовавших в исходном волновом спектре.

На рисунке 9 изображена область пересечения двух волновых пучков с частотами ω , Ω . Эта область может излучать гармоники и волны комбинационных частот, амплитуды которых зависят как от амплитуд исходных волн, так и от параметров среды. Обработывая сигналы, можно получить информацию о линейных и нелинейных свойствах среды в области взаимодействия. Кроме того, каждый пучок на выходе из этой области оказывается промодулированным спектром другого пучка. В основе этих явлений лежит эффект "рассеяния звука на звуке" [56] (подробнее см. [57, 58]). Примером устройства, реализующего нелинейное "запоминание" сигнала, является "параметрический" приемник звука [10, 57], используемый в гидроакустике (рис. 10). Приемной антенной здесь служит столб воды высотой в несколько десятков или сотен метров, в котором локализован интенсивный высокочастотный пучок ω . Параметрические приборы, работающие в воздухе, начинают сейчас использоваться для дистанционной диагностики объектов [59].

Строго говоря, условие синхронного (резонансного) взаимодействия трех волн на квадратичной нелинейности

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

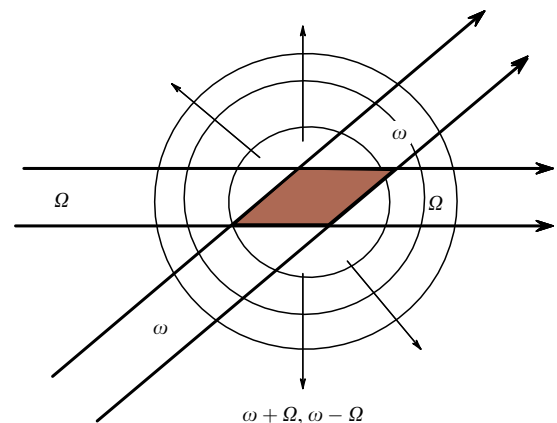


Рис. 9. Рассеяние звука на звуке и кроссмодуляция в интенсивных пучках.

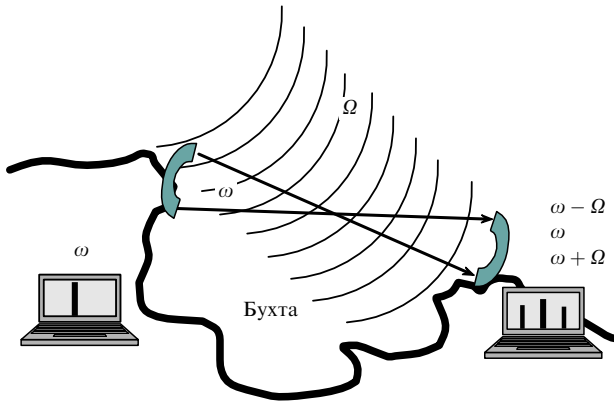


Рис. 10. Принцип работы приемной "параметрической" антенны: сильная волна ω способна "запоминать" параметры слабого сигнала.

в акустических средах со слабой дисперсией выполняется только для малых углов пересечения пучков. В частности, характеристика направленности приемника, представленного на рис. 10, имеет острый максимум в направлении излучения опорного пучка, формирующего "бестелесную" приемную антенну [10]. Однако в экспериментах удается измерить без особого затруднения и эффект нерезонансного рассеяния при любом угле пересечения пучков. Поэтому область пересечения можно перемещать в пространстве для измерения распределения характеристик среды. Удалось даже реализовать схему акустической томографии на встречных пучках, в которой длина синхронного взаимодействия волн минимальна [60]; сканирование по пространству осуществлялось с помощью задержки импульсных сигналов, благодаря которой импульсы встречались и взаимодействовали в разных местах.

Для получения наиболее полной информации о пространственном распределении нелинейного параметра $\varepsilon(\mathbf{r})$ нужно использовать методы дифракционной реконструктивной томографии. Простейшая схема такова [61]. Пусть нелинейная область (например, облако пузырьков в воде или биоткани либо скопление трещин в твердом теле) облучается волнами ω_1 , ω_2 , направленными по единичным векторам \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 . Измеряется разностная частота $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ в направлении \mathbf{n}_3 . Решение нелинейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c^2 \rho} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}$$

в борновском приближении для амплитуды разностного сигнала в дальнем поле имеет вид

$$P_3 = \frac{\pi^2 \omega_3^2}{c^2 \rho} \frac{\exp(i(\omega_3/c)r)}{r} P_1 P_2^* \tilde{\varepsilon} \left(\frac{\omega_3}{c} \mathbf{n}_3 - \frac{\omega_1}{c} \mathbf{n}_1 + \frac{\omega_2}{c} \mathbf{n}_2 \right), \quad (41)$$

где $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k})$ — фурье-образ функции $\varepsilon(\mathbf{r})$; начало координат находится внутри рассеивателя. Для коллинеарных зондирующих волн, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, в (41)

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} \left[\frac{\omega_3}{c} (\mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_1) \right], \quad (42)$$

т.е. для каждого направления облучения можно измерить векторы \mathbf{n}_3 , концы которых расположены на сфере с единичным радиусом. Таким образом определяются значения аргумента трансформанты Фурье (42) на сфере радиусом ω_3/c . Варьируя значения разностной частоты или используя различные комбинации направлений облучения и приема, можно заполнить данными измерений внутренность соответствующей сферы в \mathbf{k} -пространстве. После этого распределение $\varepsilon(\mathbf{r})$ восстанавливается численными методами, реализующими обратное преобразование Фурье.

Способность нелинейной волны "запоминать" свойства трассы использована в схеме диагностики волноводов переменного сечения [62]. Если функция $S(x)$, описывающая изменение сечения, неизвестна, то ее можно найти, решив уравнение (7) для второй гармоники, представленное в виде интегрального уравнения Фредгольма:

$$\frac{2c_0^3 \rho_0}{\varepsilon \omega} \frac{P_2(x)}{P_0^2(x)} = \int_0^x \left[\frac{S(x)}{S(z)} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{b\omega^2}{c_0^3 \rho_0} (z-x) \right] dz.$$

Профиль канала удается восстановить, используя значения амплитуд обеих гармоник, измеренных на расстоянии x при различных частотах исходного сигнала.

В работе [63] для профилирования каналов предложено использовать другой эффект — самоотражение волны после образования в ней ударных фронтов [2]. Варьируя амплитуду исходной волны, можно изменять расстояние, на котором образуется разрыв, интегрально зависящее и от поперечного сечения канала. Изменяя времена прихода самоотраженного сигнала [64], передний фронт которого задержан на время $2l_{NL}/c_0$ (11) относительно зондирующего импульса, можно сформировать массив данных для решения обратной задачи.

Таким образом, общий подход к восстановлению границ и внутренней структуры нелинейных рассеивателей должен базироваться на методах решения обратных задач, реализуемых в нелинейной акустической томографии. Однако даже простейший способ диагностики, основанный на генерации гармоник и комбинационных частот, весьма эффективен, особенно когда среда содержит сильно нелинейные включения типа пузырьков или трещин. Фактически любое аналитическое решение прямой нелинейной задачи включает в себя параметры (нелинейные модули, амплитуды волн, геометрические характеристики), которые можно определить экспериментально по измерениям нелинейно искаженного волнового поля или его спектра.

Обратим внимание на несколько принципиальных особенностей нелинейной диагностики.

Зависимость отклика среды от амплитуды (интенсивности) зондирующей волны можно использовать для выявления внутренних повреждений в среде при отсутствии априорной информации о влиянии дефектов на изменение отклика. Если, например, требуется обследовать партию деталей обычным (линейным) способом, то необходим "акустический паспорт" идеальной (неповрежденной) детали. Сравнивая отклик дефектного изделия с идеальным, можно судить о степени поврежденности. Напротив, если дефект является нелинейным рассеивателем, то сравнения не требуется. Достаточно провести серию измерений при различных значениях интенсивности возбуждения звука внутри каждой

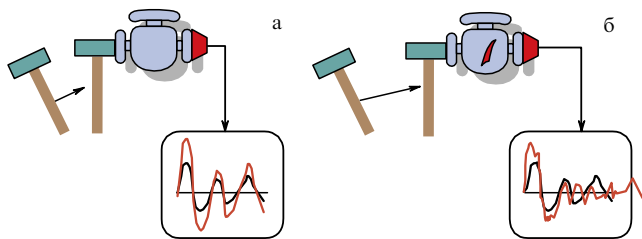


Рис. 11. Отклик неповрежденной детали линейно растет с усилением воздействия (а); во временном и спектральном отклике дефектной детали появляются новые черты (б).

детали (рис. 11). Если окажется, что временной отклик перестает линейно расти с увеличением амплитуды возбуждения, т.е. в отклике появляются новые черты, или в его спектре возникают новые спектральные компоненты, то эти признаки могут служить основанием для выбраковки детали. Простейший способ диагностики, основанный на возбуждении звука ударом, давно использовался для обследования колесных пар поездов, а также для проверки хрустальных и фарфоровых изделий по их звону при постукивании. Заметим, что ударом можно возбудить импульсный сигнал с сильно выраженным нелинейным поведением; он может взаимодействовать с довольно слабой волной, которая сама по себе нелинейности не проявляет. Сейчас такие взаимодействия часто используются в диагностических целях (см., например, рис. 7).

Различие линейного и нелинейного откликов нашло применение во многих схемах измерений. Так, в медицине используется "метод инвертированных импульсов". В исследуемый объем посылаются сначала один импульсный зондирующий сигнал $p_1(t)$, а затем — другой, такой же, но с инверсией давления, $p_2(t) = -p_1(t)$. Рассеянные сигналы регистрируются одним приемником, и затем находится их разность. Для линейного рассеивателя получается нуль, а нелинейность приводит к ненулевой разности. Преимущество этого подхода заключается еще и в том, что зондирующие сигналы можно сфокусировать в нужной области пространства и тем самым увеличить нелинейный отклик в K^2 раз (где K — коэффициент усиления зондирующих сигналов в фокусе), а также отстроиться от помех, создаваемых отражениями от поверхности (кожи) и объемных неоднородностей.

В медицинской диагностике используется нелинейный способ управления поглощением энергии ультразвука для повышения локализации процессов нагревания биотканей или возбуждения в них радиационных сил. Известно, что избыточное поглощение интенсивных волн может существенно превышать обычные диссипативные потери [1–3]; это явление особенно хорошо выражено для сильно искаженных волн с ударными фронтами [8]. При значениях интенсивности ультразвука в несколько киловатт на 1 см^2 , достигаемых в фокальной области современных медицинских приборов, нелинейный коэффициент поглощения больше линейного на порядок [65–68]. Очевидно, что акустическую энергию нужно с минимальными потерями доставить в заданную область среды и обеспечить ее полное поглощение в этой области. Для организации такого транспорта требуется ввести предсказания в излучаемую



Рис. 12. Образование струи под действием радиационного давления. (Фотография предоставлена О.А. Сапожниковым.)

волну, такие, при которых в процессе нелинейно-дифракционной эволюции профиля волны ударные фронты образовывались бы непосредственно в фокусе. Для расчета формы волны, эволюционирующей таким образом, нужно решить нелинейную обратную задачу [68].

Концентрация энергии в фокусе используется в акустической гипертермии (термодеструкции злокачественных новообразований), в ультразвуковом гемостазисе (остановке внутренних кровотечений путем неинвазивного заваривания сосудов) [67], для разрушения внутриклеточных структур с целью мобилизации иммунного отклика на онкологические заболевания [69] и в других медицинских приложениях. Остановимся только на диагностике с помощью пульсирующих радиационных сил, которые создаются внутри исследуемого объекта сфокусированным ультразвуком. Радиационное давление, открытое в 1902 г. Рэлеем, — это сильный эффект, заметно превосходящий давление света. Например, при фокусировке ультразвука на поверхность воды может образоваться струя высотой около 10 см (рис. 12). При поглощении ультразвука или его отражении от неоднородностей в среде возникает поле сил, имеющее вихревой характер. Формально появление этих сил объясняется присутствием нелинейных членов в уравнениях гидродинамики (1), (2) и теории упругости (3), (4) при усреднении уравнений по быстрым осцилляциям [2]. Поэтому в жидкости формируются потоки ("акустический ветер"), а в биотканях — напряженное состояние. Когда ультразвук модулирован низкими частотами, переменное силовое поле вдали от границ возбуждает сдвиговые волны. Эти волны удается зафиксировать [70] и по скорости их распространения оценить сдвиговую упругость, которая очень чувствительна к патологическим изменениям тканей [71]: она увеличивается, например, в опухолевой ткани на 2–3 порядка, в то время как другие параметры (плотность среды, скорость звука) изменяются лишь на несколько процентов. Этот факт позволил предложить новый способ диагностики (SWEI), который рассматривается в разделе 5.

Сдвиговые волны чувствительны к структурным неоднородностям, ответственным за большие нелинейности [24]. Поэтому метод дистанционного возбуждения сдвиговых волн может использоваться для испытания

конструкций в труднодоступных зонах, например, для анализа усталостных изменений в местах сочленения крыльев и фюзеляжа самолета; эта проблема сейчас обсуждается в связи с реализацией новых схем диагностики.

Дополнительные возможности измерения нелинейных параметров сред открывает использование акустических резонаторов. Обычные значения добротности для них $10^2 - 10^4$. Во столько же раз амплитуда колебаний в полости резонатора больше амплитуды колебаний его границы. Это означает, что в экспериментах можно использовать источники значительно меньшей мощности, чем при измерениях с бегущими волнами. Рекордно высокие значения добротности ($10^8 - 10^9$) были достигнуты группой Брагинского [72] при создании приемников гравитационных волн. Возможности повышения добротности с учетом сильных проявлений нелинейности проанализированы в [73]. В акустике измерения нелинейных параметров сред в резонаторах были начаты в 1960-х годах Зарембо с сотрудниками [1]. В более поздней работе Зарембо и др. [40] обсуждается проблема оценки прочности бетона по акустическим данным. Показано, что пределы прочности на сжатие и растяжение определяются одновременно коэффициентами квадратичной и кубической нелинейностей. Кубическая нелинейность измерялась по сдвигу собственной частоты резонатора вниз; при увеличении амплитуды акустической деформации от 10^{-7} до 7×10^{-6} собственная частота бетонного блока уменьшалась с $f_0 = 6,033$ кГц на величину $\Delta f = 5 \times 10^{-3} f_0$ (при деформации 7×10^{-6}). Оцененная по нелинейности прочность хорошо соответствовала известным данным. Сейчас измерения в резонаторах проводятся другими группами (см., например, [13, 47]).

Необходимо упомянуть также недавно развитые методы, использующие обращение во времени слабой волны для формирования интенсивных и хорошо сфокусированных сигналов [47]. Вначале слабый импульс, излученный небольшим источником, направляется внутрь сосуда (трубы), где в результате многократных отражений он сильно растягивается во времени. Растянутый сигнал принимается, записывается и обращается во времени, а затем усиливается и посылается в обратном направлении. После всех переотражений на обратном пути импульс сжимается во времени и превращается в короткий интенсивный импульс, сфокусированный на ту же самую малую область, из которой был послан первоначальный слабый импульс.

Для нелинейной диагностики используются также сигналы с обращенным фронтом [74]. Этим вопросом на сессии ОФН был посвящен отдельный доклад [75].

5. Некоторые приложения

В последние несколько лет наблюдается заметный рост числа публикаций, посвященных нелинейности неоднородных сред, материалов, промышленных изделий, строительных конструкций и геологических структур, а также методам их нелинейной диагностики. Создана группа NATEMIS, объединяющая европейских ученых около десяти стран; она проводит рабочие семинары 1–2 раза в год и в последнее время организовала исследования по авиационной диагностике. Аналогичные работы в США связаны с геологией, безопасностью ядерной энергетики и различными отраслями промыш-

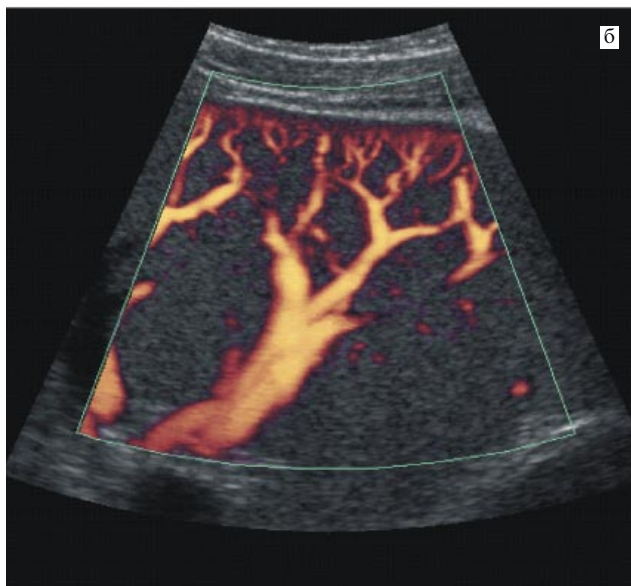
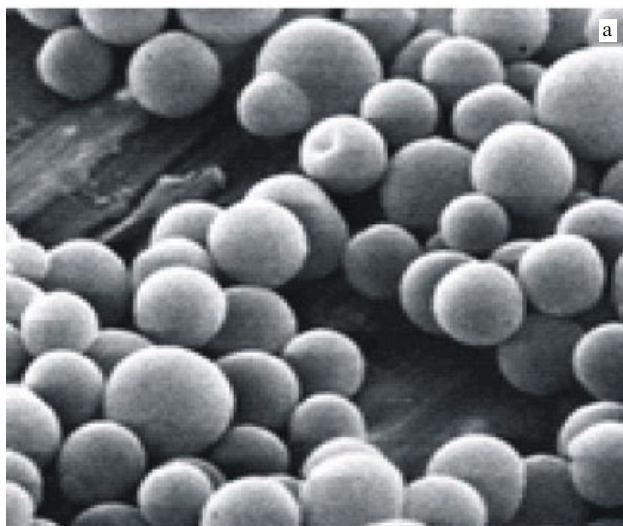


Рис. 13. Пузырьки в акустически контрастном препарате (а) и визуализированный с их помощью участок сосудистого русла (б). (Фотографии предоставлены В.А. Хохловой.)

ленности. Помимо очевидной прикладной направленности этих работ, интерес к проблеме стимулируется и фундаментальными вопросами нелинейной физики и материаловедения, ряд которых до сих пор не решен. Обсуждаемые ниже приложения — это немногие примеры диагностического использования нелинейных явлений.

Детектирование отдельных пузырьков газа или их скоплений в жидкости, о котором говорилось в разделе 3, нашло неожиданное для российских специалистов применение в медицине. К числу конкретных достижений в этой области следует отнести создание контрастных веществ типа "Albunex" для целей визуализации кровотока и медицинской диагностики. О масштабах работ говорит такой факт: на создание этих веществ и проведение клинических испытаний американские и европейские компании уже израсходовали сотни миллионов долларов. Препарат представляет собой стабильную взвесь микропузырьков микронных размеров, каждый из которых окружен биологически инертной оболочкой

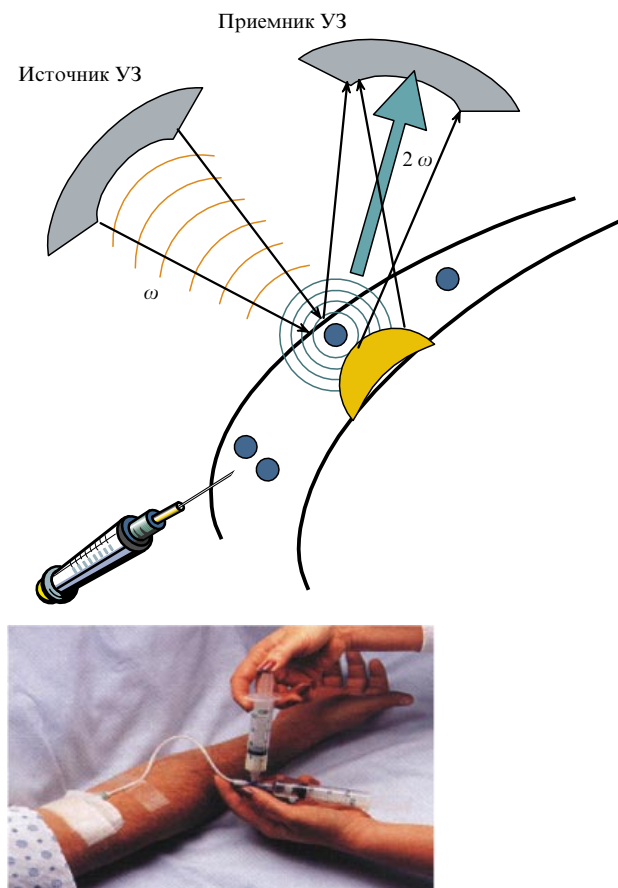


Рис. 14. Схема применения пузырьковых препаратов для визуализации кровотока.

(рис. 13). Пузырьки инжицируются в сосудистое русло, после чего их перемещение потоком крови регистрируется как по обычному рассеянию звука, так и по второй гармонике или комбинационной частоте (рис. 14). Большая локальная нелинейность и отсутствие помех от линейных рассеивателей на высших гармониках позволяют следить либо за одиночным пузырьком или небольшой группой пузырьков, либо за перемещением фронта облака пузырьков, либо за участком сосудистого русла в целом.

Решена аналогичная задача обнаружения дефектов (трещин) в объеме твердотельных изделий. Большая нелинейность трещин позволяет получать их изображение на высших гармониках. В качестве примера на рис. 15а изображена поверхность пластинки, колеблющаяся на частоте 20 кГц; рельеф смещений поверхности визуализирован лазерным виброметром. На этой частоте сигнал от трещины не виден на фоне сильного сигнала от поверхности, являющегося в данном случае помехой. Зато при регистрации сигнала на высших гармониках трещина видна четко (рис. 15б), поскольку гармоника (в данном эксперименте — седьмая) рождается главным образом при колебаниях трещины, а поверхность на этой частоте помех не вносит.

Интересная нелинейная динамика одиночного дефекта в твердом теле наблюдалась в эксперименте [48] (рис. 16). Авторы возбуждали различные моды колебаний металлического диска и снимали распределение акустических смещений поверхности виброметром

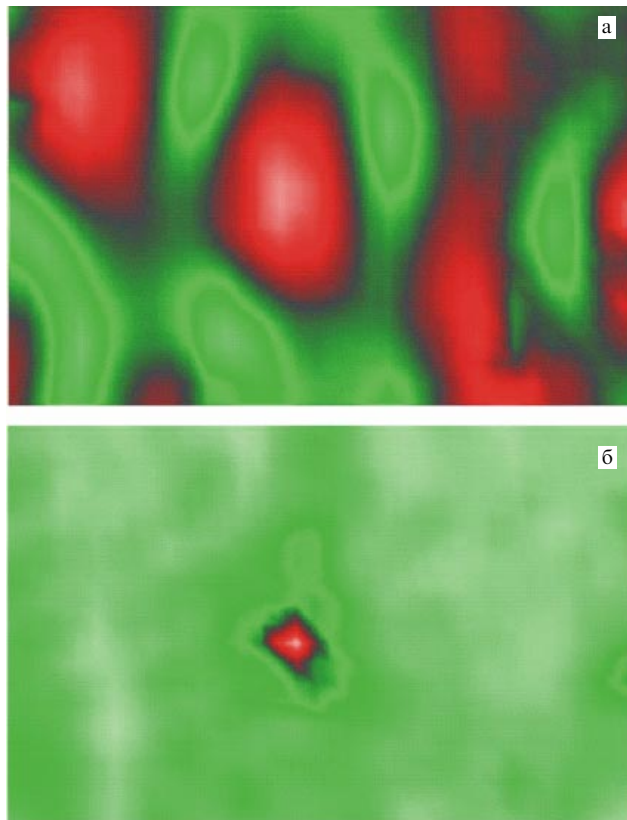


Рис. 15. Поверхность участка плиты, колеблющейся на частоте 20 кГц (а) и локализованный дефект под поверхностью, изображение которого получено на седьмой гармонике (140 кГц). (Изображения предоставлены И.Ю. Солодовым.)

"Polytec". Картина смещений для одной из мод показана на рис. 16а. Спектр мод не являлся эквидистантным, и несколько первых гармоник основной моды не попадали на частоты высших мод. Поэтому при возбуждении диска на второй-четвертой гармониках смещения поверхности были малы, зато обнаруживались колебания внутреннего дефекта (рис. 16б), вероятнее всего трещины. После длительного воздействия на дефект колебаний большой амплитуды локальная аномалия исчезала, что, по-видимому, свидетельствовало о "самозалечивании" трещины. Сигнал наблюдался, когда смещения на первой гармонике достигали 10^{-5} м, и существовал в узком динамическом диапазоне порядка 10^{-6} м. Максимальные смещения на частотах второй, третьей и четвертой гармоник оцениваются как 2×10^{-7} , $1,2 \times 10^{-7}$, $0,2 \times 10^{-7}$ м.

Метод SWEI (shear wave elasticity imaging), предложенный Сарвазяном [71], основан на дистанционном возбуждении сдвиговых волн внутри объекта с помощью пульсирующего радиационного давления, создаваемого интенсивным пучком модулированного и сфокусированного ультразвука. Идея состояла в том, чтобы использовать ультразвук, подобно пальцам хирурга (см. рис. 12), для "пальпирования" внутренних органов и тканей человеческого тела. Поскольку область концентрации радиационных сил вытянута вдоль оси фокальной области [66], она излучает цилиндрическую сдвиговую волну, расходящуюся от оси (рис. 17). Скорость распространения этой волны мала по сравнению со скоростью

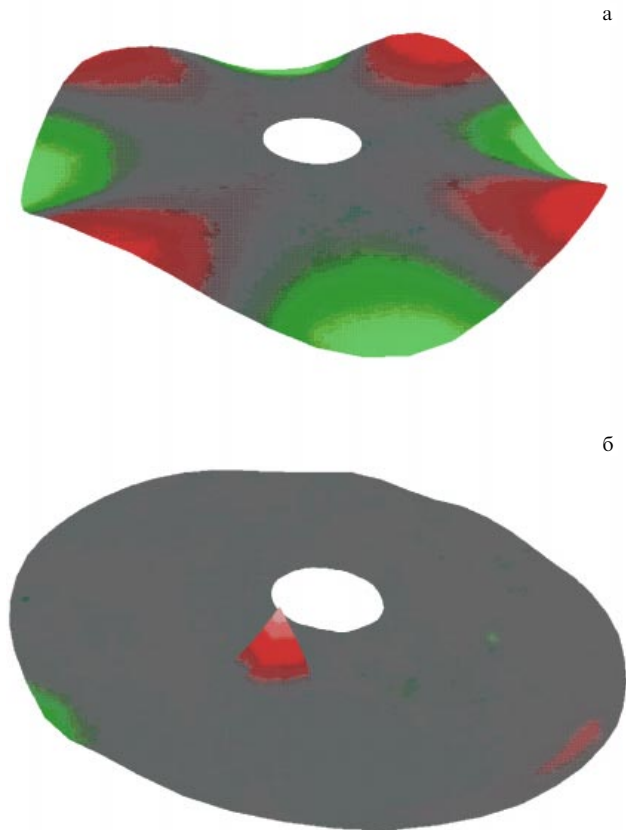


Рис. 16. Собственная мода колебаний металлического диска (а) и колебания дефекта (б) на третьей гармонике основной моды. Результаты предоставлены А.И. Коробовым и М.Ю. Изосимовой. Электронная версия статьи на сайте <http://ufn.ru> позволяет увидеть эти колебания в динамике.

звука и может изменяться от нескольких единиц до нескольких сотен метров в секунду в зависимости от состояния ткани. Эта скорость измерялась оптическим методом (в прозрачном фантоме [70]), а также с помощью ядерного магнитного резонанса и доплеров-

ского смещения частоты пробного ультразвукового пучка [71]. Таким образом удается измерить параметр (сдвиговую упругость), наиболее чувствительный к патологиям. Заметим, что когда, прощупывая опухоль, говорят о локальном уплотнении, допускают неточность. Неоднородность, субъективно воспринимаемая как уплотнение, на самом деле является областью с повышенной сдвиговой упругостью.

В настоящее время группой Artannlabs [71] ведутся работы по модификации SWEI для диагностики костных и суставных заболеваний. При этом ультразвук, проникая сквозь мягкие ткани, создает радиационное давление на кость и возбуждает в ней различные типы волн. По скорости распространения можно судить, например, о дефиците кальция; при обработке спектра принимаемого сигнала получают информацию о других отклонениях от нормы.

Очевидно, идея использования радиационного давления является перспективной и для диагностики сложных конструкций, поскольку описанный способ позволяет бесконтактно возбуждать колебания отдельного элемента внутри конструкции и анализировать его отклик.

Среди отечественных достижений необходимо выделить результаты нелинейной диагностики в строительной индустрии. Начало этих исследований относится к концу 1980-х годов. Группа В.А. Робсмана из Института транспортного строительства (ЦНИИС) проводила в Армении работы, связанные с сооружением тоннеля Севан–Арпа. В то время произошло катастрофическое землетрясение, повлекшее многочисленные разрушения и жертвы. Группу попросили провести диагностику поврежденных зданий и дать заключение о том, какие здания можно восстановить, а какие следует разрушить в целях безопасности. При ультразвуковом просвечивании ключевых строительных элементов (балок, несущих стен, перекрытий) выяснилось, что, чем более сильные искажения претерпевают акустические спектры, тем сильнее повреждена конструкция. Позднее эмпирическим критериям на основе экспериментальных (см. рис. 7) и теоретических исследований [43, 44]

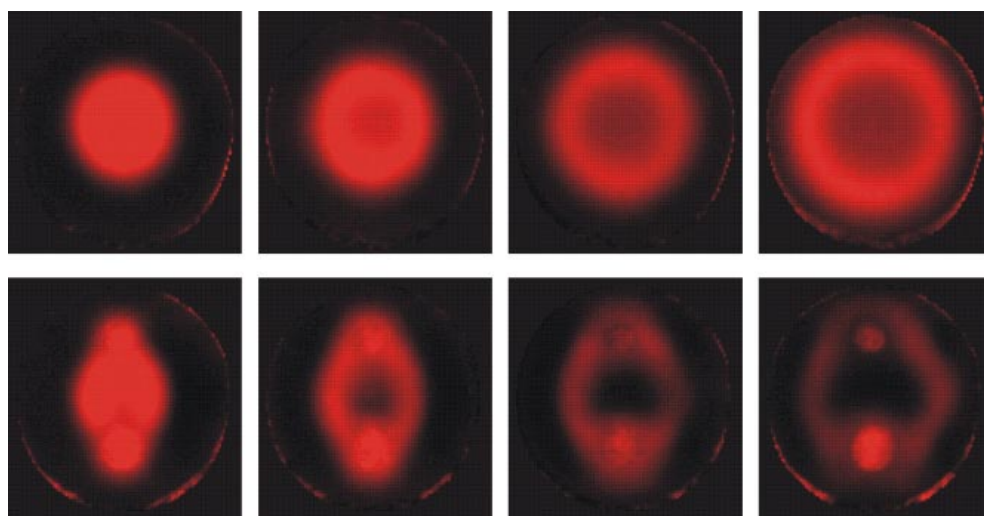


Рис. 17. Последовательные положения фронта сдвиговой волны в однородном фантоме биологической ткани (верхний ряд). Нижний ряд соответствует неоднородной среде с двумя включениями, моделирующими опухоль. (Фотографии предоставлены А.П. Сарвазяном.) Электронная версия статьи на сайте <http://ufn.ru> позволяет наблюдать процесс визуализации в динамике.

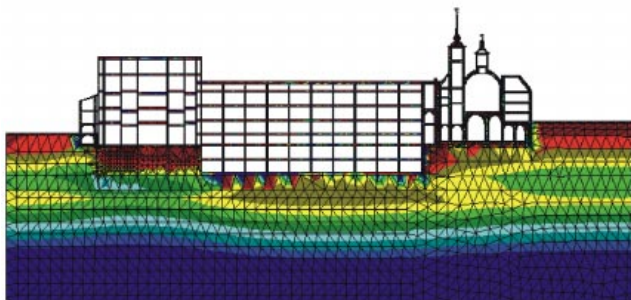


Рис. 18. Иллюстрация к компьютерной модели для расчета силового взаимодействия нового здания и старинной церкви в Москве. Данные по характеристикам церкви получены методами акустической диагностики. Проект строительства не реализован. (Рисунок предоставлен В.А. Робсманом.)

было дано объяснение, и сейчас "нелинейные" прогнозы стали весьма достоверными.

Развитые методы диагностики успешно использовались при строительстве третьего транспортного кольца в Москве (см., например, [49]), при реконструкции и реставрации архитектурно-исторических памятников (рис. 18), строительстве метрополитенов, обследовании энергетических установок с целью разработки проектов усиления конструкции и сейсмозащиты, для диагностики дефектов пролетных строений и опор больших и внеклассных мостов (более 30) с целью оценки фактической грузоподъемности и проектов реконструкции.

6. Нетипичные нелинейные явления в структурно-неоднородных средах

Помимо гигантской нелинейности, обуславливающей высокую чувствительность нелинейных методов измерений, структурно-неоднородные среды интересны также в связи с необычностью некоторых наблюдавшихся в них нелинейных явлений.

Одно из таких явлений — это наличие "доминантной" частоты у сред типа мокрого песка, глины, трещиноватых горных пород. На какой бы частоте не возбуждались колебания в такой среде, на выходе из нее регистрируется "доминантный" сигнал, а другие спектральные составляющие, включая исходную частоту, оказываются слабыми [76–79]. Характерное значение доминантной частоты для гравия 8–10 Гц, морского песка 25 Гц, глины 40 Гц, эродированных гранитов 100 Гц [77, 78]. Интересно, что при воздействии вибраций доминантной частоты 12 Гц на обводненный нефтяной пласт доля нефти в дебите возрастала примерно в два раза [80]. Причиной появления доминантных частот является наличие внутренних резонансных свойств фрагментированных грунтов и горных пород, а также сильная их нелинейность, ответственная за перекачку энергии колебаний в эти частоты.

"Обычными" нелинейными явлениями можно считать процессы генерации высших гармоник, субгармоник, комбинационных частот. С этой точки зрения генерация непосредственно очень высокой (например сотой) гармоники без предшествующей ей генерации каскада более низких гармоник выглядит необычно. Точно так же, генерация низкочастотного спектра с характерными частотами, во много раз более низкими, чем частота

накачки, на первый взгляд, — явление экзотическое. Тем не менее эти процессы наблюдаются и могут быть довольно просто объяснены.

Рассмотрим ансамбль зерен, погруженных в жидкость. Система гранул сама по себе имеет большую структурную нелинейность, обусловленную контактами границ. При наличии колеблющейся жидкости возникает дополнительная инерционная нелинейность, вызванная ускоренным движением частиц [38]. Между частицами, обтекаемыми жидкостью, возникают силы притяжения, а герцевское отталкивание (35) проявляется при деформировании сталкивающихся зерен (см. рис. 5). Большие пространственные градиенты сил здесь обусловлены большой неоднородностью распределения масс. Собственная линейная частота колебаний элементарного осциллятора в такой среде равна

$$f_{\text{lin}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3a}{2}} \left(E^2 F_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/6}, \quad (43)$$

где a — коэффициент, зависящий от объемов и плотностей двух соседних частиц сферической формы, F_0 — статическая прижимающая сила, остальные обозначения те же, что и в (35). Однако для амплитуд колебаний A порядка диаметров зерен нелинейная частота

$$f_{\text{nonl}} = \frac{a^{1/2} F_0^{5/6}}{2AE^{1/3}} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad (44)$$

оказывается на 2–3 порядка меньшей. Когда по жидкости, окружающей гранулы, бежит акустическая волна, шарики притягиваются, соударяются и слегка расходятся, двигаясь в жидкости почти свободно. При последующих соударениях шарики расходятся все дальше друг от друга. Поскольку относительные скорости соседних шариков в момент соударения оказываются случайными, формируется картина случайных колебаний (рис. 19а). Амплитуда колебаний со временем в среднем растет, а спектр смещается в область низких частот (рис. 19б).

Описанное поведение частиц имеет много аналогий. Такая же картина наблюдается в поле силы тяжести при упругом отскакивании шарика от колеблющейся по нормали горизонтальной пластины. После начала колебаний шарик, испытывая соударения с пластиной в случайные моменты времени, подпрыгивает все выше до тех пор, пока приток энергии не уравнивается с потерями. Этот процесс наблюдал в 1920-х годах Н.Н. Андреев [81], один из основоположников отечественной акустики, поэтому явление называют "молоточек Андреева" (см. [82, 83]). Стохастический разгон частиц (ускорение Ферми) привлекают для объяснения многих явлений; в простейшей модели этот процесс описывается точечным преобразованием Улама [84].

Перейдем теперь к рассмотрению генерации высокочастотных спектров. Пусть в ограниченном объеме среды имеется нарушение сплошности в виде неплотно прижатых друг к другу или свободных блоков. Примером может служить геоструктура с так называемыми "слабо консолидированными отдельностями" (рис. 20а). Если по среде распространяется волна с длиной, большей размера неоднородности, то она вызывает появление квазистатических деформаций, обусловленных инерцией отдельностей. Пусть периодическое изменение давления

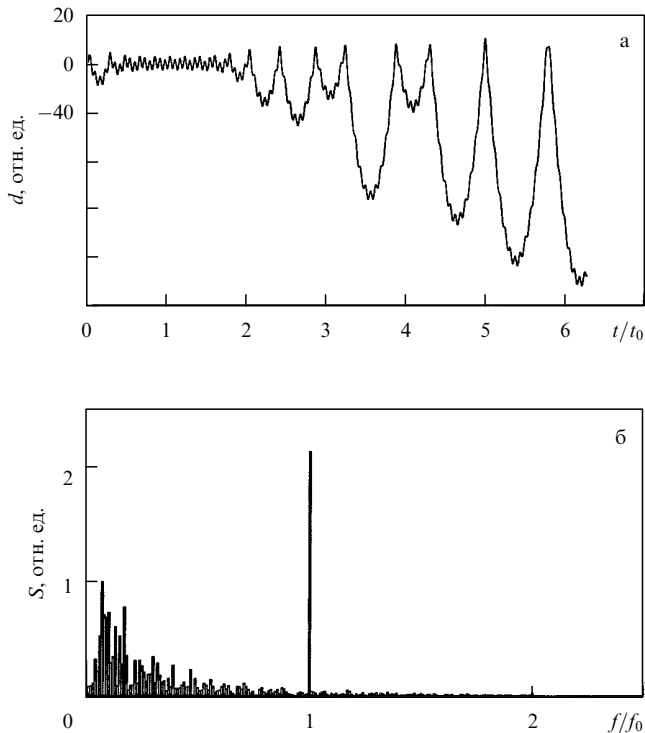


Рис. 19. (а) Зависимость расстояния между центрами соседних гранул d от времени. (б) Вид установившегося спектра S этих колебаний.

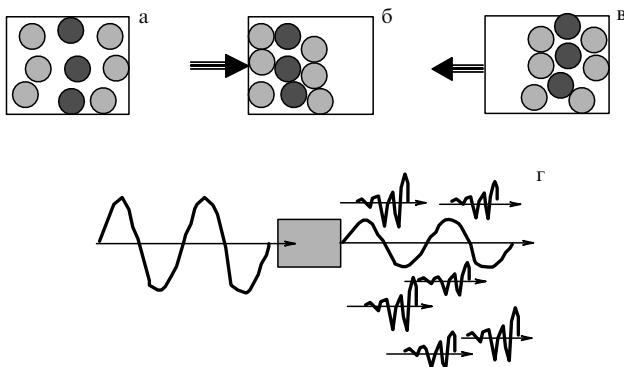


Рис. 20. Схема структурных изменений в объеме со слабо консолидированными отдельностями: (а) система в покое; (б) твердая граница объема ускоряется волной вправо; (в) изменение полярности волн приводит к переупаковке отдельностей. (г) Сигналы на входе и выходе структуры, изображенной на рис. а–в.

ускоряет жесткую границу рассматриваемого объема в положительном направлении (рис. 20б); при этом отдельности смещаются и упаковываются. Смена знака ускорения приводит к переупаковке (рис. 20в). При каждом соударении отдельностей (блоков) между собой, а также с границами консолидированной среды генерируется высокочастотный импульс с частотой порядка обратного времени пробега звука через отдельность. Другая характерная частота определяется числом столкновений за период (т.е. числом блоков в объеме). Поскольку акустический спектр каждого такого удара лежит гораздо выше частоты падающей волны, показанная на рис. 20 структура генерирует высокочастотное шумовое акустическое поле. Спектр на выходе содер-

жит, помимо исходной низкой частоты, гармоники частоты соударений и набор собственных частот ("звон") отдельных блоков (рис. 20г).

Похожее преобразование спектра происходит в афролатиноамериканском музыкальном инструменте, известном как шейкер (или шекере, или маракас). При тряске сосуда с гранулами частота вибраций порядка 1 Гц преобразуется в слышимый диапазон. В случае геоструктуры ее отдельности, разумеется, смещаются на расстояния, гораздо меньшие их размера.

Наличие механизмов, переносящих энергию колебаний в низкочастотную (см. рис. 19) и высокочастотную (рис. 20г) области спектра, означает, что принимаемый сигнал, прошедший сквозь реальную структурно-неоднородную среду, несет информацию не только об источнике, но, в значительной степени, и о трассе своего распространения. Заметные изменения спектров наблюдались при пересечении тектонического разлома сейсмической волной, вызванной землетрясением [77]. Сказанное означает, что сигналы удаленных землетрясений можно использовать для нелинейной диагностики локализованных геоструктур, проводя измерения падающего и рассеянного сигналов [85].

В заключение отметим, что как в отечественной, так и зарубежной литературе поток работ, посвященных гигантским нелинейностям и нелинейной диагностике, не ослабевает. Так, помимо цитированных выше публикаций, в последние месяцы появились работы по нелинейной диагностике металлов [86], гранулированных сред [87], газовых пузырьков в биологических тканях [88]. Вышел в свет дополнительный выпуск *Акустического журнала* (2005 г.), посвященный смежным проблемам акустики и геофизики. Большой объем информации содержат труды многочисленных конференций, прошедших за последние 2–3 года. Материалы сообщений наших коллег (см. этот выпуск *УФН*) дополнят картину состояния дел в этой области.

Список литературы

1. Зарембо Л К, Красильников В А *Введение в нелинейную акустику* (М.: Наука, 1966)
2. Руденко О В, Солюян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975)
3. Наугольных К А, Островский Л А *Нелинейные волновые процессы в акустике* (М.: Наука, 1990)
4. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: Наука, 1987)
5. Зарембо Л К, Красильников В А *УФН* **102** 549 (1970)
6. Руденко О В *УФН* **149** 413 (1986)
7. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1988)
8. Руденко О В *УФН* **165** 1011 (1995)
9. Руденко О В, Робсман В А *Докл. РАН* **384** 755 (2002)
10. Новиков Б К, Руденко О В, Тимошенко В И *Нелинейная гидроакустика* (Л.: Судостроение, 1981)
11. Guyer R A, Johnson P A *Phys. Today* **52** (4) 30 (1999)
12. Руденко О В *Дефектоскопия* **29** 8 24 (1993)
13. Ostrovsky L A, Johnson P A *Riv. Nuovo Cimento* **24** (7) (2001)
14. Sarvazyan A P, Chalikian T V *Ultrasonics* **29** 119 (1991)
15. Chalikian T V et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **91** 52 (1992)
16. Руденко О В, в сб. *Нелинейные волны-2004* (Под ред. А В Гапонова-Грехова, В И Некоркина) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005) с. 70
17. Руденко О В *Акуст. журн.* **44** 823 (1998)
18. Руденко О В *Акуст. журн.* **45** 397 (1999)
19. Руденко О В, Шанин А В *Акуст. журн.* **46** 392 (2000)
20. Руденко О В, Хирных К Л *Акуст. журн.* **36** 527 (1990)
21. Северин Ф М, Солодов И Ю, Шкуланов Ю Н *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **29** (4) 94 (1988)

22. Руденко О В, Чинь Ань Ву *Акуст. журн.* **40** 668 (1994)
23. Richardson T *Int. J. Eng. Sci.* **17** 73 (1979)
24. Zheng Y, Maev R G, Solodov I Yu *Can. J. Phys.* **77** 927 (1999)
25. Hedberg C M, Rudenko O V *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 2340 (2001)
26. Остроумов Г А и др., в сб. *Труды 6 международного симпозиума по нелинейной акустике* (М.: Изд-во МГУ, 1975) с. 209
27. Дружинин Г А, Михайлов А А, Токман А С *Акуст. журн.* **34** 176 (1988)
28. Кобелев Ю А, Сутин А М *Акуст. журн.* **26** 860 (1980)
29. Zamolin S et al. *Acoust. Lett.* **6** (2) 15 (1982)
30. Заболотская Е А, Солюян С И *Акуст. журн.* **13** 296 (1967)
31. Накоряков В Е, Покусаев Б Г, Шрейбер И Р *Волновая динамика газо- и парожидкостных сред* (М.: Энергоатомиздат, 1990)
32. Ляхов Г М *Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах* (М.: Недра, 1974)
33. Мансфельд А Д, Рейман А М, в сб. *Ультразвуковая диагностика* (Отв. ред. М Т Грехова) (Горький: ИПФ РАН, 1983) с. 139
34. Островский Л А, Сутин А М, в сб. *Ультразвуковая диагностика* (Отв. ред. М Т Грехова) (Горький: ИПФ РАН, 1983) с. 151
35. Исакович М А *Общая акустика* (М.: Наука, 1973)
36. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* 2-е изд. (М.: Наука, 1990)
37. Бреховских Л М *Волны в слоистых средах* (М.: Изд-во АН СССР, 1957)
38. Rudenko O V, Hedberg C M *Nonlinear Dynamics* **35** (2) 187 (2004)
39. Партон В З *Механика разрушения: от теории к практике* (М.: Наука, 1990)
40. Зарембо Л К, Красильников В А, Школьник И Э *Дефектоскопия* **10** 16 (1989); Shkolnik I, Zarembo L, Krasilnikov V, in *Frontiers of Nonlinear Acoustics* (Eds M F Hamilton, D T Blackstock) (London: Elsevier Appl. Sci., 1990) p. 589
41. Школьник И Э *Изв. АН СССР. Мех. тв. тела* **3** (1980)
42. Нилендер Ю А, Почтовик Г Я, Школьник И Э *Бетон и железобетон* **7** (1969)
43. Робсман В А *Акуст. журн.* **37** 1038 (1991)
44. Робсман В А *Акуст. журн.* **38** 129 (1992)
45. Работнов Ю Н *Элементы наследственной механики твердых тел* (М.: Наука, 1977)
46. Ахманов С А, Коротеев Н И *УФН* **123** 405 (1977)
47. Johnson P A, Sutin A M, in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* Vol. 24 (AIP Conf. Proc., Vol. 760, Eds D O Thompson, D E Chimenti) (Melville, NY: AIP, 2005) p. 377
48. Коробов А И, Изосимова М Ю *Акуст. журн.* (2006) (в печати)
49. Руденко О В, Робсман В А *Акуст. журн.* **50** 836 (2004)
50. McCall K R, Guyer R A *Nonlinear Proces. Geophys.* **3** 89 (1996)
51. Van Den Abeele K E-A et al. *J. Acoust. Soc. Am.* **101** 1885 (1997)
52. Gusev V E, Lauriks W, Thoen J J. *Acoust. Soc. Am.* **103** 3216 (1998)
53. Gusev V E et al. *Wave Motion* **29** 211 (1999)
54. Назаров В Е, Радостин А В *Акуст. журн.* **51** 280 (2005)
55. Ostrovsky L A *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 3348 (2004)
56. Westervelt P J *J. Acoust. Soc. Am.* **29** 934 (1957)
57. Зверев В А *Акуст. журн.* **45** 685 (1999)
58. Beyer R T *Nonlinear Acoustics* 2nd ed. (Woodbury, NY: Acoustical Soc. of America, 1997)
59. Виноградов Н С и др. *Акуст. журн.* **51** 189 (2005)
60. Sato T et al. *Ultrasonic Imaging* **7** 49 (1990); in *Frontiers of Nonlinear Acoustics* (Eds M F Hamilton, D T Blackstock) (London: Elsevier Appl. Sci., 1990) p. 98
61. Буров В А и др. *Акуст. журн.* **40** 922 (1994)
62. Лapidус Ю Р, Руденко О В *Акуст. журн.* **36** 1055 (1990)
63. Руденко О В, Солюян С И *ДАН СССР* **298** 361 (1988)
64. Воляк К И, Горшков А С, Руденко О В *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **17** (1) 32 (1975); Воляк К И *Нелинейные волны в океане. Избранные труды* (Отв. ред. Г А Ляхов) (М.: Наука, 2002) с. 23
65. Руденко О В, Сарвазян А П *Биомедицинская радиоэлектроника* (3) **4** (2000)
66. Rudenko O V, Sarvazyan A P, Emelianov S Yu *J. Acoust. Soc. Am.* **99** 2791 (1996)
67. Бэйли М Р и др. *Акуст. журн.* **49** 437 (2003)
68. Руденко О В *Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон.* **37** (6) 1 (1996)
69. Буров В А, Дмитриева Н П, Руденко О В *Докл. РАН* **383** 401 (2002)
70. Андреев В Г и др. *Акуст. журн.* **43** 149 (1997)
71. Sarvazyan A P et al. *Ultrasound Med. Biol.* **24** 1419 (1998)
72. Braginsky V B, Mitrofanov V P, Panov V I *Systems with Small Dissipation* (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1985)
73. Enflo B O, Hedberg C M, Rudenko O V *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 601 (2005)
74. Брысев А П и др. *Акуст. журн.* **50** 725 (2004)
75. Преображенский В Л *УФН* **176** 108 (2006)
76. Кочина Н Н, Кочина П Я, Николаевский В Н *Мир подземных жидкостей* (М.: ОИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН, 1994)
77. Николаевский В Н *Геомеханика и флюидодинамика* (М.: Недра, 1996)
78. Вильчинская Н А *ДАН СССР* **262** 3 (1982)
79. Динарев О Ю, Николаевский В Н *Акуст. журн.* **51** 623 (2005)
80. Садовский М А, Николаев А В *Сейсмические вибрации на нефтяных месторождениях* (М.: ИФЗ РАН, 1993)
81. Андреев Н Н *Журн. прикл. физ.* **2** (1–2) 205 (1925)
82. Мандельштам Л И *Лекции по колебаниям* Т. 4 (Л.: Изд-во АН СССР, 1955) с. 131
83. Ланда П С, Дубошинский Я Б *УФН* **158** 729 (1989)
84. Карлов Н В, Кириченко Н А *Колебания, волны, структуры* (М.: Физматлит, 2001)
85. Собисевич А Л, Руденко О В *Акуст. журн.* **51** (Приложение) 169 (2005)
86. Коробов А И, Бражкин Ю А, Ван Нин *Акуст. журн.* **51** 663 (2005)
87. Турна В и др. *Акуст. журн.* **51** 633 (2005)
88. Мансфельд А Д, Мансфельд Д А, Рейман А М *Акуст. журн.* **51** 259 (2005)

Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostics methods

O.V. Rudenko

M.V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy Gory, 119992 Moscow, Russian Federation
Tel./Fax (7-495) 939-2936
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

The mechanisms responsible for anomalously high acoustic nonlinearities in multi-phase, defected, and structurally inhomogeneous media are summarized, and nonlinear diagnostics — a fast growing applied area of recent years — is reviewed in terms of its methods and applications. This paper is an expanded version of the introductory talk at the 18 September 2005 session of the RAS Physical Sciences Division. Other talks presented at the meeting are given a brief summary in this issue of *Physics – Uspekhi*.

PACS numbers: **43.25.+y**, **62.20.Mk**, **62.65.+k**

Bibliography — 88 references

Received 14 November 2005

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **176** (1) 77–95 (2006)

Physics – Uspekhi **49** (1) (2006)