

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

534.222

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ШУМОВЫХ ВОЛН*О. В. Руденко*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	413
2. Нелинейное искажение спектров одномерных волн. Основные теоретические результаты	415
3. Генерация гармоник узкополосного случайно-модулированного сигнала	417
4. Трансформация широких спектров — акустическая турбулентность	419
5. Взаимодействия сигнала с шумом. Генерация сплошного спектра. Подавление шума интенсивным сигналом	422
6. Затухание сигнала при его взаимодействии с шумом	427
7. Дифракция интенсивного шума	431
8. Возбуждение нелинейных случайных волн распределенными источниками. Стационарные спектры	436
9. Нелинейное преобразование статистики акустического шума	442
10. Заключение	445
Список литературы	445

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение статистических явлений при распространении волн в нелинейных средах важно для многих разделов физики и техники. Заметное место среди всех статистических задач физики нелинейных волн занимают проблемы взаимодействий интенсивных шумовых возмущений в средах без дисперсии. Мы будем называть их задачами статистической нелинейной акустики, хотя многие полученные здесь результаты применимы для систем иной физической природы — при изучении волн в плазме, на поверхности жидкости, в потоках частиц и т. д., в тех ситуациях, когда влиянием дисперсии можно пренебречь или считать его очень слабым ^{1, 2}.

С теоретической точки зрения нелинейные среды без дисперсии интересны потому, что все спектральные компоненты взаимодействуют в них со сравнимой эффективностью, так как находятся в резонансе друг с другом. Это приводит к лавинообразному размножению спектральных линий, нелинейному уширению спектров, появлению непрерывной составляющей. На временном языке отличительной особенностью реализации будет образование в ней крутых участков профиля — разрывов или ударных волн с конечной шириной фронта. После появления разрывов поведение возмущения качественно изменяется; становится существенным нелинейное затухание, не зависящее от диссипативных свойств среды; возникают эффекты насыщения и ряд других. Все эти явления специфичны именно для сред без дисперсии ³. Еще одной особенностью статистической нелинейной акустики является необходимость изучения случайных одиночных импульсов с флуктуирующими параметрами, а не только случайно-модулированных квазипериодических сигналов, как для диспергирующих сред ⁴.

Поведение сильно искаженных профилей в акустике адекватно описывается упрощенными уравнениями типа Бюргерса, простых волн, Хохлова — Заболотской. Эти эволюционные уравнения являются модельными для многих

других физических систем. Поэтому, помимо прямых физических выводов теории, представляют интерес и следствия формальной математической аналогии, вытекающие из анализа свойств «эталонных» уравнений и их решений⁵.

С точки зрения приложений важность этих исследований обусловлена наличием в природе и технике реальных источников, являющихся, по существу, источниками шумовых волн. Взрывные волны в атмосфере и океане^{6, 7}, импульсы звукового удара, шумы реактивных и других мощных двигателей⁸, интенсивные флуктуирующие сигналы гидролокаторов^{9, 10} могут служить примерами низкочастотных возмущений, для которых на определенных расстояниях становятся существенными нелинейные эффекты. Имеются также источники меньшего размера, спектр излучения которых лежит в ультразвуковом диапазоне. Это, например, термооптические (лазерные)^{11, 12} и обычные электромеханические преобразователи, поле которых всегда содержит флуктуации; ансамбли микроскопических излучателей (шум кавитационной области¹³, акустическая эмиссия¹⁴ и т. д.) Классическим примером нелинейных статистических явлений в акустике служат процессы установления термодинамического равновесия в твердых телах, происходящие за счет ангармонизма кристаллической решетки¹⁵⁻¹⁷; характерные частоты фононов здесь лежат в далекой гиперзвуковой области частот. Наконец, существуют интенсивные шумы естественного происхождения — гром¹⁸, сейсмические волны¹⁹ и ряд других²⁰.

Укажем на очевидные связи статистической нелинейной акустики с «неволновыми» задачами — моделями турбулентности²¹, проблемами аэроакустических взаимодействий²² и устойчивости в гидродинамике²³.

Итак, развитие физики взаимодействий интенсивных шумовых волн стимулировалось двумя факторами: разнообразием реальных задач и удобством аппарата нелинейных эволюционных уравнений^{1, 3, 32}. Эти уравнения вначале были получены Р. В. Хохловым¹ и его сотрудниками для анализа регулярных нелинейных задач. Для передачи и обработки информации, диагностики свойств среды, классификации рассеивающих звук объектов и решения других радиофизических проблем акустики используются слабо нелинейные волны, модулированные во времени и в пространстве. Медленный (на масштабах длины волны), эволюционный характер процессов позволяет использовать для упрощения задач приближенные подходы типа метода медленно изменяющегося профиля³. Эти методы были развиты и апробированы по идее Р. В. Хохлова¹. Случайный характер модуляции волн в еще большей мере требует использования аппарата упрощенных уравнений. Сложность нелинейных статистических задач обычно не позволяет решать их другим способом, и указанный путь оказывается единственно возможным.

Ряд публикаций по теории случайных акустических волн конечной амплитуды появился в конце 60-х — начале 70-х годов²⁴⁻²⁸. Однако систематические исследования были начаты позднее²⁹. Результаты этого периода достаточно полно отражены в обзорах³⁻⁵. Эксперименты, постановка которых в значительной мере стимулировалась развитием теории, начали широко проводиться после 1975 г.; большое количество работ выполнено в США, Японии, ряде других стран.

Внимание многих исследователей к этим задачам было привлечено Р. В. Хохловым, сделавшим обзор на V Международном симпозиуме по нелинейной акустике (Копенгаген, 1973 г.). На VI Симпозиуме, состоявшемся под председательством Р. В. Хохлова в 1975 г. в Москве, им был прочитан большой пленарный доклад; с тех пор вопросы физики интенсивных шумов занимают одно из центральных мест на всесоюзных и международных конференциях по нелинейной акустике.

В настоящее время статистическая нелинейная акустика обладает всеми чертами развитого научного направления: 1) разработаны специфическая

теория и математический аппарат; 2) интенсивно ведутся экспериментальные исследования; 3) проблемой занимаются многие научные коллективы разных стран; 4) наметился круг приложений; 5) возникли связи с другими разделами физики и механики.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ИСКАЖЕНИЕ СПЕКТРОВ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как известно, для модели простых волн измеряемые статистические характеристики нелинейных возмущений удается рассчитать точно. В работах ^{3, 4} приведено общее выражение для корреляционной функции случайного процесса в произвольном сечении нелинейной среды через двумерную характеристическую функцию входного сигнала. Для нормального (на границе нелинейной среды) процесса найдены формулы, связывающие спектральную плотность в среде с корреляционной функцией на входе.

Развитый подход ^{30, 31} к анализу эволюции шумовых спектров можно обобщить на более сложные модели. Поясним идею метода ^{32, 33} на важном примере уравнения Бюргерса, описывающего распространение интенсивных плоских акустических возмущений в диссипативных средах:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

В записи (1) использованы безразмерные переменные: $V = u/u_0$ — колебательная скорость, $z = x/x_p = \varepsilon c_0^{-2} \omega_0 u_0 x$ — пройденное волной расстояние в единицах длин x_p образования разрыва, $\theta = \omega_0 \tau = \omega_0 (t - x/c_0)$. Отношение характерных нелинейной и диссипативной длин $\Gamma = x_p/x_d = = b\omega_0/2\varepsilon c_0 \rho_0 u_0$ есть обратное акустическое число Рейнольдса. Здесь константы u_0, ω_0 имеют смысл характерных значений исходной колебательной скорости и частоты сигнала; ρ_0, c_0 — равновесные плотность среды и скорость звука; ε, b — нелинейный и диссипативный параметры ³.

Решение (1) при $\Gamma = 0$ на расстояниях до начала образования разрывов имеет вид простой волны $V = f(T = \theta + zV)$. С целью обобщения методов спектрального анализа случайных простых волн перейдем в (1) от z, θ к новым переменным z, T :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \left(1 - z \frac{\partial V}{\partial T}\right)^{-2}. \quad (2)$$

В приближении $z \left| \partial V / \partial T \right| \ll 1$ формально (2) станет линейным уравнением диффузии, которое, однако, учитывает нелинейные эффекты из-за неявной зависимости $V(z, T(V, \dots))$. Это приближение хорошо описывает сильно искажающиеся возмущения при $\Gamma \ll 1$ в области до образования разрывов, а также противоположный предельный случай слабого проявления нелинейности $\Gamma > 1$ — во всей области распространения волны. Для промежуточных значений $\Gamma \leq 1$ в разрывной области процессы описываются лишь качественно, или даже возникают особенности, связанные с учетом структуры ударных фронтов.

Итак, когда $z \left| \partial V / \partial T \right| \ll 1$ (малы расстояния либо профиль достаточно гладкий), решив линеаризованное уравнение (2), найдем вспомогательную функцию $V(z, T)$. Переход к измеряемой скорости $V(z, \theta)$ производится с помощью нелинейного преобразования ^{30, 34}

$$V(z, \theta) = -\frac{i}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\theta} \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega z V(z, T)} - 1) e^{-i\omega T} dT. \quad (3)$$

Поскольку поведение вспомогательной функции $V(z, T)$ описывается линеаризованным уравнением (2), стационарный нормальный случайный процесс на входе среды $z = 0$ сохраняет эти свойства и при $z > 0$. Это позволяет

рассчитать измеряемую корреляционную функцию

$$R(z, \theta = \theta_1 - \theta_2) = \langle V(z, \theta_1) V(z, \theta_2) \rangle = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega z)^2} e^{i\omega\theta} e^{-(\omega z)^2 \sigma^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{(\omega z)^2 R(z, T)} - 1) e^{-i\omega T} dT; \quad (4)$$

здесь $\sigma^2(z) = R(z, T=0)$, а $R(z, T = T_1 - T_2) = \langle R(z, T_1) R(z, T_2) \rangle$ — вспомогательная корреляционная функция, поведение которой для модели (2) описывается уравнением

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 2\Gamma \frac{\partial^2 R}{\partial T^2}. \quad (5)$$

Следовательно, по заданной корреляционной функции $R(0, \theta) = \langle f(\theta_1) f(\theta_2) \rangle$ стационарного нормального шума $f(\theta)$ можно в два этапа рассчитать статистические характеристики волны в произвольном сечении среды. Вначале нужно найти вспомогательную функцию $R(z, T)$ как решение уравнения (5) с условием на границе $R(0, T = \theta)$. Затем следует совершить нелинейное преобразование (4) и определить измеряемую функцию $R(z, \theta)$ или соответствующую ей (по теореме Винера — Хинчина) спектральную плотность $S(z, \omega)$:

$$S(z, \omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} e^{-(\omega z)^2 \sigma^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R(z, T)}{\partial T} e^{(\omega z)^2 R} e^{-i\omega T} dT. \quad (6)$$

Описанный подход^{32, 33} применим не только к анализу нелинейных случайных волн в диссипативной среде (4). Приближенный расчет статистических характеристик по формулам (4), (6) можно производить для любых возмущений типа $V = V(z, T = \theta + zV, \mathbf{r})$; разумеется, вспомогательную функцию $R(z; T_1, T_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ придется получать из других линейных уравнений, отличных от (5). В частности, в разделе 7 метод использован для анализа эволюции спектров дифрагирующих волн и пространственной статистики.

Проведем обобщение формул (4) — (6) на важные задачи распространения сферически- и цилиндрически-симметричных возмущений. Рассмотрим для определенности случай сходящихся волн с исходным радиусом кривизны фронта r_0 . Нормированное расстояние z , пройденное волной, при этом будет изменяться от $z_0 = r_0/x_p$ до 0. Используя известные³ выражения для приведенных координат, получим описание энергетического спектра (6) шумовой сферической ($n = 2$) и цилиндрической ($n = 1$) волн:

$$S(z, \omega) = -\frac{1}{\pi\omega} \int_0^{\infty} \frac{\partial R(z, T)}{\partial T} \exp\{-[\omega z \xi_n(z)]^2 [\sigma^2(z) - R(z, T)]\} \sin \omega T dT; \quad (7)$$

здесь $\xi_1 = 2 [1 - (z/z_0)^{1/2}]$, $\xi_2 = \ln(z_0/z)$, $\sigma^2(z) = R(z, 0)$; вспомогательная корреляционная функция в (7) рассчитывается по формуле

$$R(z, T) = \frac{(z_0/z)^n}{[8\pi\Gamma(z_0 - z)]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} R(z = z_0, T') \exp\left[-\frac{(T - T')^2}{8\Gamma(z_0 - z)}\right] dT'. \quad (8)$$

Дисперсия скорости звука в акустике обычно мала и связана с каким-либо релаксационным процессом, имеющим характерное время $t_{\text{рел}}$. Распространение интенсивных плоских волн в релаксирующих средах описывается уравнением³

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = D \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta'} \exp\left(-\frac{\theta - \theta'}{t_{\text{рел}}}\right) d\theta', \quad (9)$$

где $\theta_{\text{рел}} = \omega_0 t_{\text{рел}}$, число $D = (c_\infty^2 - c_0^2)/2\epsilon c_0 u_0$ есть отношение расстояния образования разрыва к длине когерентности. Для расчета спектральной плотности энергии шума в таких средах можно пользоваться общими формулами (4), (6). Вспомогательная корреляционная функция $R(z, T)$ при этом определяется из линейного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial T^2} - \frac{R}{\theta_{\text{рел}}^2} \right) = - \frac{2D}{\theta_{\text{рел}}} \frac{\partial^2 R}{\partial T^2}, \quad (10)$$

отвечающего уравнению нелинейной эволюции (9). Она связана с исходным спектром шума $S(0, \omega)$ выражением

$$R(z, T) = 2 \int_0^\infty S(0, \omega) \exp \left(-2D \frac{\omega^2 \theta_{\text{рел}} z}{1 + \omega^2 \theta_{\text{рел}}^2} \right) \cos \omega T \, d\omega. \quad (11)$$

В предельном случае низкочастотных спектров $\omega \theta_{\text{рел}} \ll 1$, как видно из формул (10), (11), функция $R(z, T)$ определится из уравнения (5), в котором на месте обратного числа Рейнольдса Γ стоит произведение $D\theta_{\text{рел}}$ ³². При этом волна описывается не (9), а соответствующим уравнением Бюргера — Кортевега — де Вриза³. В другом пределе высокочастотных спектров имеем простое выражение $R(z, T) = R(0, T) \exp(-2Dz/\theta_{\text{рел}})$; в случае $\omega \theta_{\text{рел}} \gg \gg 1$ удается получить и точное решение, запись которого следует из (6) при замене $(\omega z) \rightarrow (\omega \theta_{\text{рел}}/D) [1 - \exp(-Dz/\theta_{\text{рел}})]$.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНО-МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА

Рассмотрим на входе нелинейной диссипативной среды узкополосный нормальный шум с корреляционной функцией $\sigma^2 R(x=0, t) = \sigma^2 b (t/t_K) \times \times \cos \omega_0 t$; здесь b — медленная ($\omega_0 t_K \gg 1$) огибающая, t_K — время корреляции. Нормировочным константам ω_0, u_0 , использованным при записи уравнения Бюргера (1) и формул (3) — (6), целесообразно придать смысл центральной частоты спектральной линии шума ω_0 и дисперсии σ .

Вспомогательная функция определяется из (5) и имеет вид:

$$R(z, T) = b \left(\frac{T}{\omega_0 t_K} \right) \exp(-2\Gamma z) \cos T. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (4), можно рассчитать измеряемую корреляционную функцию в среде в виде суммы функций шумовых гармоник

$$R(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(nz)^2} \exp[-(nz)^2 e^{-2\Gamma z}] I_n \left[(nz)^2 e^{-2\Gamma z} b \left(\frac{\theta}{\omega_0 t_K} \right) \right] \cos n\theta. \quad (13)$$

Интересно проследить за динамикой спектральных линий. Например, для лоренцевского контура линии исходного сигнала, полагая $b = \exp(-|t|/t_K)$ и пользуясь асимптотикой модифицированных функций Бесселя I_n , найдем ширины спектров

$$\Delta \omega_n(z) \approx n \Delta \omega_1(z=0) \left[1 + \frac{n^4}{4(n+1)} (1 - e^{-2/n}) z^4 e^{-4\Gamma z} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, характерная ширина спектральной линии n -й гармоники при малых z в n раз больше, чем у первой гармоники. При распространении волны спектральные линии уширяются до некоторых максимальных значений, достигаемых на расстоянии $z = 1/\Gamma$. Затем линии вновь сужаются. Процесс уширения — сужения линий наблюдается в нелинейной среде только при учете диссипативных эффектов (ср. с³); он выражен для малых обратных чисел Рейнольдса Γ и тем сильнее, чем выше номер гармоники n .

Результат (13) позволяет выявить различие в темпах генерации гармоник монохроматической и случайно-модулированной волн. Сравнение следует проводить, считая интенсивности на входе (при $z = 0$) одинаковыми; центр спектральной линии шума должен совпадать с частотой ω_0 детерминированной волны. Зависимости от расстояния средних интенсивностей второй ($n = 2$) и третьей ($n = 3$) гармоник изображены на рис. 1 сплошными ($I_n^{(N)}$, шум) и штриховыми ($I_n^{(S)}$, регулярный сигнал) кривыми для значений обратного числа Рейнольдса $\Gamma/\sqrt{2} = 0,01$ и $0,1$. Анализ показывает, что истощение основной и нарастание высших гармоник в случае шума происходит более быстрыми темпами. На малых расстояниях z при $\Gamma \rightarrow 0$ отношение $I_n^{(N)}/I_n^{(S)} \approx$

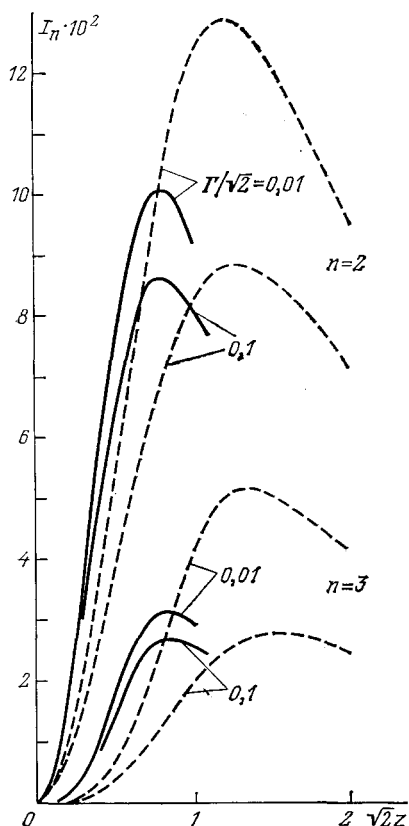


Рис. 1. Интенсивности второй ($n=2$) и третьей ($n=3$) гармоник узкополосного шума (сплошные кривые) и гармонического сигнала с равной исходной интенсивностью (штриховые кривые).

Увеличение числа Γ соответствует усилению линейной диссипации

$\approx n!$. Тот факт, что в шумовом поле n -я гармоника генерируется в $n!$ раз более эффективно, отмечался в нелинейной оптике^{4, 29}; это явление связано с «подчеркиванием» выбросов большой амплитуды при нелинейных преобразованиях.

Линейное затухание, увеличивающееся с ростом Γ , сильнее влияет на гармоники детерминированной волны. Из рис. 1 видно, что при $\Gamma/\sqrt{2} > 0,1$ сплошные кривые для 2-й и 3-й гармоник шума во всей области расстояний z идут выше соответствующих штриховых кривых. Это связано с тем, что при не слишком малых $\Gamma \geq 0,15$ процесс генерации гармоник регулярной волны заметно подавляется линейной диссипацией³²; шум же содержит выбросы, на которые диссипация влияет слабо. Таким образом, при умеренных Γ гар-

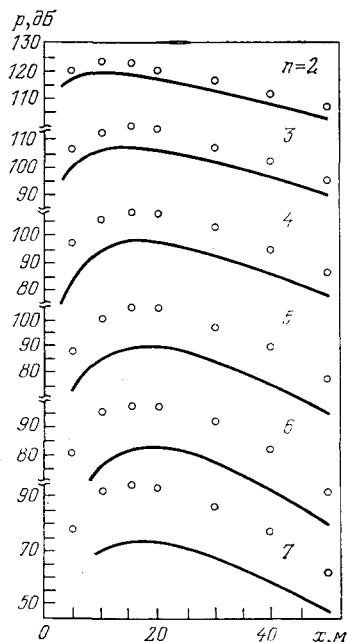


Рис. 2. Результаты измерений звукового давления на частотах гармоник узкополосного шума³⁵

моники узкополосного шума возбуждаются в основном за счет квазипериодов с большими амплитудами; процесс более эффективен, чем в регулярной волне равной интенсивности.

Эти явления исследованы в эксперименте³⁵. Шум большой интенсивности (до 140 дБ относительно $2 \cdot 10^{-5}$ Н/м²) распространялся в полиэтиленовой трубе длиной 75 м диаметром 4,92 см. Ширина спектральной линии составляла 6% от центральной частоты 0,5; 1; 2 или 3,2 кГц. Труба с толщиной стенок 0,56 см закапывалась в песок, что способствовало подавлению изгибных мод. Таким образом, обеспечивался режим, близкий к условиям распространения плоской волны в свободном пространстве. В трубе, однако, присутствовал дополнительный механизм вязко-теплопроводных потерь в пограничном слое у стенок.

Результаты измерений звукового давления гармоник с номерами $n = 2-7$ изображены на рис. 2 для монохроматического исходного сигнала (сплошные кривые) и узкополосного шума (кружки). Точность ± 1 дБ при $n > 3$ неизбежно уменьшалась из-за перекрытия спектральных линий высших гармоник. В эксперименте четко зафиксировано увеличение эффективности нелинейных преобразований в поле шумовой волны. Количественные оценки $I_n^{(N)}/I_n^{(S)}$ получены экстраполяцией к малым расстояниям; увеличение составляет 2,2 ($n = 2$), 5,6 (3), 16 (4), 45 (5), 200 (6) и 500 ($n = 7$). Для $n = 2$ и 3 наблюдается хорошее согласие с теоретическим значением $n!$. Расхождение при $n \geq 4$, помимо отмеченного перекрытия спектров, может быть связано с трудностями измерений в ближнем поле и влиянием диссипации. Заметим, что во время выполнения работы³⁵ теория явления еще не была развита. В последующие же годы, насколько нам известно, подобных экспериментов не проводилось.

4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ШИРОКИХ СПЕКТРОВ — АКУСТИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

На особенности нелинейной эволюции широких акустических спектров обратили внимание при измерениях мощного авиационного шума. Наблюдается аномально низкое затухание высокочастотного крыла спектра. В области от 5 до 10 кГц затухание на длине 500 м примерно на 10 дБ меньше расчетного³⁶. Учет температурных неоднородностей атмосферы, влажности и других особенностей трассы оказался недостаточным для объяснения эффекта. Поэтому предположили, что аномально высокий уровень высокочастотного крыла достигается, благодаря подкачке энергии от интенсивных низкочастотных компонент спектра шума реактивных струй³⁶.

В работе⁶⁸ приведены результаты детальных натуральных измерений параметров струйного шума. На рис. 3, а изображено поведение коэффициента затухания шумовых волн, возбуждаемых самолетом с 4 реактивными двигателями. Приемник интегрировал в 1/3-октавных полосах частот. Дистанция изменялась от 262 до 345 м и от 345 до 501 м. Видно, что сплошные кривые, построенные с учетом нелинейных поправок, гораздо лучше соответствуют данным эксперимента (кружки), чем расчеты по линейной теории (штриховые кривые). Линейная теория, не учитывающая перекачку энергии вверх по спектру, дает завышенные значения коэффициента затухания.

Форма спектров в октавных частотных полосах изображена на рис. 3, б. Здесь источником мощного шума служил двигатель ракеты «Атлас-Д». Точки — данные измерений уровня звука — в области частот > 1 кГц лежат заметно выше штриховых кривых, представляющих линейную экстраполяцию на большие расстояния спектра шума, измеренного вблизи источника.

Был поставлен ряд специальных лабораторных экспериментов^{37, 38}. Измерения³⁷ проводились в воздушной трубе длиной 29,3 м при уровнях

звукового давления до 160 дБ. На рис. 4, а приведена измеренная форма возмущения вблизи источника и на удалении от него (расстояния 0,3 м и 25,9 м). Четко выражены два процесса: увеличение крутизны передних фронтов и увеличение временного масштаба осцилляций. Первый из них

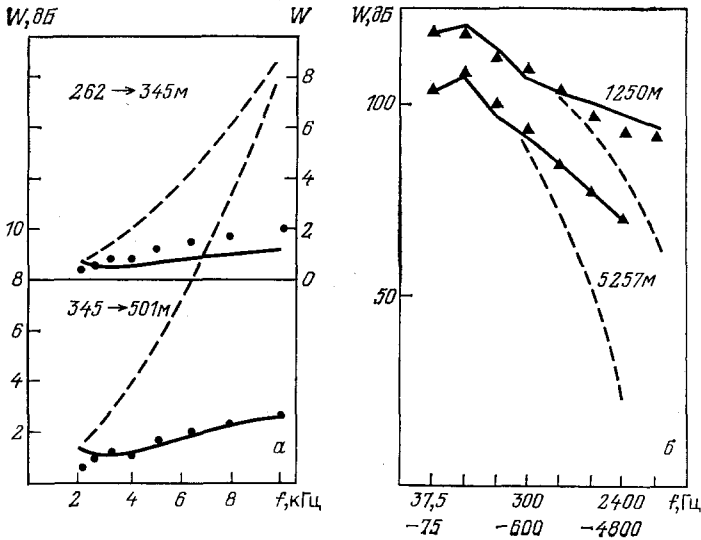


Рис. 3. Результаты натуральных измерений коэффициента затухания (а) и спектра (б) интенсивного струйного шума⁶⁸

приводит к образованию резких скачков давления — ударных волн; на спектральном языке это соответствует перекачке энергии в высшие частоты, которая наблюдалась в натуральных условиях. Второй процесс связан с движе-

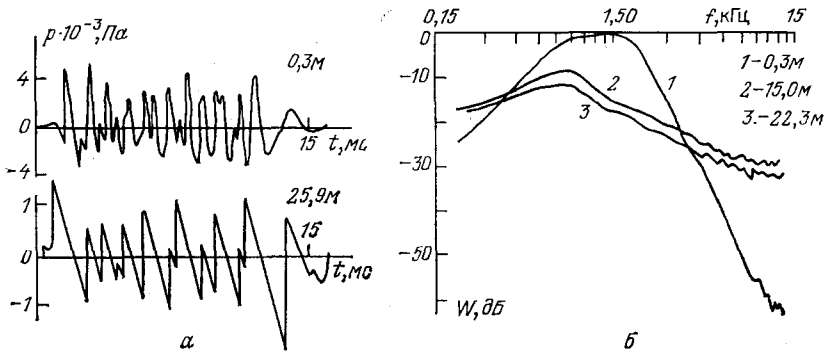


Рис. 4. Форма возмущения (а) и спектр мощности (б), измеренные в лабораторном эксперименте³⁷

нием несимметричных (относительно нулевого уровня) ударных фронтов, их столкновениями и слиянием³; он приводит к перекачке энергии из центральной части спектра в область низких частот.

Таким образом, широкий спектр интенсивного шума из-за нелинейных взаимодействий расширяется как в высоко-, так и в низкочастотную области. На рис. 4, б изображены относительные уровни мощности акустического шума (в полосе 50 Гц), измеренные на расстояниях 0,3 м, 15,0 м и 22,3 м (кривые 1—3)³⁷. Аналогичное поведение спектра наблюдалось в работе³⁸, авторы которой, кроме того, интересовались статистикой отрицательных

(«сглаживающихся»; см. рис. 4, а) наклонов прямолинейных участков профиля волны. Предложены также алгоритмы численного моделирования нелинейной эволюции шумовых возмущений³⁹.

Применим подход³³ для описания широкополосного шума с исходным спектром

$$S(z=0, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4}\right). \quad (15)$$

Нормировочным константам ω_0, u_0 , использованным при записи уравнения Бюргера (1) и формул (3) — (6), здесь придан смысл обратного времени корреляции t_K^{-1} и дисперсии σ . Вспомогательная корреляционная функция согласно (5) равна

$$R(z, T) = (1 + 8\Gamma z)^{-3/2} \left(1 - \frac{2T^2}{1 + 8\Gamma z}\right) \exp\left(-\frac{T^2}{1 + 8\Gamma z}\right), \quad \Gamma z = \frac{bx}{2c_{\beta 0}^2 t_K^2}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (6) и приближенно вычисляя интеграл, найдем

$$(1 + 8\Gamma z) S(z, \omega) = (1 + 3\beta)^{-7/2} \left[\frac{\omega_*^2}{4\pi^{1/2}} + \frac{9}{2\pi^{1/2}} \beta (1 + 3\beta)\right] \exp\left[-\frac{\omega_*^2}{4(1 + 3\beta)}\right], \quad (17)$$

$$\omega_*^2(z) = \omega^2 (1 + 8\Gamma z), \quad \beta(z) = (\omega z)^2 (1 + 8\Gamma z)^{-3/2}.$$

Динамика трансформации широкого спектра $S(z, \omega)$ (17) изображена на рис. 5, а для значений обратного числа Рейнольдса $\Gamma = 0$ (сплошные

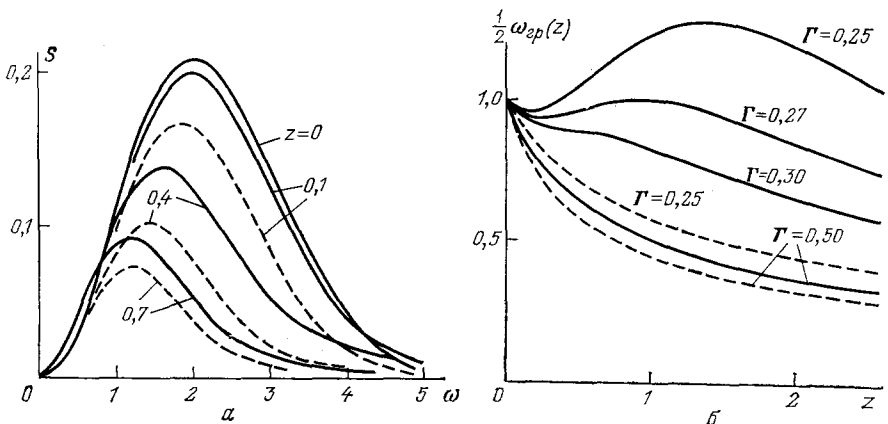


Рис. 5. Динамика трансформации широких шумовых спектров для $\Gamma = 0,25$ (штриховые кривые) и $\Gamma = 0$ (сплошные кривые) (а) и «верхней границы» нелинейного спектра (б)

кривые) и $\Gamma = 0,25$ (штриховые). С увеличением расстояния z наблюдается растекание энергии по спектру. При $\Gamma = 0,25$, кроме того, заметно сказывается диссипация. Низкочастотная область описывается квадратичным законом $S(z, \omega \rightarrow 0) \approx (\omega^2/4\pi^{1/2})\varphi(z)$. Крутизна $\varphi(z)$ параболы с ростом z увеличивается, достигает максимального значения $1 + 0,08 \Gamma^{-2}$ на расстоянии $z = 1/2 \Gamma$, а затем вновь уменьшается. Заметим, что в недиссипативной среде происходит монотонный рост крутизны, а в линейной среде она постоянна.

В области высоких частот поведение широкого спектра (17) определяется экспоненциальным множителем. Экспонента убывает в e раз при $\omega = \omega_{gp}(z)$; зависимость «верхней границы» спектра от расстояния показана на рис. 5, б сплошными кривыми. Штриховые кривые изображают соответствующую линейную зависимость. Граничная частота $\omega_{gp}(z)$ ведет себя сложным образом: вначале она уменьшается, затем растет, достигает максимума и вновь начинает уменьшаться. Такое поведение обусловлено преобладанием нелинейных либо диссипативных эффектов на разных этапах распространения волны.

При $\Gamma > 0,29$ наблюдается монотонное убывание ширины — при всех z преобладает диссипация. Если при $\Gamma = 0,25$ нелинейность существенна, то уже при $\Gamma = 0,5$ она является малой поправкой *).

Задачи описания трансформации широких спектров обычно относят к проблеме акустической турбулентности ^{40, 41}. Считается, что наибольший интерес представляет нахождение равновесной формы спектрального распределения, или универсального закона спада $S(z, \omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. В области существования развитых ударных фронтов спектр мощности спадает $\sim \omega^{-2}$, поскольку амплитуды гармоник, формирующих разрыв, уменьшаются как ω^{-1} . Для более высоких частот сильно сказывается линейная диссипация, и спектр спадает по экспоненциальному закону $S(z, \omega) = S(z=0, \omega) \exp(-2\Gamma\omega^2 z)$, следующему из уравнения (5). Эти вопросы подробно изложены в обзоре ⁵.

Среди экспериментов, посвященных степенным асимптотикам, отметим ^{84, 86}, а также ⁸⁷, где тщательно проверена зависимость ω^{-2} .

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛА С ШУМОМ.

ГЕНЕРАЦИЯ СПЛОШНОГО СПЕКТРА.

ПОДАВЛЕНИЕ ШУМА ИНТЕНСИВНЫМ СИГНАЛОМ

Среди всех задач статистической нелинейной акустики проблемы взаимодействий регулярных и шумовых волн представляют наибольший интерес для приложений. Направления потоков акустической энергии при взаимодействиях сигнал — шум определяются относительными интенсивностями и расположением спектров регулярной и случайной составляющих возмущения. Некоторые типичные ситуации обсуждаются в разделах 5 и 6.

Теория взаимодействия простых монохроматических и шумовых волн развита в работе ³¹. Приведем выражение, обобщающее результаты ^{3, 31} на более сложные системы в приближении квазипростых возмущений (см. раздел 1):

$$2\pi(\omega z)^2 S(z, \omega) = e^{-(\omega z)^2 \sigma^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(\omega z)^2 R(z, T)} - 1] e^{-i\omega T} \overline{\exp\{i\omega z [s(z, T+T') - s(z, T')]\}} dT + \left| \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-(1/2)(\omega z)^2 \sigma^2(z)} e^{i\omega z s(z, T)} - 1] e^{-i\omega T} dT \right|^2. \quad (18)$$

Здесь чертой сверху обозначено усреднение по времени T' , необходимость которого обусловлена наличием регулярного сигнала $s(z, T)$.

Рассмотрим, следуя ³¹, наиболее простой случай — взаимодействие плоских волн в недиссипативной среде. Если шум на входе смешан с гармоническим (при $x=0$) возмущением $u = u_0 \sin \omega_0 t$, в решении (18) нужно положить $s = A \sin \Omega_0 T$ (здесь $s = u/\sigma$, $A = u_0/\sigma$, $\Omega_0 = \omega_0 t_R$). При этом из (18) удастся получить формулу, описывающую искажение шумовой компоненты:

$$S^{(N)}(\omega, z) = -\frac{1}{\pi} J_0^2(A\omega z) \int_0^{\infty} R'(T) \exp[(\omega z)^2 (R-1)] \frac{\sin \omega T}{\omega} dT. \quad (19)$$

Результат (19) отличается от соответствующего ему выражения (6) наличием множителя J_0^2 , который учитывает нелинейные потери в спектре шума из-за перекачки части его энергии вверх по спектру (благодаря присутствию регулярного сигнала с $A \neq 0$).

* Трансформация спектра (15) недавно исследована методом численного моделирования ⁸⁰. Результаты расчета для $\Gamma > 0,1$ отличаются от полученных аналитически ³³ не более чем на 10% при любых z .

Рождение новых участков спектра в процессе взаимодействия сигнала с шумом описывается выражением

$$S^{(N, S)}(\omega, z) = -\frac{1}{\pi} J_1^2(A\omega z) \int_0^\infty R'(T) \exp[(\omega z)^2(R-1)] \frac{\sin(\omega - \Omega_0)T}{\omega - \Omega_0} dT. \quad (20)$$

Наконец, второе слагаемое в формуле (18) содержит информацию о поведении гармоник регулярного возмущения. В частности, амплитуда волны на основной частоте Ω_0 равна

$$S^{(S)}(\omega, z) = \frac{A^2}{2} e^{-(\omega z)^2} \left[\frac{2J_1(A\omega z)}{A\omega z} \right]^2 \delta(\omega - \Omega_0). \quad (21)$$

Видно, что в результате нелинейного взаимодействия с шумовой компонентой (этот процесс описывается экспоненциальным множителем в (21)) и генерации собственных гармоник (множитель в квадратных скобках), спектральная плотность сигнала уменьшается, но форма спектра $S^{(S)}$ сохраняет свой дельтаобразный вид.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий описанные явления. Пусть корреляционная функция шума на входе имеет вид $R(T) = (1 - 2T^2) \exp(-T^2)$, соответствующий исходному спектру (15). Вычисляя интегралы (19), (20), приходим к результатам, изображенным на рис. 6 для $\Omega_0 = 10$, $A = 0,5$. С увеличением z спектр шума $S^{(N)}$ искажается — энергия перетекает из центральной его части в области низких и высоких частот (см. также рис. 5).

Особый интерес представляет рассмотрение динамики новой области спектра $S^{(N, S)}$, рождающейся в окрестности $\omega = \Omega_0$. Ширина этого «пьедестала» на малых расстояниях равна примерно удвоенной ширине спектра шумового возмущения; каждое из «крыльев» по обе стороны Ω_0 повторяет исходный шумовой спектр. Отметим несимметричную (относительно $\omega = \Omega_0$) форму пьедестала. Его высокочастотное крыло имеет большую амплитуду и быстрее растет в результате нелинейной подкачки энергии. Постепенно впадина между крыльями исчезает (при $z \approx z_3$), и оба крыла пьедестала сливаются в единую широкую линию, энергетический центр которой смещен в область частот $\omega > \Omega_0$. В дальнейшем линия еще больше увеличивается по амплитуде (до $z \approx z_4$), а затем наступает этап растекания по спектру (см. $z = z_5$), причем опять-таки наибольшая доля энергии перекачивается в высокие частоты.

На рис. 6 изображена лишь часть спектра. Полная картина оказывается более сложной. В среде рождаются гармоники сигнала $n\Omega_0$, и «пьедесталы» возникают у подножия каждой из них.

Для простоты мы говорили о таком расположении спектральной линии сигнала, когда она не перекрывается со спектром случайного возмущения. Решение (18) позволяет рассмотреть и общий случай. Если полосы сигнала и шума пересекаются, динамика оказывается более сложной и разбиение спектра на составляющие $S^{(N)}$, $S^{(N, S)}$, $S^{(S)}$ при $z \neq 0$ становится формальной процедурой.

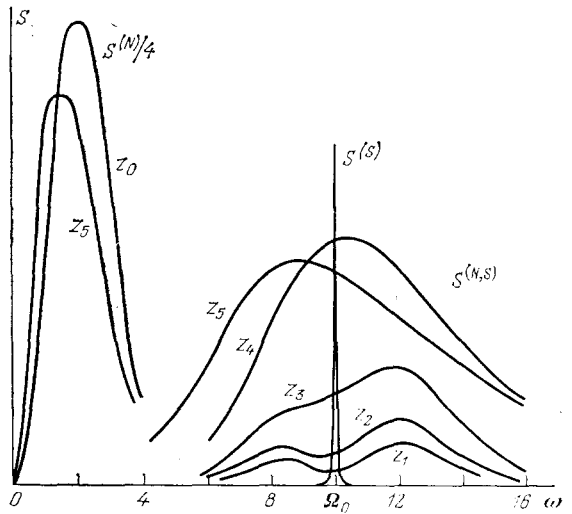


Рис. 6. Зарождение участка сплошного спектра в окрестности первой гармоники сигнала при его взаимодействии с шумом

Именно последний случай часто встречается на практике. Так, спектры кавитации¹³, шума реактивных двигателей и некоторых других источников интенсивных возмущений состоят из дискретных линий, расположенных на фоне широкополосных шумов. Поскольку в соответствии с рис. 6 широкий спектр воспроизводится у подножия каждой дискретной составляющей, можно сделать вывод о быстром нарастании сплошной части спектра по мере распространения звука в среде. Этот вывод подтвержден прямыми экспериментами⁴², согласованными с теорией³¹. Интенсивное образование сплошного спектра наблюдалось также в работах^{43, 44}; в частности, в⁴⁴ обнаружено усиление широкополосного шума на 7 дБ при облучении реактивной струи звуком высокой интенсивности (130 дБ).

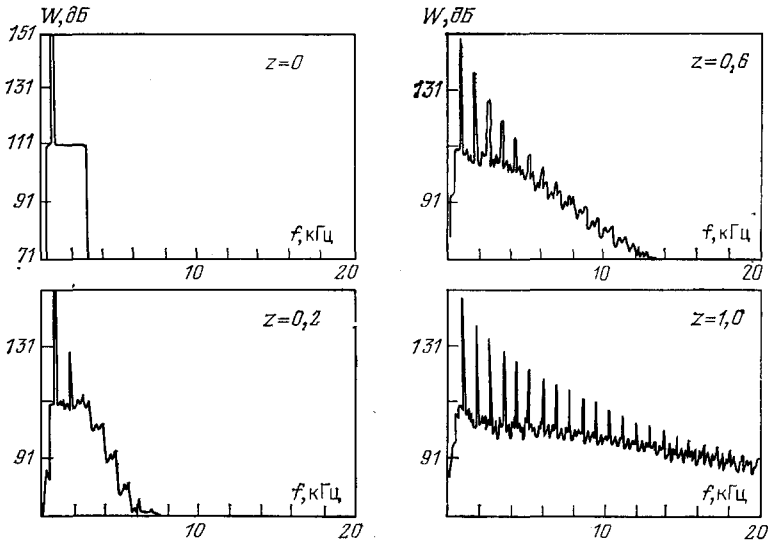


Рис. 7. Результаты численного моделирования задачи взаимодействия сигнал — шум⁴²

Динамика этого процесса изображена на рис. 7. Спектры для различных $z^{(s)}$ (расстояния в единицах длин образования разрыва гармонической волны) получены⁴² при численном моделировании физического эксперимента, который описан ниже. Видно, что при распространении смеси дискретный сигнал — шум ($z^{(s)} = 0$) возникают гармоники сигнала (их более 30), которые «растягивают» сплошную часть спектра и усиливают ее. Так, на частоте 20 кГц при изменении расстояния $z^{(s)}$ от 0,8 до 1,2 наблюдалось усиление 25 дБ.

Экспериментальное изучение явления проводилось в трубе, наполненной воздухом. Шумовая волна возбуждалась в полосе 1—3 октавы с центром на частоте 0,7—1,2 кГц. Уровень интенсивности гармонического сигнала достигал 140—151 дБ. Его частота варьировалась и могла лежать вблизи нижней или верхней границы спектра шума. На рис. 8 приведены спектрограммы шума при отсутствии сигнала (верхний ряд) и полного возмущения (нижний ряд); они сняты на расстояниях $x = 0$ и $x = 7,38$ м приемным устройством с полосой интегрирования 100 Гц. Видно, что при выключенном сигнале шумовой спектр практически не меняется — его интенсивность слишком мала. В присутствии же сигнала с частотой 1,73 кГц широкий спектр трансформируется: появляется сплошная компонента, простирающаяся по крайней мере до 50 кГц.

Заметим, что сплошной спектр не всегда возникает только из-за волновой нелинейности. В конкретных системах могут действовать и другие механизмы. Так, в задаче акустической кавитации уже при рассмотрении простей-

шего объекта — одиночного газового пузырька — обнаружены неперiodические пульсации при гармоническом воздействии. Нелинейный осциллятор — пузырек — относится к классу систем Фейгенбаума⁴⁵, для которых характерны наличие стохастического аттрактора и усложнение картины движения путем бифуркаций удвоения периода⁴⁶. Процесс стохастизации приводит к формированию сплошного спектра колебаний одиночного пузырька⁴⁷. При переходе к распределенной системе (кавитационной области), естественно, будет наблюдаться похожая на рис. 7, 8 картина.

Наряду с усилением шумовой компоненты возможно, как это следует из (19), и некоторое ее подавление. Для этого необходимо выбрать частоту

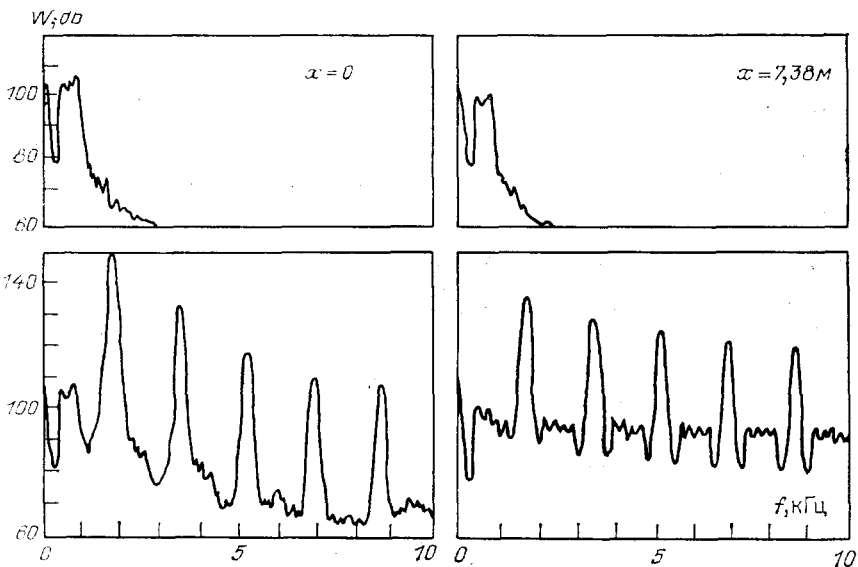


Рис. 8. Экспериментальные спектрограммы шума при отсутствии сигнала (верхний ряд) и смеси мощной сигнальной и слабой шумовой волн (нижний ряд)⁴³

сигнала достаточно высокой, чтобы спектры шума и «пьедестала» у 1-й гармоники не перекрывались. Подавление низкочастотного шума при активном воздействии на него интенсивным сигналом имеет важное значение. Шумы на низких частотах вредно влияют на конструкции и организмы; по этой причине повышаются санитарные требования к эксплуатации пассажирских самолетов⁸. Неизбежное увеличение полной интенсивности звука при активном воздействии не представляет опасности, так как происходит за счет высокочастотных компонент, которые при распространении быстро затухают.

Теоретическое и экспериментальное изучение этого явления проводилось в работе⁴⁸. Установка представляла собой трубу диаметром 11 см, состоящую из 5 разъемных секций, длиной 1 м каждая. Газодинамический источник шума находился на оси трубы; вокруг него располагались генераторы узкополосного сигнала. Измерения проводились за трубой на расстоянии 1 м от ее выходного торца под углом 45° к оси. При выключенном сигнале исходный спектр шума (штриховая кривая на рис. 9, а) на расстояниях от 1 до 5 м изменялся мало. Из-за взаимодействия с сигналом возникала область, в которой уровень шума понижался. Кривая 1 соответствует частоте сигнала 5,5 кГц, 2 — 13,5 кГц; длина трубы 5 м. Тенденция снижения уровня усиливалась с увеличением интенсивности сигнала и длины области взаимодействия.

На рис. 9, б изображены результаты расчетов. Спектр шума брался в виде (15), обратное время корреляции $t_n^{-1} = 8 \text{ кГц}$. Отношение интенсивностей шумовой и регулярной компонент равнялось 0,16. Кривые 1, 2 по-

строены для расстояния $z = \varepsilon \sigma x / c_0^2 t_{\text{к}} = 0,8$. Штрихпунктирными кривыми показаны спектры подавленной шумовой компоненты. Между рис. 9, а и б имеется лишь качественное согласие. Форма шумового спектра не вполне соответствовала наблюдаемому, не учитывалась дифракция волн на пути от выходного торца трубы до приемника звука. Кроме того, интенсивный звук

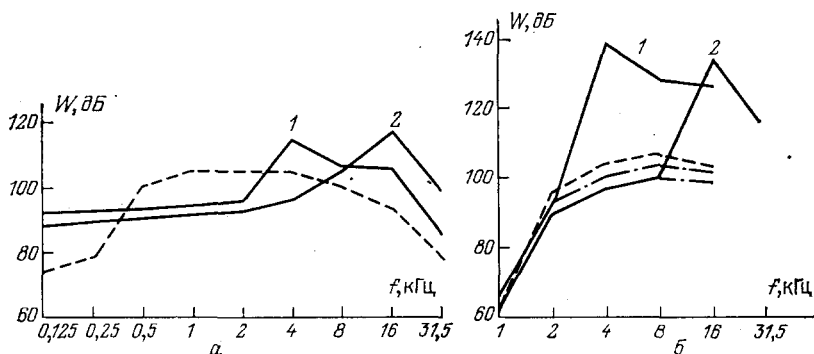


Рис. 9. Подавление низкочастотного шума при активном воздействии на него интенсивного высокочастотного сигнала.

а — Измеренные спектры. б — Результаты расчетов ⁴⁸

может изменять структуру турбулентного потока и, следовательно, исходный шумовой спектр. Поэтому в таких задачах, помимо нелинейных взаимодействий звука со звуком, нужно учитывать и акустогидродинамические явления типа звук — турбулентность ²².

Укажем на возможность подавления шума в результате другого процесса — его взаимодействия с регулярным сигналом более низкой частоты. Такая возможность следует из замечательного свойства решений уравнения Бюргерса (1). Пусть $V^{(N)}(z, \theta)$ — некоторое точное решение (1). Нетрудно проверить, что

$$V^{(S+N)} = \frac{\theta}{z_0 [1 - (z/z_0)]} + \frac{1}{1 - (z/z_0)} V^{(N)} \left(\frac{z}{1 - (z/z_0)}, \frac{\theta}{1 - (z/z_0)} \right) \quad (22)$$

также будет точным решением. Иными словами, из одного решения можно получить другое, наложив на него линейно возрастающую или убывающую (в зависимости от знака константы z_0) функцию времени $\theta = \omega_0 (t - x/c_0)$ в сопровождающей системе координат. Как следует из (22), при $z_0 > 0$ на растущем склоне и на расстояниях $0 < z < z_0$ происходит усиление волны $V^{(N)}$ по закону $1/[1 - (z/z_0)]$, а также смещение ее спектра в высокочастотную область (старая переменная θ переходит в $\theta/[1 - (z/z_0)]$). Напротив, если склон спадающий ($z_0 < 0$), волна подавляется $\sim 1/[1 + (z/|z_0|)]$, а ее спектр смещается в область низких частот ^{51, 63}.

Картина такого взаимодействия показана на рис. 10. Исходный (при $z = 0$) профиль низкочастотного сигнала $V^{(S)}$ имеет форму равнобедренного треугольника; на него наложено шумовое возмущение $V^{(N)}$ (см. рис. 10, а). Искаженный профиль результирующей волны $V^{(S+N)}$ изображен на левом рис. 10, б; ему соответствует расстояние $z > 0$ (но $z < z_0$, поскольку на переднем склоне $V^{(S)}$ еще не образовался ударный фронт). Шумовая компонента $V^{(N)}$ искажившейся волны выделена на правом рис. 10, б. Видно, что на укучающемся переднем склоне $V^{(S)}$ произошло сжатие и усиление реализации шума, а на сглаживающемся заднем — растяжение во времени и подавление.

Регулярная волна $V^{(S)}$ может содержать только спадающие склоны. Пример — типичная для нелинейной акустики периодическая пилообразная волна, у которой линейные участки профиля соединены ударными фронтами. Очевидно, что воздействие такой «пилы» на высокочастотный шум приведет к его подавлению.

Вопрос об уменьшении уровня шума при его взаимодействии с интенсивным сигналом обсуждается также в работе ⁴⁹.

Подчеркнем, что возможность управления спектрами, перестройки частоты и усиления слабых сигналов в поле мощной низкочастотной накачки,

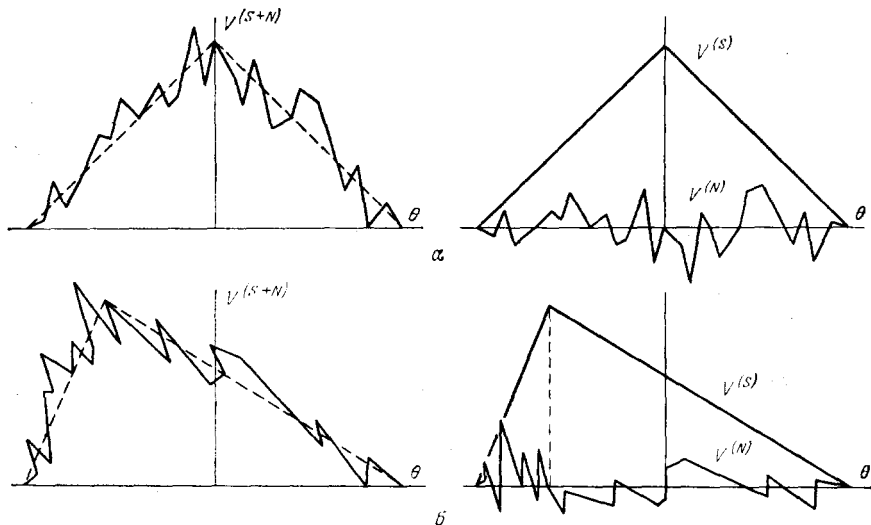


Рис. 10. Подавление шума при его взаимодействии с низкочастотным сигналом

следующая из (22) и рис. 10, должна иметь важное значение не только для статистических задач, но и в различных приложениях нелинейной акустики. Обсуждение этого вопроса продолжено в разделе 6 на примере проблемы избыточного затухания сигнала в шумовом поле.

6. ЗАТУХАНИЕ СИГНАЛА ПРИ ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ШУМОМ

Нелинейная трактовка диссипативных процессов на языке фонон-фононных взаимодействий берет начало от классических работ Ландау, Румера и Ахиезера; она преимущественно используется для расчета коэффициентов затухания звука в твердых телах ¹⁶. Однако во многих случаях такая точка зрения полезна при рассмотрении волн в жидкостях и газах. Это связано с возможностью учета стороннего шума, наличие которого может привести к аномально большому затуханию, учета процесса генерации гармоник и других факторов. Так, в работе ⁵⁰ высказана гипотеза, объясняющая избыточное поглощение низкочастотного звука в океане при взаимодействии с шумовыми волнами, накапливающимися в подводном звуковом канале. Результаты работ ^{31, 50} связаны с постановкой ряда экспериментов ⁵¹⁻⁵³, посвященных всестороннему изучению эффекта нелинейного затухания сигнала в шумовом поле. Были продолжены и теоретические исследования в этом направлении ⁵⁴⁻⁵⁷.

Обсудим вначале процесс нелинейного затухания слабого сигнала частоты ω_0 при его взаимодействии с мощной низкочастотной волной ω_n ($\omega_n \ll \omega_0$, $u_n \gg u_0$). Полагая в формуле (3) $V = \exp(-\Gamma z) \sin T + (u_n/u_0) \sin(\omega_n T/\omega_0)$,

для колебательной скорости на частоте сигнала ω_0 получим

$$u = u_0 \exp\left(-\frac{b\omega_0^2}{2c_0^3\rho_0} x\right) J_0\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega_0 u_n x\right) \sin \omega_0 \tau. \quad (23)$$

Видно, что уменьшение амплитуды происходит из-за двух причин. Экспонента в (23) описывает линейное затухание, а функция Бесселя J_0 — затухание, связанное с наличием низкочастотной волны ($u_n \neq 0$). Аргумент $J_0(y)$ можно записать как $y = (x/x_{pH}) (\omega_0/\omega_n)$. Поскольку отношение частот

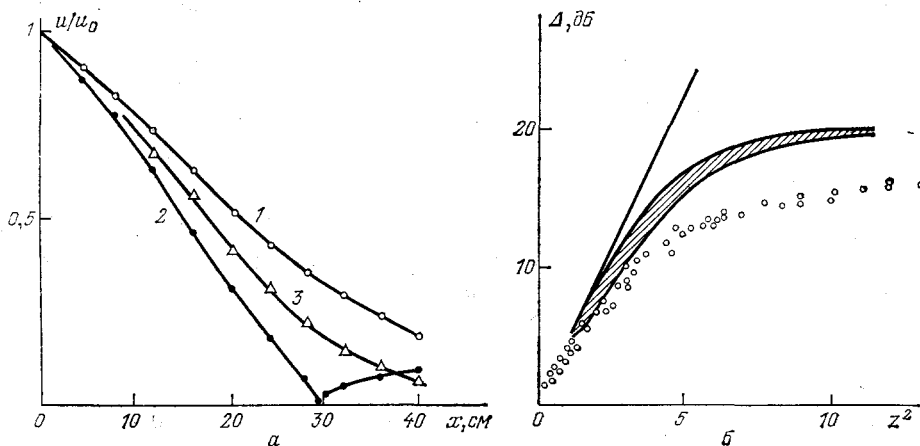


Рис. 11. Результаты экспериментов по нелинейному затуханию акустического сигнала в воде при взаимодействии с шумовой волной⁵³

$\omega_0/\omega_n \gg 1$, значение y (для расстояний $x \sim x_{pH} = c_0^2/\varepsilon\omega_n u_n$ — длины образования разрыва в мощной низкочастотной волне) может быть большим: $y \gg 1$. При этом амплитуда сигнала, убывая с расстоянием, будет осциллировать.

Такое поведение сигнала наблюдалось в экспериментах^{51, 53}. Авторы⁵³ проводили измерения в кювете с водой в импульсном режиме на мегагерцевых частотах. Кривая 1 на рис. 11, а представляет экспериментальную зависимость от расстояния амплитуды сигнала, частота которого равнялась $\omega_0/2\pi = 11,5$ МГц, колебательная скорость на входе $u_0 \approx 8 \cdot 10^{-2}$ см/с. Здесь нелинейных эффектов нет, затухание происходит из-за вязкости и теплопроводности. На кривой 2 отложены экспериментальные значения амплитуды сигнала при его взаимодействии с низкочастотной волной $\omega_n/2\pi = 1,35$ МГц, $u_n \approx 6,5$ см/с. Затухание заметно выросло, ход кривой изменился качественно. Аналогичное осцилляторное поведение амплитуды наблюдалось в натурных условиях⁵¹ на более низких частотах: $\omega_n/2\pi = 68$ кГц, $\omega_0/2\pi = 244$ кГц. Заметим, что кривая 2 хорошо описывается формулой (23). В частности, из условия $y = 2,4$, соответствующего первому корню функции Бесселя $J_0(y)$, полагая для воды $\varepsilon = 4$, $c_0 = 1,5 \cdot 10^5$ см/с, найдем координату минимума сигнала ≈ 29 см.

Когда нелинейное затухание сигнала происходит в результате взаимодействия с шумом, как следует из формул раздела 5, амплитуда убывает по экспоненциальному закону:

$$u = u_0 \exp\left[-\frac{b\omega_0^2}{2c_0^3\rho_0} x - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega_0 \sigma x\right)^2\right] \sin \omega_0 \tau. \quad (24)$$

В этом случае дополнительное затухание определяется только интенсивностью шума σ^2 и не зависит от взаимного расположения спектров шума и сигнала.

Результаты экспериментов⁵³ по затуханию сигнала в шумовом поле изображены на рис. 11, а, кривая 3. Спектр шума сосредоточен в диапазоне 0,6—1,9 МГц. Интенсивность шума 0,3 Вт/см² ($\sigma = 4,6$ см/с) была такой же, как и у регулярной низкочастотной волны при снятии точек кривой 2. Ход кривой 3 хорошо отвечает формуле (24).

Авторами⁵³ проведены аналогичные измерения при большем спектральном разрешении с учетом конечной ширины линии сигнала. В реальных условиях часто происходит слияние сигнала $S^{(S)}$ со спектральным комплексом $S^{(N,S)}$ (см. рис. 6), образовавшимся в процессе взаимодействия у подножия линии. Фактически образуется новая линия возросшей ширины, расчленив которую на отдельные составляющие не удастся. При этом имеет смысл следить лишь за пиковым значением спектральной плотности на частоте сигнала.

Результаты измерений изображены на рис. 11, б. Прямая дает избыточное затухание $\Delta = 10 \lg e \cdot z^2 \approx 4,3 (\epsilon \omega_0 \sigma x / c_0^2)^2$ дельтаобразной линии. Штриховкой отмечена область теоретических значений Δ , полученных с учетом конечности ширины спектра сигнала и ошибки в измерении шума. Расхождение с экспериментальными значениями (точки) следует, по-видимому, связать с неучетом дифракционных явлений во взаимодействующих пучках.

Когда шумовая и сигнальная волны распространяются коллинеарно, нелинейное затухание описывается формулой (24). В работе³¹ показано, что при учете слабо неколлинеарных взаимодействий закон $\exp(-\beta x^2)$ переходит в обычную зависимость $\exp(-\alpha x)$. Однако реальным условиям лучше соответствует модель изотропного шумового поля. Поэтому более строгий расчет должен проводиться не в приближении плоских волн, а по теории нелинейных звуковых пучков.

Используем модельное уравнение

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = - \frac{2\epsilon}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}, \quad (25)$$

эквивалентное эволюционному уравнению Хохлова — Заболотской (ХЗ)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \tau} - \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \right) u = \frac{\epsilon}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \tau^2}. \quad (26)$$

Чтобы перейти от (25) к (26), нужно воспользоваться приближениями медленно изменяющегося профиля и квазиоптики⁵⁸, т. е. положить в (25)

$$u(x, \mathbf{r}_{\perp}, t) = u \left(\tau = t - \frac{x}{c_0}, \mu x, \mu^{1/2} \mathbf{r}_{\perp} \right); \quad (27)$$

здесь \mathbf{r}_{\perp} — координата в плоскости, перпендикулярной оси пучка, Δ_{\perp} — лапласиан по соответствующим переменным, x — координата вдоль оси, μ — малый параметр.

Представим продольную составляющую колебательной скорости как

$$u = u^{(S)} + u^{(N)} + u^{(N,S)} \quad \langle u^{(N)} \rangle = \langle u^{(N,S)} \rangle = 0; \quad (28)$$

здесь $u^{(S)}$ — регулярный сигнал — гармоническая плоская волна, $u^{(N)}$ — стационарный шум, $u^{(N,S)}$ — малая флуктуационная добавка к сигналу, появившаяся из-за его взаимодействия с шумом. Сигнал считаем слабым и пренебрегаем как образованием его гармоник, так и обратным влиянием на шумовое поле. В этих предположениях из (25) следует система уравнений

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u^{(N,S)} = - \frac{2\epsilon}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u^{(S)} u^{(N)}), \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) u^{(S)} = \frac{\epsilon}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^{(N,S)} u^{(N)} \rangle. \quad (30)$$

Аналогичную систему можно получить из уравнения ХЗ, однако последующие расчеты на основе (29), (30) много проще.

Запишем решение (29) через запаздывающий потенциал и положим в решении

$$u^{(S)} = \frac{1}{2} u_0 \exp(i\omega_0 t - ik_0 x) + \text{к. с.}, \quad u^{(N)}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}^{(N)}(\omega, \mathbf{r}) e^{i\omega t} d\omega + \text{к. с.} \quad (31)$$

Это дает

$$u^{(N, S)} = -\frac{\varepsilon u_0}{4\pi c_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\mathbf{r}' \frac{(\omega_0 + \omega)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \\ \times \exp\left[-ik_0 x + i(\omega_0 + \omega)\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}\right)\right] \tilde{u}^{(N)}(\omega, \mathbf{r}'). \quad (32)$$

Подставляя (31), (32) в уравнение (30) и проводя усреднение, найдем закон дисперсии

$$k_0 - \frac{\omega_0}{c_0} = \frac{\varepsilon^2 \omega_0}{4\pi c_0^5} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega_0 - \omega)^2 d\omega \int G(\omega, R) \times \\ \times \exp\left[ik_0 R \cos \theta - i(\omega_0 - \omega) \frac{R}{c_0}\right] \frac{d\mathbf{R}}{R}, \quad (33)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R \cos \theta = x - x'$, а $G(\omega, R) = \langle \tilde{u}^{(N)} \tilde{u}^{(N)*} \rangle = G(\omega) \times \times \sin(\omega R/c_0)/(\omega R/c_0)$ — корреляционная функция волнового шума в недиспергирующей среде. После интегрирования в (33) получим коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{\pi \varepsilon^2}{4c_0^5} \left[\int_0^{\omega_0} \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega} G(\omega) d\omega + 2\omega_0 \int_{\omega_0}^{\infty} G(\omega) d\omega \right]. \quad (34)$$

Формула (34) впервые выведена Вестервельтом⁵⁶. Однако здесь дана схема расчета⁵⁹, основанная на упрощенных уравнениях нелинейной акустики. Эта схема удобна для решения более сложных задач, требующих учета динамики внутренних процессов в среде или ее структурных особенностей, приводящих к появлению дисперсии.

Если частота сигнала значительно превышает характерную частоту шума, коэффициент затухания пропорционален квадрату частоты:

$$\alpha \approx \frac{\pi \varepsilon^2}{4c_0^5} \omega_0^2 \int_0^{\infty} \frac{G(\omega)}{\omega} d\omega. \quad (35)$$

При обратном соотношении характерных частот α линейно зависит от ω_0 ^{3,31}:

$$\alpha \approx \frac{\pi \varepsilon^2}{2c_0^5} \omega_0 \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega = \frac{\pi \varepsilon^2 \mathcal{E}}{2c_0^5 \rho_0} \omega_0; \quad (36)$$

здесь $\mathcal{E} = \rho_0 \langle u^{(N)2} \rangle$ — объемная плотность энергии шумовых волн. В работах^{56, 59} формула (34) использовалась для описания затухания первого звука в сверхтекучем гелии при температурах $< 0,6$ К и затухания низкочастотных сигналов при взаимодействии с динамическими шумами океана.

Укажем на другие схемы расчета диссипативных коэффициентов в шумовом поле. В работе⁶⁰ дан метод, основанный на введении канонических переменных для жидкостей или газов и частотного распределения чисел заполнения шумовых мод. Часто пользуются различными модификациями моделей слабой акустической турбулентности, приближением хаотических фаз^{2, 54, 61}. Тот факт, что в акустике эффективно взаимодействуют лишь

квазиколлинеарные волны, в этих схемах учитывается уже на стадии оценок, а не для упрощения исходных уравнений или расчетов.

Возвращаясь к одномерным моделям, заметим, что для понимания физики взаимодействий сигнал — шум очень полезны результаты недавних работ ^{62, 63} по сильной турбулентности, описываемой уравнением Бюргерса.

7. ДИФРАКЦИЯ ИНТЕНСИВНОГО ШУМА

Влияние временной и пространственной статистик на взаимодействия дифрагирующих волновых пучков хорошо изучено в нелинейной оптике ⁴. Аналогичные явления в акустике не исследованы. Сложность нелинейных акустических задач связана с их спецификой — рождением в недиспергирующей среде множества спектральных составляющих. В этих условиях нельзя считать волны квазигармоническими и переходить от уравнений поля к нелинейным параболическим уравнениям для амплитуд.

Основным в нелинейной акустике ограниченных пучков является уравнение ХЗ (26). Используем его для расчета пространственно-временной корреляционной функции

$$B(x, \tau = \tau_1 - \tau_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle u(x, \tau_1, \mathbf{r}_1) u(x, \tau_2, \mathbf{r}_2) \rangle. \quad (37)$$

В соответствии с приближенным методом, изложенным в разделе 2, решение нелинейной задачи может быть проведено в два этапа. Вначале найдем вспомогательную корреляционную функцию $B(x, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{R})$ из линеаризованного уравнения, отвечающего (26):

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial \tau} = \frac{c_0}{2} (\Delta_{\perp, 1} - \Delta_{\perp, 2}) B = c_0 \frac{\partial^2 B}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{R}}, \quad (38)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$. Затем для получения физического результата над вспомогательной функцией нужно совершить нелинейное преобразование типа (6).

Решение (38) с условием на границе $x = 0$ нелинейной среды $B = B_0(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{R})$ имеет вид

$$B(x, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(c_0 x)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int \int B_0\left(\tau - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{c_0 x}, \mathbf{r}', \mathbf{R}'\right) d\mathbf{r}' d\mathbf{R}'. \quad (39)$$

Пусть исходную ($x = 0$) пространственно-временную корреляционную функцию можно представить как произведение временной $B_0(t)$ и пространственной $B_{\perp}(\mathbf{r})$ корреляционных функций:

$$B_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}) = B_0(t) B_{\perp}(\mathbf{r}) I(\mathbf{R}); \quad (40)$$

здесь $I(\mathbf{R})$ описывает распределение средней интенсивности в поперечном сечении пучка. Подставляя (40) в (39), видим, что для широкополосных сигналов при $x > 0$ $B(x, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{R})$ не распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций, как для узкополосных случайно модулированных волн ⁴. Таким образом, в процессе распространения акустического шума пространственная и временная статистики существенно влияют друг на друга уже в линейном приближении.

Когда исходный радиус поперечной корреляции меньше других характерных масштабов ($r_K \rightarrow 0$, приближение δ -коррелированности в пространстве), из (39), (40) получим

$$B(x, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{r_K}{2c_0 x} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_0(\omega) B_{\perp}(x, \omega, \mathbf{r}) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{\mathbf{r}\mathbf{R}}{c_0 x} \right) \right] d\omega. \quad (41)$$

Здесь, в соответствии с теоремой Ван-Циттерта — Цернике, поперечная корреляционная функция связана пространственным преобразованием Фурье

с начальным распределением интенсивности:

$$B_{\perp}(x, \omega, \tau) = \int I(R') \exp\left(i \frac{\omega}{c_0 x} \tau R'\right) dR'. \quad (42)$$

Из формулы (41) следует, что для широкополосных сигналов справедлива более общая теорема: $B(x, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{R})$ определяется частотным преобразованием Фурье произведения $\omega^2 S_0 B_{\perp}$, где S_0 — исходный волновой спектр.

Рассмотрим пример: на входе пучок I гауссов и спектр S_0 соответствует гауссовской корреляционной функции $B_0(t) = \exp(-t^2/t_K^2)$,

$$I(\mathbf{R}) = u_0^2 \exp\left(-\frac{R^2}{R_0^2}\right), \quad S_0(\omega) = \frac{t_K}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2 t_K^2}{4}\right). \quad (43)$$

Вычислим (41); интересуясь корреляцией поля вблизи оси пучка, положим $\mathbf{r}_1 = 0$, $\mathbf{r}_2 = s$. Линейная пространственно-временная корреляционная функция примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= 2 \left(\frac{c_0 x t_K}{r_{K1} R_0 u_0} \right)^2 B(x, \tau, s) = \\ &= \left(1 + \frac{s^2}{r_{K1}^2}\right)^{-3/2} \left[1 - 2 \frac{\left(\frac{\tau}{t_K} + \frac{s^2}{r_{K2}^2}\right)^2}{1 + \frac{s^2}{r_{K1}^2}} \right] \exp\left[-\frac{\left(\frac{\tau}{t_K} + \frac{s^2}{r_{K2}^2}\right)^2}{1 + \frac{s^2}{r_{K1}^2}} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Существуют два характерных радиуса корреляции:

$$r_{K1}(x) = \frac{c_0 t_K x}{R_0} \sim x, \quad r_{K2}(x) = (2c_0 t_K x)^{1/2} \sim x^{1/2}. \quad (45)$$

При $x \rightarrow 0$ эффективный радиус $r_K(x)$ увеличивается с расстоянием по линейному закону, затем наступает более медленный корневой рост⁶⁴.

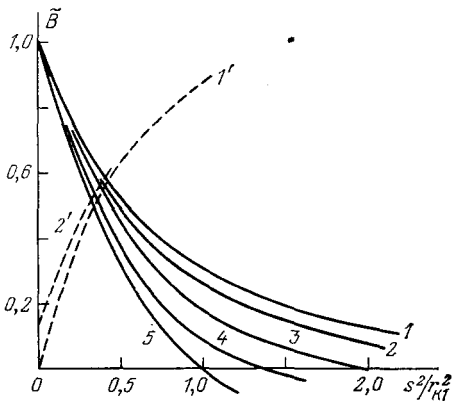


Рис. 12. Пространственная корреляционная функция широкополосного акустического шума и рост радиуса корреляции

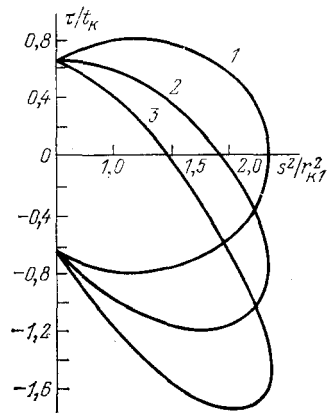


Рис. 13. Изменение с расстоянием формы «границы» (по уровню 0,1 от максимума) пространственно-временной корреляционной функции широкополосного акустического шума

На рис. 12 изображена нормированная функция $\tilde{B}(x, \tau = 0, s)$, построенная по формуле (44) для значений $\beta = (r_{K1}/r_{K2})^4 = 0,1; 0,2; 0,4; 0,7; 1,0$ (кривые 1—5). Полагая $\tau = 0$, мы тем самым считаем, что измерение функции B производится двумя широкополосными приемниками (один из них — на оси пучка, другой удален на s), регистрирующими полную энергию шума во всем спектре частот. Изменение формы кривых с ростом β свидетельствует

о том, что помимо $r_{к1}$ на пространственную корреляцию поля существенно влияет и $r_{к2}$. Штриховой кривой I' на рис. 12 показано поведение эффективного радиуса корреляции, определенного по уровню 0,1 (это — зависимость $r_{к}/2R_0$ от приведенного расстояния $\sqrt{\bar{\beta}} = (c_0 t_{к}/2R_0^2) x$). Кривая $2'$ описывает увеличение радиуса корреляции $r_{к}(x)$, когда нарушено предположение о δ -коррелированности исходного поля и $r_{к}(0) = 0,2R_0$. Отличия от кривой для $r_{к}(0) = 0$ заметны лишь на малых расстояниях.

Функция \tilde{B} (44) рассчитана для широкополосного шума, заданного при $x = 0$ в виде пучка с плоским фазовым фронтом. На малых расстояниях увеличение радиуса корреляции по закону $r_{к1}(x)$ (45) обусловлено дифракцией. Когда радиус корреляции начинает расти по закону $r_{к2}(x)$, это значит, что процесс дифракции в основном закончился, и рост связан со сферической расходимостью компонент спектра. Именно поэтому максимальная корреляция наблюдается (см. (44)) при $\tau = -s^2/2c_0x$: задержка измерения τ на удалении s от оси должна в точности равняться разности времен прихода волны в точки, находящиеся на расстояниях x и $(x^2 + s^2)^{1/2} \approx x + (s^2/2x)$ от источника звука.

На рис. 13 показаны «границы» корреляционной функции (44) на плоскости $\tau/t_{к}, s^2/r_{к1}^2$ для различных значений параметра $\beta^{1/2} = (c_0 t_{к}/2R_0^2) x = 0; 0,1; 0,2$ (кривые 1—3). Эти кривые образованы пересечением поверхности $\tilde{B}(\tau, s)$ плоскостью на уровне $\tilde{B} = 0,1$. Видно, что с ростом x область наибольших значений функции \tilde{B} локализуется вдоль кривой $\tau = -s^2/2c_0x$.

Перейдем к нелинейной задаче. Не интересуясь пока что изменением пространственной статистики ($s = 0$), учтем ее влияние на эволюцию спектра интенсивного дифрагирующего шума. (Генерация шумовых акустических гармоник в регулярных пучках без учета дифракции рассмотрена в работе ⁶⁵). Здесь возникает новый параметр — нелинейная длина $x_p = c_0^2 t_{к}/\epsilon u_0$, поэтому удобно перейти к переменным, использованным в (1), (6): $z = x/x_p, T = \tau/t_{к}$. Под B и ω будем понимать безразмерные величины; нормировочные константы при этом u_0^2 и $t_{к}^{-1}$. Корреляционная функция (44) примет вид:

$$B(z, T) = \frac{2}{(Nz)^2} (1 - 2T^2) \exp(-T^2). \quad (46)$$

Число $N = x_p/x_d$ — отношение характерных длин образования разрыва и дифракции $x_d = r_{к}R_0/2c_0t_{к}$. При $N \rightarrow \infty$ нелинейность сказывается слабо, а при малых N она оказывает основное влияние на эволюцию формы и спектра волны ³.

Совершая над (46) нелинейное преобразование (6), найдем

$$\tilde{S} = 2\pi^{1/2} (Nz)^2 S(z, \omega) = \left[1 + 6 \left(\frac{\omega}{N} \right)^2 \right]^{-7/2} \times \\ \times \left\{ \omega^2 + 36 \left(\frac{\omega}{N} \right)^2 \left[1 + 6 \left(\frac{\omega}{N} \right)^2 \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{4} \left[1 + 6 \left(\frac{\omega}{N} \right)^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (47)$$

При слабом ($N \gg 1$) и сильном ($N \ll 1$) проявлениях нелинейности имеем

$$\tilde{S}_{\text{лин}} = \omega^2 \exp \left(-\frac{\omega^2}{4} \right), \quad \tilde{S}_{\text{нел}} = \frac{36 (\omega/N)^2}{[1 + 6 (\omega/N)^2]^{5/2}}. \quad (48)$$

Из формул (47), (48) видно, что во всех случаях в дальней зоне формируется стационарный спектр — его вид не зависит от расстояния z , а значения убывают как z^{-2} . Установившаяся форма спектрального распределения показана на рис. 14 для различной степени проявления нелинейных эффектов. Нелинейность усиливается с ростом номера кривых 1—5 ($N = \infty, 4 \sqrt{6}, 2 \sqrt{6}, \sqrt{6}, 1$), и на рис. 14 прослеживается переход от $\tilde{S}_{\text{лин}}$ к $\tilde{S}_{\text{нел}}$ (48). Видно, что нелинейные эффекты совместно с дифракцией приводят к заметному уменьшению ширины и смещению максимума спектральной плотности в область

низких частот. Штриховая кривая соответствует исходному спектру (43) $\tilde{S}(z=0, \omega) = \exp(-\omega^2/4)$; когда нелинейность не сказывается, спектр в дальней зоне $\tilde{S}_{\text{лин}}$ (48) (кривая 1) равен исходному, умноженному на ω^2 (соответствующая корреляционная функция равна 2-й производной по T от исходной функции).

Чтобы проследить за эволюцией формы спектра с расстоянием, за процессом установления стационарного спектрального распределения в зоне

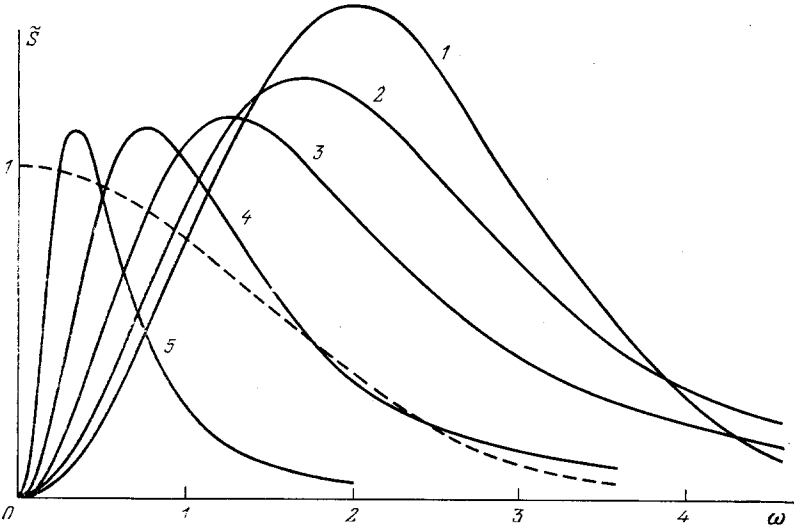


Рис. 14. Стационарные спектры (в дальней зоне) дифрагирующих нелинейных акустических шумов

сферической расходимости, следует отказаться от предположения о δ -корреляции. При этом вместо (46) нужно воспользоваться более общим выражением для вспомогательной функции:

$$B = e^{-T^2} - \frac{\pi^{1/2}}{4} Nz e^{(Nz)^2/4} \left\{ e^{-NzT} \left[1 - \Phi \left(\frac{Nz}{2} - T \right) \right] + e^{NzT} \left[1 - \Phi \left(\frac{Nz}{2} + T \right) \right] \right\}; \quad (49)$$

здесь

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \exp(-v^2) dv$$

— интеграл ошибок. Расчеты показывают, что при фиксированной дифракционной длине x_d усиление нелинейности (уменьшение x_p) ведет к заметному росту затухания на оси пучка. Смысл явления в следующем: нелинейное взаимодействие спектральных компонент «подпитывает» низкочастотную область спектра, откуда энергия выносится дифракцией *).

Теперь посмотрим, как влияет нелинейность на пространственную статистику. Для этого найдем корреляционную функцию $B(z; \tau, s)$, совершив над вспомогательной функцией (44) преобразование, связанное с (6):

$$B(z; \tau, s) = \frac{1}{(Nz)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial T} \Phi \left[\frac{(\tau/t_R - T) N}{2 \sqrt{2} (1 - \tilde{B})^{1/2}} \right] dT. \quad (50)$$

*) Динамика спектров детально изучена Б. С. Азимовым.

На рис. 15 изображены сечения пространственно-временной корреляционной функции на уровне 0,1 от ее максимального значения *). Расчет проведен для различных проявлений нелинейности — кривые 1 соответствуют линейному случаю ($N \rightarrow \infty$), кривые 2 — $N = 2\sqrt{2}$, 3 — $N = \sqrt{2}$. Видно, что с ростом нелинейности из-за перемешивания спектральных компонент усиливается как пространственная, так и временная корреляция.

Аналогичный эффект нелинейного сглаживания пространственных выбросов хорошо изучен для регулярных пучков, описываемых уравнением ХЗ^{3, 10}.

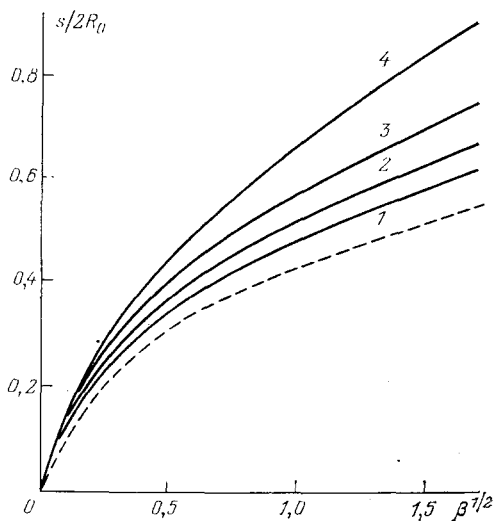
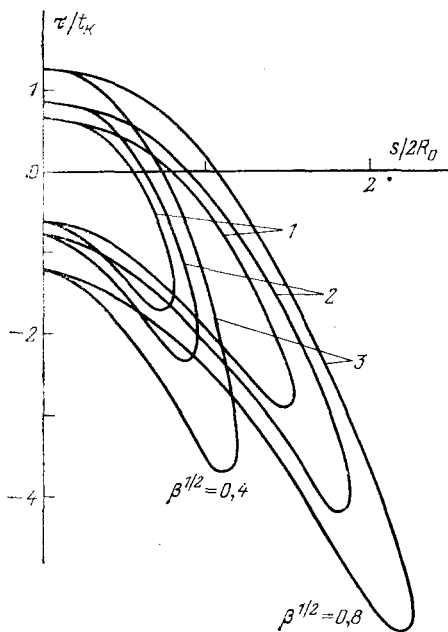


Рис. 15. Сечения пространственно-временной корреляционной функции на различных расстояниях при разных значениях чисел «дифракция — нелинейность»

Рис. 16. Увеличение радиуса поперечной корреляции при распространении волны с широким спектром.

Штриховая кривая — линейная зависимость. С ростом номера усиливается нелинейность

Расширение области корреляции происходит также в результате накопления нелинейности с увеличением пути, пройденного волной. Двум группам кривых на рис. 14 соответствуют приведенные расстояния $\sqrt{\beta}$, равные 0,4 и 0,8.

Увеличение радиуса корреляции, определенного по полной энергии (как на рис. 12), изображено на рис. 16. Кривые 1—4 отвечают значениям N , равным $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/2$. Штриховая кривая соответствует линейному случаю ($N \rightarrow \infty$, см. кривую 1' на рис. 12).

Заметим, что данное определение радиуса корреляции основано на идеализированном представлении о точечных приемниках, частотная характеристика которых равномерна во всем диапазоне частот. Разумеется, для широкополосного шума это не единственно возможное определение. Если, например, приемник вырезает из шума узкий спектральный диапазон, то в принципе возможен обратный эффект — «подчеркивание» выбросов и уменьшение радиуса корреляции при усилении нелинейности. С такой ситуацией сталкиваются, например, в нелинейной оптике⁴. К тому же реальные спектры акустического шума более сложны по сравнению с рассмотренным здесь примером (вторая формула (43)) и могут обнаруживать иные разнообразные свойства.

В заключение раздела укажем, что задачи дифракции интенсивного шума, тем более с учетом пространственной статистики, ранее не рассмат-

*) Результаты на рис. 15, 16 получены В. А. Хохловым.

ривались. Эти задачи очень сложны; решать их трудно даже с помощью современных ЭВМ. В акустике рассмотрены лишь задачи в линейной постановке; примером может служить анализ пространственной корреляции шума, создаваемого падением дождевых капель на поверхность воды⁶⁶. Вместе с тем, любой реальный источник мощного шума создает ограниченное в пространстве возмущение, при распространении которого учет дифракции принципиально необходим. Влияние пространственной статистики должно сказываться на работе мощных излучающих систем с многокомпонентными мозаичными антеннами; случайные поперечные осцилляции поля здесь связаны с разбросом параметров отдельных элементов. Другой пример — кавитационный слой со случайным распределением пузырьков, при схлопывании которых излучается интенсивный шум. Много аналогичных источников существует в аэроакустике и волновой гидрофизике океана⁶⁷, где в основном используются корреляционные измерения.

Таким образом, изучение нелинейных задач с учетом пространственной статистики только начинается; здесь можно ожидать интересных результатов как в теории, так и в эксперименте.

8. ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ

До сих пор мы рассматривали интенсивный шум с характеристиками, заданными на входе нелинейной среды. Однако часто бывают известны статистические свойства не исходного шумового поля, а распределенных в пространстве источников, возбуждающих волну. Такие задачи описываются неоднородными нелинейными уравнениями, правая часть которых — случайная функция; простейшие из них — неоднородные уравнения Бюргерса и простых волн^{69, 70}. Эта модель адекватна многим ситуациям, реализующимся в оптоакустике, механике, физике плазмы и электронных потоков (см.³²). Примерами могут служить процессы возбуждения нелинейного звука в газе, набегающем с околосветовой скоростью на лазерный луч или неровный твердый профиль, возбуждения океанических волн бегущей волной давления и другие. Кроме того, неоднородные уравнения типа Бюргерса интересны как простейшая модель турбулентности, поскольку наряду с нелинейным перемешиванием и диссипацией она включает третий принципиальный фактор — внешние источники энергии⁶⁸.

Для определенности будем говорить о возбуждении звука движущимся полем случайных источников. Уравнения эволюционного типа удается получить, если источники движутся относительно среды со скоростью c_1 , близкой к скорости c_0 собственной волны: $|c_1 - c_0|/c_0 \ll 1$. В этом случае из двух встречных волн эффективно возбуждается лишь одна, бегущая синхронно с источниками. Уравнение для нее³² имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \delta \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{dF(\theta)}{d\theta} = f(\theta). \quad (51)$$

Здесь переменные $V = u/u_0$, $z = x/x_p$, $\theta = \omega_0 [\tau - x(c_1^{-1} - c_0^{-1})]$ имеют прежний смысл (см. (1)), $\delta = (c_1 - c_0)/\epsilon u_0$ — безразмерная расстройка скоростей. Источники описываются функцией F с нормальным законом распределения и заданной корреляционной функцией

$$\langle F(\theta_1) F(\theta_2) \rangle = R_F(\theta = \theta_1 - \theta_2), \quad \langle F \rangle = 0. \quad (52)$$

Нормировочная «амплитуда» u_0 зависит от интенсивности источников и выбрана так, чтобы $R_F(0) = 1$.

Свойства решений (51), соответствующих детерминированным физическим постановкам задач, описаны в книге³². Основные аналитические результаты для неоднородного уравнения Бюргерса (51) удалось получить, линеаризовав его преобразованием по Хопфу — Коулу. Поведение решений

неоднородного уравнения простых волн ((51) при $\Gamma = 0$) можно анализировать качественно на фазовой плоскости. Однако эти подходы ³² недостаточно эффективны при исследовании процессов возбуждения интенсивных шумовых волн.

В работе ⁷¹ предложено приближенное (для больших расстройек $|\delta| \gg 1$) решение неоднородного уравнения простых волн, отвечающее отсутствию возмущения $V(z = 0, \theta) = 0$ на границе среды $z = 0$:

$$V = \frac{1}{\delta} F(\theta) - \frac{1}{\delta} F\left(\theta - \delta z + zV - \frac{z}{\delta} F(\theta)\right) + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (53)$$

Пользуясь (53), можно точно выполнить статистическое усреднение и рассчитать корреляционную функцию $R_V(z, \theta = \theta_1 - \theta_2) = \langle V(z, \theta_1) \times V(z, \theta_2) \rangle$ шумовой волны:

$$R_V = \frac{R_F(\theta)}{\delta^2} + \frac{1}{2\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dR_F}{dT} \left[\Phi\left(\frac{T + \delta z - \theta}{\sqrt{2}z/\delta}\right) + \Phi\left(\frac{T + \delta z + \theta}{\sqrt{2}z/\delta}\right) - \Phi\left(\frac{T - \theta}{(2z/\delta)(1 - R_F)^{1/2}}\right) \right] dT. \quad (54)$$

В линейном пределе ($z/\delta \rightarrow 0$) имеем выражение $\delta^2 R_V \approx 2R_F(\theta) - R_F(\theta - \delta z) - R_F(\theta + \delta z)$. Отсюда видно, что полная интенсивность линейного шума $R_V(z, 0) = (2/\delta^2) [1 - R_F(\delta z)]$ растет с увеличением расстояния z и при $\delta z \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению $2/\delta^2$, тем меньшему, чем больше расстройка $|\delta|$.

Соответствующее (54) выражение для спектра интенсивности волны имеет вид:

$$S_V(z, \omega) = \frac{S_F(\omega)}{\delta^2} \left\{ 1 - 2 \exp\left[-\left(\frac{\omega z}{\delta \sqrt{2}}\right)^2\right] \cos \delta \omega z \right\} + \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dR_F}{dT} \exp\left[-\left(\frac{\omega z}{\delta}\right)^2 (1 - R_F)\right] \exp(-i\omega T) dT; \quad (55)$$

здесь

$$S_F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_F(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta$$

— спектр интенсивности распределенных источников. Сравнивая формулы (55) и (6), заметим, что второе слагаемое в (55) есть спектральная плотность свободно распространяющейся простой волны, исходный спектр (на границе $z = 0$) которой $S_F(\omega)/\delta^2$. Определяемая этим слагаемым высокочастотная асимптотика в нелинейной среде ω^{-3} , как известно ³, связана с неточным описанием разрывов решениями типа (53). На больших расстояниях спектр сформировавшегося возбуждения пропорционален спектральной плотности источников: $S_V(z \rightarrow \infty, \omega) = S_F(\omega)/\delta^2$.

Динамика формирования спектра интенсивности волны пояснена рис. 17 для $S_F = (1/2\pi^{1/2}) \exp(-\omega^2/4)$. На рис. 17, а изображен спектр $\tilde{S}_V = 2\pi^{1/2}\delta^2 S_V$ при значениях расстройки $\delta^2 = 4$ на расстояниях $z/\delta = 0,15$; 0,3 (2); 0,5 (3) (штриховые кривые). Соответствующие сплошные кривые 1—3 построены по линейной теории (кривые 1 практически совпадают). Видно, что в процессе возбуждения волны нелинейность приводит к усиливающемуся перераспределению энергии по спектру. На рис. 17, б аналогичные кривые даны для $\delta^2 = 10$ и $z/\delta = 0,5$. Здесь заметно проявляются осцилляции из-за большей расстройки δ ; нелинейность их частично «сглаживает».

Интересные явления в интенсивных шумовых полях, возбуждаемых случайными источниками, происходят после образования на реализации

участков с большой крутизной профиля — последовательности ударных волн.

Для изучения этих явлений воспользуемся методом качественного анализа решений уравнения (51) (при $\Gamma \ll 1$) на фазовой плоскости³². Рассмотрим отрезок случайной функции $F(\theta)$, описывающей правую часть (51), который заключен между двумя максимальными выбросами $F(\theta = a)$ и $F(\theta = b)$ (рис. 18). Чтобы упростить рассуждения, положим расстройку $\delta = 0$ и будем считать выбросы достаточно большими и почти одинаковыми

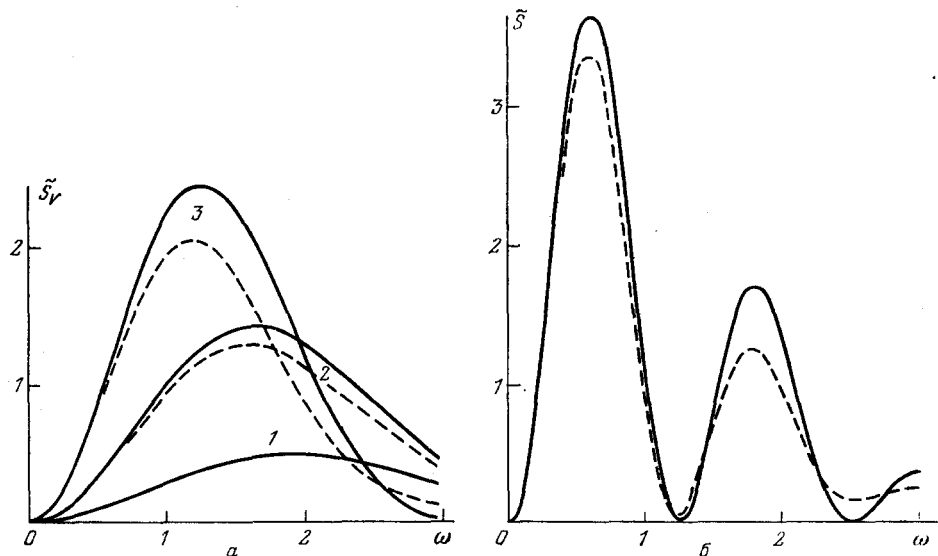


Рис. 17. Изменение с расстоянием спектра интенсивной волны, возбуждаемой бегущим полем распределенных источников

по величине ($F(a) \approx F(b) \gg \langle F^2 \rangle^{1/2} = 1$). При этом соседние участки реализации ($\theta < a$, $\theta > b$), как будет пояснено ниже, долгое время не смогут влиять на нелинейные процессы в пределах рассматриваемого отрезка $a \leq \theta \leq b$. Здесь установится квазистационарное поле, не изменяющееся с ростом z до тех пор, пока на отрезке $[a, b]$ не появится движущийся разрыв, пришедший извне — от окрестности $\theta = c$ максимума большей величины: $F(c) > F(a)$. Однако при $F(a) \gg \langle F^2 \rangle^{1/2}$ это событие маловероятно.

На рис. 18 изображен отрезок реализации $F(\theta)$ между двумя наибольшими максимумами (для простоты $F(a) = F(b)$); под ним построен фазовый портрет (тонкие линии) и форма волны (кривые 1—3) для трех значений $z_1 < z_2 < z_3$. Кривая 3, отвечающая пройденному расстоянию z_3 , изображает квазистационарный профиль.

Метод фазовой плоскости основан на свойствах характеристик уравнения (51):

$$\frac{V^2}{2} + F(\theta) = C, \quad \frac{d\theta}{dz} = -V. \quad (56)$$

Первая из формул (56) описывает семейство фазовых траекторий, соответствующих различным значениям константы C . Вторая формула в (56) дает дифференциальный закон движения каждой изображающей точки по своей траектории. Зная координаты θ_n , $V_n(\theta_n)$ этой точки на расстоянии $z_n = n \Delta z$, можно найти ее положение $\theta_{n+1} = \theta_n - V_n \Delta z$ на расстоянии z_{n+1} . Совокупность изображающих точек для данного z_n формирует кривую — профиль волны. Неоднозначность профиля свидетельствует о появлении разрыва, положение которого определяется так же, как для свободно распро-

страняющихся возмущений — по правилу «равенства отсекаемых площадей»³.

На малых расстояниях волна слабая, растет по линейному закону $V \approx zf(\theta)$: профиль ее повторяет производную $dF/d\theta = f$ (кривая 1). Ясно,

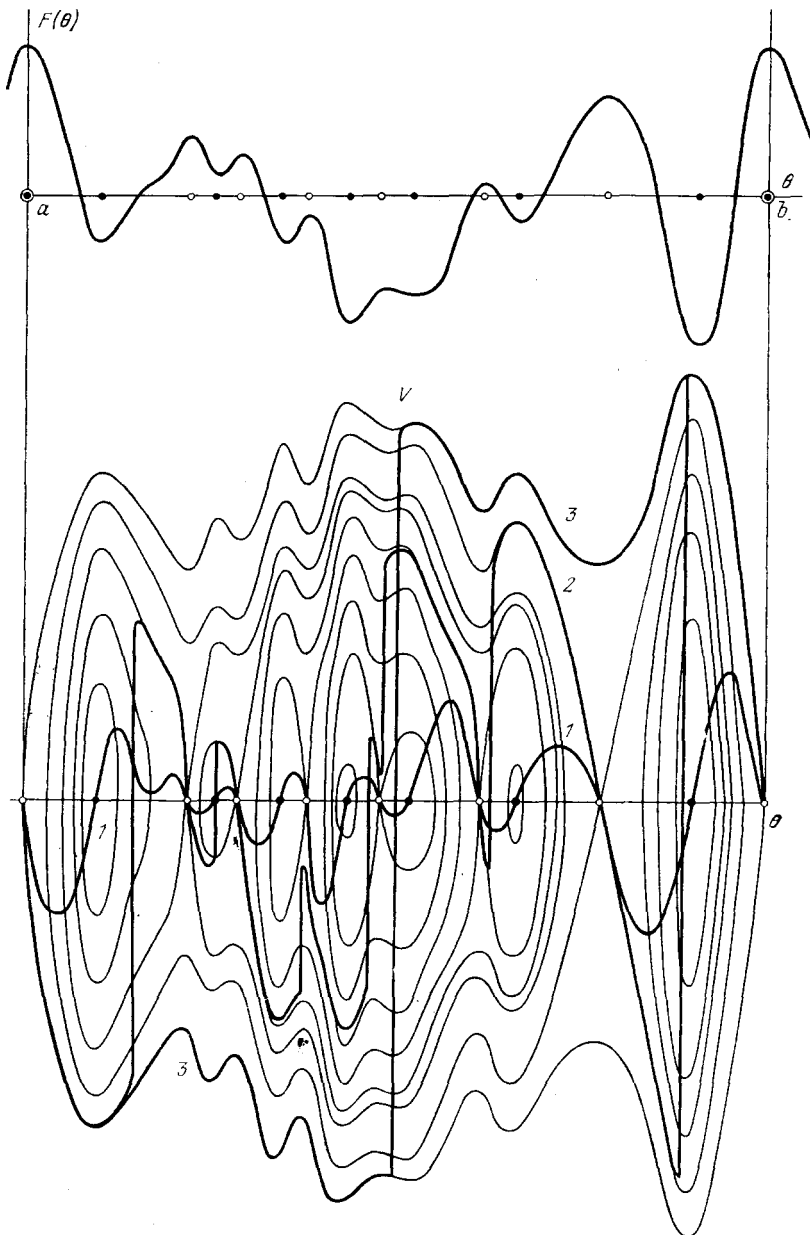


Рис. 18. Отрезок реализации первообразной функции случайных источников, фазовый портрет и профили возбуждаемой волны с движением и слиянием разрывов

что статистика возмущения — нормальная, а спектр интенсивности

$$S_V(z, \omega) \approx z^2 S_f(\omega) = z^2 \omega^2 S_F(\omega). \quad (57)$$

В процессе роста из-за усиливающегося действия нелинейности искажается форма волны. Между каждой парой соседних седловых точек (они

отмечены кружками на фазовом портрете рис. 18) формируется один разрыв. Эти разрывы несимметричны относительно нулевого уровня $V = 0$ (кривая 2); поэтому они движутся и сталкиваются между собой как абсолютно неупругие частицы. В результате множества столкновений на отрезке $[a, b]$ формируется одна «крупная частица» — разрыв (кривая 3), отвечающий абсолютному максимуму случайной функции $F(\theta)$.

Как нетрудно видеть, квазистационарный профиль состоит из отрезков двух сепаратрис $V = \pm [2(C_{\max} - F(\theta))]^{1/2}$, идущих из седла $\theta = a$ в седло $\theta = b$, и разрыва, положение которого определяется интегралом уравнения (51) ($\delta = 0, \Gamma \rightarrow 0$):

$$\int_a^b V(z, \theta) d\theta = z [F(b) - F(a)]. \quad (58)$$

При построении фазового портрета мы положили $F(a) = F(b) = C_{\max}$, поэтому на рис. 18 разрыв проведен так, что площадь под кривой 3 в точности равна нулю.

Если величины максимумов близки, но не одинаковы, например, $F(b) > F(a)$, площадь (58) под кривой $V(z, \theta)$ будет линейно расти с увеличением z за счет смещения разрыва влево. Когда волна пройдет расстояние

$$z_{st} = \int_a^b \{2[F(b) - F(\theta)]\}^{1/2} d\theta \cdot [F(b) - F(a)]^{-1},$$

разрыв достигнет левой границы $\theta = a$ рассматриваемого отрезка и выйдет за его пределы. На отрезке $[a, b]$ установится не содержащая разрывов стационарная волна, форма которой совпадет с верхней сепаратрисой $V = \{2[F(b) - F(\theta)]\}^{1/2}$. В другом случае, $F(b) < F(a)$, разрыв уйдет за правую границу $\theta = b$, а стационарная волна на отрезке $[a, b]$ примет форму нижней сепаратрисы: $V = -\{2[F(a) - F(\theta)]\}^{1/2}$.

Во всех случаях квазистационарная волна описывается формулой

$$V \approx \pm [(2C_{\max})^{1/2} - (2C_{\max})^{1/2} F(\theta)]^{1/2}, \quad (59)$$

где C_{\max} может быть медленно увеличивающейся функцией расстояния z . Теперь понятно, что на больших z статистика шумового поля вновь становится гауссовской со средним $\pm (2C_{\max})^{1/2}$ и дисперсией $(2C_{\max})^{-1}$. Таким образом, значения V локализуются в узкой области вокруг среднего, определяемого величиной наибольшего максимума C_{\max} .

Спектр интенсивности приобретет вид

$$S_V(z \gg 1, \omega) \approx \frac{S_F(\omega)}{2C_{\max}}. \quad (60)$$

Сравнивая формулы (57) и (60), видим, что в квазистационарном спектре подчеркнуты низкочастотные компоненты. Это связано с укрупнением масштабов поля из-за слияния движущихся разрывов. Кроме того, нелинейность формирует высокочастотную асимптотику, связанную со структурой фронта «долгоживущих» ударных волн. Эта асимптотика имеет вид ω^{-2} в пределе $\Gamma \rightarrow 0$ исчезающе малой вязкости (см. конец раздела 4). При учете конечности ширины фронта ударной волны, описываемого выражением $V = (2C)^{1/2} \text{th} [\theta (2C)^{1/2}/2\Gamma]$, на высоких частотах имеем

$$S_V(z, \omega) \sim \Gamma^2 \text{sh}^{-2} \frac{\omega \Gamma}{(2C)^{1/4}}. \quad (61)$$

Для малых, но конечных Γ степенная зависимость ω^{-2} при $\omega \rightarrow \infty$ переходит в экспоненциальную $\sim \exp(-\beta\omega)$.

Качественная картина формирования квазистационарного шума, описанная с помощью рис. 18, позволяет высказать правдоподобные гипотезы

о близости статистики процесса к гауссовской, а также о слабой коррелированности поля $V(z, \theta)$ и правой части $f(\theta)$ уравнения (51) (при больших z). Этих гипотез достаточно для расщепления корреляций и получения замкнутого стохастического уравнения

$$\frac{\partial^2 R_V}{\partial z^2} - (2\Gamma)^2 \frac{\partial^4 R_V}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_V - 1)^2 = 2R_f. \quad (62)$$

Нетрудно найти стационарное решение (62) при $\Gamma = 0$. Пусть, например, корреляционная функция $R_f = \langle f(\theta_1) f(\theta_2) \rangle$, и соответствующая ей спектральная плотность S_f равны

$$R_f = 2e^{-2|\theta|} - e^{-|\theta|}, \quad \pi S_f = \frac{1}{1+(\omega^2/4)} - \frac{1}{1+\omega^2}. \quad (63)$$

Источники (63) возбуждают волну со статистическими характеристиками

$$R_V = e^{-|\theta|}, \quad \pi S_V = \frac{1}{1+\omega^2}. \quad (64)$$

Физические константы выбраны так, чтобы R_V и R_f равнялись единице при $\theta = 0$.

Функции (63), (64), изображенные на рис. 19, обнаруживают поведение, обсуждавшееся в связи с формулами (57), (60). Если спектральная плотность источников S_f при $\omega \rightarrow 0$ ведет себя $\sim \omega^2$, то в спектре волны S_V низкочастотные составляющие подчеркнуты: $S_V(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \text{const}$. Это явление не ограничивается рассмотренным примером (63) и носит общий характер. Когда спектр источников $S_f(\omega \rightarrow 0) \sim \omega^n$, где $n < 2$, в спектре шумовой волны появляется особенность ($S_V(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \infty$: квазистационарный спектр не формируется). Физически это связано с тем, что высокочастотная диссипация не в состоянии воспрепятствовать накоплению энергии в области низких частот; реальным конкурирующим эффектом здесь может быть дифракция нелинейного шума (см. раздел 7).

Стационарные решения (62) при $\Gamma = 0$ также имеют высокочастотную асимптотику ω^{-2} . Это связано с наличием излома (в точке $\theta = 0$) корреляционной функции шума, обнаруживающей универсальное поведение $R_V(\theta \rightarrow 0) \approx 1 - |\theta| + \dots$, в то время как $R_f(\theta \rightarrow 0) \approx 1 - a\theta^2 + \dots$. Разумеется, учет вязкости ($\Gamma \neq 0$) сглаживает этот излом; решение сингулярно возмущенной задачи (уравнения (62) с малым параметром $(2\Gamma)^2$ при старшей, 4-й производной) должно описывать переход степенной асимптотики в экспоненциальную типа (61).

В заключение этого раздела заметим, что статистическая теория задач об излучении интенсивного шума, основанная на нелинейных уравнениях типа (51), фактически только начинает развиваться. По-видимому, в ближайшее время здесь удастся получить более детальные количественные результаты. Для этой цели представляется перспективным использование теории выбросов случайных процессов и особенно моделирование нелинейных разрывных волн на ЭВМ³².

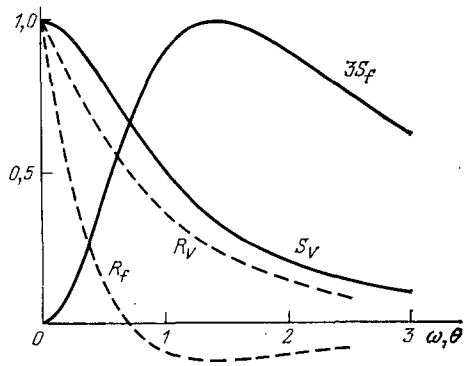


Рис. 19. Спектры (сплошные кривые) и корреляционные функции (штриховые кривые) распределенных источников и возбуждаемой ими нелинейной случайной волны

9. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАТИСТИКИ АКУСТИЧЕСКОГО ШУМА

В работе ⁷² предложен метод расчета функций распределения для нелинейных шумовых волн, основанный на свойстве эргодических стационарных процессов. Это свойство обычно используется при экспериментальном определении статистических характеристик и состоит в том, что относительное время пребывания процесса в интервале $(u, u + \Delta u)$ сходится по вероятности к одномерной функции распределения.

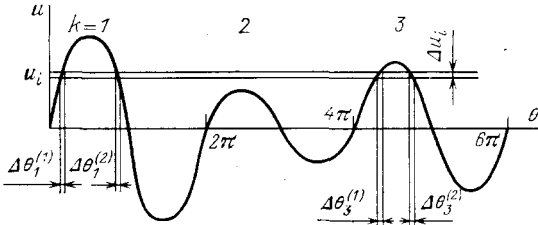


Рис. 20. Отрезок случайного процесса; величины, используемые при выводе нелинейных функций распределения на основе эргодичности

находится ли u_i на переднем или заднем склоне волны; A_k, φ_k — случайные значения амплитуды и фазы. Тогда функция распределения

$$W(u_i) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta u_i \rightarrow 0}} (2\pi N \Delta u_i)^{-1} \sum_{v; k=1}^N |\Delta \theta_k^{(v)}(A_k, \varphi_k; x)|. \quad (65)$$

Запись (65) удобна в связи с тем, что искажения акустических волн проще всего описываются на языке изменения приращений $\Delta \theta_k^{(v)}(A_k, \varphi_k; x = 0)$ с увеличением расстояния x .

Так, если плоская волна не содержит разрывов, а ее распространение в маловязкой среде ($\Gamma \ll 1$) описывается уравнением Бюргерса (1), то

$$\theta_k^{(1)} = \arcsin \frac{u_i}{A_k} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega_0 u_i x, \quad \theta_k^{(2)} = \pi - \arcsin \frac{u_i}{A_k} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} \omega_0 u_i x. \quad (66)$$

Видно, что в области до образования разрывов сумма $|\Delta \theta_k^{(1)}| + |\Delta \theta_k^{(2)}| = 2(A_k^2 - u_i^2)^{-1/2} \Delta u_i$ не изменяется с увеличением x . Поэтому одномерная функция распределения $W(u)$ (65) сохраняет свой вид, хотя форма сигнала меняется сильно ⁷². Обсуждению этого факта для исходных сигналов произвольной формы посвящена работа ⁷³.

После того как в волне образуются разрывы, нелинейные искажения приведут к «наполнению» гладких участков профиля на ударный фронт. Вначале на фронт попадет точка u_i , лежащая на переднем склоне; $\Delta \theta_k^{(1)}$ сразу же обратится в нуль, в то время как значение $\Delta \theta_k^{(2)}$, соответствующее заднему склону, будет по-прежнему расти. Затем произойдет столкновение с фронтом точки u_i спадающего участка профиля. Именно с процессом «исчезновения» $\Delta \theta_k^{(v)}(u_i)$ при попадании u_i на фронт ударной волны связаны нелинейные искажения одномерной функции распределения.

Для исходного шума с гауссовской статистикой после усреднения суммы приращений $\Delta \theta_k^{(v)}(A_k, \varphi_k; x)$ (с рэлеевским законом распределения амплитуды A_k и равномерным распределением фазы φ_k) получается функция

$$W(V) = \frac{e^{-V^2}}{2\sqrt{\pi}} \left[1 + \Phi(V \operatorname{ctg} zV) + \frac{z}{\pi^{1/2}} e^{-V^2 \operatorname{ctg}^2 zV} \right], \quad |V| < \frac{\pi}{z}, \quad (67)$$

и $W(V) = 0$ при $|V| > \pi/z$; здесь $V = u/\sigma\sqrt{2}$, $z = \varepsilon\sigma\omega_0 x/\sqrt{2c_0^2}$. Нелинейная трансформация исходного нормального распределения показана сплош-

ными кривыми 1—3 ($z = 0, \pi/2, \pi$) на рис. 21. Форма $W(V)$ (67) сильно деформируется. Из-за нелинейного затухания вероятность больших значений $|V|$ уменьшается (функция W вообще обращается в нуль при конечных $|V| = \pi/z$); за счет этого увеличивается вероятность наблюдения малых $|V|$.

Соответствующие изменения рэлеевского распределения максимумов показаны на рис. 21 штриховыми кривыми 4—6 ($z = 0, \pi/2, \pi$).

Таким образом, вследствие образования разрывов в нелинейной среде и последующего их затухания происходит рост вероятности малых значений сигнала V и его огибающей A за счет уменьшения вероятности больших выбросов. При сколь угодно малых z распределения $W(V)$ и $W(A)$ ограничены

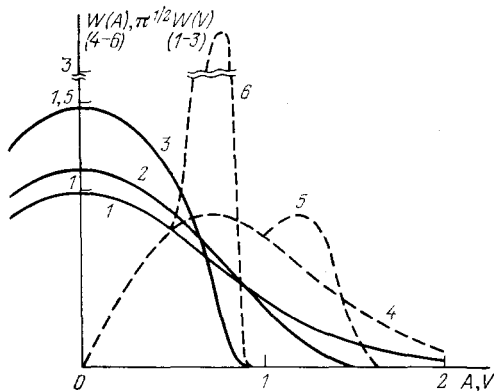


Рис. 21. Нелинейная трансформация распределений сигнала $W(A)$ (кривые 1—3) и его максимумов $W(V)$ (штриховые кривые 4—6)

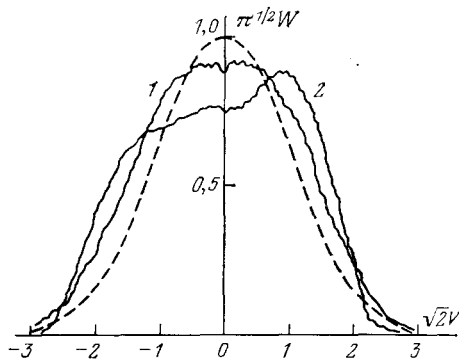


Рис. 22. Экспериментальное наблюдение тенденции превращения нормального распределения в равномерное на стадии формирования ударных фронтов ⁷⁷

со стороны больших значений аргументов и интенсивность сигнала $\langle V^2 \rangle$ меньше, чем на входе среды. Поведение средней интенсивности и дисперсии процесса в нелинейной среде с помощью формулы (67) проанализировано в работах ^{65, 74}.

В дальнейшем метод ⁷² был успешно использован при решении других статистических задач ⁷³⁻⁷⁶.

Проведена экспериментальная проверка описанных закономерностей ^{76, 77}. В работе ⁷⁷ шум интенсивностью 152 дБ возбуждался в заглушенной алюминиевой трубе длиной 20 м и диаметром 5 см. Средняя частота спектра с полосой в 1/3 октавы равнялась 1 кГц. Результаты обработки измерений приведены на рис. 22. Функция распределения входного шума была близка к гауссовской (штриховая кривая). По мере распространения ($x = 7,5$ и $17,5$ м — кривые 1, 2) распределение приближалось к равномерному. Выяснено, что эта тенденция связана с формированием разрывов. Несимметрия кривой может быть объяснена слабой дисперсией волн в трубе; она, как известно, приводит к несимметричному нелинейному искажению фаз сжатия и разрежения ³.

В работе ⁷⁶ измерена функция распределения узкополосного шума на электрической модели нелинейной слабодиспергирующей среды. Моделью служила искусственная линия передачи типа фильтра нижних частот с варикапами в качестве нелинейных емкостей. Применительно к условиям эксперимента авторы ⁷⁶ уточнили теорию ⁷². Ими рассчитана функция $W(V)$ с учетом двух дополнительных факторов: диссипации и слабой кубичной нелинейности. Оказалось, что процесс превращения нормального распределения $W(V)$ в равномерное из-за потерь несколько сглажен. Кубичная нелинейность, как и дисперсия, приводит к асимметрии $W(V)$ относительно поло-

жительных и отрицательных выбросов. Измерения хорошо согласуются с уточненной теорией.

Заметим, что гипотезе об эргодичности и стационарности случайного процесса в нелинейной среде ⁷² было дано впоследствии строгое математическое обоснование. Показано ^{32, 78}, что для исходного нормального стационарного процесса $V(z=0, \theta)$, эволюция которого описывается уравнением Бюргерса (1), решение $V(z, \theta)$ будет эргодическим при любых z . Это позволяет рассчитывать статистические характеристики на ЭВМ усреднением одной реализации решения.

В работах ^{79, 80} развит и обоснован численный метод расчета характеристик нелинейных шумовых волн, приведены оценки погрешности получаемых приближений. Для применения этого метода необходимо: численно смоделировать реализацию исходного нормального процесса с заданной корреляционной функцией; с помощью разностной схемы вычислить реализацию решения в требуемом сечении z ; на основании эргодичности произвести усреднение реализации по θ для получения различных статистических характеристик решения.

Рассчитана ⁸⁰, в частности, одномерная плотность вероятности исходного нормального процесса с корреляционной функцией $R = \exp(-\theta^2/4) \times \cos 10\theta$ ($\Gamma = 0,01$). При малых z распределение остается гауссовским; затем оно приобретает вид платообразной функции, близкой к равномерной; наконец, при $z \sim 10$ распределение сглаживается и становится вновь похожим на гауссовское. На реализациях четко выражена стадия образования разрывов. Однако фронты слабо асимметричны, друг относительно друга смещаются мало и рассасываются из-за усиливающегося действия диссипации. Именно высокочастотное поглощение привело здесь к сглаживанию и, возможно, к нормализации функции распределения.

Не должно возникнуть трудностей при получении аналогичных результатов (численных и аналитических) для интенсивных узкополосных шумов, описываемых иными эволюционными уравнениями, — с учетом релаксационных процессов (9), дифракции (26) и других факторов. Возможен также учет смещения ударных фронтов ⁷⁵, связанного с их слабой асимметрией.

Однако, когда исходный шум широкополосный и реализация состоит из множества сильно различающихся треугольных импульсов с движущимися и многократно сталкивающимися, резко асимметричными разрывами ⁸¹, аналитические методы типа ⁷² мало эффективны. Здесь удалось использовать подход ^{68, 82, 83}, основанный на асимптотическом анализе общего решения уравнения (1). Авторами ^{82, 83} показано, что на больших расстояниях x , где существенно слияние ударных фронтов, статистические характеристики становятся автомодельными. Они зависят лишь от одного параметра $\tau_B(x)$ — внешнего масштаба акустической турбулентности, характерного промежутка времени между соседними разрывами. Автомодельный режим формируется при $\tau_B(x) \gg t_K$ (t_K — время корреляции при $x=0$), т. е. в результате слияния большого ($\sim 10-10^2$) числа разрывов. Из-за движения фронтов поле в фиксированный момент t определяется значениями исходного поля из области, много большей t_K . Это «нелинейное перемешивание» приводит ⁸¹⁻⁸³ к нормализации одномерного распределения. Двумерное распределение $W(V_1, V_2)$ при этом, однако, сильно отличается от гауссовского.

Начальный этап установления автомодельного режима наблюдался в эксперименте ⁸⁴, проведенном в трубе длиной 12 м, на средней частоте звука 1,5 кГц при уровне 150 дБ. Однако полной автомодельности не было, так как условие многократного слияния разрывов не выполнялось из-за малой протяженности среды.

Следует отметить, что слияние разрывов числом ≥ 10 , по-видимому, до сих пор не наблюдалось. Возможно, его можно будет зарегистрировать в специально поставленных численных экспериментах или в экспериментах с очень длинными газонаполненными трубами, где нет дифракции и приняты спе-

циальные меры для уменьшения диссипативных потерь (в объеме газа и в пристеночном слое). Вместе с тем, нормализация распределения в условиях действия нелинейности — важный асимптотический результат. Мы полагаем, что в реальных условиях под влиянием поглощения волны, дифракции, дисперсии и других процессов, способных «перемешать» слабо коррелированные участки поля, нормализация усиливается. Более того, нелинейность может лишь способствовать уширению спектров и тем самым создавать условия для сильного перемешивания за счет указанных линейных механизмов. Во всех случаях здесь предстоит получить оценки средних интенсивностей, характерных расстояний, частот и других параметров с целью выяснения осуществимости этих режимов в эксперименте.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре предпринята попытка обозначить место статистической нелинейной акустики среди смежных направлений, представить основные идеи, указать на специфику проблем. В основу положены результаты недавних экспериментальных работ и соответствующие теоретические пояснения. Описаны хорошо известные и некоторые специальные результаты. Нет, в частности, теории параметрических излучателей акустического шума⁸⁸⁻⁹⁰, кратко изложены методические вопросы нелинейной статистики и другие. Со многими из них можно ознакомиться в обзорах^{3-5, 63, 85}, библиография которых существенно дополняет приведенный здесь список литературы.

Я благодарен С. А. Ахманову за идею написать обзор и поддержку исследований по физике нелинейных случайных волн, проводимых в течение многих лет на физическом факультете МГУ.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов Р. В. // Радиотехн. и электрон. 1961. Т. 6. С. 917.
2. Кадомцев В. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
3. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
4. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
5. Гурбатов С. Н., Сайчев А. И. // Нелинейная акустика: Теоретические и экспериментальные исследования/Под ред. В. А. Зверева, Л. А. Островского. — Горький: ИПФ АН СССР, 1980. — С. 108.
6. Наугольных К. А., Рой Н. А. Электрические разряды в воде. — М.: Наука, 1971.
7. Лаврентьев Э. В., Кузян О. Н. Взрывы в море. — Л.: Судостроение, 1977.
8. Авиационная акустика./Под ред. А. Г. Мунина, В. Е. Квитки. — М.: Машиностроение, 1973.
9. Гидроакустика за 20 лет (по материалам 80-го съезда Акустического общества США)/Пер. с англ. Под ред. Ю. Ф. Тарасюка. — Л.: Судостроение, 1975.
10. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. — Л.: Судостроение, 1981.
11. Божков А. И., Бункин Ф. В., Коломенский А. А., Маляровский А. И., Михалевиç В. Г. // Тр. ФИАН СССР. 1984. Т. 156. С. 123.
12. Ямшев Л. М. // УФН. 1981. Т. 135. С. 637.
13. Акуличев В. А. // Мощные ультразвуковые поля/Под ред. Л. Д. Розенберга. — М.: Наука, 1968. — С. 129.
14. Ультразвук: Маленькая энциклопедия/Под ред. И. П. Голяминой. — М.: Сов. энциклопедия, 1979. — С. 391.
15. Ландау Л. Д. Собрание трудов/Под ред. Е. М. Лифшица. — М.: Наука, 1969. — Т. 1. С. 227.
16. Такер Дж., Рэмптон В. Гиперзвук в физике твердого тела/Пер. с англ. Под ред. И. Г. Михайлова, В. А. Шугилова. — М.: Мир, 1975.
17. Физика фононов больших энергий: Сб. статей/Пер. с англ. Под ред. И. Б. Левинсона. — М.: Мир, 1976.
18. Ribner H. S. Roy D. // J. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72. P. 1911.

19. Зобин В. М. Динамика очага вулканических землетрясений. — М.: Наука, 1979.
20. Родин Г. Сейсмология ядерных взрывов/Пер. с англ. Под ред. М. А. Садовско-го. — М.: Мир, 1974.
21. Love M. D. //J.Fluid Mech. 1980. V. 100. P. 87.
22. Власов Е. В., Гиневский А. С.//Акуст. ж. 1980. Т. 26. С. 1.
23. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. — М.: Мир, 1971.
24. Зарембо Л. К.//Акуст. ж. 1961. Т. 7. С. 189.
25. Кузнецов В. П.//Ibidem. 1969. Т. 15. С. 554.
26. Максимов Б. И., Михайлов Г. Д.//Научные труды МИНХ/Под ред. П. И. Шушпанова. — М.: МИНХ, 1970. Вып. 96. С. 89.
27. Кузнецов В. П.//Акуст. ж. 1970. Т. 16. С. 155.
28. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е.//Ibidem. 1972. Т. 18. С. 590.
29. Ахманов С. А. Взаимодействие случайных волн в нелинейных средах: Лекция на 2-й школе по колебаниям и волнам. Горький, 1973//Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1974. Т. 17. С. 541.
30. Руденко О. В., Чиркин А. С.//ДАН СССР. 1974. Т. 214. С. 1045.
31. Руденко О. В., Чиркин А. С.//ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 1903.
32. Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
33. Руденко О. В.//Труды X Всесоюзной акустической конференции. — М.: АКИН СССР, 1983. — Б10.
34. Кузнецов В. П. Автореферат канд. диссертации. — М.: АКИН СССР, 1970.
35. Pernet D. F., Payne R. C. //J.Sound and Vib. 1971. V. 17. P. 383.
36. Howell G. P., Morfeу C. L.//9th Intern. Symposium on Nonlinear Acoustics. — Leeds, England, 1981. — P. 37.
37. Renshaw F. M., Blackstock D. T. Finite-amplitude Wave Effects in Fluids. — London: IPC Science and Technology Press. 1974. — P. 24.
38. Watanabe Y., Urabe Y.//Japan J. Appl. Phys. 1981. V. 20. Suppl. 20-3. P. 35.
39. Imai K., Watanabe Y., Urabe Y., Shobu M.//Sci. Eng. Rev. Doshisha Univ. 1982. V. 22. No. 4. P. 58.
40. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.//ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 297.
41. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.//Ibidem. 1973. Т. 208. С. 794.
42. Webster D. A., Blackstock D. T.//J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. P. 687.
43. Rennick D. F., Scott D. S. //Труды 6-го Международного симпозиума по нелинейной акустике. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 1976 — Т. 1. С. 220.
44. Veichert D., Pfizenmaier E.//J. Sound. and Vib. 1975. V. 43. P. 581.
45. Фейгенбаум М.//УФН. 1983. Т. 141. С. 343.
46. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Нелинейная физика: Стохастичность и структуры. — Горький: ИПФ АН СССР, 1983.
47. Корец В. Л.//³³. — Б3.
48. Зорин В. А., Колотилов Н. Н., Руденко О. В., Черепецкая Е. Б., Чиркин А. С.//Симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1975. — С. 264.
49. Du Gong-huan, Gong Xiu-fen, Zhu Zhe-min//Шэнсюэ сюэбао (кит.) = Acta Acoust. 1982. V. 7. P. 1.
50. Красильников В. А., Руденко О. В., Чиркин А. С.//Акуст. ж. 1975. Т. 21. С. 124.
51. Moffett M. V., Konrad W. L., Carlton L. F.//J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. P. 1048.
52. Stanton T. K., Veuer R. T.//Ibidem. V. 64. P. 1667.
53. Буров В. А., Красильников В. А., Тагунов Е. Я.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1978. Т. 19. № 4. С. 53.
54. Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. Волны в океане: Лекция на 3-й школе по колебаниям и волнам. Горький, 1976//Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1976. Т. 19. С. 842.
55. Красильников В. А., Тагунов Е. Я.//Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1978. Т. 19. С. 99.
56. Westervelt P. J. //J. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 59. P. 760.
57. Du Gong-huan, Gong Xiu-fen//Шэнсюэ сюэбао (кит.) = Acta Acoust. 1984. V. 9. P. 129.
58. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
59. Гусев В. Э. Автореферат канд. диссертации. — М.: МГУ, 1980.
60. Павлов В. И.//Акуст. ж. 1976. Т. 22. С. 581.
61. Наугольных К. А., Рыбак С. А.//ЖЭТФ. 1978. Т. 67. С. 1903.
62. Якушкин И. Г.//ЖЭТФ. 1983. Т. 84. С. 947.
63. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г.//УФН. 1983. Т. 141. С. 221.

64. Курашов В. Н., Кисиль А. В., Хорошков Ю. В. // Квант. электрон. 1976. Т. 3. С. 5.
65. Сегеретскаја Е. В., Сиркин А. С., Руденко О. В. // 7th Intern. Symposium on Nonlinear Acoustics.— Blacksburg, USA, 1976.— Р. 5.
66. Курьянов Б. Ф. // Акуст. ж. 1973. Т. 9. С. 441.
67. Физика океана. Т. 2: Гидродинамика океана/Под ред. В. М. Каменковича, А. С. Момина.— М.: Наука, 1978.
68. Morfeу C. L. // Proc. of 10th Intern. Symposium on Nonlinear Acoustics.— Kobe, Japan, 1984.— Р. 199.
69. Руденко О. В. // Письма ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 445.
70. Карабутов А. А., Руденко О. В. // Акуст. ж. 1979. Т. 25. С. 536.
71. Черепецкая Е. Б. Автореферат канд. диссертации.— М.: МГУ, 1980.
72. Руденко О. В., Чиркин А. С. // ДАН СССР. 1975. Т. 225. С. 520.
73. Webster D. A., Blackstock D. T. // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65. P. 1063.
74. Черепецкая Е. Б. // Акуст. ж. 1977. Т. 23. С. 329.
75. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н. // Ibidem. С. 569.
76. Горшков А. С., Ляшедько Л. Г., Трофименко И. Т. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика, астрономия». 1984. Т. 25. №1. С. 103.
77. Sakagami K., Aoki S., Chou I. M., Kamakura T., Ikegaya K. // J. Acoust. Soc. Japan. Ser. E. 1982. V. 3. P. 43.
78. Васильева О. А. Численный анализ на ФОРТРАНе/Под ред. В. В. Воеводина, В. А. Морозова.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.— С. 47.
79. Васильева О. А. // Численный анализ на ФОРТРАНе: Стандартные программы решения задач волновой физики/Под ред. В. А. Морозова, Я. М. Жилейкина.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.— С. 40.
80. Васильева О. А., Лапшин Е. А. // Численный анализ: Методы, алгоритмы, приложения/Под ред. Н. С. Бахвалова, В. Г. Карманова, В. А. Морозова.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.— С. 47.
81. Tatsumi T., Kida S. // J. Fluid. Mech. 1972. V. 55. P. 659.
82. Гурбатов С. Н., Сапчев А. И. // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 689.
83. Kida S. // J. Fluid Mech. 1979. V. 93. P. 337.
84. Бьерно Л., Гурбатов С. Н. // Акуст. ж. 1985. Т. 31. С. 303.
85. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н. Препринт ИРЭ АН СССР № 11 (383).— Москва, 1984.
86. Воляк К. И., Горшков А. С. // Тр. ФИАН СССР. 1984. Т. 156. С. 78.
87. Todani T., Kugamoto Y. // Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. P. 1248.
88. Новиков Б. К., Руденко О. В., Чиркин А. С. // Второе Всесоюзное научно-техническое совещание «Нелинейная гидроакустика-76».— Таганрог, ТРТИ, 1976. С. 15.
89. Гурбатов С. Н., Демин И. Ю. // Акуст. ж. 1982. Т. 23. С. 32.
90. Бычков В. Б., Руденко О. В. // Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений.— Ашхабад, 1985.— С. 33.