

Картинка с универом  
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова  
физический факультет

---

А.В.ШАНИН

Элементарное введение в метод конечных  
элементов (МКЭ) для акустических задач

Конспект лекций



# Оглавление

§1. Введение. Общая схема метода . . . . .	4
§2. Аппроксимация с помощью функций формы. Построение матриц <b>К</b> и <b>М</b> . . . . .	9
§3. Вычисление интегралов. Гауссовы квадратуры . . . . .	18
§4. Метод Галеркина в деталях на простом примере . . . . .	25
§5. Структура простейшей программы, реализующей МКЭ . . . . .	34
§6. Учет граничных условий. Слабая формулировка задач математической физики . . . . .	45
§7. Решение уравнений МКЭ во времени . . . . .	57
§8. Распространение в волноводах . . . . .	65
§9. Рассеяние в волноводах . . . . .	74
§10. Задачи теории упругости . . . . .	80
§11. Эвакуация волн 1. DtN-оператор . . . . .	85
§12. Эвакуация волн 2. PML . . . . .	92
Литература . . . . .	102

## §1. Введение. Общая схема метода

### Введение

Данный курс посвящен методу конечных элементов (МКЭ). Этот метод позволяет решать задачи акустики, теории упругости, теории колебаний и т. д. в областях сложной формы. Метод очень гибок и очень полезен, поэтому всякий, кто его освоил, найдет себе применение в научной и околонаучной деятельности. Курс построен таким образом, чтобы дать студенту возможность начинать писать свои простейшие программы, реализующие МКЭ, как можно раньше. А именно, уже после четвертой лекции все основные идеи, лежащие в основе МКЭ, должны быть ясны, и студент может приступать к самостоятельной работе.

В конспекте используется следующее соглашение. Векторы обозначаются символами с прямым написанием, а матрицы - символами с полужирным написанием.

Перед автором стояла нелегкая задача выбора материала, который должен войти в этот курс. МКЭ — достаточно обширная тема, а лекций удалось прочитать всего 12. Можно считать, что общим вопросам МКЭ посвящены первые шесть лекций, а важным частным вопросам — следующие шесть. С определенным удовольствием можно отметить, что в специальные вопросы удалось уместить метод PML, схемы DIRK-IMEX, задачи о волновом распространении и задачи теории упругости. Все это — достаточно современные темы, о которых необходимо иметь хотя бы общее представление.

### Общая схема метода

Основной задачей, которая обсуждается в лекциях, будет задача возбуждения звука в конечной или бесконечной области. Постановка, например, внутренней двумерной нестационарной задачи такова. Имеется конечная область пространства  $\Omega$  с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$  (см. Рис. 1.1). В области выполняется волновое уравнение

$$-\Delta u + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f. \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — пространственные координаты,  $t$  — время,  $u(x, y, t)$  — полевая переменная (акустический потенциал или давление),  $f(x, y, t)$  — функция источников. Пусть на границе области заданы граничные условия Неймана, т. е. нормальная производная равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (1.2)$$

Схема численного решения поставленной задачи следующая.

а) Разобьем область  $\Omega$  на маленькие участки. Эти участки назовем *конечными элементами*. В примерах, которые разбираются в лекциях, конечные элементы имеют четырехугольную или треугольную форму. При этом граница области оказывается приближенной многоугольником (отметим, что существуют и более сложные конечные элементы, в частности такие, при которых граница области приближается гладкой кривой). Разбиение области на конечные элементы назовем сеткой. Вершинами конечных элементов являются *узлы сетки*, они играют большую роль в том, что произойдет дальше.

Вместо непрерывной неизвестной функции координат и времени  $u(x, y, t)$  будем рассматривать *узловые значения* этой функции  $u_j(t)$ , где индекс  $j$  пробегает узлы сетки.

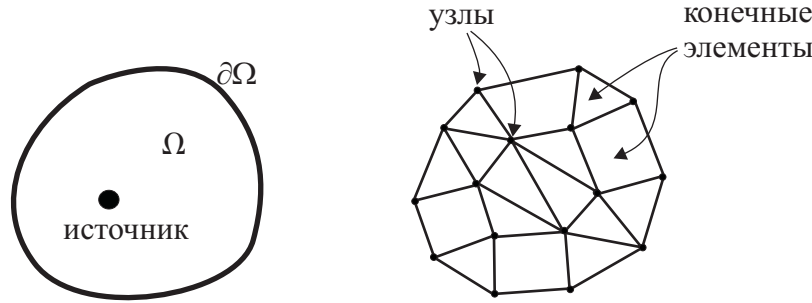


Рис. 1.1: Рассматриваемая область и ее разбиение на конечные элементы

Функции  $u_j(t)$  по-прежнему зависят от непрерывного времени. Будем считать, что узловые значения позволяют осуществить аппроксимацию поля во всей области, т. е. существует аппроксимационная формула  $\{u_j(t)\} \rightarrow u(x, y, t)$ .

б) Сформируем вектор–столбец из узловых значений неизвестной функции

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_J(t) \end{pmatrix},$$

где  $J$  — число узлов сетки. Методами, изложенными дальше, для вектора узловых значений можно построить уравнение

$$\mathbf{K}\mathbf{U} + \frac{1}{c^2}\mathbf{M}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  — так называемые матрицы жесткости и массы. Это квадратные матрицы размера  $J \times J$ . Грубо говоря, матрица  $\mathbf{K}$  представляет собой то, как действует оператор  $-\Delta$  на вектор узловых значений. Матрица  $\mathbf{M}$  привязывает к узловым значениям веса, соответствующие площадям, относящимся к узлам (опять же, грубо говоря).  $\mathbf{F}$  — вектор–столбец высоты  $J$ , соответствующий правой части (1.1). Уравнение (1.3) моделирует и волновое уравнение (1.1), и граничные условия (1.2).

в) Сделаем время дискретным, т. е. на некотором отрезке  $t \in [0, T]$  достаточно плотно поставим точки  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_L = T$ . Приближенно решим уравнение (1.3), т. е. получим значения  $\mathbf{U}(t_0), \mathbf{U}(t_1), \dots, \mathbf{U}(t_L)$ . Для решения уравнения (1.3) можно воспользоваться, например, методом Рунге–Кутты.

Сделаем пояснения к только что озвученному плану. Обратимся к пункту а). Формализуем понятие аппроксимации. Будем считать, что аппроксимация дается следующей формулой:

$$\hat{u}(x, y, t) = \sum_{j=1}^J u_j(t) N_j(x, y), \quad (1.4)$$

где  $\hat{u}(x, y, t)$  — аппроксимация (приближение) функции  $u(x, y, t)$ . Функции  $N_j(x, y)$  играют очень большую роль в лекциях. Они называются *функциями формы* данной сетки. Перечислим требуемые свойства этих функций.

— Нам бы хотелось, чтобы аппроксимация  $\hat{u}(x, y, t)$  была равна узловым значениям в узловых точках  $(x_j, y_j)$ . Для этого потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$N_j(x_m, y_m) = \begin{cases} 1, & m = j \\ 0, & m \neq j \end{cases} \quad (1.5)$$

то есть функция  $N_j$  равна единице в узле с индексом  $j$  и нулю в остальных узлах. Разумеется, правую часть (1.5) можно записать как символ Кронекера  $\delta_{m,j}$ .

— Мы полагаем, что функции  $N_j$  вне узловых точек с той или иной степенью гладкости осуществляют переход между единицей и нулем. “Степени гладкости” могут соответствовать кусочно–постоянные, непрерывные или гладкие функции, все зависит от задачи. Почти везде ниже мы будем рассматривать непрерывные кусочно–гладкие функции.

— Функции формы должны обеспечивать необходимую точность метода (об этом пойдет разговор позднее).

— В ряде случаев функции формы подбираются так, чтобы аппроксимация  $\hat{u}(x, y, t)$  удовлетворяла нужным граничным условиям. Например, если решается задача Дирихле, функции формы выбираются равными нулю на границе. Заметим, что если решается задача Неймана, на функции формы никаких ограничений не накладывают.

— Почти всегда будут использоваться локальные функции формы. Это значит, что функция  $N_j$  тождественно равна нулю на всех конечных элементах, вершиной которых не является узел с индексом  $j$ . То есть функция  $N_j$  не равна нулю только на конечных элементах, примыкающих к узлу  $j$ .

Примеры функций формы будут даны ниже.

Формулу (1.4) надо выучить наизусть (как и другие формулы в рамочках). Это одна из основных формул курса.

Дадим комментарии по поводу пункта б) нашего грубого плана применения МКЭ. Подставим формулу (1.4) в уравнение (1.1). В результате получим уравнение

$$\sum_{j=1}^J \left( -u_j(t) \Delta N_j(x, y) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} N_j(x, y) \right) = f(x, y, t). \quad (1.6)$$

Можно конечно потребовать, чтобы это уравнение выполнялось при всех  $x, y, t$ , но трудно себе представить, чтобы удалось этого добиться. Все-таки приближенное значение поля должно удовлетворять уравнению в каком-то приближенном смысле. Кроме того, для  $J$  неизвестных функций  $u_j(t)$  было бы хорошо получить  $J$  уравнений. Имеется несколько способов определить, в каком смысле может выполняться уравнение (1.6). Один из способов такой. Возьмем в области  $\Omega$  (вернее, в области, занятой сеткой)  $J$  точек, распределенных более-менее равномерно и потребуем, чтобы уравнение (1.6) выполнялось в этих точках. Такие точки называются точками коллокации.

Способ, основанный на точках коллокации, выглядит очевидным, но он не всегда работает. Например, если область  $\Omega$  одномерна, а аппроксимация задается кусочно-линейными функциями, вторая производная, входящая в оператор  $\Delta$ , равна нулю между узлами и не определена в узлах.

Вторым, менее очевидным способом является следующий. Умножим уравнение (1.6) на какую-то весовую функцию  $W_m(x, y)$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Получим некоторое уравнение, представляющее собой уравнение (1.6), усредненное с весовой функцией  $W_m$ . Таких весовых функций возьмем  $J$  штук, т. е. индекс  $m$  пробегает значения от 1 до  $J$ .

При этом полагаем, что весовые функции являются линейно независимыми. Получится  $J$  усредненных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^J \left( -u_j(t) \int_{\Omega} W_m \Delta N_j ds + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} \int_{\Omega} W_m N_j ds \right) = \int_{\Omega} W_m f ds. \quad (1.7)$$

(Каждое уравнение соответствует своему индексу  $m$ ).

Изложенный метод называется *методом взвешенных невязок*.

Какие же выбрать весовые функции  $W_m(x, y)$ ? Можно сделать это простым и естественным образом. У нас уже есть  $J$  функций, равномерно распределенных по сетке и линейно независимых. Это функции формы  $N_m(x, y)$ , можно взять их, т. е. положить

$$W_m(x, y) = N_m(x, y). \quad (1.8)$$

Метод взвешенных невязок с таким выбором весовых функций называется методом Галеркина. О преимуществах метода Галеркина перед другими способами выбрать весовые функции мы поговорим позднее.

Вычислим интегралы, входящие в уравнение (1.7). Получится матричное уравнение

$$- \sum_{j=1}^J \int_{\Omega} N_m \Delta N_j ds u_j(t) + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^J M_{m,j} \frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} = F_m, \quad m = 1, J, \quad (1.9)$$

где  $M_{i,j}$  — элементы матрицы  $\mathbf{M}$  размером  $J \times J$ :

$$\boxed{M_{m,j} \equiv \int_{\Omega} N_m N_j ds,} \quad (1.10)$$

а  $F_m$  — элементы вектора-столбца  $\mathbf{F}$  высотой  $J$ :

$$F_m \equiv \int_{\Omega} N_m f ds. \quad (1.11)$$

С оставшимся интегралом в (1.9) придется повозиться. Формула Гаусса–Остроградского дает

$$\int_{\Omega} N_m \Delta N_j ds = \int_{\partial\Omega} N_m \frac{\partial N_j}{\partial n} dl - \int_{\Omega} \nabla N_m \cdot \nabla N_j ds, \quad (1.12)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Величины  $K_{m,j}$ , определяемые как

$$\boxed{K_{m,j} \equiv \int_{\Omega} \nabla N_m \cdot \nabla N_j ds,} \quad (1.13)$$

есть элементы матрицы  $\mathbf{K}$  размером  $J \times J$ .

Заметим, что первое слагаемое справа в (1.12) умножается на  $u_j$ , а именно, в уравнении стоит интеграл от суммы

$$- \int_{\partial\Omega} N_m \sum_{j=1}^J u_j \frac{\partial}{\partial n} N_j dl.$$

Сумма

$$\sum_{j=1}^J u_j \frac{\partial}{\partial n} N_j$$

на границе области представляет собой нормальную производную поля. Из-за граничных условий (1.2) эта производная равна нулю, поэтому все слагаемое с интегралом по границе можно опустить. В результате (1.9) превращается в матричное уравнение (1.3).

Сделаем замечание по поводу пункта в) нашего плана. Уравнение (1.3) имеет второй порядок по времени. В то же время, стандартные численные методы решения формулируются для уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{Y}(\mathbf{X}, t). \quad (1.14)$$

Поясним, каким образом уравнение (1.3) сводится к (1.14).

Построим вектор  $\mathbf{X}$  как блочный:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ d\mathbf{U}/dt \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

т. е. этот вектор представляет собой столбец высоты  $2J$ . Для этого вектора имеем уравнение, которое можно записать в блочной форме следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -c^{-2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{0}$  — нулевая матрица  $J \times J$ ,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $J \times J$  (это не та, в которой все единицы, а диагональная),  $\mathbf{0}$  во втором члене — нулевой вектор  $J \times 1$ . Для получения (1.14) осталось объявить правую часть (1.16) функцией  $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$ .

Сделаем еще одно замечание. Метод точек коллокации можно считать частным случаем метода взвешенных невязок. При этом в качестве весовых функций надо взять дельта-функции, локализованные в точках коллокации.

## Задачи

1. Доказать, что кусочно-линейные непрерывные функции формы в одномерном случае образуют линейно независимый набор. (Это совсем простая задача).

2. Функции

$$N_n(x) = \text{sinc}(x - \pi n) \equiv \frac{\sin(x - \pi n)}{x}$$

образуют набор функций формы для бесконечной прямой с узловыми точками  $x_n = \pi n$ . Разумеется, эти функции обладают бесконечной гладкостью, но не обладают локальностью. Пусть для некоторой функции  $u(x)$  все узловые значения  $u_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , равны единице. Доказать, что аппроксимация функции  $u$  по формуле (1.4) тождественно равна единице.



## §2. Аппроксимация с помощью функций формы. Построение матриц **K** и **M**

### Пример выбора функций формы. Одномерный случай

Пусть необходимо построить кусочно-линейную аппроксимацию (интерполяцию) некоторой функции  $u(x)$ , заданную на отрезке  $[x_1, x_J]$  по значениям в узловых точках  $x_1, x_2, \dots, x_J$ , т. е. по данным

$$u_1 = u(x_1), \quad u_2 = u(x_2), \quad \dots, \quad u_J = u(x_J)$$

(см. Рис. 2.1 слева).



Рис. 2.1: Кусочно-линейная аппроксимация и ее реализация с помощью функций формы

Конечными элементами в этом случае будут отрезки  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{J-1}, x_J]$ . Выберем один из таких отрезков, а именно  $[x_n, x_{n+1}]$ . Необходимо построить линейную функцию  $\hat{u}(x)$  на этом отрезке, удовлетворяющую равенствам

$$\hat{u}(x_n) = u_n, \quad \hat{u}(x_{n+1}) = u_{n+1}.$$

Сконструируем такую функцию. Построим линейные функции  $N_n(x)$  и  $N_{n+1}(x)$  (только в пределах отрезка  $[x_n, x_{n+1}]$ !) так, чтобы они удовлетворяли свойствам

$$\begin{aligned} N_n(x_n) &= 1, & N_n(x_{n+1}) &= 0, \\ N_{n+1}(x_n) &= 0, & N_{n+1}(x_{n+1}) &= 1. \end{aligned}$$

Такие функции изображены на Рис. 2.1 посередине. Подобрать к ним формулы нетрудно. Обратим внимание на то, что сумма этих двух функций на отрезке тождественно равна единице.

Искомая функция  $\hat{u}(x)$  на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  имеет вид

$$\hat{u}(x) = u_n N_n(x) + u_{n+1} N_{n+1}(x). \quad (2.1)$$

Формула (2.1) представляет собой частный случай формулы (1.4) при условии, что все функции формы  $N_j$ , кроме  $N_n$  и  $N_{n+1}$ , равны нулю.

Аналогичным образом строится аппроксимация функции и на других отрезках. Итоговая формула совпадает с (1.4). Функции формы  $N_1$ ,  $N_J$  и  $N_m$  показаны на Рис. 2.1 справа. Обращаем внимание на то, что все функции формы непрерывны на отрезке  $[x_1, x_J]$ .

Итак, построена кусочно-линейная аппроксимация функции одной переменной. Если характерный шаг сетки (т. е. расстояние между соседними узлами) есть  $h$ , то точность интерполяции гладкой функции есть  $h^2$ . Это значит, что построенные функции формы позволяют реализовать метод второго порядка точности по шагу сетки.

### Двумерный случай. Линейная и билинейная интерполяция

Вернемся к двумерному случаю, который мы рассматривали с самого начала. Попробуем построить кусочно-линейную аппроксимационную формулу. Разобьем область  $\Omega$  на треугольники (конечно, для этого надо, чтобы ее граница была многоугольником). Выберем треугольник с вершинами, имеющими индексы  $n_1, n_2, n_3$ . В этих вершинах искомая линейная функция  $\hat{u}(x, y)$  должна принимать значения  $u_{n_1}, u_{n_2}$  и  $u_{n_3}$ . В пределах одного треугольника построим линейные функции  $N_{n_1}, N_{n_2}, N_{n_3}$ , равные единице в “своем” узле и нулю в двух других. Эти функции показаны на Рис. 2.2. Искомая функция  $\hat{u}$  имеет вид

$$\hat{u}(x, y) = u_{n_1}N_{n_1}(x, y) + u_{n_2}N_{n_2}(x, y) + u_{n_3}N_{n_3}(x, y). \quad (2.2)$$

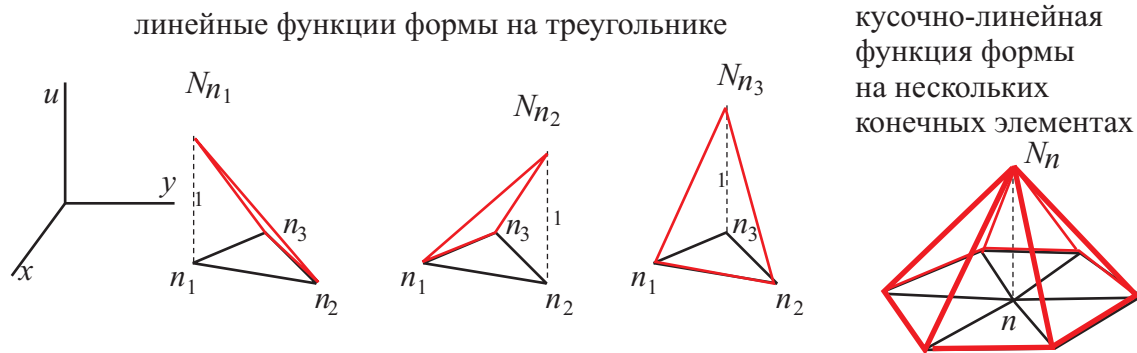


Рис. 2.2: Линейные функции формы на треугольниках

Рассматривая все треугольники, можно построить функцию  $N_m$  для какого-нибудь  $m$ . Она выглядит так, как показано на Рис. 2.2 справа.

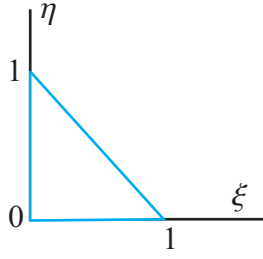
Пусть в некотором “идеальном” пространстве координат  $(\xi, \eta)$  треугольник имеет простой вид, а именно, если его вершины с индексами 1, 2, 3 имеют координаты  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$  (см. Рис. 2.3 слева). Нетрудно проверить, что

$$\tilde{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \tilde{N}_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \tilde{N}_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (2.3)$$

Функции формы для идеального пространства помечены тильдой. Эти формулы весьма полезны, поскольку из треугольника “самого простого вида” можно сделать любой треугольник способом, который будет показан ниже. А именно, будет построено отображение из “идеального” пространства  $(\xi, \eta)$  в “реальное” пространство  $(x, y)$ .

Использовать треугольники не всегда удобно. Покажем, что делать с четырехугольниками в простейшем случае. Пусть, опять же, в идеальном пространстве координат  $(\xi, \eta)$  некоторый квадрат имеет в качестве вершин узлы с индексами 1, 2, 3, 4 с координатами  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$  (см. Рис. 2.3 справа). Подберем для этого квадрата функции  $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3, \tilde{N}_4$ , равные единице в “своем” узле и нулю в трех других. К сожалению, линейные функции в данном случае не годятся (потому что в общем случае нельзя подобрать плоскость, проходящую через четыре точки в трехмерном пространстве). Поэтому

идеальный треугольник



идеальный четырехугольник

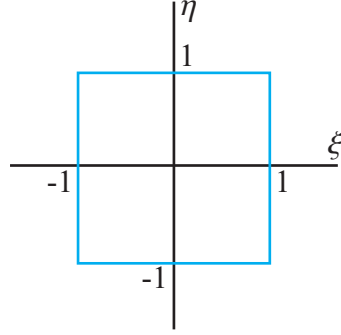


Рис. 2.3: Конечные элементы в “идеальном” пространстве

подбираем билинейные функции, т. е. являющиеся произведениями двух линейных:

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\
 \tilde{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\
 \tilde{N}_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\
 \tilde{N}_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta),
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Эти функции также следует запомнить, поскольку они полезны не только для простейшего квадрата, но и для любого четырехугольника.

Функции (2.4) не являются линейными, но их ограничения на стороны квадрата линейны. Это позволяет произвольно комбинировать в двумерных сетках линейные треугольники и билинейные четырехугольники. При этом не возникает проблем, а именно итоговая функция получается непрерывной.

### Трехмерный случай

По аналогии с двумерным случаем выпишем (линейные) функции формы для тетраэдра простой формы и полилинейные для элементарного куба.

Пусть тетраэдр имеет вершины — узлы с индексами 1, 2, 3, 4. Пусть это узлы с координатами  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  в идеальном пространстве  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Линейные функции формы, соответствующие этим узлам в пределах тетраэдра, есть

$$\tilde{N}_1(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad \tilde{N}_2(\xi, \eta, \zeta) = \xi, \quad \tilde{N}_3(\xi, \eta, \zeta) = \eta, \quad \tilde{N}_4(\xi, \eta, \zeta) = \zeta. \tag{2.5}$$

Наконец, рассмотрим куб, натянутый на узлы  $1, \dots, 8$  с координатами  $(\pm 1, \pm 1)$  (см. Рис. 2.4). Функции формы строятся аналогично (2.4):

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), & \tilde{N}_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), \\
 \tilde{N}_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), & \tilde{N}_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

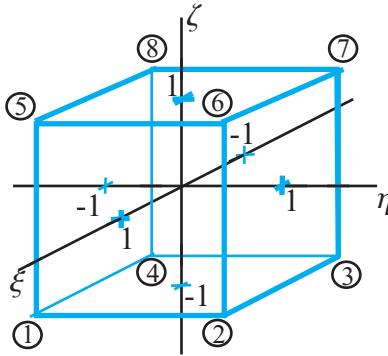


Рис. 2.4: Кубический конечный элемент в “идеальном” пространстве

$$\tilde{N}_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), \quad \tilde{N}_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta),$$

$$\tilde{N}_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), \quad \tilde{N}_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta).$$

Надо заметить, что ограничения функций формы на грани куба есть билинейные функции, а на ребра — линейные.

### Произвольные треугольники и четырехугольники. Изопараметрическое отображение

Мы выписали формулы для функций формы в треугольниках и четырехугольниках очень специальной формы. Здесь мы покажем, как вычислять функции формы для произвольных треугольников и четырехугольников. Рассмотрим процедуру на примере треугольника. Пусть имеется треугольник с узлами 1, 2, 3, имеющими координаты  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  (см. Рис. 2.5). Необходимо построить функции формы  $N_j(x, y)$  в этом треугольнике.

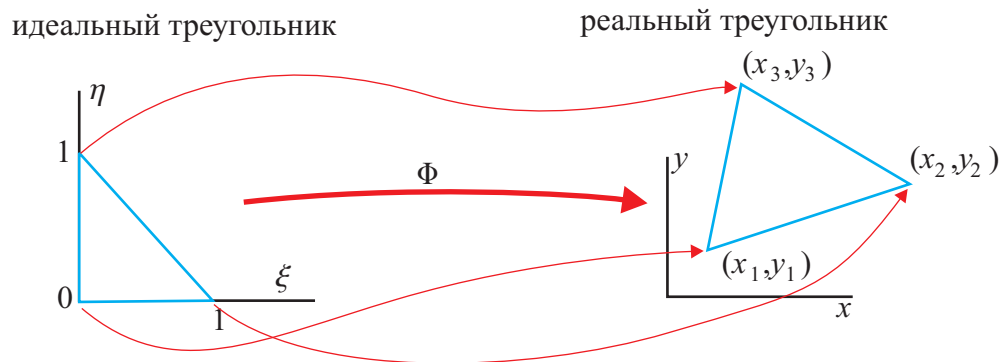


Рис. 2.5: Отображение идеального пространства в реальное

Мы решим чуть иную задачу. Пусть имеется “идеальная плоскость”  $(\xi, \eta)$ , в которой существует идеальный треугольник, как раз такой, как был рассмотрен раньше. Его вершины имеют координаты  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Построим линейное отображение плоскости на плоскость

$$\Phi : (\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$$

такое, что “идеальный треугольник” при этом отображении переходит в “реальный треугольник”. Для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$(0, 0) \rightarrow (x_1, y_1),$$

$$(1, 0) \rightarrow (x_2, y_2),$$

$$(0, 1) \rightarrow (x_3, y_3),$$

чтобы стороны переходили в стороны и чтобы отображение внутренности треугольника не имело особенностей. Фактически это означает, что для каждого треугольника мы хотим ввести локальные деформированные координаты  $(\xi, \eta)$ , в которых это был бы идеальный треугольник стандартной формы и стандартных размеров.

*Дальше идет тонкий абзац, который может быть сложен для понимания с первого раза.*

Построим такое отображение  $\Phi$ . Отображение задается двумя функциями  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ . Рассмотрим функцию  $x$ . Эта функция задана на треугольнике с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  и принимает в этих вершинах значения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Можно считать, что функция  $x(\xi, \eta)$  представляет собой интерполяцию в треугольнике этих узловых значений. Заметим, что мы уже умеем интерполировать функции, причем именно для этого треугольника. В соответствии с (2.2),

$$\boxed{x(\xi, \eta) = x_1 \tilde{N}_1(\xi, \eta) + x_2 \tilde{N}_2(\xi, \eta) + x_3 \tilde{N}_3(\xi, \eta)}, \quad (2.7)$$

где  $\tilde{N}_1$ ,  $\tilde{N}_2$ ,  $\tilde{N}_3$  — “идеальные” функции формы из (2.3):

$$\tilde{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \tilde{N}_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \tilde{N}_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (2.8)$$

Аналогично, для функции  $y(\xi, \eta)$  можно построить формулу

$$\boxed{y(\xi, \eta) = y_1 \tilde{N}_1(\xi, \eta) + y_2 \tilde{N}_2(\xi, \eta) + y_3 \tilde{N}_3(\xi, \eta)}, \quad (2.9)$$

Такое отображение, осуществляемое функциями формы, используемыми для всего остального, называется *изопараметрическим*. Поскольку отображение линейное, стороны одного треугольника переходят в стороны другого и никаких проблем с внутренностями треугольника не наступает.

По-хорошему, функции формы в исходном пространстве должны были бы строиться так. По отображению  $\Phi$  должно быть построено обратное преобразование, т. е. пара функций  $\xi(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ . Далее было бы логично выбрать

$$N_j(x, y) = \tilde{N}_j(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad j = 1, 2, 3.$$

Это реалистичный план (линейное отображение нетрудно обратить), но так не делают, поскольку это обычно не нужно. На самом деле, задача интерполировать поле внутри конечного элемента обычно не стоит. Вместо этого стоит задача вычислять интегралы от функций формы и их производных по конечному элементу. Для этого можно просто остаться в координатах  $(\xi, \eta)$  и использовать функции формы  $\tilde{N}_j$ .

Мы рассмотрели двумерное и трехмерное идеальные пространства. Для полноты изложения рассмотрим отрезок  $[-1, 1]$  в одномерном идеальном пространстве с координатой

$\xi$ . Пусть узлы 1 и 2 есть точки  $\xi = -1$  и  $\xi = 1$ , соответственно. Функции формы для этих узлов есть

$$\tilde{N}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \tilde{N}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (2.10)$$

### Ассемблирование. Вычисление матрицы массы

Вычислим матрицу массы (1.10)

$$M_{m,j} = \int_{\Omega} N_m(x, y) N_j(x, y) dx dy$$

для всех пар значений  $m, j = 1, \dots, J$ . Пусть все конечные элементы являются треугольниками. Зафиксируем пару значений  $m$  и  $j$ . Представим интеграл суммой интегралов по конечным элементам (треугольникам):

$$M_{m,j} = \sum_n M_{m,j}^{(n)}, \quad (2.11)$$

$$M_{m,j}^{(n)} \equiv \int_{\Omega^{(n)}} N_m(x, y) N_j(x, y) dx dy, \quad (2.12)$$

где индекс  $n$  пробегает все конечные элементы, а  $\Omega^{(n)}$  — область пространства, которую занимает конечный элемент с номером  $n$ . Матрицы  $\mathbf{M}^{(n)}$  называются *элементными матрицами*, а процесс вычисления суммы (2.11) по  $n$  называется *ассемблированием*.

В силу локальности функций формы, матрицы  $\mathbf{M}^{(n)}$  имеют ненулевые элементы только на пересечениях строк и столбцов, индексы которых есть номера узлов, принадлежащих конечному элементу  $\Omega^{(n)}$ . Таким образом, имеет смысл рассматривать не всю элементную матрицу  $\mathbf{M}^{(n)}$  размера  $J \times J$  (может быть очень большим), а лишь ее ненулевую подматрицу  $\hat{\mathbf{M}}^{(n)}$ . В случае треугольных элементов эта подматрица имеет размер  $3 \times 3$ .

В каждом треугольнике введем “идеальные” координаты  $(\xi, \eta)$  и построим отображение  $\Phi$  по формулам (2.7), (2.9). Перепишем интеграл по одному конечному элементу как

$$\hat{M}_{m,j} = \int_{\Omega_*^{(n)}} \tilde{N}_m(\xi, \eta) \tilde{N}_j(\xi, \eta) |\det \mathbf{D}(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad m, j = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{D}$  — якобиан преобразования:

$$\mathbf{D} \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \equiv \begin{pmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

а символ  $\Omega_*^{(n)}$  обозначает прообраз  $\Omega^{(n)}$  при отображении  $\Phi$ , т. е. область  $\xi > 0, \eta > 0, \xi + \eta < 1$ .

Вводя матрицу-столбец  $\mathbf{A}(\xi, \eta)$  как вектор значений идеальных функций формы

$$\mathbf{A}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{N}_1(\xi, \eta) \\ \tilde{N}_2(\xi, \eta) \\ \tilde{N}_3(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

запишем  $\hat{\mathbf{M}}^{(n)}$  в матричной форме:

$$\hat{\mathbf{M}}^{(n)} = \int_{\Omega^{(n)}} \mathbf{A}\mathbf{A}^T |\det \mathbf{D}| d\xi d\eta. \quad (2.16)$$

Для треугольных элементов проделанные выкладки довольно тривиальны, поскольку якобиан линейного преобразования является константой и интеграл может быть вычислен аналитически. Однако абсолютно то же самое рассуждение (с изопараметрическим отображением и интегрированием) может быть проделано для четырехугольных конечных элементов, где всё уже не так просто. Действительно, пусть в плоскости  $(x, y)$  имеется конечный элемент — четырехугольник с прямолинейными сторонами. Поставим ему в соответствие его прообраз в плоскости  $(\xi, \eta)$  — квадрат  $-1 < \xi < 1$ ,  $-1 < \eta < 1$ . Для квадрата в плоскости  $(\xi, \eta)$  известны билинейные функции формы (они задаются формулами (2.4)). С помощью этих функций по формулам, аналогичным (2.7) и (2.9) (только с четырьмя слагаемыми). Как мы уже отмечали, на границах квадрата отображения являются линейными, поэтому границы квадрата отображаются в прямолинейные отрезки, т. е. в стороны четырехугольника. Интеграл по исходному четырехугольнику снова задается формулой вида (2.13). В данном случае якобиан уже не является константой.

### Вычисление матрицы жесткости

Выше была описана процедура вычисления элементов матрицы массы. Приведем для матрицы жесткости формулы, аналогичные (2.11) и (2.13). Очевидно, представление в виде суммы по элементам выглядит совершенно так же:

$$K_{m,j} = \sum_n K_{m,j}^{(n)}, \quad (2.17)$$

$$K_{m,j}^{(n)} \equiv \int_{\Omega^{(n)}} \nabla K_m(x, y) \cdot \nabla K_j(x, y) dx dy. \quad (2.18)$$

Вычислим скалярное произведение градиентов в (2.18). Рассмотрим конечный элемент (треугольник)  $\Omega^{(n)}$ . Так же, как и в случае с матрицей массы, рассмотрим подматрицу ненулевых элементов  $\hat{\mathbf{K}}^{(n)}$ .

Введем нестандартное, но интуитивно понятное обозначение, сходное с обозначением якобиана:

$$\frac{\partial(N_1, N_2, N_3)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \partial N_1 / \partial x & \partial N_1 / \partial y \\ \partial N_2 / \partial x & \partial N_2 / \partial y \\ \partial N_3 / \partial x & \partial N_3 / \partial y \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Это обозначение позволяет записать  $\hat{\mathbf{K}}^{(n)}$  в виде

$$\hat{\mathbf{K}}^{(n)} = \int_{\Omega_*^{(n)}} \frac{\partial(N_1, N_2, N_3)}{\partial(x, y)} \left( \frac{\partial(N_1, N_2, N_3)}{\partial(x, y)} \right)^T dx dy \quad (2.20)$$

(рекомендуем проверить это, выполнив матричное умножение).

По правилам вычисления частных производных,

$$\frac{\partial(N_1, N_2, N_3)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}, \quad (2.21)$$

где введена матрица, обозначаемая далее как  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) \equiv \frac{\partial(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3)}{\partial(\xi, \eta)} \equiv \begin{pmatrix} \partial\tilde{N}_1/\partial\xi & \partial\tilde{N}_1/\partial\eta \\ \partial\tilde{N}_2/\partial\xi & \partial\tilde{N}_2/\partial\eta \\ \partial\tilde{N}_3/\partial\xi & \partial\tilde{N}_3/\partial\eta \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Кроме того, используя формулы из математического анализа, получаем

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \mathbf{D}^{-1}. \quad (2.23)$$

Формула для элементной матрицы приобретает вид

$$\hat{\mathbf{K}}^{(n)} = \int_{\Omega_*^{(n)}} \mathbf{E} \mathbf{E}^T |\det \mathbf{D}| d\xi d\eta, \quad (2.24)$$

где

$$\mathbf{E}(\xi, \eta) = \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1}.$$

Формулы (2.13) и (2.24) годятся для непосредственного использования в программах. Все входящие в них величины могут быть легко вычислены. В соответствии с (2.3), для треугольников

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формулы изопараметрического отображения (2.7), (2.9) дают

$$\mathbf{D}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \frac{\partial(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3)}{\partial(\xi, \eta)} = \mathbf{C}^T \mathbf{B}(\xi, \eta), \quad (2.25)$$

где введена матрица, состоящая из координат узлов данного конечного элемента:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Заметим, что матрица  $\mathbf{C}$  не зависит от текущих координат  $(\xi, \eta)$ .

Таким образом, все величины, входящие в (2.13) и (2.24), оказываются определены.

Технически процедура вычисления элементных подматриц  $\hat{\mathbf{M}}^{(n)}$  и  $\hat{\mathbf{K}}^{(n)}$  выглядит так. Вначале для данного конечного элемента находится матрица  $\mathbf{C}$  из (2.26). Далее производится интегрирование. На поверхности конечного элемента выбирается несколько квадратурных узлов, в которых необходимо вычислить значения подынтегральных выражения, и эти значения суммируются с некоторыми весами (см. раздел 3). Для вычисления подынтегральных выражений в данном квадратурном узле  $(\xi, \eta)$  вычисляется вектор  $\mathbf{A}$  и матрица  $\mathbf{B}$  по формулам (2.15) и (2.22). Это просто функции формы и их производные. Далее вычисляются матрицы

$$\mathbf{D}(\xi, \eta) = \mathbf{C}^T \mathbf{B}.$$

Для  $\hat{\mathbf{M}}^{(n)}$  подынтегральным выражением является  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T |\det \mathbf{D}|$ , а для  $\hat{\mathbf{K}}^{(n)}$  это  $\mathbf{E} \mathbf{E}^T |\det \mathbf{D}|$ .

Недостаток места и желания не позволяет нам рассказать о функциях формы более высокого порядка, обеспечивающих аппроксимацию, например, квадратными или кубическими полиномами. Такие функции формы повышают точность метода, а также позволяют в ряде случаев избежать специфических сложностей (volumetric locking).



**Задачи**

1. Построить матрицу  $\partial(\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_4)/\partial(\xi, \eta)$  для функций формы (2.4).
2. Пусть реальные координаты совпадают с идеальными:  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ , а конечный элемент представляет собой идеальный треугольник, показанный на Рис. 2.3 с функциями формы (2.3). Построить для этого элемента матрицы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ .
3. Пусть конечный элемент имеет представляет собой треугольник с вершинами 1,2,3, имеющими координаты, соответственно, (1, 1), (3, 2), (2, 3). Построить для этого элемента матрицы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ .
4. Пусть функция  $f(\varphi)$  задана на окружности  $\varphi \in [0, 2\pi)$  (окружность замкнута!). Пусть на окружности заданы узловые точки  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_J$ . Пусть известны узловые значения  $f_1 = f(\varphi_1)$ ,  $f_2 = f(\varphi_2)$ ,  $\dots$ ,  $f_J = f(\varphi_J)$ . Построить интерполяционную формулу, продолжающую функцию с узловых значений на окружность и обладающую бесконечной гладкостью (существуют все производные). Результат этой задачи может оказаться полезным при реализации множества граничных элементов. Указание: воспользуйтесь идеей, лежащей в основе конструирования интерполяционных многочленов Лагранжа.

### §3. Вычисление интегралов. Гауссовы квадратуры

#### Понятие квадратурной формулы

Мы будем заниматься численным интегрированием. Рассмотрим сначала интегрирование некоторой (для определенности непрерывной) функции одной переменной на отрезке. Пусть функцию  $f(x)$  необходимо проинтегрировать на отрезке  $[a, b]$ , т. е. вычислить

$$I = \int_a^b f(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

Функция  $f(\xi)$  задана “внешним” образом, т. е., например, имеется некоторая подпрограмма (функция), которая вычисляет  $f(\xi)$  в некоторой точке. Каждое обращение к этой функции имеет “цену” (обычно — время выполнения). Всегда хочется минимизировать число обращений к этой функции.

Квадратура представляет собой два набора чисел: набор узловых точек

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N,$$

лежащих на отрезке  $[a, b]$ , и набор узлов

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_N.$$

Оценка интеграла дается суммой

$$I \approx \sum_{j=1}^N w_j f(\xi_j) \quad (3.2)$$

Имеется два очевидных примера интегральных сумм. *Метод прямоугольников* соответствует выбору (см. Рис. 3.1)

$$\xi_1 = a + \frac{1}{2}\Delta\xi, \quad \xi_2 = a + \frac{3}{2}\Delta\xi, \quad \dots, \quad \xi_N = a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta\xi, \quad (3.3)$$

$$w_1 = w_2 = \dots = w_N = \Delta x, \quad \Delta\xi = \frac{b-a}{N}. \quad (3.4)$$

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = a + \Delta\xi, \quad \xi_3 = a + 2\Delta\xi, \quad \dots, \quad \xi_N = b, \quad (3.5)$$

$$w_1 = w_N = \frac{\Delta x}{2}, \quad w_2 = w_3 = \dots = w_{N-1} = \Delta\xi, \quad \Delta\xi = \frac{b-a}{N-1}. \quad (3.6)$$

Эти два примера хороши, но ниже мы построим более эффективные (в известном смысле) формулы.

Сделаем два замечания. Во-первых, ниже мы строим квадратурные формулы на “стандартном” отрезке  $-1 < \xi < 1$ . Во-вторых, нас интересует интеграл функции двух переменных по квадратной области. Покажем, каким образом можно перейти от интегрирования по отрезку к интегрированию по квадрату  $-1 < \xi < 1, -1 < \eta < 1$ .

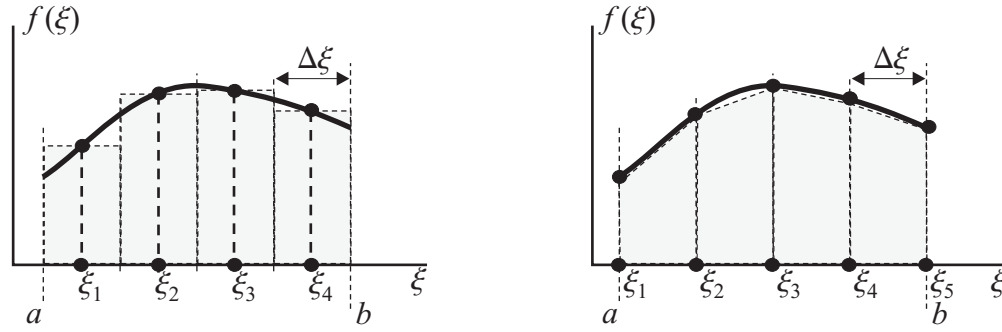


Рис. 3.1: Интегрирование по формулам прямоугольников (слева) и трапеций (справа)

Квадратурная формула для квадрата (или другой области) выглядит так же, как и для отрезка. Зададим  $N$  точек  $(\xi_j, \eta_j)$  и  $N$  весов  $w_j$ . Квадратурная формула есть

$$\int \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{j=1}^N w_j f(\xi_j, \eta_j). \quad (3.7)$$

Пусть нам удалось придумать “хорошую” (в каком-то смысле) одномерную квадратурную формулу для отрезка  $-1 < \xi < 1$ . Это значит, что у нас есть набор квадратурных узловых точек и весов. Назовем эти наборы

$$\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \dots, \xi'_{N'}$$

и

$$w'_1, w'_2, w'_3, \dots, w'_{N'}.$$

Здесь  $N'$  — число узловых точек для одномерной квадратуры. Построим двумерную квадратуру. У нее будет

$$N = (N')^2$$

узлов. Будем нумеровать эти узлы парой индексов  $j, l$ , каждый из которых пробегает диапазон  $1, \dots, N'$ . Узлы и веса двумерной квадратурной формулы есть

$$(\xi_{j,l}, \eta_{j,l}) = (\xi'_j, \xi'_l), \quad w_{j,l} = w'_j w'_l. \quad (3.8)$$

Узлы показаны на Рис. 3.2.

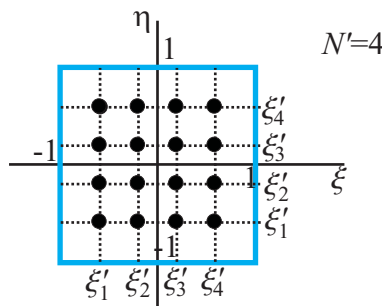


Рис. 3.2: Квадратурные узлы в идеальном квадрате

Построенная квадратурная формула, разумеется, может быть интерпретирована как взятие интегралов по  $\xi$  и  $\eta$  последовательно. На каждом шаге используется одномерная квадратурная формула.

### Гауссова квадратура

Любая квадратурная формула осуществляет приближенное интегрирование. Хотелось бы, тем не менее, чтобы какие-то “простые” функции интегрировались точно. А именно, потребуем, чтобы многочлены порядков от 0 до  $p$  (для некоторого  $p$ ) интегрировались точно.

Сделаем предварительные замечания. Пусть на отрезке  $\xi \in [-1, 1]$  имеется  $N$  точек  $\xi_n$ . Пусть функция  $f(\xi)$  — многочлен степени не выше  $N - 1$  (у такого многочлена  $N$  коэффициентов). Тогда по значениям  $f(\xi_n)$  коэффициенты многочлена можно восстановить, причем однозначно. Зная коэффициенты, можно проинтегрировать функцию  $f(\xi)$  по отрезку  $[-1, 1]$ . Следовательно, имеется принципиальная возможность построить квадратуру с  $N$  узлами для  $p = N - 1$ . Из проделанного рассуждения не следует, что получится квадратурная формула вида (3.2), однако так и будет (см. домашнее задание).

Замечательным обстоятельством является то, что можно добиться при заданном  $N$  точного интегрирования многочленов со степенью, значительно превышающей  $N - 1$ . Приведем самый простой пример такого рода. Возьмем одноточечную квадратуру на заданном отрезке  $[-1, 1]$  с

$$\xi_1 = 0, \quad w_1 = 2.$$

Очевидно, что такая квадратура точно интегрирует многочлен — константу  $f(\xi) = \alpha_0$ . Но также эта квадратура точно интегрирует линейную функцию  $f(\xi) = \xi$  (получается ноль). Из этого следует, что точно интегрируется любая линейная комбинация этих функций, то есть любой многочлен первой степени.

Заметим, что точно интегрировать многочлен степени  $N - 1$  можно при любом выборе квадратурных узлов  $\xi_j$ . Для того, чтобы обеспечить интегрирование многочленов более высокой степени, надо подбирать положения квадратурных узлов специально.

Сама процедура построения квадратурной формулы довольно проста. Пусть мы хотим точно интегрировать многочлен степени  $p$  (лучше сказать, не выше, чем  $p$ )

$$f(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots + \alpha_p\xi^p.$$

Интеграл от этого многочлена по отрезку есть

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{2}{5}\alpha_4 + \dots = \sum_{m=0}^p \frac{1 + (-1)^m}{m + 1} \alpha_m \quad (3.9)$$

Подставим функцию  $f(\xi)$  в квадратурную формулу (3.2). Получим следующее выражение для оценки интеграла (а поскольку мы хотим, чтобы интегрирование было точным, то и для точного значения интеграла):

$$I = w_1(\alpha_0 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_1^2 + \dots + \alpha_p\xi_1^p) + w_2(\alpha_0 + \alpha_1\xi_2 + \alpha_2\xi_2^2 + \dots + \alpha_p\xi_2^p) + \dots \\ + w_N(\alpha_0 + \alpha_1\xi_N + \alpha_2\xi_N^2 + \dots + \alpha_p\xi_N^p) \quad (3.10)$$

Выражения должны совпадать. Приравняем в (3.9) и (3.10) коэффициенты при одинаковых  $\alpha_m$  (т. е. потребуем, чтобы каждый член многочлена интегрировался точно). Получим

$$\begin{aligned}\alpha_0 : \quad & w_1 + w_2 + \cdots + w_N = 2 \\ \alpha_1 : \quad & w_1\xi_1 + w_2\xi_2 + \cdots + w_N\xi_N = 0 \\ \alpha_2 : \quad & w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 + \cdots + w_N\xi_N^2 = 2/3 \\ \alpha_3 : \quad & w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 + \cdots + w_N\xi_N^3 = 0 \\ \alpha_4 : \quad & w_1\xi_1^4 + w_2\xi_2^4 + \cdots + w_N\xi_N^4 = 2/5 \\ & \vdots\end{aligned}$$

и вообще

$$\sum_{j=1}^N w_j \xi_j^m = \frac{1 + (-1)^m}{m + 1}, \quad m = 0, 1, \dots, p. \quad (3.11)$$

К тому, что получилось, можно отнестись как к нелинейной системе из  $p + 1$  уравнения с  $2N$  неизвестными (это  $\xi_j$  и  $w_j$ ). Эту систему можно попытаться решить. Не вдаваясь в суровую алгебру, можно робко предположить, что система будет иметь единственное (с точностью до перестановок точек) решение, если количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, т. е.

$$p = 2N - 1. \quad (3.12)$$

Если систему удастся решить, это будет означать, что мы можем точно проинтегрировать полином, чья степень почти вдвое больше, чем количество квадратурных узлов.

В качестве примера рассмотрим двухточечную квадратуру. Для нее имеем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 &= 2, \\ w_1\xi_1 + w_2\xi_2 &= 0, \\ w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 &= 2/3, \\ w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 &= 0.\end{aligned}$$

Из второго и четвертого уравнения следует, что  $\xi_1 = -\xi_2$ . Далее, из второго уравнения следует, что  $w_1 = w_2$ . Из первого уравнения следует, что

$$w_1 = w_2 = 1.$$

Наконец, из третьего уравнения следует, что

$$\xi_2 = -\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Построенная квадратурная формула называется гауссовой квадратурой. Приведем взя-

тые из справочника квадратуры для этих и других  $p$ :

$$N = 1, \quad p = 1 : \quad \xi = \{0\}$$

$$w = \{2\}$$

$$N = 2, \quad p = 3 : \quad \xi = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$w = \{1, 1\}$$

$$N = 3, \quad p = 5 : \quad \xi = \left\{ -\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5} \right\}$$

$$w = \left\{ \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9} \right\}$$

$$N = 4, \quad p = 7 : \quad \xi = \left\{ -\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, -\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \right\}$$

$$w = \left\{ \frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{18 - \sqrt{30}}{36} \right\}$$

$$N = 5, \quad p = 9 : \quad \xi = \left\{ -\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, -\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}} \right\}$$

$$w = \left\{ \frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}, \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}, \frac{128}{225}, \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}, \frac{322 - 13\sqrt{70}}{900} \right\}$$

Веса  $w_j$  везде даны в том же порядке, что и точки  $\xi_j$ .

Теперь мы знаем много хороших квадратурных формул. Надо понять, какую из них стоит использовать при вычислении матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ . Пусть используются четырехугольные конечные элементы с билинейными функциями формы. Довольно просто дело обстоит с матрицей  $\mathbf{M}$ . Подынтегральная функция в (2.16) является многочленом переменных  $\xi, \eta$  степени не выше 3 по каждой из них. Понять это достаточно легко. Вектор  $\mathbf{A}$  билинеен по данным переменным, якобиан также билинеен. Таким образом, для точного вычисления матрицы  $\mathbf{M}$  достаточно двухточечной квадратурной формулы. Для двумерного случая это даст 4 квадратурных точки в конечном элементе, а в трехмерном — 8.

Хуже обстоит дело с матрицей  $\mathbf{K}$ . В подынтегральное выражение (2.24) входит обращение матриц, поэтому оно не является многочленом. Никакая квадратурная формула не даст точного результата, если конечный элемент деформирован. Представление о точности квадратур мы имеем самое приблизительное. В качестве “инженерного” решения можно порекомендовать использовать пятиточечную формулу.

### Треугольники, тетраэдры, пирамиды

Выше мы показали, каким образом из одномерной квадратурной формулы можно сделать двумерную, если идеальным двумерным элементом является квадрат. Не составит труда сделать трехмерную формулу, если идеальным элементом является куб. Возникает, однако, вопрос, как построить квадратурные формулы для треугольника, тетраэдра, пирамиды и призмы.

Вопрос это не такой простой, и на него существует два разных ответа. Один ответ “научный”, другой — “инженерный”. Пусть рассматриваются конечные элементы типа треуголь-

ника или тетраэдра. Пусть на этих элементах заданы *линейные* функции формы. Тогда изопараметрическое отображение линейно вместе со своим обратным, а якобиан отображения постоянен. Это приводит к тому, что подынтегральные выражения для матрицы  $\mathbf{M}$  являются квадратичными многочленами координат, а подынтегральные выражения для элементов матрицы  $\mathbf{K}$  — константы. Таким образом, необходимо придумать квадратурные формулы, точно интегрирующие многочлены степени до второй включительно. При наличии таких формул данные матрицы будут вычисляться точно.

Зададим элементарный треугольник в координатах  $(\xi, \eta)$  как область  $\xi > 0, \eta > 0, \xi + \eta < 1$  (см. Рис. 3.3 слева). Для такого треугольника квадратурная формула задается следующим образом. Формула трехточечная. Квадратурные точки есть

$$(\xi_j, \eta_j) = (1/6, 1/6), (2/3, 1/6), (1/6, 2/3). \quad (3.13)$$

Все квадратурные веса есть

$$w_1 = w_2 = w_3 = 1/6. \quad (3.14)$$

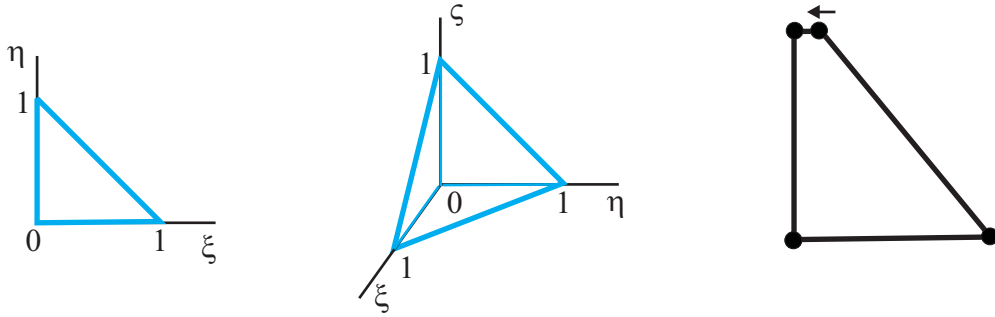


Рис. 3.3: Идеальный треугольник (слева) и тетраэдр (в центре). Вырождение четырехугольника в треугольник (справа)

Рассмотрим элементарный тетраэдр в координатах  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Пусть он задается как  $\xi > 0, \eta > 0, \zeta > 0, \xi + \eta + \zeta < 1$  (см. Рис. 3.3 в середине). Для него существует четырехточечная формула обладающая требуемым свойством (точно интегрировать многочлены степени до второй включительно). Квадратурные узлы для этой формулы есть

$$(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \left(\frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}\right), \left(1 - \beta, \frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}\right), \left(\frac{\beta}{3}, 1 - \beta, \frac{\beta}{3}\right), \left(\frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}, 1 - \beta\right), \quad (3.15)$$

$$\beta = \frac{3}{20}(5 - \sqrt{5}).$$

Квадратурные веса равны

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = \frac{1}{24}. \quad (3.16)$$

Инженерный подход к интегрированию по треугольнику и тетраэдру заключается в том, чтобы считать треугольник квадратом с двумя слипшимися вершинами (см. Рис. 3.3 справа), а тетраэдр — кубом с большим количеством слипшихся вершин. Плюс такого подхода является то, что для рассмотрения треугольников и тетраэдров никаких

новых квадратурных формул придумывать не надо. Минус заключается в некоторой потере точности интегрирования. Билинейные функции формы у квадрата со сближенными вершинами, конечно, не будут линейными функциями формы.

Несомненным плюсом такого подхода является то, что в трехмерном случае можно рассматривать призмы и четырехугольные пирамиды, для которых хороших квадратурных формул просто нет.

### Задачи

1. Построить на отрезке  $[-1, 1]$  трехточечную квадратурную формулу, точно интегрирующую полиномы степени до второй, следующим способом. Взять квадратурные точки  $\xi_j = \{-1, 0, 1\}$ . По значениям  $f(\xi_1)$ ,  $f(\xi_2)$ ,  $f(\xi_3)$  восстановить коэффициенты многочлена  $f = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2$ . Проинтегрировать многочлен. Убедиться, что полученная формула имеет вид (3.2). Выписать квадратурные веса.
2. Убедиться в том, что квадратурная формула для треугольника (3.13), (3.14) и для тетраэдра (3.15), (3.16) действительно точно интегрируют все многочлены второй степени.



## §4. Метод Галеркина в деталях на простом примере

### Разбор примера. Матрица жесткости в одномерном случае

Будем решать самое простое уравнение, которое получается придумать. А именно, на отрезке  $x \in [0, 1]$  будем решать (одномерное) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x) \quad (4.1)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (4.2)$$

Это уравнение соответствует, например, поперечной деформации натянутого троса под действием поперечной силы  $f(x)$  (см. Рис. 4.1). Чтобы не вступать в конфликт с какой-нибудь мутной математикой, будем полагать, что функция  $f(x)$  является достаточно гладкой.

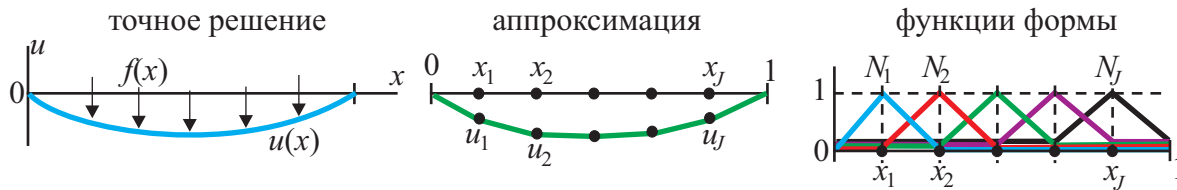


Рис. 4.1: Задача (4.1) и ее аппроксимация

Попробуем применить метод, описанный в предыдущей лекции. Первым шагом является определение конечного набора переменных, приближенно описывающего функцию  $u(x)$ . Это, конечно, будут узловые значения функции. Введем узловые точки  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_J < 1$ , заполняющие отрезок  $[0, 1]$  с достаточно мелким шагом. Узловые значения функции — это значения

$$u_j = u(x_j).$$

Необходимо обратить внимание на то, что точки  $x = 0$  и  $x = 1$  являются важными узлами, однако узловые значения в них мы не вводим. Это происходит по очевидной причине. Граничные условия говорят нам, что в этих точках значения неизвестной функции равны нулю. Если бы были поставлены граничные условия Неймана (или еще какие-нибудь), то пришлось бы рассматривать и неизвестные значения  $u(0)$ ,  $u(1)$ . Неизвестные узловые значения объединим в вектор-столбец

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_J \end{pmatrix}.$$

Построим кусочно-линейную аппроксимацию функции  $u(x)$  по ее узловым значениям, а именно применим формулу (1.4):

$$u(x) = \sum_{j=1}^J u_j N_j(x), \quad (4.3)$$

где функции  $N_j(x)$  показаны на Рис. 4.1. Обращаем внимание на то, как устроены функции формы вблизи концевых точек. Очевидно, что при таком выборе функций формы аппроксимация (4.3) дает функцию, автоматически удовлетворяющую граничным условиям.

Несколько неприятным свойством аппроксимации (4.3) является то, что функция, определенная с ее помощью, *не может* удовлетворять уравнению (4.1). Действительно, функция получается кусочно-линейной, а значит ее вторая производная почти везде равна нулю. В узловых точках вторая производная вообще не определена. Это может показаться легкомысленным, но мы пока игнорируем это обстоятельство и делаем вид, что все хорошо. Объяснение такому поведению будет дано позже.

Подставим аппроксимацию (4.3) в уравнение (4.1):

$$-\sum_{j=1}^J u_j \frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} = f(x).$$

Будем использовать метод Галеркина. Домножим правую и левую части на весовую функцию  $N_m(x)$ ,  $m = 1, \dots, J$  (т. е. на какую-то из функций формы) и проинтегрируем уравнение по  $x$  от 0 до 1:

$$\sum_{j=1}^J u_j \int_0^1 N_m(x) \frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} dx = - \int_0^1 N_m(x) f(x) dx.$$

Повторяя (1.11), введем обозначения для величин, стоящих в правой части:

$$F_m \equiv \int_0^1 N_m(x) f(x) dx.$$

Заметим, что это *не* узловые значения. Данные значения объединим в вектор

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_J \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим величины, стоящие в левой части. Выполним интегрирование по частям:

$$\int_0^1 N_m(x) \frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} dx = N_m(x) \frac{dN_j(x)}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dN_m(x)}{dx} \frac{dN_j(x)}{dx} dx. \quad (4.4)$$

Первый (внеинтегральный) член равен нулю, поскольку функция  $N_m(x)$  удовлетворяет граничным условиям Дирихле. Воспользовавшись определением матрицы жесткости (1.13)  $\mathbf{K}$ , введем величины

$$K_{m,j} = \int_0^1 \frac{dN_m(x)}{dx} \frac{dN_j(x)}{dx} dx \quad (4.5)$$

и матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{J,1} & \cdots & K_{J,J} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Получается матричное уравнение

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.7)$$

Это уравнение может быть решено путем обращения матрицы:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (4.8)$$

или как-то еще. На самом деле, почти всегда линейную систему уравнений надо решать “как-то еще”. В MATLABе реализованы эффективные алгоритмы решения систем линейных уравнений, эти алгоритмы активизируются по команде

$$\mathbf{U} = \mathbf{K} \setminus \mathbf{F} ;$$

Вычисление обратной матрицы — далеко не самый эффективный метод решения систем линейных уравнений большого размера.

Тем не менее, у формулы (4.8) есть важный философский смысл. Мы аппроксимировали неизвестную функцию, а дифференциальный оператор (левая часть (4.1)) плюс граничные условия (!) представили в виде матрицы. Обращение оператора (т. е. решение задачи) соответствует обращению матрицы.

Доведем решение задачи до конца. Пусть узловых точек всего две:  $x_1$  и  $x_2$ . Пусть  $f(x) = -1$ . Вычислим  $\mathbf{F}$  непосредственно:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2 \\ (1 - x_1) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  может быть вычислена напрямую (не надо строить идеальное пространство и отображение  $\Phi$ ). Можно просто проинтегрировать кусочно-линейные функции, их производные (это константы) и их произведения. А именно, на отрезках между узловыми точками производные функций формы равны  $x_1^{-1}$ ,  $\pm(x_2 - x_1)^{-1}$ ,  $-(1 - x_2)^{-1}$ . Результат есть

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$K_{1,1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2 - x_1}, \quad K_{2,2} = \frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{1 - x_2}, \quad K_{1,2} = K_{2,1} = -\frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Сделаем еще один важный шаг. Интегралы в (4.5) можно разбить на три части: интегралы по отрезкам  $[0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$  и  $[x_2, 1]$  (именно эти отрезки и являются конечными элементами). Матрица  $\mathbf{K}$  оказывается разбита на три слагаемых:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - x_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Эти слагаемые представляют собой элементные матрицы  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$ ,  $\mathbf{K}^{(3)}$  из (2.17). Как уже упоминалось, выражение (4.11) представляет собой ассемблирование матрицы жесткости задачи.

Посмотрим, хорошо ли это всё работает. Пусть  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = 2/3$ . Тогда

$$F = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Формула (4.8) дает

$$U = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В то же время, точное решение задачи, очевидно, есть  $u = x(x-1)/2$ . Рис. 4.2 позволяет сравнить точное решение и аппроксимацию, полученную с помощью всего двух узловых значений. В данном случае метод хорош исключительно. Узловые значения равны точному решению в узловых точках. Так, конечно, будет не всегда, но общее ощущение от метода — самое благостное.

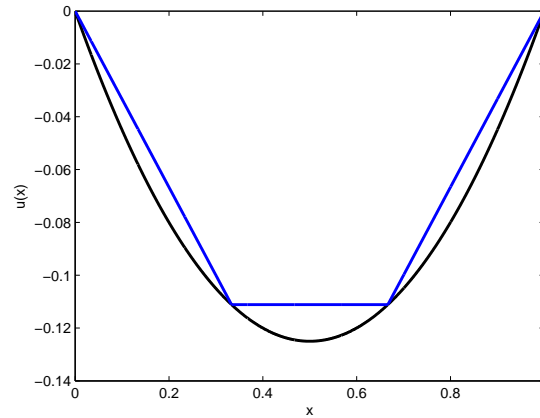


Рис. 4.2: Решение задачи (4.1) с двумя узлами

### Небольшое усложнение задачи. Матрица массы

Рассмотрим чуть более сложную задачу. А именно, вместо уравнения (4.1) рассмотрим уравнение

$$-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{\omega^2}{c^2} u(x) = f(x) \quad (4.12)$$

на том же отрезке с теми же граничными условиями. Прделаем выкладки, совпадающие с проделанными выше. В результате получим уравнение

$$KU - \frac{\omega^2}{c^2} MU = F, \quad (4.13)$$

где  $M$  — матрица массы исследуемой задачи. В соответствии с (1.10), ее элементы определяются как

$$M_{m,j} = \int_0^1 N_m(x) N_j(x) dx. \quad (4.14)$$

Вычислим элементы матрицы  $\mathbf{M}$  в том же простейшем случае, когда имеется всего два узла  $x_1$  и  $x_2$ . Разбивая интегралы по отрезку  $[0, 1]$  на интегралы по отрезкам  $[0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$  и  $[x_2, 1]$  (т. е. по конечным элементам), получаем

$$\mathbf{M} = x_1 \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_1) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} + (1 - x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) описывает два типа конечных элементов: краевые и обычные. Очевидная модификация (замена  $x_2 - x_1$  на  $\Delta x$ ) позволяет написать матрицу массы для любого конечного элемента.

#### Связь с методом конечных разностей

Вернемся к уравнению (4.1) и его аппроксимации (4.7). Пусть отрезок  $[0, 1]$  разбит на  $J + 1$  конечных элементов одинаковой длины  $\Delta x = 1/(J + 1)$ . Матрица  $\mathbf{K}$  запишется как

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \dots \quad (4.16)$$

(на пустых местах стоят нули). В результате получается матрица

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Заметим, что любая строка матрицы, кроме первой и последней, осуществляет следующую операцию:

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{\Delta x}.$$

Это напоминает классическую аппроксимацию второй производной, изучаемую в численных методах (это как раз и есть метод конечных разностей):

$$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2},$$

то есть с некоторой долей условности можно записать  $\mathbf{K} = -\Delta x \mathbf{D}_2$ , где  $\mathbf{D}_2$  — матрица, аппроксимирующая взятие второй производной.

#### Задача с граничными условиями Неймана

Пусть решается уравнение (4.12) на отрезке  $[0, 1]$  с граничными условиями Неймана

$$\frac{du(0)}{dx} = \frac{du(1)}{dx} = 0.$$

Проследим, что изменится по сравнению со случаем граничных условий Дирихле, рассмотренным выше.

Первое изменение заключается в том, что граничные узлы 0 и 1 несут неизвестные узловые значения. Вектор неизвестных становится длиннее на две позиции, и при этом функция перестает удовлетворять граничным условиям автоматически.

Второе изменение состоит в том, что интегрирование по частям в (4.4) необходимо выполнить как-то иначе, поскольку функции формы и их производные не обращаются в ноль на границе интервала. Левая часть (4.4) представляет собой элементы матрицы с индексами  $(m, j)$ . Домножим эту матрицу на вектор  $U$  :

$$\sum_{j=1}^J u_j \int_0^1 N_m(x) \frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} dx = N_m(x) \sum_{j=1}^J u_j \frac{dN_j(x)}{dx} \Big|_0^1 - \sum_{j=1}^J u_j \int_0^1 \frac{N_m(x)}{dx} \frac{dN_j(x)}{dx} dx.$$

Выражение

$$\sum_{j=1}^J u_j \frac{dN_j(x)}{dx}$$

представляет собой производную кусочно-линейной функции, аппроксимирующей неизвестную функцию  $u(x)$ . Для точного решения эта функция должна быть равна нулю на концах интервала, а для приближенного решения — приближенно равна. Поэтому можно приближенно записать

$$\sum_{j=1}^J u_j \int_0^1 N_m(x) \frac{d^2 N_j(x)}{dx^2} dx = - \sum_{j=1}^J u_j \int_0^1 \frac{N_m(x)}{dx} \frac{dN_j(x)}{dx} dx.$$

и опять вернуться к выражению для матрицы жесткости (1.13) и к уравнению (4.13).

Пусть отрезок  $[0, 1]$  разбит на три конечных элемента узлами

$$x_1 = 0 < x_2 < x_3 < x_4 = 1.$$

Тогда матрица жесткости имеет вид

$$K = \frac{1}{x_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x_3 - x_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - x_3} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Похожие выражения могут быть получены, если отрезок  $[0, 1]$  разбит на несколько элементов размера  $\Delta x$ .

В этой связи необходимо сказать несколько слов о первой и последней строках матрицы  $K$ . Эти строки отвечают за граничные условия. В случае граничных условий Дирихле первая строка имеет вид  $(\Delta x)^{-1}(2, -1, 0, \dots)$ , а в случае граничных условий Неймана она имеет вид  $(\Delta x)^{-1}(1, -1, 0, \dots)$ . Изменение всего одного элемента в матрице радикально меняет характер решения.

Еще раз подчеркнем, что матрица жесткости содержит информацию как о дифференциальном операторе, так и о граничных условиях. Это важно понимать.

### Как на самом деле работает метод конечных элементов?

Мы уже упоминали, что в случае кусочно-линейной аппроксимации все не так просто, поскольку вторая производная кусочно-линейной функции почти равна нулю на прямолинейных участках и не существует в изломах. Пришло время разобраться в каком смысле

полученное решение может удовлетворять уравнению (4.1). Изобразим на Рис. 4.3 кусочно-линейную функцию, ее первую производную и вторую производную. Первая производная является кусочно-постоянной (разрывной) функцией. Вторая производная является почти везде нулем, а в точках разрыва первой производной имеет особенности типа дельта-функции. Собственно, одно из определений дельта-функции Дирака — это производная функции Хевисайда, имеющей единичный скачок в нуле.

Таким образом, вторая производная кусочно-линейной функции представляет собой линейную комбинацию дельта-функций, локализованных в скачках. Возникает вопрос, каким образом эта причудливая конструкция может быть приближенно равна достаточно гладкой функции  $f(x)$ . Понятно, что равенство может достигаться только в каком-то усредненном виде. Метод взвешенных невязок ровно это и делает. Вторая производная усредняется по двум отрезкам, примыкающим к узлу с весовой функцией, совпадающей с функцией формы. Результат сравнивается с заданной правой частью, усредненной тем же способом. Напомним, что разность левой и правой части называется невязкой, так что фактически мы требуем, чтобы невязка, проинтегрированная с каждой из весовых функций, была равна нулю.

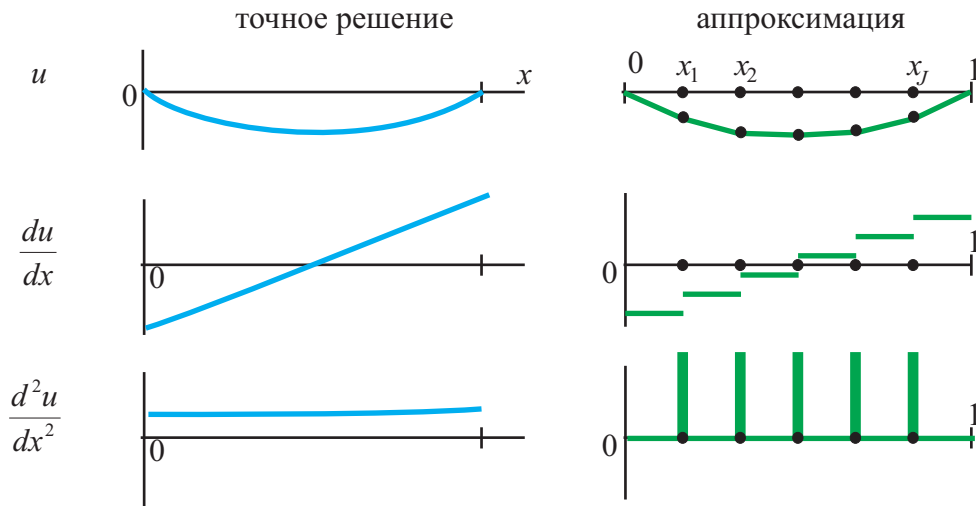


Рис. 4.3: Функция и ее две производные для точного решения и для кусочно-линейной аппроксимации

Может показаться странным, что в описании процедуры выше не было никаких дельта-функций. Их присутствие было замаскировано интегрированием по частям. В двумерном и трехмерном случае интегрирование сингулярностей может быть непростой задачей, и интегрирование по частям очень помогает сделать все правильно.

**Почему метод Галеркина лучше других?**

Как уже говорилось, метод взвешенных невязок может быть построен для любого набора весовых функций. Однако оптимальным является выбор в качестве весовых функций тех же функций формы (это и есть метод Галеркина). Причина этого заключается в симметричности матриц жесткости и массы. До сих пор это высказывание было всего лишь мантрой, настало время придать ему смысл.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}u = 0 \tag{4.19}$$

на отрезке  $x \in [0, 1]$  с граничными условиями Дирихле (4.2). Пусть параметр  $c$  известен из физических соображений, а величина  $\omega$  может изменяться. Наша задача — подобрать такие значения параметра  $\omega^2$ , что уравнение имеет нетривиальное (ненулевое) решение, удовлетворяющее граничным условиям.

Поставленная задача называется задачей Штурма–Лиувилля, и про нее многое известно. Заметим, что рассматриваемая задача, очевидно, представляет собой задачу о поперечных колебаниях натянутой струны. Значения  $\omega$  представляют собой частоты свободных колебаний, а  $c$  есть скорость поперечных волн.

В постановке задачи отсутствует механизм потерь. Поэтому разумно ожидать чисто действительных значений  $\omega$ . Было бы плохо получить в результате численного решения приближенное значение  $\omega$  с малой положительной или отрицательной мнимой частью. Это означало бы экспоненциальное затухание или (что еще хуже) рост колебаний во временной области. Ниже мы покажем, что использование метода Галеркина гарантирует, что значения  $\omega$  будут действительными.

Прежде всего, опишем процедуру решения задачи, то есть отыскания значений  $\omega^2$ . Применим шаг за шагом метод конечных элементов, то есть введем узлы и узловые значения, построим по ним кусочно-линейную интерполяцию, подставим ее в уравнение (4.19), домножим уравнение на весовые функции (функции формы) и проинтегрируем. В результате получим матричное уравнение

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{M}\mathbf{U}, \quad (4.20)$$

где  $\mathbf{U}$  — вектор узловых значений, а матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  и массы  $\mathbf{M}$  определены как (4.5) и (4.14). Пользуясь тем, что матрица  $\mathbf{M}$  невырожденная (как бы это доказать?), перепишем уравнение (4.20) как

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{U}. \quad (4.21)$$

Данная постановка является задачей об определении собственных значений и собственных векторов матрицы  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ . Необходимо найти такие значения параметра

$$\lambda \equiv \omega^2/c^2,$$

что уравнение (4.21) имеет нетривиальное решение. Как известно, значения  $\lambda$  определяются из алгебраического уравнения

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \quad (4.22)$$

где  $\mathbf{I}$  — (диагональная!) единичная матрица. Данная задача решается на MATLABe с помощью одной команды:

```
[U , W] = eig(inv(M)*K) ;
```

Здесь  $\mathbf{U}$  — матрица, состоящая из собственных векторов (столбцов), а  $\mathbf{W}$  — диагональная матрица, состоящая из собственных значений  $\lambda$ .

С первого взгляда не очень понятно, почему собственные значения такой задачи действительны. Существует теорема о том, что собственные значения симметричной матрицы действительны, но мы не можем ее применить непосредственно. Матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  симметричны, но матрица  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  симметричной быть не должна.



Для того, чтобы показать действительность  $\lambda$ , будем рассматривать (4.20) как *обобщенную задачу на собственные значения* (в этой задаче  $\mathbf{I}$  заменяется на  $\mathbf{M}$ ).

Надо сказать, что MATLAB умеет решать и обобщенные задачи на собственные значения. Для этого ту же команду надо вызвать с двумя аргументами:

`[U , W] = eig(K , M) ;`

Докажем следующее утверждение, из которого следует то, что мы хотим:

*Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — невырожденные симметричные действительные квадратные матрицы одинакового размера. Пусть матрица  $\mathbf{B}$  положительно определена, а матрица  $\mathbf{A}$  определена неотрицательно. Тогда все собственные значения  $\lambda$  обобщенной задачи*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{X} \quad (4.23)$$

*действительны и неотрицательны.*

Доказательство. Применим к (4.23) операции транспонирования и комплексного сопряжения:

$$\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{B}. \quad (4.24)$$

Рассмотрим комбинацию  $\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}\mathbf{X}$ . Эта комбинация может быть преобразована двумя способами: при помощи (4.21) или (4.23). Сравнение результатов дает

$$\lambda \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{B}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}\mathbf{X} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{B}\mathbf{X} \quad (4.25)$$

Положительная определенность  $\mathbf{B}$  дает  $\lambda = \bar{\lambda}$ , т. е. действительность  $\lambda$ . Неотрицательная определенность  $\mathbf{A}$  дает  $\lambda \geq 0$ .

## Задачи

1. а) Докажите, что матрица  $\mathbf{M}$  положительно определена.  
 б) Докажите, что матрица  $\mathbf{M}$  положительно определена в случае однородных граничных условий Дирихле и неотрицательно определена в случае условий Неймана. Напомним, что квадратная эрмитова (или действительная симметричная) матрица  $\mathbf{A}$  называется положительно определенной, если для любого ненулевого комплексного вектора  $\mathbf{X}$  подходящего размера выполняется неравенство

$$\bar{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}\mathbf{X} > 0.$$

Если знак  $>$  заменить на  $\geq$ , получится определение неотрицательно определенной матрицы.

Замечание. Из положительной определенности матрицы  $\mathbf{M}$  следует ее невырожденность.

2. Постройте матрицы массы и жесткости для уравнения (4.19) с граничными значениями Дирихле и Неймана. Разбейте отрезок на 10 равных частей. Считайте  $c = 1$ . Получите собственные частоты и сравните их с точными значениями.

## §5. Структура простейшей программы, реализующей МКЭ

### Постановка задачи

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть (двумерная) область  $\Omega$  представляет собой прямоугольник в плоскости  $(x, y)$ . Будем решать в этой области уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(x, y) + \frac{\omega^2}{c^2} u(x, y) = -f(x, y) \quad (5.1)$$

( $c$  — постоянный параметр) с однородными граничными условиями Неймана на  $\partial\Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (5.2)$$

Проигнорируем тот факт, что граница области не является гладкой. Это доставляет определенные неудобства в теоретическом плане, но на практике не слишком мешает (особенно в случае, когда углы составляют  $\pi/2$ ). По-хорошему, следовало бы поставить условия Мейкснера в угловых точках. Для прямых углов эти условия сводятся к тому, что решение должно быть в углах регулярным. Ограничимся замечанием о том, что метод конечных элементов не должен дать неправильного решения данной задачи, даже если не предпринимать никаких действий.

Задача (5.1), (5.2) может не иметь решения или ее решение может не быть единственным. Напомним, в чем дело. Рассмотрим (вспомогательную) однородную задачу, т. е. вместо (5.1) возьмем

$$\Delta u(x, y) + \frac{\omega^2}{c^2} u(x, y) = 0 \quad (5.3)$$

с теми же граничными условиями. Пусть  $\omega$  является параметром, который может принимать любое действительное положительное значение. Известно, что при параметре  $\omega$ , принимающем дискретный набор значений  $\omega_j$ , однородная задача имеет нетривиальное решение  $w_j(x, y)$ . При всех остальных  $\omega$  нетривиальных решений однородной задачи нет. Набор значений

$$\lambda_j = -\omega_j^2/c^2$$

называются спектром оператора  $\Delta$  с граничными условиями Неймана. Если одному значению  $\omega_j$  соответствует несколько (всегда конечное число!) решений  $v_j$ , будем учитывать  $\omega_j$  несколько раз и говорить о его кратности.

Разумеется, спектр данной задачи тесно связан с собственными модами акустических колебаний в области  $\Omega$ , а набор  $\omega_j$  представляет собой частоты собственных мод.

Если область  $\Omega$  представляет собой прямоугольник со сторонами  $L_x, L_y$ , собственные частоты нетрудно вычислить:

$$\omega_j = \omega_{m,n} = c\sqrt{(\pi m/L_x)^2 + (\pi n/L_y)^2} \quad (5.4)$$

Соответствующие собственные моды представляют собой произведения косинусов по  $x$  и  $y$ . В общем же случае вычисление спектра — самостоятельная непростая задача.

Утверждается следующее. Если  $\omega$  не принадлежит спектру однородной задачи, то неоднородная задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение. Если же  $\omega$  является точкой спектра с кратностью  $m$ , т. е. данной частоте соответствуют решения  $v_1 \dots v_m$  однородной задачи, то решение существует только когда правая часть (5.1) ортогональна всем собственным модам:

$$\iint_{\Omega} f(x, y)v_j(x, y)dx dy = 0, \quad j = 1 \dots m. \quad (5.5)$$

При этом решение определено с точностью до произвольной линейной комбинации функций  $v_1 \dots v_m$ .

Доказательство можно найти в курсе ММФ. Не вдаваясь в детали, покажем, что условие (5.5) является необходимым для существования решения. Применим формулу Грина к решениям  $u$  и  $v_j$ . Результат есть

$$\int_{\partial\Omega} \left[ v_j \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_j}{\partial n} \right] dl = - \iint_{\Omega} f(x, y)v_j(x, y)dx dy \quad (5.6)$$

В силу граничных условий левая часть равна нулю. Следовательно, и правая часть должна быть равна нулю.

Отметим, что невыполнение условий (5.5) означает наличие резонанса в системе. В этом случае нельзя рассматривать стационарную задачу. Вместо этого надо рассматривать задачу во времени и описывать рост амплитуды колебаний.

Итак, для простоты будем считать, что частота  $\omega$  не принадлежит спектру задачи.

### Общая структура программы

Везде ниже будем описывать программу на языке MATLAB.

Разобьем область на конечные элементы в виде одинаковых прямоугольников. Будем искать вектор неизвестных узловых значений

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_J \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

где  $J$  — общее число узлов.

Общая схема программы, реализующей МКЭ, показана на Рис. 5.1. Схема состоит из четырех уровней. На уровне I создается сетка, представляющая собой массивы с координатами узлов и со структурой конечных элементов. На жаргоне эта часть программы называется мешер (mesher).

На уровне II по данной сетке строятся матрицы массы и жесткости  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  по формулам (2.11), (2.16), (2.17), (2.24). Для этого используются функции `ShapeFunctions` и `GaussQuadratures`, поставляющие, соответственно, функции формы (а также их частные производные) и узлы / коэффициенты гауссовых квадратур.

Напомним, что однородные граничные условия Неймана автоматически выполняются, если не делать никаких действий. За это их называют “естественными” (см. материал следующей лекции).

На уровне III решается дискретизованная версия уравнения (5.1). А именно, решается матричное линейное уравнение

$$\left( \mathbf{K} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (5.8)$$

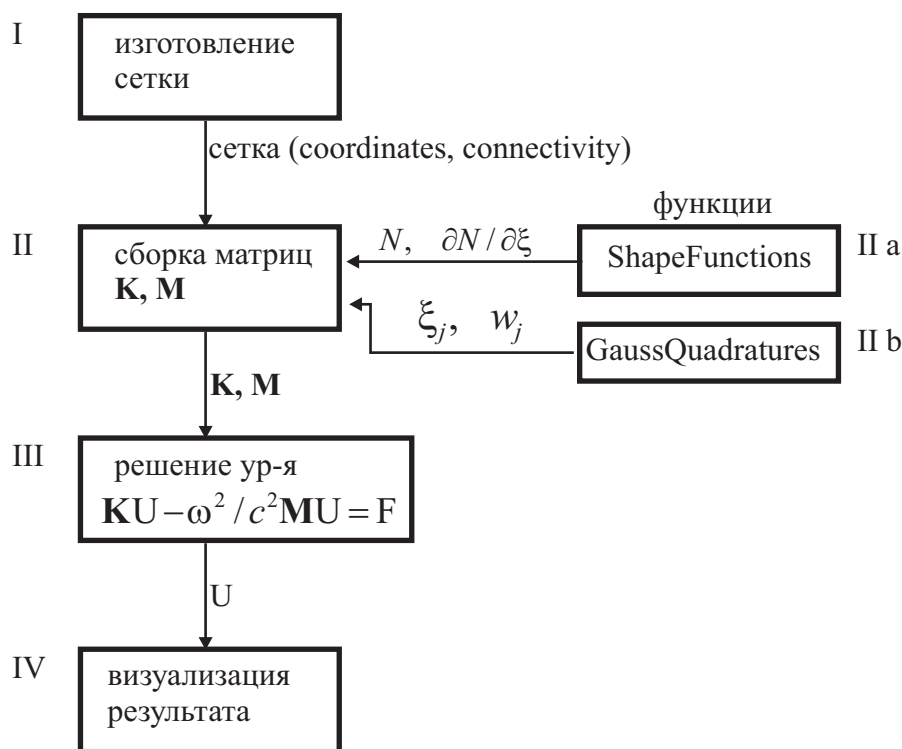


Рис. 5.1: Грубая блок-схема программы МКЭ

Очевидно, данное уравнение может решаться встроенной командой решения линейных систем, например так:

$$U = (K - \omega^2 / c^2 * M) \setminus F$$

На уровне III может находиться программа отыскания спектра (она может быть реализована с помощью встроенной команды отыскания собственных значений матрицы), а также программа решения нестационарной задачи во времени. На жаргоне данный уровень программы называется солвер (solver). В одной из следующих лекций будут рассмотрены разные виды солверов. Результатом работы солвера является вектор узловых значений искомого поля.

Наконец, на уровне IV необходимо выполнить визуализацию волнового поля (или сделать с результатом вычислений что-то еще, для чего-то ведь мы решали эту задачу).

### Структура сетки

Пусть число узлов сетки  $J$ , а число конечных элементов  $Q$ . Все узлы и все конечные элементы будем считать пронумерованными.

Сетка представляет собой два массива. Один из этих массивов описывает узлы сетки. Назовем этот массив `coordinates`. Размерность этого массива есть  $J \times 2$ . В строках его стоят координаты узлов  $(x_j, y_j)$ , расположенных по порядку:

$$\text{coordinates} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \\ x_J & y_J \end{pmatrix}$$

Второй массив описывает конечные элементы (напомним, что все они — четырехугольники). Назовем его `connectivity`. Он имеет размерность  $Q \times 4$ . В этом массиве каждая  $i$ -тая строчка представляет собой описание конечного элемента с номером  $i$ . Описание представляет собой номера узлов, принадлежащие данному конечному элементу. При этом номера узлов в строке должны перечисляться в том же порядке, что и номера узлов “идеального элемента”.

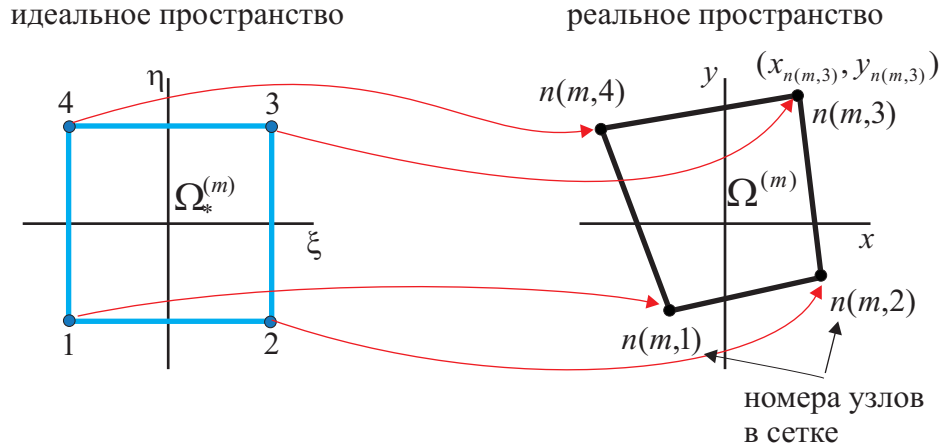


Рис. 5.2: Отображение идеального четырехугольника в реальный

Поясним последнюю фразу. Введем функцию  $n(m, j)$ , которая ставит в соответствие номеру элемента  $m = 1, \dots, Q$  и номеру узла в элементе  $j = 1, \dots, 4$  номер узла в сетке. Рассмотрим рисунок Рис. 5.2. Узлы 1...4 в идеальном пространстве перечисляются в направлении против часовой стрелки. Хорошо бы перечислять узлы, принадлежащие конечному элементу  $i$ , в строке данной матрицы также в порядке обхода против часовой стрелки. Если их перечислять по кругу, но по часовой стрелке, беды не будет, но определитель матрицы Якоби  $\det(\mathbf{D})$  будет отрицательным. А вот если поставить номера узлов не по кругу, изопараметрическое отображение идеального пространства на реальное не будет работать как надо, и программа будет работать неправильно.

В обозначениях предыдущей лекции структура матрицы `connectivity` имеет вид

$$\text{connectivity} = \begin{pmatrix} n(1,1) & n(1,2) & n(1,3) & n(1,4) \\ n(2,1) & n(2,2) & n(2,3) & n(2,4) \\ \dots & & & \\ n(Q,1) & n(Q,2) & n(Q,3) & n(Q,4) \end{pmatrix}$$

Выпишем для примера куски матриц `coordinates` и `connectivity` для фрагмента сетки, показанного на Рис. 5.3. Цифры без кружочков показывают номера узлов, цифры в кружочках — номера конечных элементов. Соответствующие фрагменты матриц имеют

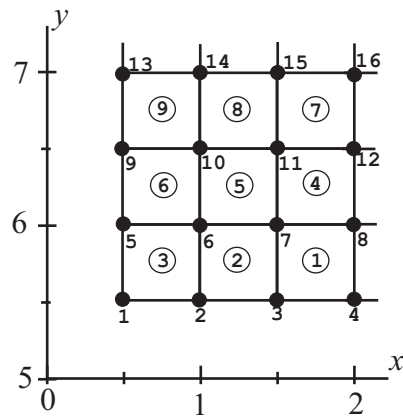


Рис. 5.3: Пример четырехугольной сетки

вид

$$\text{coordinates} = \begin{pmatrix} 0.5 & 5.5 \\ 1.0 & 5.5 \\ 1.5 & 5.5 \\ 2.0 & 5.5 \\ 0.5 & 6.0 \\ 1.0 & 6.0 \\ 1.5 & 6.0 \\ 2.0 & 6.0 \\ 0.5 & 6.5 \\ 1.0 & 6.5 \\ 1.5 & 6.5 \\ 2.0 & 6.5 \\ 0.5 & 7.0 \\ 1.0 & 7.0 \\ 1.5 & 7.0 \\ 2.0 & 7.0 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \text{connectivity} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 12 & 11 \\ 6 & 7 & 11 & 10 \\ 5 & 6 & 10 & 9 \\ 11 & 12 & 16 & 15 \\ 10 & 11 & 15 & 14 \\ 9 & 10 & 14 & 13 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Мы не рассказываем, как строить сетки. Надеемся, что читатель сможет справиться с этим самостоятельно.

### Сборка матриц **K** и **M**

Сборка матриц **K** и **M** (уровень II на Рис. 5.1) является ключевым элементом программы, реализующей МКЭ. Как указывалось раньше, в рассматриваемом случае солвер очень прост, а про визуализацию мы вообще говорить не будем.

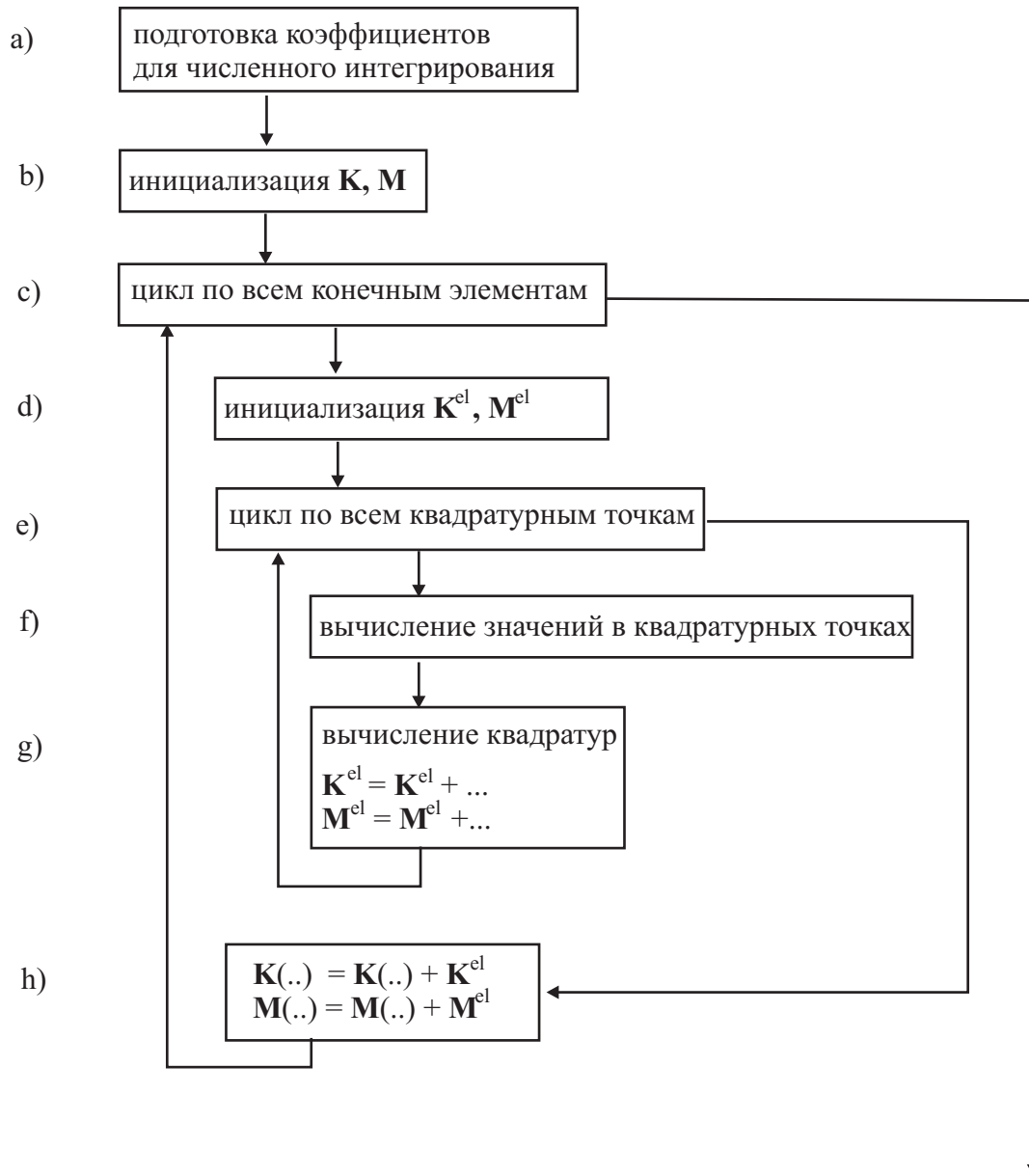


Рис. 5.4: Детальная блок-схема программы МКЭ

Блок-схема программы показана на Рис. 5.4. Программа содержит два цикла (один вложен в другой). Внешний цикл собирает глобальные матрицы массы и жесткости из элементных по формулам (2.11), (2.17) (выполняет ассемблирование). Внутренний цикл вычисляет элементные матрицы  $\hat{\mathbf{M}}^{(m)}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}^{(m)}$ , выполняя интегрирование в (2.16) и (2.24) по квадратурной формуле (3.7).

На Рис. 5.4 и в листинге ниже элементные матрицы  $\hat{\mathbf{K}}^{(m)}$  и  $\hat{\mathbf{M}}^{(m)}$  обозначены символами  $\mathbf{K}^{el}$  и  $\mathbf{M}^{el}$ .

Распечатка простейшей программы приведена в следующем листинге. Для удобства оставлены номера строк. Кроме того, в комментариях установлено соответствие между фрагментами программы и блоками на Рис. 5.3.

```
1 load mesh
```

```

2 num_nodes = size(coordinates , 1) ;    % Это J
3 num_squares = size(connectivity , 1) ; % Это Q

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Подготовка коэффициентов для численного интегрирования
% Блок а)
4 N_quad=3; % Выбираем одномерные трехточечные одномерные квадратуры
5 [x,w]=GaussQuadratures(N_quad); % Вызываем подпрограмму
6 X=zeros(N_quad^2,2); % массив квадратурных точек в 2D
7 W=zeros(N_quad^2,1); % массив квадратурных весов в 2D
8 ii=1; % формируем точки и веса для двумерной квадратуры
9 for n1=1:N_quad
10     for n2=1:N_quad
11         X(ii,:)=[x(n1),x(n2)];
12         W(ii)=w(n1)*w(n2);
13         ii=ii+1;
14     end
15 end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Инициализируем глобальные матрицы K и M, Блок b)
16 M=zeros(num_nodes,num_nodes);
17 K=zeros(num_nodes,num_nodes);
% на самом деле, правильно вот так:
% см. ниже
% M=sparse(num_nodes,num_nodes);
% K=sparse(num_nodes,num_nodes);

18 for m=1:num_squares % Внешний цикл. Ассемблирование. Блок c)
19     nodes= connectivity(m,:); % Берем узлы, относящиеся к элементу m
20     C = coordinates(nodes,:); % Берем координаты этих узлов (это матрица C)

21     Mel=zeros(4,4); % Инициализуем элементные матрицы K и M для элемента m
22     Kel=zeros(4,4); % Блок d)

23     for k=1:N_quad^2 % Внутренний цикл. Квадратурное интегрирование. Блок e)

24         % Вычисляем значения интеграндов в квадратурных точках. Блок f)
25         [A,B]=ShapeFunctions(X(k,1),X(k,2)); % получаем матрицы A и B
26         slagaемое_M = A*A'*abs(det(C'*B));
27         E = B*inv((C'*B)) ;
28         slagaемое_K = E*E'*abs(det(C'*B));

29         Mel=Mel+slagaемое_M*W(k); % Вычисляем квадратуры. Блок g)
30         Kel=Kel+slagaемое_K*W(k);
31     end

32     M(nodes,nodes)=M(nodes,nodes)+Mel; % Ассемблируем матрицы. Блок h)
33     K(nodes,nodes)=K(nodes,nodes)+Kel;

```



```
34 end
```

```
35 save KM_matrices K M
```

Прокомментируем программу.

— Из строк 2, 3 следует, что количества узлов и конечных элементов не хранятся в отдельных переменных, а вычисляются по мере надобности. Кроме того, имена выбираются информативными.

— В строках 4, 5 выбираются трехточечные гауссовы квадратуры. В строках 6 – 15 из одномерных делаются двумерные квадратуры по формулам (3.8).

— В строках 16, 17 матрицы **K** и **M** инициализируются нулевыми матрицами размера  $J \times J$ . Это будет работать только для небольших сеток. Правильнее использовать разреженные (sparse) матрицы (см. ниже).

— В строках 19, 20 начинаем работать с элементом номер  $m$ . Делаем два важных шага. Получаем номера узлов, относящихся к данному элементу. Затем получаем координаты этих узлов. Обратите внимание, каким образом используются возможности Матлаба по взятию подматриц. Матрица **C** — это в точности та матрица, которая была введена в (2.26).

— В строках 21, 22 инициализуем элементные матрицы  $\hat{\mathbf{M}}^{(m)}$  и  $\hat{\mathbf{K}}^{(m)}$  (точнее сказать, инициализуем их подматрицы  $4 \times 4$ , в которых будут стоять ненулевые элементы). Здесь использование разреженных матриц не имеет смысла, так что инициализуем обычными нулевыми матрицами.

— Цикл 23–31 производит квадратурное интегрирование. Для каждой квадратурной точки  $(X_{k,1}, X_{k,2})$  выполняются следующие действия. В строке 25 для этой точки вычисляются матрицы **A** из (2.15) и **B** из (2.22). Это делается с помощью функции `ShapeFunctions`. В строках 26–28 вычисляются квадратурные слагаемые по формулам (2.16), (2.24). Строки 29, 30 представляют собой квадратурную формулу (3.7).

— В строках 32, 33 происходит ассемблирование матриц. При этом вычисленные ненулевые части элементных матриц прибавляются “в нужном месте”, т. е. к подматрицам (`nodes, nodes`).

### Вспомогательные функции

Для полноты изложения, а также для демонстрации отсутствия чудесного в этом конкретном месте, приведем распечатки вспомогательных функций `ShapeFunctions` и `GaussQuadratures`.

```
function [A,B]= ShapeFunctions(x1, x2) % x1 = xi, x2 = eta
```

```
A = [(1-x1)*(1-x2)/4;      % N1
      (1+x1)*(1-x2)/4;      % N2
      (1+x1)*(1+x2)/4;      % N3
      (1-x1)*(1+x2)/4 ];    % N4
```

```
B = [ -(1-x2)/4,  -(1-x1)/4;    % dN1/dx1  dN1/dx2
       (1-x2)/4,  -(1+x1)/4;    % dN2/dx1  dN2/dx2
       (1+x2)/4,  (1+x1)/4;     % dN3/dx1  dN3/dx2
       -(1+x2)/4,  (1-x1)/4 ];  % dN4/dx1  dN4/dx2
```

---

```

function [coor,w]=GaussQuadratures(n)

x2=[-3^(-0.5);3^(-0.5)];
w2=[1;1];

x3=[-0.6^0.5;0;0.6^0.5];
w3=[5/9;8/9;5/9];

x4=[-(3/7-2/7*1.2^0.5)^0.5;-(3/7+2/7*1.2^0.5)^0.5;(3/7-2/7*1.2^0.5)^0.5; ...
     (3/7+2/7*1.2^0.5)^0.5];
w4=[(18+30^0.5)/36;(18-30^0.5)/36;(18+30^0.5)/36;(18-30^0.5)/36];

x5=[-(((5+2*(10/7)^0.5))^0.5)/3;-((5-2*(10/7)^0.5)^0.5)/3; 0; ...
     ((5-2*(10/7)^0.5)^0.5)/3;((5+2*(10/7)^0.5)^0.5)/3];
w5=[(322-13*70^0.5)/900;(322+13*70^0.5)/900;128/225;(322+13*70^0.5)/900; ...
     (322-13*70^0.5)/900];

switch n
  case 2
    coor=x2;
    w=w2;
  case 3
    coor=x3;
    w=w3;
  case 4
    coor=x4;
    w=w4;
  case 5
    coor=x5;
    w=w5;
  otherwise
    coor=0;
    w=0;
end

```

### Отыскание решения задачи (5.1)

Прокомментируем уровень III диаграммы Рис. 5.1, т. е. солвер. Для его реализации необходимо построить правую часть  $F$  по формуле (6.12), а затем решить линейное уравнение (5.8). Вычисление  $F$  сводится к численному интегрированию, поэтому проблем не вызывает. Обратимся к решению системы (5.8). Есть повод снова поговорить о существовании и единственности решения.

Рассмотрим систему (5.8). Для такой системы условие однозначной разрешимости хорошо известно. А именно, необходимо построить однородное сопряженное уравнение. Поскольку  $\omega$  и  $c$  действительны, а матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  действительны и симметричны, сопряженное уравнение имеет вид

$$\left( \mathbf{K} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{V} = 0. \quad (5.9)$$

Если уравнение (5.9) не имеет нетривиальных решений, то уравнение (5.8) однозначно разрешимо при любой правой части. Разумеется, это конечномерный вариант альтернативы Фредгольма, приведенной выше.

Наличие у уравнения (5.9) нетривиальных решений указывает на то, что данное значение  $\omega$  принадлежит спектру дискретизованной задачи. Очевидно, в этом случае отношение  $\omega^2/c^2$  является обобщенным собственным значением задачи

$$\mathbf{KV} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{MV},$$

и поэтому может быть найдено командой `eig(K,M)`. Отыскание этих собственных значений и сравнение их с формулой (5.4) может быть хорошей проверкой работоспособности метода.

### О разреженных матрицах

Оценим число узлов в какой-нибудь реальной задаче. Пусть производится моделирование звука в кубометре воздуха. Пусть выбран шаг сетки 1 см. Можно считать, что для неплохой точности достаточно на длину волны иметь 6 шагов сетки. Таким образом, можно моделировать процессы до 5 кГц. Это довольно скромный объем и скромная частота. При этом сетка должна содержать порядка миллиона узлов.

Заметим, что размер матриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  должен быть порядка  $10^6 \times 10^6$ , т. е.  $10^{12}$ . Такая матрица не влезла бы в память обычного компьютера. При прямолинейном подходе любое сколько-нибудь осмысленное моделирование стало бы невозможным.

К счастью, данное затруднение можно преодолеть. Дело в том, что большая часть элементов этих матриц нулевые. Например, как мы видели раньше, в одномерном случае матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  трехдиагональные. В двумерном и трехмерном случае число ненулевых элементов больше, но все равно это несколько миллионов, а не  $10^{12}$ . Такие матрицы называют разреженными. Существуют методы работы с разреженными матрицами. Например, очевидно, что можно хранить только ненулевые элементы. Самый прямой путь — хранить их в виде троек

$$(m, n, a_{m,n}),$$

где  $m$  и  $n$  — номер строки и столбца, где расположен ненулевой элемент  $a_{m,n}$ . Такой способ применяется редко. Более частое разреженные матрицы хранят по строкам или по столбцам (последний способ стандартный в Матлабе). Имеется набор алгоритмов работы с разреженными матрицами (умножения, решения линейных систем и др.)

Таким образом, имеет смысл объявить матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  разреженными. Сделать это весьма просто. Для этого надо при инициализации написать не

```
M = zeros(num_nodes, num_nodes) ;
```

а

```
M = sparse(num_nodes, num_nodes) .
```

Матрица  $\mathbf{M}$  будет объявлена как разреженная, и все действия с ней будут происходить как с разреженной матрицей. При этом для обозначения действий сохраняются знаки  $+$ ,  $-$ ,  $*$  и др. Заметим, что команда для вычисления собственных значений меняется. Вместо `eig` используется `eigs`.

**Задачи**

1. Реализовать МКЭ для прямоугольной области размером  $2 \times 3$  с шагом сетки 0.1 и  $c = 1$ . Найти 10 первых собственных частот для такой области. Построить таблицу, где для каждой частоты указывались бы индексы  $m$  и  $n$  и отклонение от формулы (5.4).

## §6. Учет граничных условий. Слабая формулировка задач математической физики

До настоящего момента рассматривались одномерные и двумерные задачи математической физики. На границах рассматриваемых областей ставились однородные граничные условия Неймана и Дирихле. Разумеется, все многообразие задач этим не исчерпывается. Нам бы хотелось уметь строить метод конечных элементов для:

— неоднородных условий Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \phi(l), \quad (6.1)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к границе рассматриваемой области;

— неоднородных условий Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = \psi(l), \quad (6.2)$$

где  $\psi$  — некоторая заданная на границе достаточно гладкая функция;

— однородных или неоднородных импедансных условий

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \phi(l), \quad (6.3)$$

где  $\beta$  — комплексный параметр;

— различных типов граничных условий для динамики упругого тела (заданные смещения границы, заданные напряжения на границе);

— условий сопряжения упругого тела и жидкости на границе.

Первые два пункта относятся, например, к решению волнового уравнения (1.1) в области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ .

Для постановки граничных условий необходимо дать определение слабой формулировки (в математическом смысле) той или иной задачи математической физики. Далее необходимо перейти от чисто математической формулировки к приближенной численной формулировке.

Во всем, что так или иначе касается математики, мы будем оставаться “на физическом уровне строгости”. Наша цель — получить рецепты для практических вычислений. Точные формулировки и доказательства математических теорем можно найти в обширной литературе (рекомендуем [1]).

**Неоднородные граничные условия Неймана для уравнения Гельмгольца в двумерной области. Слабая формулировка задачи**

Будем решать уравнение

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = -f(x, y) \quad (6.4)$$

с неоднородным граничным условием Неймана (6.1). Здесь  $k^2 = \omega^2/c^2$  — волновое число,  $\omega$  — круговая частота вынуждающей силы,  $c$  — скорость звука.

Если функция  $u$  обладает в области  $\Omega$  непрерывными вторыми производными, если она односторонне непрерывна с первыми производными на границе  $\partial\Omega$ , и если она удовлетворяет (6.4), (6.1), то говорят, что эта функция удовлетворяет задаче в *сильной постановке*.

Перейдем к формулировке *слабой постановки*. Пусть имеется некоторый класс  $H$  весовых функций, например, класс функции, имеющих везде все производные. Пусть также имеется класс функций  $H'$ , в котором мы ищем решения. Слабая формулировка задачи такая:

Найти такую функцию  $u \in H'$ , что для любой весовой функции  $w \in H$  выполняется равенство:

$$\int_{\partial\Omega} w(l)\phi(l)dl + \int_{\Omega} (-\nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = 0. \quad (6.5)$$

В первом члене под  $w(l)$  имеется в виду ограничение весовой функции  $w$  на границу области.

Необходимо показать, что слабая формулировка эквивалентна сильной. Пусть  $u$  — сильное решение задачи. Домножим (6.4) на  $w$  и проинтегрируем по частям (предполагая, что такое интегрирование корректно для выбранных  $H$  и  $H'$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u + k^2 u + f) w ds &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}(w \nabla u) - \nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = \\ &= \int_{\partial\Omega} w(l)\phi(l)dl + \int_{\Omega} (-\nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = 0. \end{aligned}$$

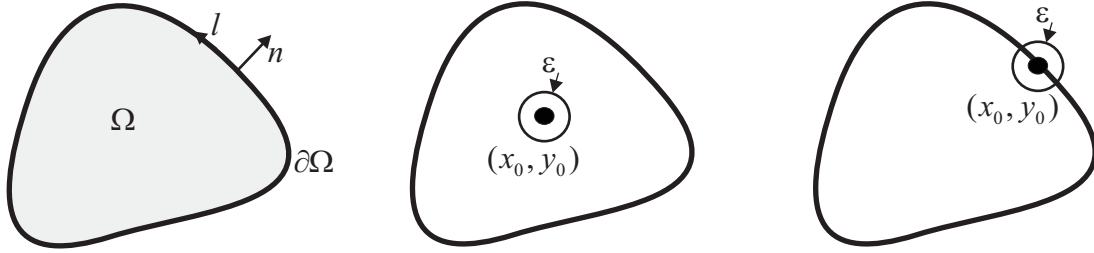


Рис. 6.1: Область  $\Omega$  и точка  $(x_0, y_0)$

Пусть теперь  $u$  — решение слабой задачи. Возьмем в качестве весовой функции  $w$  некоторое приближение к дельта-функции. Таким приближением может быть гауссиана

$$\exp\{-((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)/\varepsilon^2\}$$

при очень малом  $\varepsilon$ . Точка  $(x_0, y_0)$  должна быть достаточно далеко от границы области (см. Рис. 6.1 в середине). Прделаем те же выкладки в обратную сторону (граница области никак не участвует в вычислениях):

$$0 = \int_{\Omega} (-\nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = \int_{\Omega} (\Delta u + k^2 u + f) w ds,$$

то есть уравнение (6.2) выполняется усредненно по маленькой области радиусом  $\varepsilon$ . Если функция  $u$  не слишком быстро меняется на этой области, это означает приближенное выполнение уравнения в точке  $(x_0, y_0)$ .

Будем уменьшать радиус области усреднения  $\varepsilon$  и получим, что в пределе уравнение выполняется точно в точке  $(x_0, y_0)$ . Это означает, что мы можем доказать выполнение уравнения (6.1) во всех внутренних точках области  $\Omega$ .

Теперь возьмем такую же весовую функцию, но с точкой  $(x_0, y_0)$  на границе области (см. Рис. 6.1 справа). Прделаем выкладки:

$$0 = \int_{\partial\Omega} w(l)\phi(l)dl + \int_{\Omega} (-\nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = \\ \int_{\partial\Omega} w \left( \phi(l) - \frac{\partial u(l)}{\partial n} \right) dl + \int_{\Omega} (\Delta u + k^2 u + f) w ds.$$

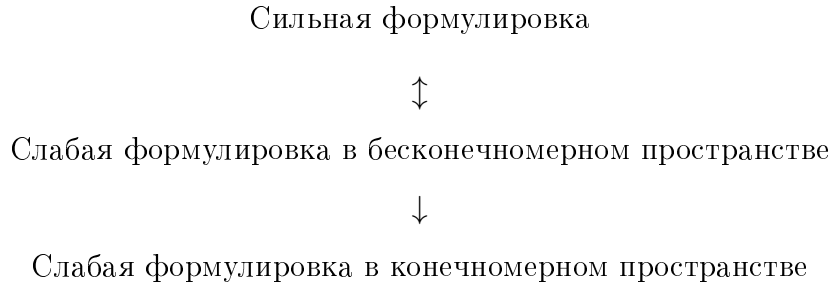
Второе слагаемое равно нулю, поскольку уравнение выполняется внутри области. Это означает, что граничное условие (6.1) выполняется усредненно на участке границы длиной порядка  $\varepsilon$ . Устремим  $\varepsilon$  к нулю. Можно заключить, что граничное условие выполняется в точке границы с координатами  $(x_0, y_0)$ . Таким образом, если функция  $u$  является решением задачи в слабой постановке, то она удовлетворяет уравнению и граничному условию.

Заметим, что если граничные условия Неймана являются однородными, т. е.  $\phi = 0$ , первый член в (6.5) отсутствует, и уравнение слабой формулировки имеет вид

$$\int_{\Omega} (-\nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = 0. \quad (6.6)$$

### Переход к приближенному решению задачи

Все рассуждения, сделанные выше, относились к точной задаче. Теперь необходимо перейти к приближенному решению задачи. В слабой постановке это делается наиболее естественным образом, а именно, решается задача в слабой формулировке (6.5), но пространства  $H'$  и  $H$  аппроксимируются конечномерными “аппроксимационными” пространствами. Схема применения метода описывается такой диаграммой:



Введем сетку из многоугольников в области  $\Omega$ . Граница  $\partial\Omega$  окажется приближенной ломаной линией. На этом этапе проще всего думать, что граница области  $\Omega$  была многоугольником изначально, иначе придется строить отображение старой границы на новую границу. В любом случае будем называть новую область также  $\Omega$ , а ее границу  $\partial\Omega$ . Пусть сетка имеет  $J$  узлов (узлы, которые попадают на границу, тоже считаются). Введем  $J$  функций формы  $N_j(x, y)$ . Введем на границе сеточной области координату  $l$ . Значения (т. е. ограничения) только что введенных функций формы на границе обозначим  $\check{N}_j(l)$ . Очевидно, эти функции ненулевые только для узлов, принадлежащих границе

Пусть  $H$  и  $H'$  представляют собой конечномерные линейные пространства, определяемые формулами

$$u = \sum_{j=1}^J u_j N_j(x, y), \quad (6.7)$$

которые мы раньше считали формулами аппроксимации. В качестве  $u_j$  берутся узловые значения функций. Значения  $u_j$  являются свободными параметрами, поэтому пространства решений и весовых функций  $J$ -мерные.

Пусть также

$$w = \sum_{j=1}^J w_j N_j(x, y),$$

Заметим, что

$$\int_{\Omega} w u \, ds = \sum_{m=1}^J \sum_{j=1}^J w_m \int_{\Omega} N_m N_j \, ds u_j, \quad (6.8)$$

т. е. естественным образом появляется матрица  $\mathbf{M}$  с элементами

$$\mathbf{M}_{m,j} = \int_{\Omega} N_m(x, y) N_j(x, y) \, ds. \quad (6.9)$$

Если векторы–столбцы узловых значений  $u_j$  и  $w_j$  есть  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{W}$ , то (6.8) записывается как  $\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$ . Аналогично,

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla u \, ds = \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{U}, \quad (6.10)$$

где

$$\mathbf{K}_{m,j} = \int_{\Omega} \nabla N_m \cdot \nabla N_j \, ds. \quad (6.11)$$

Именно эти две матрицы и назывались раньше матрицами массы и жесткости задачи.

Введем также вектор  $\mathbf{F}$ , состоящий из величин

$$f_j = \int_{\Omega} f N_j \, ds \quad (6.12)$$

и вектор  $\mathbf{P}$ , состоящий из величин

$$p_j = \int_{\partial\Omega} \phi(l) \check{N}_j(l) \, dl. \quad (6.13)$$

Для произвольной функции  $w \in H$  уравнение (6.5) запишется как

$$(-\mathbf{K} + k^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = -\mathbf{F} - \mathbf{P}. \quad (6.14)$$

Это и есть формулировка метода конечных элементов для неоднородных граничных условий Неймана.

Для однородных граничных условий Неймана ( $\phi(l) = 0$ ) все еще проще:

$$(-\mathbf{K} + k^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = -\mathbf{F}. \quad (6.15)$$

Остановимся на этом подробнее. Матрицы массы и жесткости определяются всегда одинаковым образом (как (6.9) и (6.11)). В этих определениях граничные узлы никак не выделяются. Вся остальная формулировка также не содержит упоминания о границе. Это означает, что если “просто строить метод конечных элементов”, забыв о границе, то решение, полученное в результате, будет удовлетворять однородным граничным условиям



Неймана. Это необходимо запомнить. За это замечательное свойство граничные условия Неймана называют *естественными*.

### Неоднородные граничные условия Дирихле

Пусть на границе области заданы условия (6.2). Мы уже знаем, что делать, если условия однородные. Для этого надо ввести неизвестные только для значений поля во внутренних узлах (см. Рис. 6.2), а в качестве функций формы брать тоже только функции формы для этих внутренних узлов. Получится формулировка, сходная с (6.15), только в (6.15) входят все узлы (внутренние и граничные). В данном разделе мы хотели бы рассмотреть неоднородные условия Дирихле, а также немного унифицировать подходы, а именно, мы хотели бы, чтобы для задачи Дирихле, Неймана, импедансной или любой другой использовались одни и те же матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ .

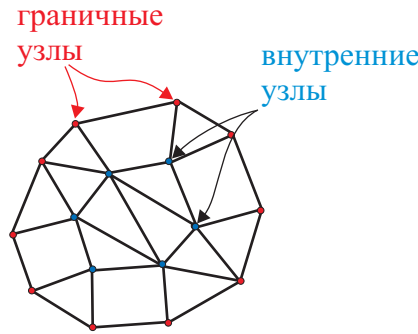


Рис. 6.2: Граничные и внутренние узлы сетки

Перенумеруем узлы таким образом, чтобы первые  $Q$  из них были внутренними, а оставшиеся  $J - Q$  — граничными. Будем трактовать граничное условие (6.2) как требование, чтобы узловые значения поля  $u_j$  при  $j = Q + 1, \dots, J$  были равны заданным величинам:

$$u_j = \psi_{j-Q}, \quad j = Q + 1, \dots, J. \quad (6.16)$$

Пусть это условие выполняется. Тогда аппроксимация поля будет иметь вид

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^Q u_j N_j(x, y) + \sum_{j=Q+1}^J \psi_{j-Q} N_j(x, y). \quad (6.17)$$

Подставим это выражение в уравнение (6.4), домножим на одну из функций формы  $N_m$ ,  $m = 1, \dots, Q$ , то есть относящихся только к внутренним узлам, и проинтегрируем. Заметим, что все такие весовые функции обращаются в ноль на границе, поэтому при интегрировании по частям не возникает граничных интегралов. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^Q (-K_{m,j} + k^2 M_{m,j}) u_j + \sum_{j=Q+1}^J (-K_{m,j} + k^2 M_{m,j}) \psi_{j-Q} = -F_m, \quad m = 1, \dots, Q. \quad (6.18)$$

Это и есть формулировка метода конечных элементов для неоднородных условий Дирихле. Нетрудно видеть, что (6.18) представляет собой систему из  $Q$  уравнений для  $Q$

неизвестных  $u_1, \dots, u_Q$  (узловые значения для внутренних узлов). Далее мы немного переформулируем (6.18) так, чтобы она имела изящный матричный вид.

Введем проекционные матрицы  $\Pi^i$  и  $\Pi^b$  следующим образом. Пусть матрица  $\Pi^i$  имеет размер  $Q \times J$  и содержит все нули, кроме элементов главной диагонали  $\Pi^i_{m,m} = 1$ . Матрица  $\Pi^b$  имеет размер  $(J-Q) \times J$  и содержит все нули, кроме элементов  $\Pi^b_{m,m+Q} = 1$ . Для случая  $J = 7, Q = 4$  матрицы  $\Pi^i$  и  $\Pi^b$  имеют следующий вид:

$$\Pi^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$\Pi^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

Данные матрицы проектируют вектор всех узловых значений на вектор граничных узловых значений ( $\Pi^b$ ) и на вектор внутренних узловых значений ( $\Pi^i$ ). Заметим, что блочная матрица

$$\begin{pmatrix} \Pi^i \\ \Pi^b \end{pmatrix}$$

есть единичная матрица.

Если ввести вектор-столбец из функций формы

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} N_1(x, y) \\ \dots \\ N_J(x, y) \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

то формула аппроксимации запишется в виде

$$u = U^T \Pi^i N + \Psi^T \Pi^b N, \quad (6.22)$$

где  $U$  — вектор-столбец из  $Q$  внутренних узловых значений  $u_j$ , а  $\Psi$  — вектор-столбец из  $J - Q$  предписанных узловых значений  $\psi_j$ .

Уравнение (6.18) запишется как

$$\Pi^i (-\mathbf{K} + k^2 \mathbf{M}) (\Pi^i)^T U = -\Pi^i F - \Pi^i (-\mathbf{K} + k^2 \mathbf{M}) (\Pi^b)^T \Psi. \quad (6.23)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  те же, что и для задачи Неймана (для всех узлов).

Граничные условия Дирихле реализуются совсем не так, как граничные условия Неймана. Их называют *существенные граничные условия*.

### Импедансные граничные условия

Условия (6.3) ближе к условиям Неймана, чем к условиям Дирихле. Повторяя выкладки, использованные для вывода слабой формулировки (6.5), получаем слабую формулировку

$$\int_{\partial\Omega} w(l)(\phi(l) - \beta u(l)) dl + \int_{\Omega} (-\nabla w \cdot \nabla u + k^2 w u + w f) ds = 0, \quad (6.24)$$

т. е. граничные условия (6.3) можно рассматривать как неоднородные условия Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \phi(l) - \beta u. \quad (6.25)$$

Переход к конечномерным пространствам приводит к следующей формулировке МКЭ:

$$(-\mathbf{K} + k^2\mathbf{M}) \mathbf{U} = -\mathbf{F} - \mathbf{P} + \beta\mathbf{V}, \quad (6.26)$$

где  $\mathbf{U}$  — вектор из (всех) узловых значений,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{P}$  вводятся так же, как и раньше ((6.12) и (6.13)), вектор-столбец  $\mathbf{V}$  состоит из величин

$$v_m = \int_{\partial\Omega} u(l)\check{N}_m(l)dl, \quad m = 1, \dots, J. \quad (6.27)$$

Введем “граничную матрицу массы”  $\check{M}_{m,j}$  размерности  $J \times J$ , состоящую из элементов

$$\check{M}_{m,j} = \int_{\partial\Omega} \check{N}_m(l)\check{N}_j(l)dl. \quad (6.28)$$

Заметим, что элементы этой матрицы не равны нулю только когда  $j$  и  $m$  — соседние граничные узлы. заметим также, что

$$\int_{\partial\Omega} u(l)\check{N}_m(l)dl = \sum_{j=1}^J u_j \int_{\partial\Omega} \check{N}_m(l)\check{N}_j(l)dl.$$

Поэтому (6.26) записывается как

$$(-\mathbf{K} + k^2\mathbf{M} - \beta\check{\mathbf{M}})\mathbf{U} = -\mathbf{F} - \mathbf{P}, \quad (6.29)$$

Может возникнуть логичный вопрос — что будет, если импедансные граничные условия (6.3) рассматривать не как неоднородные условия Неймана, а как неоднородные условия Дирихле? Мы рекомендуем попробовать проделать соответствующие выкладки.

### Метод конечных элементов и граничные условия с вариационной точки зрения

Имеется точка зрения, которую полезно иметь в виду, даже если ей непосредственно не пользуешься. Это энергетическая или вариационная точка зрения. Эта точка зрения немного проясняет ситуацию везде, а при рассмотрении трехмерной задачи в упругом теле проясняет ситуацию очень сильно. Она состоит в следующем. Пусть ищется, например, поле продольных смещений в однородном упругом стержне. Введение аппроксимации с узловых значений делает эту задачу конечномерной. Итак, имеется конечный набор степеней свободы  $u_j(t)$ , описывающий механическую систему. Из курса теоретической механики мы знаем, как действовать. Вычислим потенциальную  $E_p$  и  $E_k$  и кинетическую энергию системы. Пусть эти энергии записываются в виде

$$E_p = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}, \quad E_k = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} \quad (6.30)$$

для некоторых симметричных действительных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Пусть сперва вынуждающие силы отсутствуют. Выпишем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{2}\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (6.31)$$

Уравнения движения (уравнения Лагранжа) записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (6.32)$$

Выполним дифференцирование выражений (6.31) (учитывая симметричность матриц) и запишем результат в матричной форме:

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{U}} = -\mathbf{A}\mathbf{U} \quad (6.33)$$

Данное уравнение очень напоминает уравнения метода конечных элементов в среде с постоянными свойствами  $c$ , например,

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{M}. \quad (6.34)$$

Разумеется, такое сходство не может быть случайным. Рассмотрим кинетическую энергию среды. Если плотность среды  $\rho$ , а смещение частиц  $u$ , то энергия есть

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho (\dot{u})^2 ds.$$

Учтем формулу аппроксимации (1.4). Получим

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^J u_m \int_{\Omega} \rho N_m N_j ds u_j. \quad (6.35)$$

Интеграл дает элементы матрицы  $\mathbf{B}$ . Он же дает элементы матрицы  $\rho \mathbf{M}$  при условии постоянства  $\rho$  в среде. Заметим, что выражение (6.35) дает ясное представление о том, что делать, если плотность непостоянна (а именно, надо вносить плотность под знак интеграла при вычислении матрицы массы).

Точно так же, логично предположить, что плотность упругой потенциальной энергии пропорциональна квадрату деформации:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g (\nabla u)^2 ds.$$

Это приводит к

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^J u_m \int_{\Omega} g \nabla N_m \cdot \nabla N_j ds u_j, \quad (6.36)$$

что, при постоянном  $g$  дает матрицу жесткости. Выпишем важные формулы. При постоянных  $g$  и  $\rho$

$$\mathbf{A} = g\mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = \rho\mathbf{M}, \quad c^2 = g/\rho. \quad (6.37)$$

Надо помнить, что всегда матрица массы — это коэффициент в выражении для кинетической энергии, а матрица жесткости — коэффициент в выражении для потенциальной.

Описанный подход привлекает “на нашу сторону” всю мощь теоретической механики и физическую интуицию. Внешние силы, приложенные к узлам, учитываются в уравнениях Лагранжа известным образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = f_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (6.38)$$

где  $f_j$  — сила, приложенная к узлу с индексом  $j$ . Как и раньше, поскольку силы не обязательно локализованы в узлах,  $f_j$  представляет собой силы, взвешенные с коэффициентом  $N_j$  по всей области.

Неоднородные граничные условия Неймана описывают силы, приложенные к границе области. А именно,

$$g \frac{\partial u}{\partial n} = f_{\text{ext}}, \quad (6.39)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к области. С точки зрения механики, поверхностные силы ничем не отличаются от объемных (все равно система дискретная), поэтому эти силы стоят вместе в (6.14).

Если рассматривается статическая задача, можно считать, что метод конечных элементов соответствует минимизации потенциальной энергии с учетом принципа виртуальной работы.

Далее можно рассматривать системы со связями, метод неопределенных множителей и т. д. Энергетический подход весьма плодотворен и позволяет, как минимум, оставаться в рамках здравого смысла.

Необходимо сделать важное замечание. Пусть рассматривается акустическая задача, причем в качестве основной переменной выбирается акустический потенциал  $u$ . Тогда скорость частиц описывается как  $-\nabla u$ , а давление как  $\rho \partial u / \partial t$ . Скорость естественным образом связана с кинетической энергией, а давление — с потенциальной. Это означает, что в формуле (6.30) выражения  $U^T \mathbf{A} U$  и  $U^T \mathbf{B} U$  меняются ролями.

### Сращивание твердого тела и жидкости

Один из важных вопросов, возникающих при моделировании акустических явлений, это корректное моделирование границы твердого тела и жидкости (газа). Например, это может быть задача о моделировании пьезоэлектрического излучателя в воде, мембраны в воздухе и т. д. Проблема заключается в том, что акустические поля в жидкой среде и в упругом теле задаются по-разному. В жидкой среде основной величиной является акустический потенциал или звуковое давление, а в твердом теле обычно задаются смещения точек среды.

Рассмотрим задачу сопряжения упругой и жидкой сред на простейшем примере. Задача будет одномерной по пространству и стационарной по времени. Последнее означает, что зависимость всех величин от времени выбирается в виде  $\exp\{-i\omega t\}$  и не указывается.

Пусть область  $0 \leq x \leq L_1$  занята упругим телом. Пусть его плотность равна  $\rho_1$ , а продольная жесткость равна  $g$ . Продольное смещение точек среды описывается неизвестной функцией  $\xi(x)$ . Деформация среды есть  $d\xi/dx$ , а напряжения в среде есть  $g d\xi/dx$ . Уравнение движения в упругой среде есть

$$\frac{d^2 \xi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_1^2} \rho_1 \xi(x) = 0, \quad (6.40)$$

где  $c_1^2 = g/\rho_1$ .

Пусть область  $L_1 \leq x \leq L_2$  занята жидкостью. Плотность жидкости равна  $\rho_2$ , скорость звука равна  $c_2$ . Поле в жидкости описывается акустическим потенциалом  $\eta(x)$ . Напомним основные формулы, связывающие акустический потенциал с давлением  $p$  и со скоростью частиц  $v$ :

$$p = -i\omega \rho_2 \eta \left( = \rho_2 \frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \quad v = -\frac{d\eta}{dx}. \quad (6.41)$$

Уравнение движения в жидкой среде есть

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2}\eta(x) = -f(x), \quad (6.42)$$

где  $f(x)$  — некоторая функция источников.

Уравнения (6.40) и (6.42) выглядят похоже, но величины, в них входящие, имеют разную природу. Сравним смещение слева и акустический потенциал справа. Для этого заметим, что физически условия сращивания следующие. Во-первых, смещение справа и слева должно быть одно и то же. Несколько проще следить не за смещением, а за скоростью:

$$-i\omega\xi(L_1) = -\frac{d\eta(L_1)}{dx}. \quad (6.43)$$

Во-вторых, сила, приложенная к границе слева, должна компенсировать силу, приложенную справа:

$$-g\frac{d\xi(L_1)}{dx} = -i\omega\rho_2\eta(L_1) \quad (6.44)$$

Уравнения (6.43) и (6.44) представляют собой граничные условия на общей границе сред. Они выглядят достаточно неожиданно. Условие (6.43) есть неоднородное условие Дирихле для левой среды и Неймана для правой, а (6.44) — наоборот.

Перейдем к численной реализации условий (6.43), (6.44). При этом будем трактовать (6.43) как неоднородное условие Неймана для жидкости, а (6.44) — как условие Неймана для упругой среды. Вводя в точке  $x = L_1$  внешние нормали к твердому телу и жидкости, получаем граничные условия в более стандартной форме:

$$\frac{d\xi(L_1)}{dn} = i\omega\frac{\rho_2}{g}\eta(L_1), \quad \frac{d\eta(L_1)}{dn} = -i\omega\xi(L_1). \quad (6.45)$$

Будем моделировать среды раздельно. Для каждой из них построим сетки. Для твердого тела число узлов будет равно  $J_1$ , а для жидкости  $J_2$ . Пусть точка  $x = L_1$  в обеих сетках соответствует узлу с номером 1. построим матрицы массы и жесткости для сред обычным образом. Для твердого тела это будут матрицы  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{K}_1$ , а для жидкости  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{K}_2$ . Также обычным образом построим вектор источников  $\mathbf{F}$  для жидкости. Если бы общей границы не было, среды описывались бы уравнениями

$$-\mathbf{K}_1\Xi + \frac{\omega^2}{c_1^2}\mathbf{M}_1\Xi = 0, \quad (6.46)$$

$$-\mathbf{K}_2\Theta + \frac{\omega^2}{c_2^2}\mathbf{M}_2\Theta = -\mathbf{F}, \quad (6.47)$$

где  $\Xi$  и  $\Theta$  — векторы узловых значений  $\xi$  и  $\eta$ .

Применим формулу (6.14). Интегрирование по общей границе вырождается во взятие значения в точке. Ограничения конечных элементов на общую границу тоже вычисляются просто: это единица для первого элемента и ноль для остальных.

Введем векторы-столбцы  $\mathbf{Q}_1$  высотой  $J_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  высотой  $J_2$ . В них все элементы — нули, кроме первого. Первый элемент равен единице. Эти векторы “выделяют” первую строку. Уравнение (6.14) для упругого тела и жидкости запишется как

$$-\mathbf{K}_1\Xi + \frac{\omega^2}{c_1^2}\mathbf{M}_1\Xi = -i\omega\frac{\rho_2}{g}\eta_1\mathbf{Q}_1, \quad -\mathbf{K}_2\Theta + \frac{\omega^2}{c_2^2}\mathbf{M}_2\Theta = -\mathbf{F} + i\omega\xi_1\mathbf{Q}_2. \quad (6.48)$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\eta_1$  — узловые значения неизвестных функций на общей границе.

Продemonстрируем, что предлагаемые граничные условия работают хорошо. Для этого возьмем одну и ту же среду, по по-разному описываемую. Заметим, что для одномерной задачи упругая среда не отличается от жидкой физически, отличается только описание. Пусть объемная жесткость справа и слева будет равна единице, плотность справа и слева будет равна единице. Решим уравнения (6.48). Построим слева колебательную скорость как  $-i\omega\xi$ , а справа колебательную скорость как  $-d\eta/dx$ . Граница должна быть незаметна.

Чтобы все было совсем понятно, поясним, каким образом можно решить уравнения (6.48) совместно. Будем искать вектор неизвестных в блочной форме, т. е. в форме  $(\Xi^T, \Theta^T)^T$ . Для этого вектора имеем уравнение, опять же, в блочной форме:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{K}_1 + \omega^2/c_1^2\mathbf{M}_1 & i\omega\rho_2/g\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^T \\ -i\omega\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1^T & -\mathbf{K}_2 + \omega^2/c_2^2\mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Xi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

0 в правой части означает вектор-столбец из нулей высотой  $J_2$ . Данное уравнение можно решать непосредственно.

Рис. 6.3 иллюстрирует эту ситуацию. Точка  $x = 1$  соответствует  $L_1$ . Возбуждение приложено к точке  $L = 1.5$ . Граница между средами почти не заметна. Для моделирования выбраны значения  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 2$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $\omega = 1$ . Число узлов для обеих сред выбрано равным 101. В качестве возбуждения берется дельта-функция, локализованная в точке  $x = 1.5$ .

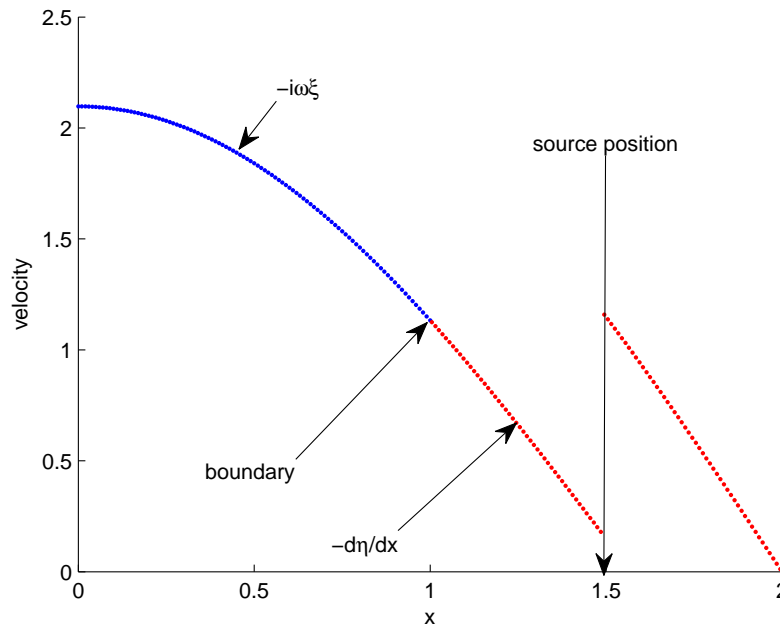


Рис. 6.3: Решение задачи о сопряжении жидкой и твердой сред

Попробуйте понять, почему внешние границы и точка возбуждения выглядят так, как они выглядят.

**Задачи**

1. Рассмотрим двумерное уравнение Гельмгольца для акустического давления  $p(x, y)$

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (6.50)$$

в области  $\Omega$ . Пусть среда обладает малой вязкостью. Тогда уравнение (6.50) перестает быть верным. Вместо него необходимо рассматривать линейризованное уравнение Навье–Стокса. Это уравнение почти везде в области хорошо приближается уравнением (6.50), но вблизи границ  $\partial\Omega$  области формируется тонкий пограничный слой. В рамках уравнения (6.50) этот слой явным образом не моделируется, но для его учета ставятся приближенные граничные условия

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\sqrt{\frac{i\nu}{\omega}} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}, \quad (6.51)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость среды,  $n$  — внешняя нормаль к границе,  $\tau$  — координата, направленная по касательной вдоль границы среды. Величина  $\sqrt{\nu/\omega}$  есть толщина пограничного вязкого слоя.

Задание заключается в том, чтобы предложить реализацию условий (6.51) в рамках метода конечных элементов.



## §7. Решение уравнений МКЭ во времени

### Классификация солверов

В данной лекции мы будем заниматься тем, что происходит на уровне III на Рис. 5.1. То есть будем полагать, что, собственно, метод конечных элементов уже применен. Исходные уравнения и граничные условия преобразованы в слабую формулировку и дискретизированы. Матрицы массы и жесткости собраны. После этого в задаче не остается специфики МКЭ.

Как уже указывалось, имеется три основных типа задач, которые могут решаться методом конечных элементов. Это задачи:

- На отыскание собственных мод системы. Такие задачи решаются применением стандартных процедур отыскания собственных значений/векторов матрицы  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ . Еще лучше решать обобщенную задачу на собственные значения (4.20).
- Стационарные, т. е. правая часть возбуждает систему на какой-то фиксированной частоте  $\omega$ . В этом случае решение задачи сводится к решению матричной системы линейных уравнений, например  $(\mathbf{K} - \omega^2/c^2\mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}$  относительно вектора  $\mathbf{U}$ . Имеется хорошо развитый набор алгоритмов решения таких систем. Можно ожидать, что стандартная процедура окажется хорошо оптимизированной. Частным случаем стационарной задачи является статическая задача, например, отыскание состояния равновесия механической системы.
- Задачи, поставленные во временной области, то есть когда необходимо найти эволюцию системы во времени. При этом решается уравнение, примером которого является

$$c^{-2}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (7.1)$$

где точка обозначает производную по времени.

Данная лекция посвящена решению уравнению из последнего пункта и подобных ему.

Классификация задач, разумеется, не является полной. Более того, имеется тенденция решать задачи во временной области через частотную. Для этого с правой частью производится дискретное преобразование Фурье во времени, для каждой частоты решается стационарная задача, а затем выполняется обратное преобразование Фурье. Мы здесь не будем этого касаться, а рассмотрим прямой метод решения уравнения (7.1).

### Метод Рунге–Кутты 4 порядка

Опишем метод Рунге–Кутты 4 так, как это сделано, например, в Википедии (или в любом учебнике по численным методам). Пусть требуется решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{Y}(t), t), \quad (7.2)$$

где  $\mathbf{Y}(t)$  — неизвестная векторная функция от времени, а  $\mathbf{G}(\cdot, \cdot)$  — известная функция векторного аргумента  $\mathbf{Y}$  и времени. Требуется решить начальную задачу, т. е. построить  $\mathbf{Y}(t)$  на отрезке  $0 < t < T$  при известном начальном значении  $\mathbf{Y}(0)$ .

Отрезок  $(0, T)$  разбивается узлами  $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_N = T$  на достаточно мелкие интервалы, а затем уравнение (7.2) решается последовательно на каждом из интервалов. Для

каждого отрезка  $(t_n, t_{n+1})$  начальным значением является  $Y_n \equiv Y(t_n)$ . Необходимо найти оценку для  $Y_{n+1} \equiv Y(t_{n+1})$ . Для этого выполняются следующие операции:

$$V_1 = G(Y_n, t_n) \quad (7.3)$$

$$V_2 = G\left(Y_n + \frac{h}{2}V_1, t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (7.4)$$

$$V_3 = G\left(Y_n + \frac{h}{2}V_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (7.5)$$

$$V_4 = G(Y_n + hV_3, t_n + h) \quad (7.6)$$

и, наконец,

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4), \quad (7.7)$$

где  $h = t_{n+1} - t_n$ .

Метод является явным. Его точность на одном шаге имеет четвертый порядок (это означает, что ошибка имеет порядок  $O(h^5)$ ). Оценка ошибки на всем интервале  $(t_0, T)$  есть  $O(h^4)$ . В одной из следующих лекций мы покажем, как устроены численные схемы Рунге–Кутты.

#### Сведение уравнения (7.1) к виду (7.2)

Уравнение (7.2) имеет первый порядок производной, а уравнение (7.1) — второй. Необходимо свести второе к первому. Делается это так. В качестве вектора  $Y(t)$  возьмем блочную конструкцию

$$Y = \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Тогда уравнение (7.1) переписется в блочном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{U} \\ \ddot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -c^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t) \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Верхняя строка уравнения тривиальна, а нижняя эквивалентна (7.1). Уравнение (7.9) имеет вид (7.2) при

$$G(Y, t) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -c^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ c^2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t) \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

В принципе, сказанного должно хватить для решения задачи (7.1).

#### Lumped mass matrix

С выражением (7.10) имеется проблема. Оно содержит матрицу  $\mathbf{M}^{-1}$ . Сама матрица  $\mathbf{M}$  может иметь огромный размер, и при этом иметь относительно небольшое число ненулевых элементов. Но обратная матрица имеет тот же размер, и почти все ее элементы ненулевые. То есть такую матрицу технически нельзя вычислить.

Можно оставить матрицу  $\mathbf{M}$  в левой части (7.9), но при этом на каждом шаге процедуры (7.3)–(7.6) придется решать систему линейных уравнений большого размера, что в вычислительном смысле дорого. Обычно поступают иначе.

Структура матрицы  $\mathbf{M}$  не очень важна для результата (а вот структура матрицы  $\mathbf{K}$  важна). Приведем пример матрицы  $\mathbf{M}$ . Пусть рассматривается одномерное волновое уравнение. Пусть пространственная ось  $x$  разбита на конечные элементы — отрезки одинаковой длины  $\Delta x$ . Пусть функции формы кусочно линейные (как рассматривались выше). Матрицу массы нетрудно вычислить:

$$\mathbf{M} = \Delta x \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & & & \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & & \\ & 1/6 & 2/3 & 1/6 & \\ & & 1/6 & 2/3 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Изменим волевым решением матрицу массы так, чтобы ее легко было инвертировать. Вместо матрицы массы  $\mathbf{M}$  будем использовать матрицу  $\mathbf{M}_d$ , вычисляемую по формуле

$$\mathbf{M}_d = \text{diag}(\text{sum}(\mathbf{M})) ,$$

т. е. в каждом столбце матрицы  $\mathbf{M}$  элементы складываются, и результат помещается на диагональ матрицы  $\mathbf{M}_d$  в соответствующий столбец. В рассмотренном выше случае это дает

$$\mathbf{M}_d = \Delta x \begin{pmatrix} 1/2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Это и есть lumped mass matrix. Физический смысл этой матрицы следующий. Если волновое уравнение описывает колебания однородной струны, то в случае с lumped mass matrix рассматривается струна, масса которой распределена по материальным точкам, находящимся в узлах сетки. На относительно небольших частотах струна с массой, разнесенной по узлам будет вести себя почти так же, как струна с постоянной линейной плотностью.

Если заменить в (7.10)  $\mathbf{M}$  на  $\mathbf{M}_d$ , то вычисление обратной матрицы массы не составит труда. Матрица  $\mathbf{M}_d^{-1}$  диагональна, а на диагонали у нее стоят элементы, обратные к диагональным элементам  $\mathbf{M}_d$ .

Такое изменение матрицы массы приведет к появлению ошибки в решении. Обычно такого рода ошибка выражается в появлении дополнительной дисперсии. Можно улучшить решение, приблизившись к  $\mathbf{M}^{-1}$ . Для этого введем матрицу

$$\mathbf{M}_e \equiv \mathbf{M} - \mathbf{M}_d. \quad (7.13)$$

Будем полагать, что исходная матрица  $\mathbf{M}$  в некотором смысле “близка к диагональной”, т. е. матрица  $\mathbf{M}$  “мала”. Это хорошо видно на примере матрицы (7.11). На диагонали стоят большие элементы, а вне диагонали — поменьше.

Представим  $\mathbf{M}$  в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_d^{1/2} (\mathbf{I} + \mathbf{M}_d^{-1/2} \mathbf{M}_e \mathbf{M}_d^{-1/2}) \mathbf{M}_d^{1/2}, \quad (7.14)$$

где матрица  $\mathbf{M}_d^{1/2}$  представляет собой диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят квадратные корни диагональных элементов  $\mathbf{M}_d$ . У матрицы  $\mathbf{M}_d^{-1/2}$  — соответственно, величины, обратные этим корням.

Обратим матрицу (7.14). Для этого используем приближенную формулу

$$(1 + \epsilon)^{-1} \approx 1 - \epsilon,$$

которая верна и в матричном случае (разумеется, надо заменить единицу на единичную матрицу). Следовательно,

$$\mathbf{M}^{-1} \approx \mathbf{M}_d^{-1/2} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_d^{-1/2} \mathbf{M}_e \mathbf{M}_d^{-1/2}) \mathbf{M}_d^{-1/2} = \mathbf{M}_d^{-1} - \mathbf{M}_d^{-1} \mathbf{M}_e \mathbf{M}_d^{-1} \quad (7.15)$$

Эта формула дает лучшее приближение к обратной матрице массы. Учет дальнейших членов в ряде Тейлора обычно смысла не имеет.

Описанная процедура здесь не имеет твердого теоретического обоснования. Ее можно воспринимать как хороший практический рецепт, позволяющий уменьшить дисперсию, вызванную применением метода lumped mass matrix, и не приводящий с серьезным затратом вычислительных ресурсов.

### Понятие устойчивости численной схемы

Главное, за чем надо следить при построении солвера во временной области, это устойчивость численной схемы. Те, кто думают, что вопрос устойчивости их не коснется, ошибаются.

Пусть решается простейшая (однородная) задача вида (7.2):

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}\mathbf{Y}, \quad (7.16)$$

где  $\mathbf{G}$  — постоянная квадратная матрица. Простейшая численная схема для решения этого уравнения — это явная схема Эйлера. Для построения этой схемы рассмотрим ось времени, разбитую на интервалы  $\Delta t$  узлами  $t_n$ . Рассмотрим дискретизацию (7.16) вида

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\Delta t} = \mathbf{G}Y_n. \quad (7.17)$$

Схема, очевидно, имеет вид

$$Y_{n+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{G}) Y_n. \quad (7.18)$$

Будем искать решение уравнения (7.18) в виде

$$Y_n = \gamma^n Y_0. \quad (7.19)$$

Очевидно, при этом скалярные величины  $\gamma$  представляют собой собственные числа матрицы  $\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{G}$ , а векторы  $Y_0$  — собственные векторы.

При этом частные решения исходного уравнения (7.16) имеют вид

$$Y(t) = Y_0 e^{\alpha t}, \quad (7.20)$$

где  $\alpha$  и  $Y_0$  — собственные числа и собственные векторы матрицы  $\mathbf{G}$ .

Пусть все собственные числа  $\alpha$  удовлетворяют неравенству  $\text{Re}[\alpha] \leq 0$ , то есть решения (7.20) не растут во времени. Может ли быть так, что найдется какое-то собственное число  $\gamma$ , что решение вида (7.19) растет, т. е.  $|\gamma| > 1$ ?

Соответствующие собственные числа связаны формулой

$$\gamma = 1 + \alpha \Delta t. \quad (7.21)$$

Очевидно, условие  $|\gamma| > 1$  может выполняться, например, при отрицательном  $\alpha$  и достаточно большом (порядка  $|\alpha|^{-1}$ )  $\Delta t$ . При этом решение исходного уравнения не растет, а

решение дискретизованного уравнения растет экспоненциально. Это и называется потерей устойчивости численной схемы. На практике это выглядит как очень быстрое нарастание цифрового шума, в котором тонет осмысленное решение.

Известно, что явные численные схемы работают быстро, но не всегда устойчивы. Напротив, неявные схемы (о них речь пойдет чуть позже), обычно устойчивы, но на каждом шаге требуют заметного времени счета.

Пусть методом конечных элементов решается одномерное волновое уравнение. Пусть на пространственной оси выбран шаг  $\Delta x$ , а на временной оси  $\Delta t$ . Пусть задача решается тем методом, который был описан в начале лекции. Детальный анализ показывает, что явная схема устойчива при выполнении неравенства

$$c \frac{\Delta t}{\Delta x} < A, \quad (7.22)$$

где  $A$  — некоторое число порядка единицы (для определенности пусть будет 0.3), зависящее от численной схемы. Это означает, что при очень малых  $\Delta x$  необходимо для обеспечения безопасности выбирать очень маленькие значения  $\Delta t$ .

Неравенство (7.22) весьма универсально и очень важно. Оно сохраняет смысл и для задач в 2D и 3D. При этом в качестве  $\Delta x$  надо брать размер самого маленького элемента. Важно, что если в сетке много больших элементов и один очень маленький, то шаг по времени будет определяться этим маленьким, и придется делать неразумно много шагов по времени. Задачи с небольшим числом маленьких элементов называют жесткими. Для их решения применяют явно-неявные схемы, о которых мы поговорим в одной из следующих лекций.

Для полноты изложения скажем несколько слов о неявных схемах. Заменим дискретизацию (7.17) на

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\Delta t} = \mathbf{G}Y_{n+1}. \quad (7.23)$$

Это дает численную схему

$$(\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{G})Y_{n+1} = Y_n. \quad (7.24)$$

Собственные числа решений дискретизованного уравнения определяются по формуле

$$\gamma = (1 - \alpha \Delta t). \quad (7.25)$$

Нетрудно видеть, что при  $\text{Re}[\alpha] \leq 0$  выполняется  $|\gamma| < 1$ . Это поясняется на Рис. 7.1.

Проблема с неявной схемой заключается в том, что на каждом шаге процедуры (7.24) приходится решать систему линейных уравнений большого размера. То есть они обычно абсолютно устойчивы, но медленно работают.

### Решение линеаризованных уравнений Эйлера

Расширим набор решаемых задач. Рассмотрим линеаризованные уравнения Эйлера, описывающие некоторую акустическую задачу в двумерной области на плоскости  $(x, y)$ :

$$\dot{u}_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.26)$$

$$\dot{u}_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.27)$$

$$\dot{p} = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad (7.28)$$

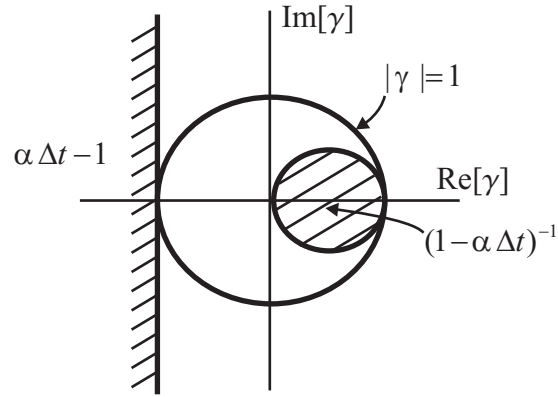


Рис. 7.1:

где  $p$  — давление,  $u_x$  и  $u_y$  — компоненты колебательной скорости частиц среды.

Применим метод конечных элементов к данной задаче. Введем два набора узлов и функций формы, один для скоростей ( $N_j$ ), другой для давлений  $\check{N}_i$ . Эти наборы могут быть как одинаковыми, так и различными.

Запишем формулы аппроксимации как

$$u_x(x, y) = \sum_j U_j N_j(x, y), \quad (7.29)$$

$$u_y(x, y) = \sum_j V_j N_j(x, y), \quad (7.30)$$

$$p(x, y) = \sum_j P_i \check{N}_i(x, y). \quad (7.31)$$

Домножим уравнения (7.26) и (7.27) на  $N_m(x, y)$ , а уравнение (7.28) на  $\check{N}_n(x, y)$ , и проинтегрируем по области. Получим уравнения

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{K}^{\text{UPX}} \mathbf{P}, \quad (7.32)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{K}^{\text{UPY}} \mathbf{P}, \quad (7.33)$$

$$\check{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{P}} = -\rho c^2 (\mathbf{K}^{\text{PUX}} \mathbf{U} + \mathbf{K}^{\text{PUY}} \mathbf{V}) \quad (7.34)$$

где  $U, V, P$  — векторы узловых значений,

$$\mathbf{M}_{m,j} = \iint N_m N_j ds \quad (7.35)$$

$$\check{\mathbf{M}}_{n,i} = \iint \check{N}_n \check{N}_i ds \quad (7.36)$$

$$\mathbf{K}_{m,i}^{\text{UPX}} = \iint N_m \frac{\partial \check{N}_i}{\partial x} ds \quad (7.37)$$

$$\mathbf{K}_{m,i}^{\text{UPY}} = \iint N_m \frac{\partial \check{N}_i}{\partial y} ds \quad (7.38)$$

$$\mathbf{K}_{n,j}^{\text{PUX}} = \iint \check{N}_n \frac{\partial N_j}{\partial x} ds \quad (7.39)$$

$$\mathbf{K}_{n,j}^{\text{PUY}} = \iint \check{N}_n \frac{\partial N_j}{\partial y} ds \quad (7.40)$$

Матрицы  $\mathbf{K}$  с верхними индексами играют роль компонент операторов дивергенции и градиента.

Заметим, что с помощью интегрирования по частям для операторов дивергенции и градиента можно доказать тождество

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\text{UPX}} \\ \mathbf{K}^{\text{UPY}} \end{pmatrix} = -(\mathbf{K}^{\text{PUX}}, \mathbf{K}^{\text{PUY}})^T. \quad (7.41)$$

Введем вектор неизвестных

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{pmatrix} \rho c U \\ \rho c V \\ P \end{pmatrix}. \quad (7.42)$$

Множитель  $\rho c$  выбран для того, чтобы размерности всех элементов вектора были одинаковы. Для данного вектора уравнения (7.32), (7.33), (7.34) могут быть записаны в виде одного блочного уравнения

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} \mathbf{Y}, \quad (7.43)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \check{\mathbf{M}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = -c \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\text{UPX}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\text{UPY}} \\ \mathbf{K}^{\text{PUX}} & \mathbf{K}^{\text{PUY}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

Отметим, что

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}. \quad (7.45)$$

Уравнение (7.43) можно непосредственно решать, например, методом Рунге–Кутты.

До сих пор ничего не было сказано о граничных условиях. Покажем, каким образом ставятся, например, граничные условия  $p = 0$ . Пусть набор узлов для давлений и скоростей изначально общий. Пусть также наборы функций формы одинаковые, и это, например, кусочно–линейные функции. Выбросим из набора функций для давления формы те функции, которые соответствуют граничным узлам. Описанная выше процедура будет соответствовать задаче с акустически мягкой границей.

Построенная схема решения акустической задачи называется split-формулировкой (в противоположность уравнению (7.1), которое называется non-split). Split-формулировка обладает следующими недостатками:

- Она оперирует большим числом переменных (давления плюс скорости).
- В этой схеме могут существовать вихри на нулевой частоте. При этом звукового давления эти вихри не производят.

Split-формулировка также обладает некоторыми достоинствами:

- Она легко модернизируется на случай более сложных уравнений. Например, такая необходимость возникает при реализации PML-слоев. Другой важный пример — пористые среды.
- Можно использовать различные сетки для скоростей и давлений. Например, можно для треугольной сетки взять для скоростей кусочно-линейные функции со значениями в узлах сетки, а для давлений — кусочно-постоянные на каждом из треугольников.
- В сложных случаях легче ставить граничные условия на границах разных сред.

## Задачи

1. Пусть в уравнении (7.43) решение  $Y$  гармонически зависит от времени:  $Y = Y_0 e^{i\omega t}$ . Показать, что при выполнении условий (7.45) частота  $\omega$  должна быть действительна.
2. Выписать формулы, аналогичные (2.16), (2.24), для вычисления  $\mathbf{M}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\mathbf{K}^{\text{PUX}}$ ,  $\mathbf{K}^{\text{PUY}}$ ,  $\mathbf{K}^{\text{URX}}$ ,  $\mathbf{K}^{\text{URY}}$ .



## §8. Распространение в волноводах

### Вводные замечания

В настоящей лекции рассматриваются задачи, связанные с волноводами. В качестве примеров берутся плоские (двумерные) волноводы, описываемые уравнением Гельмгольца. Без труда можно обобщить выводы данной лекции на трехмерные или одномерные волноводы, а также на твердотельные волноводы.

У волновода всегда имеется продольная координата (пусть это будет  $x$ ), вдоль которой происходит распространение. Вдоль этой координаты волновод предполагается бесконечным. Имеется также поперечная координата ( $y$ ), вдоль которой сечение волновода занимает конечную область.

Будут рассматриваться задачи распространения и рассеяния. Задачи распространения ставятся следующим образом. Волновод предполагается однородным, т. е. свойства волновода не зависят от  $x$ . Утверждается, что волновое поле в таком волноводе можно представить в виде линейной комбинации бесконечного набора *собственных мод*. Каждая из мод имеет волновое число  $k_n$ , зависящее от временной частоты  $\omega$ . Набор функций  $k_n(\omega)$  представляет собой *дисперсионную диаграмму* волновода. Это очень важная характеристика, поскольку по ней можно сделать выводы о групповых скоростях мод, частотах отсечки и другой полезной физике. Задача распространения сводится к численному построению дисперсионной диаграммы.

Задача рассеяния предполагает, что в волноводе имеется неоднородность, т. е. на конечном интервале оси  $x$  свойства волновода (плотность, скорость, ширина...) отличается от тех же значений на всей остальной оси. Справа и слева от области неоднородности располагаются однородные *рукава* волновода. По одному из рукавов на область неоднородности падает одна из собственных мод. Взаимодействуя с неоднородностью, эта мода рассеивается. При этом в рукава уходят прошедшие и отраженные моды. Отыскание амплитуд этих мод и составляет задачу рассеяния.

### Постановка задачи распространения

Рассмотрим область  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < H$  (см. Рис. 8.1). Пусть в данной области выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(y)} u = 0, \quad (8.1)$$

где  $u$  — полевая переменная,  $\omega$  — временная частота,  $c$  — локальная скорость волн, которая, возможно, зависит от поперечной координаты. Будем считать для определенности, что на границах  $y = 0$  и  $y = H$  заданы однородные граничные условия Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y = 0, H. \quad (8.2)$$

Будем искать решение поставленной задачи (уравнения с граничными условиями) в виде собственной моды

$$u(x, y) = u(y)e^{ikx}. \quad (8.3)$$

Величина  $\beta$  называется волновым числом (также константой распространения или квазиимпульсом) собственной моды. При каждом фиксированном  $\omega$  нетривиальные решения

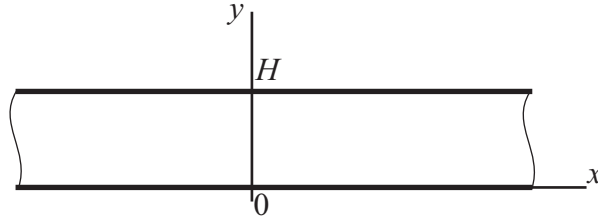


Рис. 8.1:

задачи существуют лишь для дискретного набора значений  $k_n$ . Если начать менять параметр  $\omega$ , эти значения превратятся в функции  $k_n(\omega)$ .

Если в волноводе нет физических потерь, величины  $k_n$  могут оказаться чисто действительными или чисто мнимыми. Первый случай соответствует распространяющимся модам, а второй — экспоненциально растущим / убывающим модам. Попытаемся найти эти значения.

Подставим функцию (8.3) в уравнение (8.1). Получим уравнение для  $u(y)$

$$u'' + \left( \frac{\omega^2}{c^2(y)} - k^2 \right) u = 0 \quad (8.4)$$

на отрезке  $0 < y < H$  с граничными условиями

$$u'(0) = u'(H) = 0. \quad (8.5)$$

Штрих обозначает производную по аргументу. Необходимо найти такие  $k$ , при которых задача имеет нетривиальные решения.

Уравнение (8.4) с граничными условиями (8.5) представляет собой задачу на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения. Данную задачу можно рассматривать относительно  $k$  при фиксированном  $\omega$ , однако, можно и наоборот, относительно  $\omega$  при фиксированном  $k$ .

Рассмотрим самый простой случай задачи распространения в волноводе, а именно, пусть скорость распространения постоянна:  $c(y) = c$ . В этом случае легко выписать собственные моды  $u_n(y)$  и соответствующие им собственные значения  $k_n(\omega)$ :

$$u_n(y) = \cos\left(\frac{\pi n y}{H}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

$$k_n(\omega) = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{H^2}}. \quad (8.7)$$

Заметим, что подкоренное выражение в (8.7) может быть как положительным, так и отрицательным. Соответственно, значения  $k_n$  могут быть как чисто действительными, так и чисто мнимыми.

Графики действительных частей функций  $k_n(\omega)$  показаны на Рис. 8.2. Для построения графиков выбраны следующие (безразмерные) параметры:  $c = 1$ ,  $H = 1$ .

Из рисунка видно, что каждая ветвь дисперсионной диаграммы, кроме первой, имеет частоту отсечки, т. е. частоту, ниже которой  $k$  является чисто мнимой величиной.

Напомним также, что по графикам на Рис. 8.2 можно найти групповые скорости мод на каждой частоте по формуле

$$v_{\text{gr}} = \left( \frac{dk_n}{d\omega} \right)^{-1}.$$

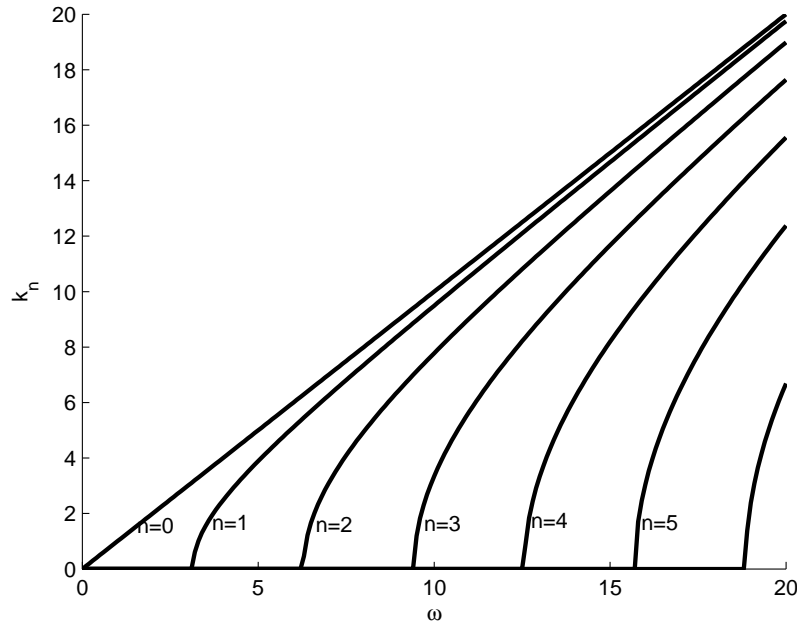


Рис. 8.2:

Короткие радиоимпульсы бегут по волноводу именно с этими скоростями.

### Напоминание. Задача Штурма–Лиувилля и ее свойства

Задача (8.4), (8.5) сводится к задаче Штурма–Лиувилля. Напомним, что это за задача и каковы ее свойства.

Пусть действительные функции  $p(y)$ ,  $p'(y)$ ,  $q(y)$ ,  $\rho(y)$  непрерывны на отрезке  $a \leq y \leq b$ , пусть, кроме того, функции  $p(x)$  и  $\rho(x)$  положительны на этом отрезке. Пусть также заданы действительные значения  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , такие что

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

Величина  $\lambda$  называется собственным значением данной задачи Штурма–Лиувилля, если существует не равная тождественно нулю функция  $w(y)$ , удовлетворяющая уравнению

$$(p(y) w'(y))' - q(y) w(y) = -\lambda \rho(y) w(y) \quad (8.8)$$

и граничным условиям

$$\alpha_1 w'(a) + \beta_1 w(a) = 0, \quad \alpha_2 w'(b) + \beta_2 w(b) = 0. \quad (8.9)$$

Заметим, что граничные условия (8.9) — импедансные. Условие действительности коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  является довольно жестким. Оно не позволяет рассматривать системы с энергетическими потерями на границе. Выбирая те или иные коэффициенты равными нулю, можно добиться превращения условий (8.9) в условия Дирихле или Неймана.

Перечислим известные свойства собственных значений задачи Штурма–Лиувилля.

- Существует бесконечное счетное множество собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$$

- Каждому собственному значению соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция  $w_n(y)$ .
- Все собственные значения вещественны.
- Собственные функции  $w_n(y)$  образуют на  $[a, b]$  ортогональную с весом  $\rho(y)$  систему  $\{w_n(y)\}$ , т. е.

$$\int_a^b \rho(y) w_n(y) w_m(y) dy = 0, \quad m \neq n. \quad (8.10)$$

Разумеется, в нашем случае отрезок  $[a, b]$  есть отрезок  $[0, H]$ . Функция  $\rho(y)$  тождественно равна 1. Коэффициенты в граничных условиях есть  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . Далее возможны два варианта:

1. Выбираем функции  $\rho(y) \equiv 1$ ,  $\lambda = -k^2$ ,  $q(y) = -\omega^2 c^{-2}(y)$ . Такой выбор соответствует отысканию набора значений  $k_n$  при заданном  $\omega$ . Из теории следует, что величины  $k_n^2$  образуют убывающую последовательность.
2. Выбираем функции  $\rho(y) \equiv c^{-2}(y)$ ,  $\lambda = \omega^2$ ,  $q(y) = k^2$ . Такой выбор соответствует отысканию набора значений  $\omega_n$  при заданном  $k$ . Здесь, наоборот, величины  $\omega_n^2$  образуют возрастающую последовательность.

Соотношения ортогональности в обоих случаях существуют, и они разные. Эти соотношения ортогональности могут пригодиться, например, при решении задачи излучения, которая здесь не рассматривается.

### Численное построение дисперсионной диаграммы с помощью МКЭ. Подготовительные шаги

Применим МКЭ к задаче распространения в волноводе. Разобьем волновод на прямоугольные конечные элементы (см. Рис. 8.3). Пусть шаг сетки по  $x$  постоянен и равен  $\Delta x$ . Пусть по высоте на сечении волновода укладывается  $N$  узлов. Пока будем игнорировать тот факт, что общее количество узлов в сетке бесконечно.

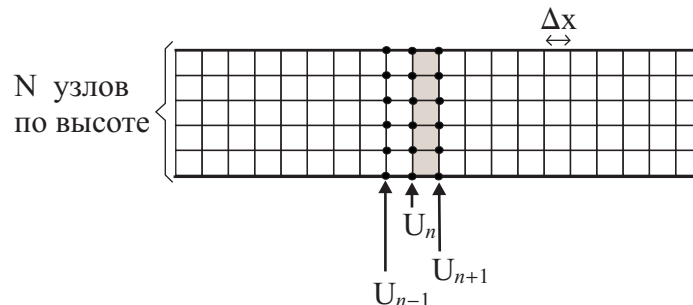


Рис. 8.3:

Обозначим векторы-столбцы из узловых значений, взятых в разных вертикальных сечениях волновода, символами  $\dots, U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, U_2, \dots$  (см. Рис. 8.3). Каждый из этих векторов имеет высоту  $N$ . Будем считать, что элементы данных векторов находятся в соответствии друг с другом, т. е. на позиции с номером  $m$  во всех векторах стоят значения, относящиеся к узлам, имеющим одно и то же значение  $y$ .

Общий вектор неизвестных можно записать в блочной форме

$$\mathbf{U}_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} \dots \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \\ U_{n+2} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

Применим метод конечных элементов к данной задаче. Введем сквозную нумерацию узлов. Формально говоря, (бесконечный) вектор узловых значений удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_{\text{tot}} - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{U}_{\text{tot}} = 0, \quad (8.12)$$

где матрицы жесткости и массы вводятся через функции формы как:

$$K_{m,n} = \iint (\nabla N_m \cdot \nabla N_n) dx dy, \quad (8.13)$$

$$M_{m,n} = \iint c^{-2} N_m N_n dx dy, \quad (8.14)$$

Заметим, что здесь матрица  $\mathbf{M}$  введена не совсем обычным образом В нее внесен коэффициент  $c^{-2}$ . Это сделано для того, чтобы построенные выражения работали и в случае, когда данный параметр в волноводе зависит от координаты  $y$ . Совершенно понятно, каким образом необходимо модернизировать формулу (2.16) для реализации определения (8.14).

Построенная дискретная система подчиняется теореме Блоха (она же теорема Флоке). Эта теорема, грубо говоря, утверждает, что решения уравнения (8.12) можно искать в виде линейной комбинации функций, имеющих вид (как бы описывающий зависимость от  $x$ )

$$U_n = \gamma^n U_0, \quad (8.15)$$

где  $\gamma$  — некоторые величины, которые надо определить. Формула (8.15) тесно связана с видом решения (8.3). Константы  $\gamma$  и  $k$  связаны соотношением

$$\gamma = \exp\{ik\Delta x\}. \quad (8.16)$$

Пользуясь периодичностью экспоненты, полагаем, что  $k$  меняется в пределах от  $-\pi/\Delta x$  до  $\pi/\Delta x$ .

Выпишем матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  в блочной форме. Заметим, что элементные матрицы обладают периодичностью: при сдвиге на одно сечение вправо или влево матрицы в понятном смысле не изменяются. Учтем это свойство.

Рассмотрим один столбик из конечных элементов, находящийся между наборами узлов  $U_n$  и  $U_{n+1}$  (помечен серым на Рис. 8.3). Будем считать, что система ограничивается этим столбиком. Поле описывается набором узловых значений

$$\mathbf{U}_s = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Соберем матрицы массы жесткости  $\mathbf{K}_s$  и массы  $\mathbf{M}_s$  для одиночного столбика. Эти матрицы имеют размерность  $2N \times 2N$ . Запишем их в блочной форме, разбив на блоки размером  $N \times N$  в соответствии с (8.17):

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{1,1} & \mathbf{M}_{1,2} \\ \mathbf{M}_{2,1} & \mathbf{M}_{2,2} \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

Принимая во внимание остальные столбики, а также трансляционную симметрию, запишем уравнение (8.12) в блочной форме:

$$\begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ & \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{2,2} & \mathbf{K}_{1,2} & & 0 & & \\ & \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{2,2} & & \mathbf{K}_{1,2} & & \\ & 0 & \mathbf{K}_{2,1} & & \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{2,2} & & \\ & & & & & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \\ \dots \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ & \mathbf{M}_{1,1} + \mathbf{M}_{2,2} & \mathbf{M}_{1,2} & & 0 & & \\ & \mathbf{M}_{2,1} & \mathbf{M}_{1,1} + \mathbf{M}_{2,2} & & \mathbf{M}_{1,2} & & \\ & 0 & \mathbf{M}_{2,1} & & \mathbf{M}_{1,1} + \mathbf{M}_{2,2} & & \\ & & & & & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ U_{n-1} \\ U_n \\ U_{n+1} \\ \dots \end{pmatrix} = 0 \quad (8.19)$$

Подставим сюда (8.15) и заметим, что уравнение (8.19) выполняется во всех блочных строках, если

$$-(\mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{2,2} + \gamma \mathbf{K}_{1,2} + \gamma^{-1} \mathbf{K}_{2,1}) U_0 + \omega^2 (\mathbf{M}_{1,1} + \mathbf{M}_{2,2} + \gamma \mathbf{M}_{1,2} + \gamma^{-1} \mathbf{M}_{2,1}) U_0 = 0. \quad (8.20)$$

Нетривиальное решение  $U_0$  уравнения (8.20) существует, если

$$\det [-(\mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{2,2} + \gamma \mathbf{K}_{1,2} + \gamma^{-1} \mathbf{K}_{2,1}) + \omega^2 (\mathbf{M}_{1,1} + \mathbf{M}_{2,2} + \gamma \mathbf{M}_{1,2} + \gamma^{-1} \mathbf{M}_{2,1})] = 0 \quad (8.21)$$

Левую часть (8.21) запишем в виде символа  $D(\gamma, \omega)$ . Соответственно, моды существуют при

$$D(\gamma, \omega) = 0. \quad (8.22)$$

Уравнение (8.22) будем называть дисперсионным уравнением для численной модели волновода. Данное уравнение сводится (путем умножение на  $\gamma$  в какой-то степени) к алгебраическому уравнению относительно  $\gamma$  и  $\omega$ .

### Построение функции $\omega(\gamma)$

Решим уравнение (8.22) относительно  $\omega$  при фиксированном  $\gamma$ . Выражение (8.20) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения вида (4.23) с  $\lambda = \omega^2$  и матрицами

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{K}_{2,2} + \gamma \mathbf{K}_{1,2} + \gamma^{-1} \mathbf{K}_{2,1}, \quad (8.23)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{1,1} + \mathbf{M}_{2,2} + \gamma \mathbf{M}_{1,2} + \gamma^{-1} \mathbf{M}_{2,1}. \quad (8.24)$$

Такая задача может быть решена применением стандартной команды  $\text{eig}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ . Процедура численного построения дисперсионной кривой для волновода следующая.

- Строится сетка сечения волновода толщиной в один столбик.

- Обычным образом собираются матрицы  $\mathbf{K}_s$  и  $\mathbf{M}_s$ . Эти матрицы разбиваются на блоки как в (8.18).
- Выписывается уравнение (8.21) для  $\omega$  и  $\gamma = \exp\{ik\Delta x\}$ .
- Проходятся значения от  $k = 0$  до некоторого  $k_{\max}$  (хороший выбор —  $k_{\max} = \pi/\Delta x$ ) с достаточно малым шагом. Для каждого  $k$  решается обобщенная задача на собственные значения и находится набор значений  $\omega_j$ .
- Предыдущий пункт повторяется для чисто мнимых  $k$ , чтобы найти затухающие моды.

### Построение функции $\gamma(\omega)$

Как правило, хочется построить функцию  $\gamma(\omega)$ , т. е. уметь находить все волноводные моды при заданном  $\omega$ . Эта задача по своей природе несколько отличается от только что рассмотренной.

Итак, зафиксируем частоту  $\omega$  и будем рассматривать стационарную задачу. Задачу будем полагать однородной, т. е. будем рассматривать распространение в волноводе при отсутствии внешних сил.

Разобьем волновод на вертикальные секции (столбики) толщиной в один слой. Рассмотрим какой-либо столбик, например, отмеченный серым на Рис. 8.3. Его состояние характеризуется векторами  $U_n$  и  $U_{n+1}$ .

В соответствии с уравнением (8.19), поведение “серого” столбика описывается уравнением

$$(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s) \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n^L \\ F_{n+1}^R \end{pmatrix}, \quad (8.25)$$

где  $\mathbf{K}_s, \mathbf{M}_s$  — матрицы из (8.18), а векторы  $F_n^L$  и  $F_{n+1}^R$  определены как

$$F_n^L = -(\mathbf{K}_{2,1} - \omega^2 \mathbf{M}_{2,1}) U_{n-1} - (\mathbf{K}_{2,2} - \omega^2 \mathbf{M}_{2,2}) U_n, \quad (8.26)$$

$$F_{n+1}^R = -(\mathbf{K}_{1,2} - \omega^2 \mathbf{M}_{1,2}) U_{n+2} - (\mathbf{K}_{1,1} - \omega^2 \mathbf{M}_{1,1}) U_{n+1}. \quad (8.27)$$

Для получения уравнения (8.25) мы оставили в левой части те слагаемые из (8.19), которые представляют собой уравнение метода конечных элементов для серого столбца.

По тому, каким образом величины  $F_n^L$  и  $F_{n+1}^R$  стоят в уравнении (8.25) можно сделать вывод о том, что  $F_n^L$  и  $F_{n+1}^R$  это вектора сил, действующих на выбранный столбец слева и справа.

Вектора  $F_n^L$  и  $F_{n+1}^R$  зависят от индекса  $n$ , принимающего целые значения. Из уравнения (8.19) следует, что

$$F_n^L = -F_n^R. \quad (8.28)$$

Это соотношение вполне естественно. Оно означает, что в каждом сечении волновода, разрезанного на столбики, выполняется “третий закон Ньютона”.

Основная идея того, что произойдет дальше, заключается в том, чтобы ввести в каждом сечении *вектор состояния* волновода, полностью описывающий волновой процесс во всем волноводе. Поясним эту идею. Пусть имеется тонкая трубка с жесткими стенками, в которой распространяется поршневая волна на какой-то частоте. Зададимся вопросом, сколько необходимо ввести величин, чтобы полностью описать волновой процесс в трубке.

Очевидно, таких величин нужно две, поскольку по трубке могут бежать две волны (вперед и назад). Такими величинами в произвольном сечении могут быть, например, давление и колебательная скорость. Зная их, можно вычислить поле в любой точке трубки.

В рассматриваемой задаче в качестве вектора состояния выберем блочный вектор

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ F_n^L \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

Заметим, что высота этого вектора вдвое больше высоты  $U_n$ . Нашей задачей будет выразить  $X_{n+1}$  через  $X_n$ .

Будем считать, что в уравнении (8.25) величины  $U_n, F_n^L$  известны, а величины  $U_{n+1}$  и  $F_{n+1}^R$  надо найти. Кроме того, заметим, что

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ -F_{n+1}^R \end{pmatrix}$$

В результате получим

$$X_{n+1} = \mathbf{T} X_n, \quad (8.30)$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\mathbf{G}_{1,2}^{-1} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{1,2}^{-1} \\ \mathbf{G}_{2,2} \mathbf{G}_{1,2}^{-1} \mathbf{G}_{1,1} - \mathbf{G}_{2,1} & -\mathbf{G}_{2,2} \mathbf{G}_{1,2}^{-1} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

и

$$\mathbf{G}_{\zeta,\eta} = \mathbf{K}_{\zeta,\eta} - \omega^2 \mathbf{M}_{\zeta,\eta}, \quad \zeta, \eta = 1, 2. \quad (8.32)$$

Обратимся к уравнению (8.30). Матрица  $\mathbf{T}$  называется *матрицей перехода* (transfer matrix). Волноводные моды характеризуются экспоненциальной зависимостью от  $n$ , что соответствует умножению при переходе от  $X_n$  к  $X_{n+1}$  на скалярный множитель  $\gamma$ . Следовательно, волноводным модам соответствуют собственные векторы задачи

$$\mathbf{T} X = \gamma X. \quad (8.33)$$

Собственные значения  $\gamma$  — это те же значения, что и в (8.15), (8.16).

Рецепт вычисления собственных мод и констант распространения  $\gamma$  при заданном  $\omega$  следующий.

- Для одиночного столбца строятся матрицы  $\mathbf{M}_s$  и  $\mathbf{K}_s$ . Матрицы разбиваются на блоки в соответствии с (8.18).
- Формируются матрицы  $\mathbf{G}_{\zeta,\eta}$  по формуле (8.32).
- Вычисляется матрица  $\mathbf{T}$  по формуле (8.31).
- Решается задача на собственные значения (8.33) (например, с помощью команды `eig`).

Функция  $\gamma(\omega)$ , как и функция  $\omega(\gamma)$ , вычисляется с помощью задачи на собственные значения, но задача на собственные значения (8.33) отличается по своим свойствам от задачи (8.20). Эти отличия сведены в таблицу ниже



	задача (8.20) для $\omega(\gamma)$	задача (8.33) для $\gamma(\omega)$
вид	обобщенная	обычная
размерность	$N$	$2N$
свойства матриц	$\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — эрмитовы	$\mathbf{T}$ — симплектическая*

\* Эрмитовость матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  обеспечивает действительность  $\omega$ . Хотелось бы иметь какое-то свойство матрицы  $\mathbf{T}$ , которое позволяет доказывать содержательные теоремы. Оказывается, такое свойство есть, и оно называется симплектичность. Мы не будем развивать эту тему, но дадим ссылку: [2].

### Задачи

1. Построить и решить дисперсионное уравнение (8.21) для одномерного уравнения Гельмгольца.
2. Построить аналог уравнения (9.16) для одномерного уравнения Гельмгольца. Как выглядят  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$ ?

## §9. Рассеяние в волноводах

### Задача рассеяния в волноводе

Поставим задачу рассеяния в волноводе следующим образом. Пусть волновод занимает полосу  $0 \leq y \leq H$ . Пусть в нем выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x, y)} u = 0. \quad (9.1)$$

Считаем, что неоднородность волновода локализована при  $-L < x < L$  (см. Рис. 9.1), т. е.

$$c(x, y) = c_0 \quad \text{при } |x| > L, \quad (9.2)$$

а при  $|x| < L$  значение скорости может отличаться от  $c_0$ . На границах  $y = 0, H$  заданы граничные условия Неймана.

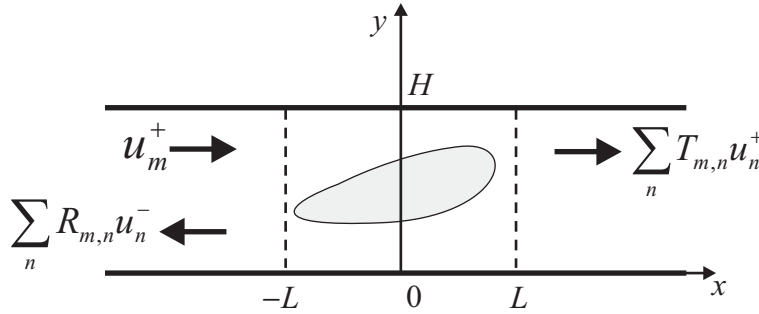


Рис. 9.1:

В “рукавах” волновода (т. е. в областях  $x < -L$  и  $x > L$ ) могут распространяться моды

$$u_n^\pm(x, y) = \cos\left(\frac{\pi n}{H} y\right) \exp\{\pm i k_n x\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

где

$$k_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\pi^2 n^2}{H^2}} \quad (9.4)$$

Значение квадратного корня для определенности выбирается положительным действительным или положительным мнимым.

Пусть из левого рукава на неоднородность падает волна  $u_m^+$ , т. е. мода с индексом  $m$ , распространяющаяся направо. Поле в области неоднородности имеет сложную структуру, однако в рукавах оно может быть представлено как сумма распространяющихся и затухающих мод:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{m,n} u_n^+(x - L, y) \quad \text{при } x > L, \quad (9.5)$$

$$u(x, y) = u_m^+(x + L) + \sum_{n=0}^{\infty} R_{m,n} u_n^-(x + L) \quad \text{при } x < -L \quad (9.6)$$

Величины  $T_{m,n}$  и  $R_{m,n}$  имеют смысл коэффициентов прохождения и отражения (точнее, коэффициентов трансформации в проходящие и отраженные моды). Нашей целью будет численное отыскание этих коэффициентов.

Разумеется, не хотелось бы строить сетку для области, сильно большей, чем область неоднородности. План заключается в том, чтобы решать алгебраическое уравнение метода конечных элементов в области  $-L \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq H$ , поставив “правильные” граничные условия при  $x = \pm L$ . Такие граничные условия должны обеспечивать отсутствие волн, приходящих из бесконечности (разумеется, кроме волны  $u_m^+$ , приходящей слева).

### DtN–оператор в точной постановке

В точной математической постановке задачи граничные условия для фрагмента волновода  $-L \leq x \leq L$ , заданные на торцах  $x = \pm L$ , представляют собой обобщенные импедансные условия. А именно, полное поле на торце  $x = L$  должно представлять собой волну, уходящую вправо. Для этого поле на торце и его производная по  $x$  должны быть связаны тем же условием, каким они связаны в уходящей волне. В общем виде такая связь дается формулой

$$\frac{\partial u(L, y)}{\partial x} = G[u(L, \cdot)](y), \quad (9.7)$$

где  $G$  — некоторый оператор. Запись (9.7) указывает на то, что  $G$  — интегральный оператор, действующий по переменной  $y$  в сечении волновода. Ниже (в (9.15)) этот оператор будет построен в явном виде.

Наличие интегрального оператора говорит о нелокальности граничного условия. Нормальная производная в каждой точке сечения зависит не только от поля в данной точке, но и от значений поля во всех остальных точках сечения. В локальном условии оператор  $G$  можно было бы заменить на оператор умножения на константу (такой константой могла бы быть комбинация  $ik$ , где  $k$  — волновое число).

Для сечения  $x = -L$  ситуация немного меняется, поскольку в этом сечении имеется приходящая из бесконечности падающая волна. Сформируем рассеянное поле, представляющее собой разность полного поля и падающей волны:

$$u'(x, y) = u(x, y) - u_m^+(x, y).$$

Это поле должно представлять собой сумму волн, бегущих или убывающих влево, т. е. должно выполняться нелокальное импедансное условие

$$\frac{\partial u'(-L, y)}{\partial x} = -G[u'(-L, \cdot)](y). \quad (9.8)$$

Может возникнуть “наивный” вопрос, почему выполнения условия (9.7) достаточно, чтобы в правом рукаве отсутствовали волны, приходящие из бесконечности. Ответ на этот вопрос такой. Построение оператора  $G$  содержит рецепт конструирования поля в правом рукаве. Если поле, заданное в области  $-L \leq x \leq L$ , удовлетворяет условию (9.7), то можно расширить поле из области  $-L \leq x \leq L$  на область  $-L \leq x$ . При этом на сечении “склейки”  $x = L$  поле и его первые пространственные производные непрерывны. Можно доказать, что поле на склейке при этом сколь угодно гладкое. “Приклеивая” таким же образом поле в рукаве  $x < -L$ , получаем поле в волноводе, удовлетворяющее всем условиям поставленной задачи.

Оператор  $G$  переводит значения поля в значения нормальной производной поля на границе, то есть данные Дирихле в данные Неймана. Такой оператор называют DtN-оператором (Dirichlet-to-Neumann).

Перейдем к построению оператора  $G$ . Заметим, что моды (9.3) ортогональны в следующем смысле:

$$\int_0^H \cos\left(\frac{\pi m}{H}y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{H}y\right) dy = H\delta_{m,n}\epsilon_m, \quad (9.9)$$

где  $\delta_{m,n}$  — символ Кронекера,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 1/2, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9.10)$$

Пусть в сечении волновода  $x = L$  известно распределение поля  $u(L, y)$ . Найдем в этом же сечении распределение производной поля по  $x$ . Производная поля (9.5) записывается как

$$\frac{\partial u(L, y)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} ik_n T_n u_n^+(x - L, y). \quad (9.11)$$

Заметим, что коэффициенты  $t_n$  можно найти из соотношения ортогональности (9.9):

$$T_n = \frac{1}{H\epsilon_n} \int_0^H u(L, y) \cos\left(\frac{\pi n}{H}y\right) dy. \quad (9.12)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u(L, y)}{\partial x} = \frac{i}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{\epsilon_n} \cos\left(\frac{\pi n}{H}y\right) \int_0^H u(L, y') \cos\left(\frac{\pi n}{H}y'\right) dy'. \quad (9.13)$$

Оператор, связывающий данные Дирихле и данные Неймана поля на границе  $x = L$ , является нелокальным. Его можно записать как

$$\frac{\partial u(L, y)}{\partial x} = \int_0^H G(y, y') u(L, y') dy', \quad \text{где } G(y, y') = \frac{i}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{\epsilon_n} \cos\left(\frac{\pi n}{H}y\right) \cos\left(\frac{\pi n}{H}y'\right). \quad (9.14)$$

Тем не менее, этот оператор можно использовать для построения граничного условия импедансного типа.

Условие на границе  $x = -L$  записываются аналогично. Очевидно, это условие

$$\frac{\partial u'(-L, y)}{\partial x} = - \int_0^H G(y, y') u'(-L, y') dy', \quad (9.15)$$

где  $u'$  — отраженная волна, т. е. разность полного поля и падающей волны.

### Граничное условие при $x = L$ в приближенной постановке

Теоретически можно построить приближенный дискретный вариант условий (9.14), (9.15), однако более разумно исходить из дискретного дисперсионного уравнения (8.21). Здесь мы опишем такой подход.

Рассмотрим область волновода  $-L \leq x \leq L$ . Разобьем ее на конечные элементы и проведем обычную для МКЭ процедуру. Узлов в сетке может быть достаточно много, но нас будет интересовать, что происходит в сечениях  $x = \pm L$ . Обозначим вектор-столбец из узлов в сечении  $x = L$  как  $U_L$ , а в сечении  $x = -L$  как  $U_{-L}$  (см. Рис. 9.2). Построим вектор узловых значений  $U_{\text{tot}}$ , у которого на первых  $N$  позициях будет стоять столбец  $U_L$ , на следующих  $N$  позициях — столбец  $U_{-L}$ , а далее — узлы из всех остальных сечений:

$$U_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} U_L \\ U_{-L} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

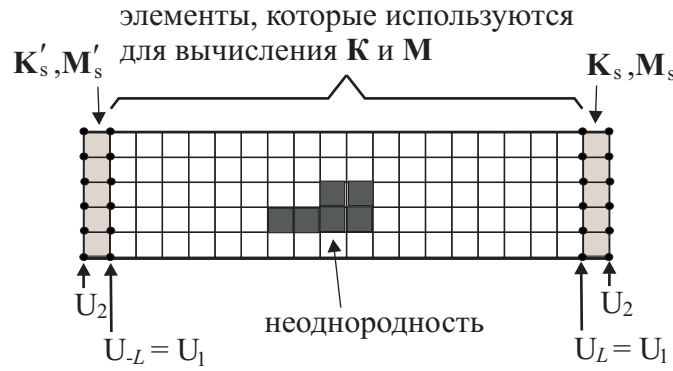


Рис. 9.2:

Построим обычным образом матрицы массы и жесткости для отрезка волновода. Пусть это будут матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$ . Нашей целью будет построить уравнение МКЭ, скорректировав строки, относящиеся к блокам  $U_1$  и  $U_2$ . В соответствии с общим пониманием импедансных условий, будем строить уравнение МКЭ в блочной форме:

$$-\mathbf{K} U_{\text{tot}} + \omega^2 \mathbf{M} U_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} U_L \\ \mathbf{B} U_{-L} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  описывают нелокальные импедансные граничные условия в сечениях  $x = \pm L$ , а неоднородность  $\mathbf{F}$  соответствует падающей волне.

Построим матрицу  $\mathbf{A}$ . Добавим справа от сечения  $x = L$  еще один столбец конечных элементов так, как это было сделано при рассмотрении задачи распространения. Пусть для этого столбца  $U_L$  является столбцом  $U_1$  и пусть сетки в “светлой” и “затененной” частях совместны.

Построим для добавленного столбца матрицы  $\mathbf{K}_s$  и  $\mathbf{M}_s$ . Представим их в блочном виде (8.18). Данные матрицы могут быть использованы для вычисления волновых чисел в дискретизованном волноводе. Пусть для данного  $\omega$  найдены  $N$  значений  $\gamma$ :  $\gamma_1 \dots \gamma_N$ .

Если бы “затененный” столбец был присоединен к светлой сетке, а за ним была бы еще сетка, соответствующая бесконечному рукаву, то в узлах столбца  $U_L$  выполнялись бы уравнения МКЭ. Выясним, что в этом случае добавилось бы. Очевидно, к верхнему блоку левой части (9.16) необходимо добавить комбинацию

$$(-\mathbf{K}_{1,1} + \omega^2 \mathbf{M}_{1,1})U_L + (-\mathbf{K}_{1,2} + \omega^2 \mathbf{M}_{1,2})U_2$$

Осталось найти  $U_2$ .

Разложим столбец  $U_L$  по собственным модам волновода. Пусть векторы, соответствующие значениям  $\gamma_j$  и обращающие (8.20) в верное равенство, есть  $W_1, \dots, W_N$ . Сформируем матрицу размера  $N \times N$ :

$$\mathbf{H} = (W_1, \dots, W_N). \quad (9.17)$$

Коэффициенты разложения по модам составляют столбец  $\mathbf{H}^{-1}U_L$ . Каждая мода при распространении *вправо* на один шаг сетки умножается на свое  $\gamma_j$ . Поэтому

$$U_2 = \mathbf{H} \Gamma \mathbf{H}^{-1}U_L, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_N \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

Диагональная матрица  $\Gamma$  дает умножения амплитуд мод, соответствующие одному шагу вправо. Самая левая матрица осуществляет сборку вектора поля из мод.

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_{1,1} - \omega^2 \mathbf{M}_{1,1} + (\mathbf{K}_{1,2} - \omega^2 \mathbf{M}_{1,2})\mathbf{H} \Gamma \mathbf{H}^{-1}. \quad (9.19)$$

### Граничное условие $x = -L$ в приближенной постановке

Добавим “затененный” столбец слева от сечения  $x = -L$ . Для этого столбца построим матрицы  $\mathbf{K}'_s$ ,  $\mathbf{M}'_s$ . Представим эти матрицы в блочной форме (8.20), считая  $U_{-L}$  за  $U_1$ . Далее поступим так же, как в предыдущем параграфе.

К левой части уравнения МКЭ необходимо добавить величину

$$(-\mathbf{K}'_{1,1} + \omega^2 \mathbf{M}'_{1,1})U_{-L} + (-\mathbf{K}'_{1,2} + \omega^2 \mathbf{M}'_{1,2})U_2 \quad (9.20)$$

Построим вектор  $U_2$  для левого столбца. Будем считать, что в силу симметрии матрицы со штрихами равны таким же матрицам без штрихов (для правого столбца).

Заметим, что, если вычесть из поля падающую волну, то оставшееся будет представлять собой комбинацию волн, распространяющихся или затухающих влево. Падающая волна (мода с индексом  $m$ ) в сечении  $x = -L$  есть

$$W_m$$

Эта же волна в сечении  $x = -L - \Delta x$  (на шаг влево) есть

$$\gamma_m^{-1} W_m$$

Запишем уравнение вида (9.18) для разницы полного поля и падающей волны:

$$U_2 - \gamma_m^{-1} W_m = \mathbf{H} \Gamma \mathbf{H}^{-1}(U_{-L} - W_m). \quad (9.21)$$

Матрица  $\mathbf{H}\Gamma\mathbf{H}^{-1}$  описывает распространение волны на один шаг влево. Поэтому

$$\mathbf{H}\Gamma\mathbf{H}^{-1}\mathbf{W}_m = \gamma_m\mathbf{W}_m. \quad (9.22)$$

Подставляя  $\mathbf{U}_2$  из (9.21) в (9.20). Окончательно получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}, \quad (9.23)$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{K}_{1,2} - \omega^2\mathbf{M}_{1,2})(\gamma_m^{-1} - \gamma_m)\mathbf{W}_m. \quad (9.24)$$

Таким образом, все компоненты (9.16) построены, и (9.16) можно решить как линейную систему.

После отыскания вектора узловых значений поля можно найти коэффициенты прохождения и отражения. Коэффициенты прохождения формируют столбец

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{U}_L, \quad (9.25)$$

а коэффициенты отражения — столбец

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{U}_{-L} - \mathbf{W}_m). \quad (9.26)$$

### Задачи

1. Построить и решить дисперсионное уравнение (8.21) для одномерного уравнения Гельмгольца.
2. Построить аналог уравнения (9.16) для одномерного уравнения Гельмгольца. Как выглядят  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{F}$ ?

## §10. Задачи теории упругости

### Уравнения линейной теории упругости

В этом разделе описывается процедура решения *линейных* задач теории упругости с помощью метода конечных элементов. В формулировке уравнений теории упругости мы следуем учебникам [3, 4, 5]. Мы не рассматриваем случай нелинейного упругого тела. Более того, тело предполагается изотропным.

В настоящем разделе мы будем придерживаться следующих обозначений. Компоненты вектора смещений точек твердого тела будут обозначаться как  $u_i$ , где индекс  $i$  пробегает значения  $1 \dots 3$ , и эти компоненты соответствуют координатам  $x_1, x_2, x_3$ . Частную производную функции  $g$  по переменной  $x_i$  будем обозначать как  $g_{,i}$ . Так,  $u_{i,j}$  — производная компоненты  $u_i$  по координате  $x_j$ . Выражение  $\varepsilon_{ij}$  представляет собой сумму  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ . Везде  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

По каждой из пар повторяющихся индексов (в пределах одночлена) предполагается суммирование.

Сформируем тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (10.1)$$

Тензор напряжений для изотропного тела есть

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (10.2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — упругие константы (коэффициенты Ламэ). Коэффициент  $\mu$  называется модулем сдвига. Мы предполагаем, что данные константы постоянны во всем теле.

Уравнение движения упругого тела есть

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0, \quad (10.3)$$

где точки обозначают производные по времени, а  $\rho$  — плотность. Перепишем это уравнение как

$$\lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (10.4)$$

Сформулируем граничные условия для упругого тела. Пусть тело занимает область  $\Omega$ , его граница есть  $\partial\Omega$ , а внешняя нормаль к границе есть  $n$ . Условия Дирихле формируются простым образом. Если смещения точек границы заданы, то это можно записать как

$$u_i \Big|_{\partial\Omega} = h_i. \quad (10.5)$$

Условия Неймана представляют собой заданные силы на границе. Пусть к площадке границы с внешней единичной нормалью  $n$  приложена внешняя сила  $f = (f_1, f_2, f_3)$ , отнесенная к величине площадки. По определению тензора напряжений это записывается как

$$\sigma_{ij} \Big|_{\partial\Omega} n_j = f_i. \quad (10.6)$$

Ниже рассматривается задача с неоднородными граничными условиями Неймана.



Последнее, что необходимо сказать о постановке задачи теории упругости, это выражение для упругой энергии:

$$E_{\text{el}} = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\lambda (u_{i,i})^2 + \mu u_{i,j} u_{i,j} + \mu u_{i,j} u_{j,i}) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (10.7)$$

Классический подход заключается в том, что уравнение движения (10.3) и граничное условие (10.6) выводятся из (10.7). Ниже мы увидим, насколько это важно в данном случае.

### Вывод уравнений метода конечных элементов

Попытаемся вывести уравнение метода конечных элементов для (10.4) обычным способом. Введем сетку, разбитую на конечные элементы.

Введем (векторную) весовую функцию  $w_i$ , домножим на нее (10.4) проинтегрируем по  $\Omega$  и просуммируем по индексу  $i$ . Векторность весовой функции нужна для математического изящества происходящего. А именно, в конце получается уравнение, не содержащее “открытых индексов”.

Исходный интеграл невязки уравнения (10.4) с весовой функцией имеет вид

$$\iiint_{\Omega} (\lambda u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} - \rho \ddot{u}_i) w_i dv = 0, \quad (10.8)$$

где

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3.$$

Далее, следуя общему ходу рассуждений, приводящих к методу конечных элементов в скалярной задаче, мы планируем применить к (10.8) интегрирование по частям. Это делается с тремя целями:

- Снизить требования к гладкости функций формы. В (10.4) от функции  $u_i$  требуется существование второй производной, в то время как при вычислении матрицы  $\mathbf{K}$  по формуле (1.13) требуются только первые производные функций формы.
- Интегрирование по частям позволяет получить симметричную матрицу жесткости, что дает важные свойства получающихся решений (это обсуждалось в связи со свойствами обобщенной задачи на собственные значения).
- Получить в качестве естественных граничных условий однородные граничные условия Неймана. В данном случае это условия отсутствия напряжений на границе, а именно

$$\sigma_{ij} \Big|_{\partial\Omega} n_j = 0. \quad (10.9)$$

Под интегрированием по частям мы понимаем здесь применение теоремы Гаусса–Остроградского. Напомним, что формулировка теоремы Гаусса–Остроградского в рассматриваемых обозначениях есть

$$\iiint_{\Omega} \psi_{i,i} dv = \iint_{\partial\Omega} \psi_i n_i ds, \quad (10.10)$$

где  $ds$  — элемент площади поверхности.

Здесь имеется сложность, которой не было в скалярном случае. Рассмотрим первый член в (10.8), а именно

$$\lambda \iiint_{\Omega} u_{j,ij} w_i dv.$$

Имеется два способа применить теорему Гаусса–Остроградского:

$$\iiint_{\Omega} u_{j,ij} w_i dv = \iiint_{\Omega} [(u_{j,j} w_i)_{,i} - u_{j,j} w_{i,i}] dv = \iint_{\partial\Omega} u_{j,j} w_i n_i ds - \iiint_{\Omega} u_{j,j} w_{i,i} dv, \quad (10.11)$$

$$\iiint_{\Omega} u_{j,ij} w_i dv = \iiint_{\Omega} [(u_{j,i} w_i)_{,j} - u_{j,i} w_{i,j}] dv = \iint_{\partial\Omega} u_{k,i} w_i n_k ds - \iiint_{\Omega} u_{j,i} w_{i,j} dv. \quad (10.12)$$

На самом деле, можно рассматривать еще и линейные комбинации этих двух вариантов.

Это разные варианты, и, формально говоря, оба математически корректны. Имеет смысл выбрать вариант (10.11); ниже мы объясним, почему.

В третьем члене (по не понятным пока соображениям) следует выбрать вариант (10.12). Результат преобразования (10.8) есть

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\lambda w_{i,i} u_{j,j} + \mu w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \rho w_i \ddot{u}_i) dv = \\ \iint_{\partial\Omega} (\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})) w_i n_j ds. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Здесь становится ясно, каким образом выбирались дивергентные представления слагаемых (10.8). В результате правую часть (10.13) можно записать через тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ :

$$\iint_{\partial\Omega} (\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})) w_i n_j ds = \iint_{\partial\Omega} \sigma_{ij} w_i n_j ds = \iint_{\partial\Omega} f_i w_i ds \quad (10.14)$$

(см. (10.6)). Это означает, что в правой части уравнения (10.13) стоят внешние силы, приложенные к поверхности тела. Если выполняются однородные условия (10.9), то в правой части уравнения стоит ноль. Другой выбор дивергентной формы к такому результату не приводит.

К выбору неоднозначности при переходе к дивергентной форме можно сделать еще один комментарий. В левой части (10.13) стоит комбинация

$$T = \iiint_{\Omega} (\lambda w_{i,i} u_{j,j} + \mu w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i})) dv,$$

содержащая упругие константы. Эту величину можно считать “билинейным функционалом” от двух векторных функций:  $T[u, w]$ . Сравнивая форму  $P$  с (10.7), получаем

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} T[u, u],$$

то есть форма (10.13) тесно связана с формой потенциальной энергией. Более подробно эта тема рассматривалась в (6). Хорошая идея — вообще начинать построение метода конечных элементов с конструирования формы потенциальной энергии.

Аппроксимируем векторную функцию  $u_i$  с помощью функций формы:

$$u_i = U_i^n N^n(x_1, x_2, x_3). \quad (10.15)$$

Индекс  $n$  нумерует узлы сетки. В настоящем разделе (вопреки всему остальному изложению) мы сделали этот индекс верхним, чтобы оставить внизу только индексы относящиеся

к классической теории упругости. В этом смысле развиваемый здесь метод конечных элементов является “надстройкой” над обычной теорией упругости. Функции  $N^m$ , разумеется, являются функциями формы. Таким же образом аппроксимируем весовую функцию:

$$W_i = W_i^n N^n(x_1, x_2, x_3). \quad (10.16)$$

Подставим (10.15) и (10.16) в левую часть (10.13). В результате получим

$$W_i^m \left[ (\lambda K_{ij}^{mn} + \mu \delta_{ij} K_{kk}^{mn} + \mu K_{ji}^{mn}) U_j^n + \rho \delta_{ij} M^{mn} \ddot{U}_j^n \right] = W_i^m P_i^m, \quad (10.17)$$

где введены обозначения

$$K_{ij}^{mn} = \iiint_{\Omega} N_{,i}^m N_{,j}^n dv, \quad (10.18)$$

$$M^{mn} = \iiint_{\Omega} N^m N^n dv, \quad (10.19)$$

$$P_i^m = \iint_{\partial\Omega} f_i \tilde{N}^m ds, \quad (10.20)$$

$\tilde{N}^m$  — ограничение функций формы на  $\partial\Omega$ .

В правой части (10.17) стоят поверхностные силы, действующие на тело. Таким образом, в случае однородных условий (10.9) правая часть (10.17) обращается в ноль, и однородные граничные условия Неймана оказываются естественными в смысле раздела 6.

Уравнение (10.17) должно выполняться при любом выборе коэффициентов  $W_i^m$ , поэтому можно положить

$$(\lambda K_{ij}^{mn} + \mu \delta_{ij} K_{kk}^{mn} + \mu K_{ji}^{mn}) U_j^n + \rho \delta_{ij} M^{mn} \ddot{U}_j^n = P_i^m, \quad (10.21)$$

Данное уравнение можно решать обычными методами.

### Комментарии по вычислениям

Прежде всего, опишем вычисление элементов  $K_{ij}^{mn}$ . Будем действовать по аналогии с вычислением матрицы  $\mathbf{K}$  в скалярном случае. Если задача трехмерна, вычислим  $3 \times 3 = 9$  матриц  $\mathbf{K}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , каждая размером  $J \times J$  ( $J$  — число узлов). Разумеется, для двумерной задачи необходимо вычислить 4 таких матрицы. Матрицы будем вычислять с помощью ассемблирования из элементных матриц, как и раньше.

Обратимся к формуле (2.24) для элементных матриц “обычной” матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ . Воспроизведем ее здесь для удобства. Кроме того, внесем некоторые изменения, чтобы формула описывала трехмерный случай. Трехмерное реальное пространство будет описываться координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , а трехмерное идеальное пространство — координатами  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Будем считать, что конечные элементы — кубоиды, т. е. на каждый элемент имеется восемь функций формы. Итак,

$$\hat{K}^{(n)} = \iiint_{\Omega_*^{(n)}} \mathbf{E} \mathbf{E}^T |\det \mathbf{D}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad \mathbf{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1}, \quad (10.22)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial(\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_8)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}. \quad (10.23)$$

Заметим, что

$$\mathbf{E} = \frac{\partial(N_1, \dots, N_8)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}. \quad (10.24)$$

В индексных обозначениях (10.22) записывается как

$$(\hat{K}^{(n)})^{mk} = \iiint_{\Omega_*^{(n)}} E_{m,i} E_{k,i} |\det \mathbf{D}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (10.25)$$

с подразумеваемым суммированием по  $i$ . Очевидно, что компоненты элементных матриц  $\hat{K}_{ij}^{(n)}$  вычисляются по формулам, аналогичным (10.25):

$$(\hat{K}^{(n)})_{ij}^{mk} = \iiint_{\Omega_*^{(n)}} E_{m,i} E_{k,j} |\det \mathbf{D}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (10.26)$$

Это означает, что громоздкая вычислительная часть для задачи теории упругости мало отличается от скалярного случая.

После вычисления матриц  $K_{ij}^{mn}$  сформируем для удобства матрицы  $Z_{ij}^{mn}$ :

$$Z_{ij}^{mn} = \lambda K_{ij}^{mn} + \mu \delta_{ij} K_{kk}^{mn} + \mu K_{ji}^{mn}. \quad (10.27)$$

Уравнение (10.21) с помощью этих матриц переписывается в виде

$$Z_{ij}^{mn} U_j^n + \rho \delta_{ij} M^{mn} \ddot{U}_j^n = P_i^m. \quad (10.28)$$

Поясним, почему мы называем  $Z_{ij}^{mn}$  матрицами, в то время, как эти величины имеют 4 индекса. Вычислительный подход к уравнению (10.28) следующий. Сформируем вектор неизвестных как блочный:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \quad (10.29)$$

где, например,

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ \vdots \\ U_1^J \end{pmatrix}.$$

Построим также блочные матрицы  $\mathbf{Z}_b$  и  $\mathbf{M}_b$  по формулам

$$\mathbf{Z}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (10.30)$$

Кроме того, построим блочный вектор в правой части по аналогии с (10.29):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

В этих обозначениях (10.29) переписывается как

$$\mathbf{Z}_b \mathbf{U} + \rho \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{P}. \quad (10.32)$$

Это обычное векторное дифференциальное уравнение, которое может быть решено, например, методом Рунге–Кутты.

## §11. Эвакуация волн 1. DtN–оператор

### О необходимости эвакуации волн

Часто приходится решать численно задачи об излучении и рассеянии волн в бесконечном пространстве. Типичная постановка задачи выглядит так. В пространстве имеется рассеиватель конечных размеров. На границе рассеивателя заданы какие-то граничные условия (например, условия Неймана). На рассеиватель с некоторого направления в пространстве падает некоторая волна. Необходимо найти волны, рассеянные рассеивателем.

Другой интересной задачей рассеяния является следующая постановка. Один из параметров волнового уравнения или уравнения Гельмгольца (например, скорость  $c$ ) определяется непостоянным во времени. На неоднородности параметра может происходить рассеяние волн. при этом контрастная граница рассеивателя отсутствует.

Обе постановки называются *внешними* задачами рассеяния. Практическая ценность подобных задач достаточно ясна.

Очевидная сложность такой задачи состоит в том, что невозможно разбить на конечные элементы неограниченное пространство снаружи от рассеяния. Вычислительной технике доступно только конечное число степеней свободы. Поэтому приходится заменять бесконечную область на конечную, вводя не существующую в реальной задаче границу. Возникает риск того, что от этой искусственной границы волны отразятся, и построенное решение будет иметь мало общего с реальной задачей. Схематически разница между реальной и численно решаемой задачей показана на Рис. 11.1. Вся неограниченная внешняя область обозначена как  $\Omega$ , “обрезанная” область — как  $\bar{\Omega}$ .

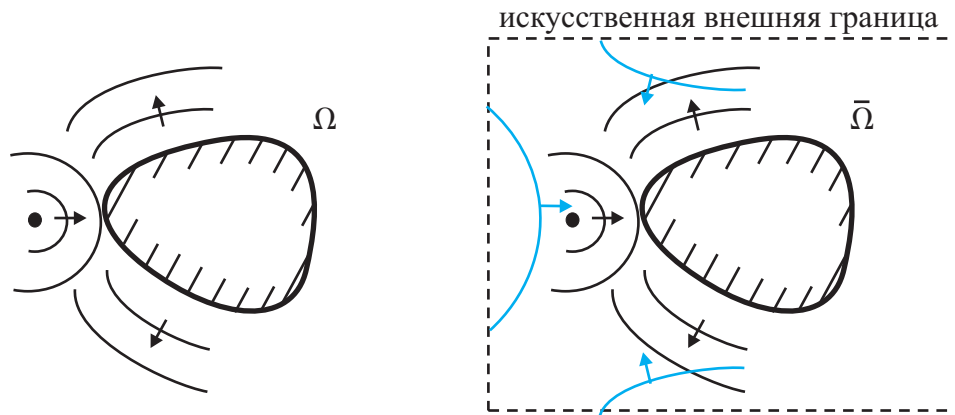


Рис. 11.1:

Сразу отметим, что игнорировать данную проблему нельзя. На внешней границе области, показанной на Рис. 11.1 справа, должны быть заданы некоторые граничные условия. Если “ничего не делать”, там будут заданы граничные условия Неймана. Также нетрудно задать условия Дирихле. В первом случае коэффициент отражения от внешней границе будет равен  $+1$ , а во-втором  $-1$ . В обоих случаях вся энергия отражается от внешней границы, что сильно портит решение. Вместо бесконечного пространства с рассеивателем фактически рассматривается резонатор с рассеивателем.

С математической точки зрения в постановку задачи рассеяния входит условие излучения в той или иной форме (Зоммерфельда, интегральной или предельного поглощения).

В любом случае эти условия накладываются на дальнюю асимптотику поля. Необходимо для численного решения придумать какой-нибудь аналог таких условий, которые могут накладываться не на бесконечности, а на внешней границе области.

### Модельная одномерная задача в split-формулировке

Рассмотрим относительно простую задачу, которая даже имеет решение в уже введенных терминах. Будем решать одномерную безразмерную нестационарную систему линеаризованных уравнений гидродинамики

$$\dot{p} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (11.1)$$

$$\dot{u} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (11.2)$$

где  $p(x, t)$  может интерпретироваться как акустическое давление, а  $u$  как  $x$ -компонента колебательной скорости, домноженной на  $\rho c$ . Можно также считать, что рассматривается электромагнитная задача. При этом  $p$  и  $u$  — различные поперечные компоненты магнитного и электрического поля.

Для определенности будем рассматривать начальную задачу на прямой. Наложим начальные условия

$$u(x, 0) = 0 \quad (11.3)$$

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad (11.4)$$

и будем считать, что  $t > 0$ .

Дискретизация системы (11.1), (11.2) в рамках метода конечных элементов не представляет сложности (см. материал предыдущей лекции).

Как нетрудно видеть, в данной задаче отсутствует рассеиватель, то есть рассматривается задача распространения. Будем считать, что начальное распределение  $p_0$  локализовано на отрезке  $[-1, 1]$  (т. е. эта функция равна нулю вне этого отрезка). Ограничим рассматриваемую область отрезком  $[-1, 1]$ . Попытаемся поставить на границе области (т. е. в точках  $x = \pm 1$ ) граничные условия, которые будут гарантировать отсутствие отраженных волн.

Для этого заметим, что решение поставленной задачи дается формулой Д'Аламбера

$$p = f(t - x) + g(t + x) \quad (11.5)$$

$$u = f(t - x) - g(t + x) \quad (11.6)$$

для некоторых функций  $f$  и  $g$ . Подставляя данное решение в начальное условие, получаем

$$f(\tau) = g(\tau) = \frac{1}{2}p_0(\tau). \quad (11.7)$$

Исходный импульс давления распадается на два импульса вдвое меньшей амплитуды. Один бежит направо, другой налево.

Непосредственно из формы (11.5), (11.6) видно, что в волне, бегущей вправо (функция  $f$ ), выполняется равенство

$$p(x, t) = u(x, t), \quad (11.8)$$

а в волне, бегущей налево (функция  $g$ )

$$p(x, t) = -u(x, t). \quad (11.9)$$

Заметим, что компонента, бегущая налево, никогда не достигает границы  $x = 1$  и наоборот. Поставим на границе  $x = \pm 1$  граничные условия, следующие из (11.8), (11.9):

$$p(1, t) = u(1, t), \quad p(-1, t) = -u(-1, t). \quad (11.10)$$

Данные граничные условия обеспечивают идеальное поглощение волн. Их нетрудно реализовать в split-формулировке в рамках МКЭ.

### Одномерная задача в non-split-формулировке

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k_0^2(1 + \epsilon(x))p = f(x), \quad (11.11)$$

где  $f(x)$  — функция источников,  $\epsilon(x)$  — функция, описывающая неоднородность пространства. Будем полагать, что все самое интересное происходит в области  $-L < x < L$ , т. е.

$$f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \epsilon(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > L.$$

Ограничим рассматриваемую область отрезком  $[-L, L]$ . Попытаемся поставить безотражательные граничные условия  $x = \pm L$ .

Заметим, что при  $x > L$  в пространстве может существовать только волна  $p = \exp\{ik_0 x\}$ . Поле в такой волне удовлетворяет соотношению

$$\frac{dp}{dx} = ik_0 p.$$

Поэтому можно поставить граничное условие

$$\frac{dp(L)}{dx} = ik_0 p(L). \quad (11.12)$$

Аналогично, на границе  $x = -L$  ставится условие

$$\frac{dp(-L)}{dx} = -ik_0 p(-L). \quad (11.13)$$

Условия (11.12), (11.13) имеют импедансный вид. В одной из предыдущих лекций мы показывали, как такие граничные условия могут быть реализованы в МКЭ.

Условия (11.12), (11.13) обеспечивают полную эвакуацию волн в одномерной стационарной задаче. Очевидно, одномерные задачи сложности не представляют.

### Стационарная двумерная задача. DtN-оператор

Все заметно усложняется в двумерном и трехмерном случае. Рассмотрим двумерную стационарную задачу рассеяния в полярных координатах  $(r, \varphi)$ :

$$\Delta p + k_0^2(1 + \epsilon(r, \varphi))p = f(r, \varphi), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (11.14)$$

$$f(r, \varphi) = 0 \quad \text{и} \quad \epsilon(r, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad |r| > R.$$

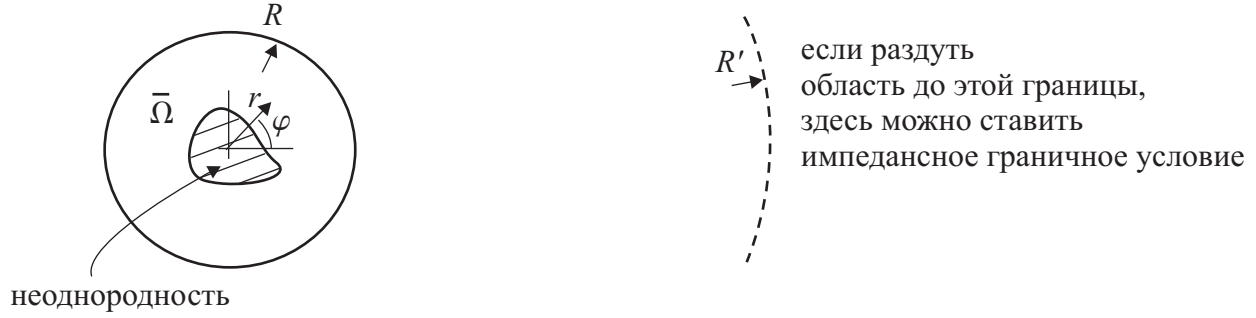


Рис. 11.2:

Ограничим область рассмотрения кругом  $r < R$  и попытаемся поставить граничные условия на окружности  $r = R$  так, чтобы граница не отражала волн, исходящих из круга. Геометрия задачи проста, но для полноты она представлена на Рис. 11.2.

Имеется следующий приближенный путь постановки граничных условий в двумерной задаче. Возьмем круг сильно большего радиуса  $R' \gg R$  и поставим граничное условие, аналогичное (11.12):

$$\frac{\partial p(R', \varphi)}{\partial r} = ik_0 p(R', \varphi). \quad (11.15)$$

Это граничное условие работает, если локально в области участка границы можно приближенно считать задачу одномерной (см. задачу 1). Это означает, что кривизна границы должна быть пренебрежимо мала, а волны должны падать почти по нормали. На практике это означает, что надо брать  $R'$  весьма большим, что делает задачу неоправданно громоздкой. Заметим, что в области  $R' < r < R$  не происходит рассеяния, только распространение, то есть эта область интереса не представляет. Поэтому условие (11.15) на практике не применяется.

Заметим, что в случае нестационарной задачи можно взять достаточно большую область  $R' > r$  и наложить временное окно таким образом, чтобы возбуждающий импульс успел рассеяться достаточное число раз в области  $r < R$ , но не успел отразиться от внешней границы.

Вернемся к стационарной задаче. Условие (11.15) представляет собой связь между полем и его нормальной (к границе) пространственной производной. Данная связь в (11.15) является *локальной*. Проблема с безотражательным граничным условием в двумерном случае заключается в том, что в точной формулировке это условие локальным не является, т. е. оно на самом деле имеет вид

$$\frac{\partial p(R, \varphi)}{\partial r} = \int_0^{2\pi} G(R, \varphi - \varphi') p(R, \varphi') d\varphi'. \quad (11.16)$$

Попробуем получить такое условие (хотя и в несколько иной форме).

Уходящая волна вне круга  $r < R$  может быть записана в виде

$$p(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi} H_n^{(1)}(k_0 r), \quad (11.17)$$

где  $H_n^{(1)}$  — функции Ханкеля первого рода. Выбор этих функций в качестве уходящих волн соответствует неявному заданию временной зависимости всех величин как  $e^{-i\omega t}$ .



Нормальная производная поля на границе равна

$$\frac{p(R, \varphi)}{\partial r} = k_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\varphi} (H_n^{(1)})'(k_0 R), \quad (11.18)$$

где штрих обозначает производную функции по аргументу. Из (11.17) с помощью преобразования Фурье получаем

$$a_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(1)}(k_0 R)} \int_0^{2\pi} p(R, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \quad (11.19)$$

Таким образом, связь между полем на границе и его производной дается формулой

$$\frac{p(R, \varphi)}{\partial r} = \frac{k_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(H_n^{(1)})'(k_0 R)}{H_n^{(1)}(k_0 R)} e^{in\varphi} \int_0^{2\pi} p(R, \varphi') e^{-in\varphi'} d\varphi'. \quad (11.20)$$

В домашнем задании необходимо установить, что формула (11.20) сводится к виду (11.16).

Следует отметить, что формула (11.20) проще в численной реализации, чем (11.16). Схема реализации (11.20) следующая:

$$p(R, \varphi) \xrightarrow{\mathcal{F}} p_n \longrightarrow p_n \frac{k_0 (H_n^{(1)})'(k_0 R)}{H_n^{(1)}(k_0 R)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{p(R, \varphi)}{\partial r}. \quad (11.21)$$

Здесь  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье, которое в численной реализации заменяется дискретным (быстрым) преобразованием Фурье. То есть реализация оператора (11.20) сводится к прямому БПФ, умножению на строку и обратному БПФ. Это достаточно “дешевая” процедура.

Оператор (11.16) или (11.20) носит название оператора Пуанкаре–Стеклова или DtN-оператора. DtN означает Dirichet-to-Neumann, то есть оператор, который отображает данные Дирихле внешней области в данные Неймана. То есть условно можно записать (11.16), (11.20) как

$$\frac{p(R, \varphi)}{\partial r} = \mathbf{DtN}[p(R, \varphi)] \quad (11.22)$$

Утверждается, что если на границе круга задано условие (11.20), то эта граница не отражает волны, идущие из круга наружу.

Пока речь шла только о математической формулировке безотражательных граничных условий. Обсудим, каким образом эти условия можно использовать в численной схеме, реализующей МКЭ.

Пусть условие (11.20) реализовано. На практике это означает, что имеется вектор узловых значений  $p(R, \varphi)$  с  $\varphi$ , пробегаящими по достаточно плотной равномерной сетке от 0 до  $2\pi$ . Этим значениям ставится в соответствие вектор узловых значений нормальной производной  $\partial p(R, \varphi)$  на той же угловой сетке. Обозначим вектор значений поля как  $P$ , а вектор нормальных производных как  $P'$ . Оператор (11.20) линеен, поэтому его дискретная версия дается матрицей, которую мы немного неуклюже обозначим как  $\mathbf{DtN}$ :

$$P' = \mathbf{DtN} P. \quad (11.23)$$

Формально говоря, граничное условие (11.22) можно трактовать, как нелокальное импедансное граничное условие. В соответствии с процедурой, описанной в лекции (6), численная схема будет иметь вид:

$$-\mathbf{K}P + k_0^2 \mathbf{M}P = F - \tilde{\mathbf{M}} \text{DtN} \Pi^b P, \quad (11.24)$$

где  $P$  — вектор узловых значений полевой переменной,  $\mathbf{K}$  — матрица жесткости, определяемая обычным образом,  $\mathbf{M}$  — матрица массы, определяемая с учетом неоднородности  $\epsilon$ :

$$M_{i,j} = \iint_{\Omega} \epsilon N_i N_j ds, \quad (11.25)$$

$F$  — правая часть:

$$F_j = \iint_{\Omega} f N_j ds, \quad (11.26)$$

$\tilde{\mathbf{M}}$  — граничная матрица массы:

$$\tilde{M}_{i,j} = \int_{\partial\Omega} \tilde{N}_i \tilde{N}_j dl, \quad (11.27)$$

$\Pi^b$  — матрица, выделяющая граничные элементы (как в (6.20)).

Очевидно, последний член из правой части можно перенести в левую и решить полученное линейное уравнение относительно  $P$ .

Вычисление DtN оператора не является единственным методом постановки неизлучающих граничных условий. Очевидная идея заключается в том, чтобы на границе области поставить узкий слой, имитирующий сильное поглощение. Оказывается, это не так просто сделать, но возможно! Одна из следующих лекций (часть 2 об эвакуации волн) будет посвящена технике PML, представляющих собой “идеально” поглощающие слои на границе области.

## Задачи

1. В полуплоскости  $y > 0$  плоскости  $(x, y)$  выполняется однородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0.$$

На границе  $y = 0$  выполняется импедансное граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ik_0 u.$$

Как показано в лекции, данное граничное условие приводит к тому, что волны, падающие на границу по нормали, поглощаются полностью. Найти зависимость коэффициента отражения от угла падения (убедиться в том, что волны, падающие не по нормали, поглощаются не полностью).

2. Привести формулу (11.20) к виду (11.16). Для этого воспользоваться теоремой о свертке.

3. Какого порядка сингулярность по угловой переменной в нуле имеется у функции  $G$  из (11.16)?
4. Вывести формулу, аналогичную (11.20), для трехмерного случая. Область — шар радиуса  $R$ .

## §12. Эвакуация волн 2. PML

### Эвакуация волн в одномерном случае. Наивный подход

Рассмотрим одномерную задачу распространения волн в split-постановке:

$$\dot{p} = -\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12.1)$$

$$\dot{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (12.2)$$

Для скалярных функций  $p(t, x)$ ,  $u(t, x)$  (давления и колебательной скорости), заданных в области  $-\infty < x < \infty$ ,  $t > 0$ .

Для простоты будем рассматривать начальную задачу, т. е. будем учитывать начальное состояние

$$p(0, x) = \phi(x), \quad u(0, x) = \psi(x). \quad (12.3)$$

Будем считать, что в области  $-L < x < L$  “что-то происходит”, например, скорость волн  $c$  и плотность среды  $\rho$  зависят от  $x$ , и происходит рассеяние волн на неоднородности. За пределами отрезка  $-L < x < L$  “нет ничего интересного”, скорость  $c = c_0$  и плотность  $\rho = \rho_0$  постоянны. Более того, за пределами этого отрезка функции  $\phi$  и  $\psi$  равны нулю.

Моделировать (бесконечные) полупрямые  $x > L$  и  $x < -L$  не имеет смысла. Вместо этого необходимо поставить граничные условия в точках  $x = \pm L$ , обеспечивающие эвакуацию волн на бесконечности, т. е. гарантирующие, что волна, уходящая на бесконечность, оттуда не возвращается.

К счастью, в одномерном случае это легко сделать. Достаточно поставить граничные условия

$$p(t, L) = \rho_0 c_0 u(t, L), \quad p(t, -L) = -\rho_0 c_0 u(t, -L). \quad (12.4)$$

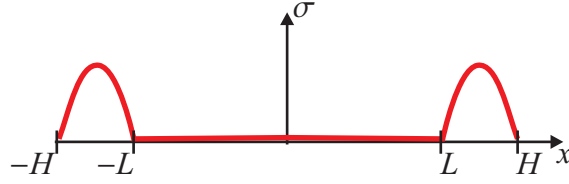
Однако этот прием не работает в задачах, для которых DtN-оператор нелокален. Поэтому хочется придумать эффективную технику, которая будет работать для более широкого класса задач. При этом мы готовы мириться с тем, что условия на границах  $x = \pm L$  окажутся приближенными.

Применим “наивный” подход. Наша задача — организовать поглощение волн в некоторых достаточно небольших областях за точками  $x = \pm L$ . Физическая интуиция говорит, что поглощение волн происходит, если в среде присутствует вязкость. Попробуем внести некоторую модельную вязкость в уравнения (12.1), (12.2). Вязкость — это когда на частицу среды действует сила, пропорциональная скорости и направленная против скорости. Поэтому заменим уравнение (12.2) на

$$\dot{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma(x)u,$$

а уравнение (12.1) оставим без изменений. Здесь  $\sigma(x)$  — “коэффициент вязкости”. Профиль коэффициента вязкости выберем примерно так, как показано на Рис. 12.1.

Поглощающие слои расположим на отрезках  $[L, H]$  и  $[-H, -L]$ . В точках  $x = \pm H$  поставим “простые” граничные условия, например, условия Дирихле  $p(t, \pm H) = 0$ , т. е. за поглощающими слоями стоят идеально отражающие стенки.

Рис. 12.1: Коэффициент вязкости  $\sigma(x)$ 

Оказывается, описанная схема работает *плохо*. От такого поглощающего слоя волна отражается, причем сильно. Для того, чтобы волна поглотилась и не отразилась, необходимо сделать отрезок  $[L, H]$  очень большим, а величину коэффициента вязкости очень малой.

Поясним природу возникающей сложности. Если вязкость очень мала, то мало и поглощение. Если вязкость, наоборот, велика, то в поглощающем слое фактически реализуются условия Неймана (скорость  $u$  равна нулю). А условие Неймана является отражающим, а не поглощающим.

### Одномерные уравнения PML

В работе [6] была предложена блестящая идея идеально согласованного слоя (PML — perfectly matching layer). Она заключается в том, что необходимо ввести “вязкость для давления” одновременно с вязкостью для скорости. А именно, необходимо рассматривать систему уравнений

$$\dot{p} = -\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma(x)p, \quad (12.5)$$

$$\dot{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma(x)u. \quad (12.6)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты “вязкости” в обоих уравнениях должны быть одинаковы, иначе чуда не произойдет. Будем считать, что профиль коэффициента  $\sigma(x)$  все еще выглядит как на Рис. 12.1.

Покажем, что система уравнений (12.5), (12.6) обладает свойством *безотражательности*. Пусть никакой стенки при  $x = H$  нет, а на отрезке  $[L, H]$  коэффициент  $\sigma$  не равен нулю. Будем считать, что параметры  $\rho$  и  $c$  во всей рассматриваемой области постоянны и равны  $\rho_0, c_0$ .

Пусть на поглощающий слой  $[L, H]$  слева падает волна произвольного профиля  $f(t - x/c_0)$ . Это в векторном виде означает

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (\rho_0 c_0)^{-1} \end{pmatrix} f(t - x/c_0), \quad x < L. \quad (12.7)$$

Легко видеть, что это решение удовлетворяет системе (12.5), (12.6) при  $\sigma = 0$ .

Попробуем построить решение уравнений (12.5), (12.6), которое слева от точки  $x = L$  имеет вид (12.7). А именно, попробуем построить решение в виде

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (\rho_0 c_0)^{-1} \end{pmatrix} f(t - x/c_0)g(x). \quad (12.8)$$

Подставим (12.8) в уравнения (12.5), (12.6). Получим, что уравнения выполняются, если

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{\sigma(x)}{c_0}g. \quad (12.9)$$

Легко построить соответствующее решение:

$$g(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{c_0} \int_{x_0}^x \sigma(\xi) d\xi \right\}. \quad (12.10)$$

В качестве нижнего предела возьмем произвольное значение  $x_0 < L$ . Тогда слева от слоя  $L < x < H$  при всех  $x$  значение  $g$  будет равно 1, а справа от этого слоя значение  $g$  будет равно константе

$$g_r = \exp \left\{ -\frac{1}{c_0} \int_L^H \sigma(\xi) d\xi \right\}. \quad (12.11)$$

Полученное решение можно трактовать как описание процесса прохождения волны (12.7) через поглощающий слой. Справа от слоя имеется прошедшая ослабленная волна с коэффициентом прохождения  $g_r$ , а отраженной волны слева от слоя нет. Следовательно, слой не отражает волну. Это и значит, что слой идеально согласован.

Достаточно простое упражнение заключается в том, чтобы убедиться, что волна, бегущая влево из области, находящейся справа от слоя, а именно

$$\begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(\rho_0 c_0)^{-1} \end{pmatrix} f(t + x/c_0), \quad x > H, \quad (12.12)$$

также не испытает отражения и пройдет через слой, будучи ослабленной с тем же коэффициентом  $g_r$ .

Формула (12.11) позволяет найти коэффициент ослабления волны идеально согласованным слоем. Если при  $x = H$  находится идеально отражающая стенка, то волна проходит через поглощающий слой дважды. Итоговый коэффициент ослабления есть

$$\alpha = g_r^2 = \exp \left\{ -\frac{2}{c_0} \int_L^H \sigma(\xi) d\xi \right\}. \quad (12.13)$$

Очевидно, достигнуть идеального поглощения  $\alpha$  нельзя, но можно достичь достаточно малых значений. Обычно имеется понимание, какое значение  $\alpha$  допустимо (например,  $\alpha = 0.001$  или  $0.01$ ). Формула (12.13) позволяет подобрать величину коэффициента вязкости для достижения нужного  $\alpha$ .

Очень важным обстоятельством является то, что коэффициент поглощения волны не зависит от частоты. Это означает, что слой, толщина которого много меньше длины волны, может эффективно поглотить такую волну.

На практике вид функции  $\sigma(x)$  выбирают не совсем таким, как показано на Рис. 12.1. Данная функция растет линейно от нуля при  $x = L$  до какого-то максимального значения при  $x = H$ . Толщина слоя PML выбирается равной примерно пяти размерам конечных элементов. Опыт показывает, что такой выбор дает наилучший результат. Слои с таким профилем показаны ниже на Рис. 12.2.

### Двумерные уравнения PML. Вид и свойства

Большой интерес представляет двумерная задача, для которой DtN-оператор не локален, а значит нет надежды построить хорошие поглощающие граничные условия импедансного типа.

Пусть область, в которой необходимо промоделировать распространение волн, есть прямоугольник

$$\Omega : \quad -L_x < x < L_x, \quad -L_y < y < L_y.$$

Система уравнений для переменных  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $p$  (двух компонент колебательной скорости и давления) имеет вид

$$\dot{u}_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (12.14)$$

$$\dot{u}_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (12.15)$$

$$\dot{p} = -\rho c^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right). \quad (12.16)$$

Предполагается, что за пределами прямоугольника  $\Omega$  имеется неограниченная плоскость с постоянными значениями  $\rho = \rho_0$ ,  $c = c_0$ . Необходимо поставить на границе области  $\Omega$  условия, имитирующие эвакуацию волн на бесконечность.

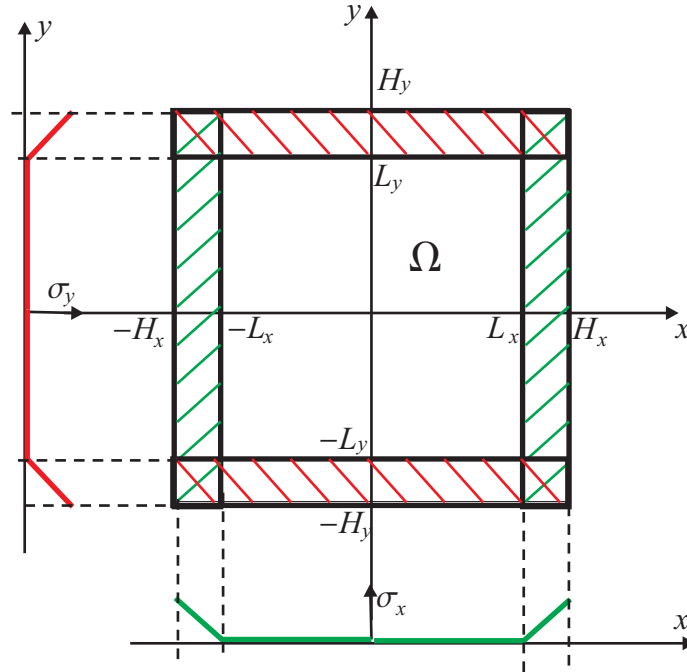


Рис. 12.2: Двумерная область с PML-границей

Расширим область  $\Omega$  до прямоугольника  $-H_x < x < H_x$ ,  $-H_y < y < H_y$ . В полосе между старой границей и новой разместим поглощающий слой. Этот слой будет представлен двумя функциями:  $\sigma_x(x)$  и  $\sigma_y(y)$ , вид которых показан на Рис. 12.2.

Уравнения в расширенной области выглядят несколько необычным образом. А именно, давление записывается как сумма двух компонент:

$$p(t, x, y) = p_x(t, x, y) + p_y(t, x, y). \quad (12.17)$$

Обращаем внимание на то, что это не две координаты вектора, а два скалярных слагаемых. Система уравнений имеет вид

$$\dot{u}_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma_x u_x, \quad (12.18)$$

$$\dot{u}_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \sigma_y u_y, \quad (12.19)$$

$$\dot{p}_x = -\rho c^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \sigma_x p_x, \quad (12.20)$$

$$\dot{p}_y = -\rho c^2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \sigma_y p_y. \quad (12.21)$$

Заметим, что сложение (12.20) и (12.21) дает в области, не занятой поглощающим слоем, уравнение (12.16).

Для описания затухания построим решение системы (12.18)–(12.22) при постоянных  $c = c_0$  и  $\rho = \rho_0$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что волна вида

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ (\rho_0 c_0)^{-1} \cos \theta \\ (\rho_0 c_0)^{-1} \sin \theta \end{pmatrix} f(t - (x \cos \theta + y \sin \theta)/c_0) g_x(x) g_y(y) \quad (12.22)$$

является решением системы при условии выполнения уравнения для функций ослабления  $g_{x,y}$

$$\frac{dg_x}{dx} = -\frac{\cos \theta \sigma_x}{c_0} g_x, \quad (12.23)$$

$$\frac{dg_y}{dy} = -\frac{\sin \theta \sigma_y}{c_0} g_y, \quad (12.24)$$

Здесь  $\theta$  — угол, под которым волна распространяется к оси  $x$ . Параметр  $\theta$  может принимать любые значения, в том числе и комплексные. В этом случае (12.22) описывает неоднородные волны. Такие волны всегда присутствуют, например, в ближнем поле рассеивателя.

Уравнения (12.23) и (12.24) легко решаются:

$$g_x(x) = \exp \left\{ -\frac{\cos \theta}{c_0} \int_{x_0}^x \sigma_x(\xi) d\xi, \right\} \quad (12.25)$$

$$g_y(y) = \exp \left\{ -\frac{\sin \theta}{c_0} \int_{y_0}^y \sigma_y(\xi) d\xi, \right\} \quad (12.26)$$

где, например,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ .

Вид решения (12.22) свидетельствует о том, что двумерные уравнения безотражательны.

Соотношения (12.25) и (12.26) позволяют определить поглощение в PML как функцию угла  $\theta$ . Можно сделать следующие замечания. При нормальном падении волны на границу для поглощения работает формула (12.13). При падении, близком к касательному, поглощение становится малым. В случае комплексного угла волна не поглощается вовсе.

Для того, чтобы достичь приемлемого затухания всех компонент поля, надо ставить слой PML не вплотную к рассеивателю, а оставляя между рассеивателем и слоем свободное пространство. Тогда угол падения будет не скользящим, а неоднородные волны затухнут естественным образом.

### Понятие комплексной замены переменных

Нашей целью является выводить безотражательные уравнения в сложных физических ситуациях, поэтому необходимо разобраться в их структуре. В основе таких уравнений лежит комплексная замена переменных. Прокомментируем это.



Вернемся к одномерным уравнениям (12.5), (12.6) с постоянными  $\rho = \rho_0$  и  $c = c_0$ . Выполним преобразование Фурье по  $t$ , т. е. перейдем к стационарной задаче на частоте  $\omega$  (предполагается зависимость от времени вида  $e^{-i\omega t}$ ). Новые полевые переменные будем обозначать  $\tilde{u}(x)$  и  $\tilde{p}(x)$ .

Уравнения (12.5), (12.6) запишутся как

$$(-i\omega + \sigma(x))\tilde{p} = -\rho_0 c_0^2 \frac{d\tilde{u}}{dx}, \quad (12.27)$$

$$(-i\omega + \sigma(x))\tilde{u} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\tilde{p}}{dx}. \quad (12.28)$$

Перепишем эту систему в виде

$$\frac{1}{1 + i\sigma(x)/\omega} \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p}, \quad (12.29)$$

$$\frac{1}{1 + i\sigma(x)/\omega} \frac{d\tilde{p}}{dx} = i\rho_0 \omega \tilde{u}. \quad (12.30)$$

Введем вместо  $x$  новую переменную  $x'$ , такую что

$$\frac{d}{dx'} = \frac{1}{1 + i\sigma(x)/\omega} \frac{d}{dx}. \quad (12.31)$$

Очевидно,

$$\frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{i\sigma(x)}{\omega} \quad (12.32)$$

и

$$x' = x + \frac{i}{\omega} \int_{x_0}^x \sigma(\xi) d\xi. \quad (12.33)$$

Если  $x$  — действительная переменная, изменяющаяся от  $x_0 < L$  до  $x_1 > H$ , величина  $x'(x)$  перемещается в комплексной плоскости по некоторому контуру, показанному на Рис. 12.3.

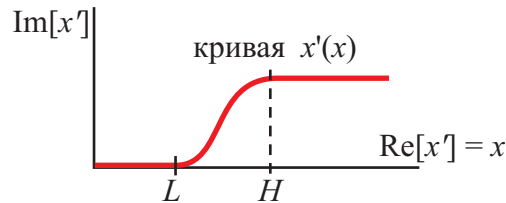


Рис. 12.3: Контур  $x'$  в комплексной плоскости

В новой переменной уравнения (12.31), (12.32) имеют вид

$$\frac{d\tilde{u}}{dx'} = \frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p}, \quad (12.34)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dx'} = i\rho_0 \omega \tilde{u}. \quad (12.35)$$

Далее делается очень нетривиальный ход. Считается, что уравнения (12.29), (12.30) выполняются как уравнения относительно *комплексной* переменной  $x'$ . Решение этого уравнения есть

$$\begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ (\rho_0 c_0)^{-1} \end{pmatrix} \exp\{i\omega x'/c_0\} \quad (12.36)$$

(опять же, на комплексной плоскости  $x'$ ).

Для того, чтобы построить исходное решение  $\tilde{p}(x)$ ,  $\tilde{u}(x)$ , необходимо взять решение (12.31) на кривой  $x'(x)$ , показанной на Рис. 12.31. Очевидно, отраженной волны при этом нет, и прохождение волны через поглощающий слой приводит к уменьшению амплитуды плоской волны.

### Вывод уравнений для двумерного PML

Продемонстрируем рассуждение, которое приводит к выводу нетривиальных и замечательных уравнений (12.18)–(12.21). Рассуждение состоит из нескольких шагов.

**Шаг 1.** К уравнениям (12.14)–(12.16) применяем преобразование Фурье по времени, а именно, украшаем полевые переменные тильдой и заменяем оператор  $\partial/\partial t$  на  $-i\omega$ :

$$-i\omega\tilde{u}_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}. \quad (12.37)$$

$$-i\omega\tilde{u}_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}. \quad (12.38)$$

$$-i\omega\tilde{p} = -\rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right). \quad (12.39)$$

**Шаг 2.** Формально заменим координаты  $x, y$  в (12.37)–(12.39) на координаты  $x', y'$ . При этом будем считать, что координаты  $x', y'$  — комплексные, т. е. уравнения (12.37)–(12.39) выполняются для всех комплексных значений координат. Далее мы будем предполагать, что есть кривые  $x'(x)$  и  $y'(x)$ , уходящие от действительных осей и гарантирующие убывание. Итак, перейдем от (12.37)–(12.39) к

$$-i\omega\tilde{u}_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x'}. \quad (12.40)$$

$$-i\omega\tilde{u}_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y'}. \quad (12.41)$$

$$-i\omega\tilde{p} = -\rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x'} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y'} \right). \quad (12.42)$$

**Шаг 3.** У нас есть действенный рецепт по переходу от координат  $x, y$  к  $x', y'$ . Воспользуемся им:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{1 + i\sigma_x(x)/\omega} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (12.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{1 + i\sigma_y(y)/\omega} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (12.44)$$

Естественно, замена координат осуществляется по формулам, сходным с (12.33). Уравнения (12.40)–(12.42) заменяются на

$$-i\omega\tilde{u}_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{1 + i\sigma_x(x)/\omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}. \quad (12.45)$$

$$-i\omega\tilde{u}_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{1+i\sigma_y(y)/\omega} \frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}. \quad (12.46)$$

$$-i\omega\tilde{p} = -\rho_0 c_0^2 \left( \frac{1}{1+i\sigma_x(x)/\omega} \frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{1+i\sigma_y(y)/\omega} \frac{\partial\tilde{u}_y}{\partial y} \right). \quad (12.47)$$

**Шаг 4.** В уравнениях (12.45)–(12.47) избавляемся от знаменателей. Наша цель — получить уравнения, содержащие только многочлены от  $-i\omega$  (но не рациональные выражения). Лучше, если эти уравнения будут содержать только первые степени  $-i\omega$ . С уравнениями (12.45), (12.46) все просто:

$$-i\omega\tilde{u}_x - i\sigma_x(x)\tilde{u}_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (12.48)$$

$$-i\omega\tilde{u}_y - i\sigma_y(y)\tilde{u}_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (12.49)$$

Уравнение (12.47) приходится разбивать на две части:

$$\tilde{p} = \tilde{p}_x + \tilde{p}_y, \quad (12.50)$$

$$-i\omega\tilde{p}_x = -\rho_0 c_0^2 \frac{1}{1+i\sigma_x(x)/\omega} \frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial x}, \quad (12.51)$$

$$-i\omega\tilde{p}_y = -\rho_0 c_0^2 \frac{1}{1+i\sigma_y(y)/\omega} \frac{\partial\tilde{u}_y}{\partial y} \quad (12.52)$$

с (12.17). Эти уравнения переписываются как

$$-i\omega\tilde{p}_x - i\sigma_x(x)\tilde{p}_x = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (12.53)$$

$$-i\omega\tilde{p}_y - i\sigma_y(y)\tilde{p}_y = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial u_y}{\partial y}. \quad (12.54)$$

Итак, теперь рассматривается система (12.48), (12.49), (12.50), (12.53), (12.54).

**Шаг 5.** К описанной системе применяется обратное преобразование Фурье по  $t$ , именно, выражение  $-i\omega$  заменяется на  $\partial/\partial t$  и снимается тильда. В результате получается система (12.18)–(12.21).

### Демонстрация работоспособности процедуры. PML в полярных координатах

Для демонстрации работоспособности описанной процедуры построим PML для уравнений в полярных координатах. Исходные уравнения имеют вид

$$\dot{u}_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (12.55)$$

$$\dot{u}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (12.56)$$

$$\dot{p} = -\rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (12.57)$$

Мы предполагаем, что плотность и скорость звука постоянны. Наша задача сформировать идеально согласованный слой в кольце  $L < r < H$ . Будем действовать по шагам, добавляя минимальные комментарии.

**Шаг 1, Шаг 2.** Преобразование Фурье дает систему уравнений, в которой мы сразу заменили  $r$  на  $r'$

$$-i\omega\tilde{u}_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r'}, \quad (12.58)$$

$$-i\omega\tilde{u}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0 r'} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi}, \quad (12.59)$$

$$-i\omega\tilde{p} = -\rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r'} + \frac{1}{r'} \tilde{u}_r + \frac{1}{r'} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (12.60)$$

**Шаг 3.** Делаем замену

$$\frac{\partial}{\partial r'} = \frac{1}{1 + i\sigma(r)/\omega} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (12.61)$$

где  $\sigma(r)$  — коэффициент вязкости, отличный от нуля в кольце  $L < r < H$ .

Нам потребуется явный вид замены:

$$r' = r(1 + i\Xi(r)/\omega), \quad \Xi(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \sigma(\xi) d\xi. \quad (12.62)$$

Перепишем систему (12.58), (12.59), (12.60) как

$$-i\omega\tilde{u}_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{1 + i\sigma(r)/\omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}, \quad (12.63)$$

$$-i\omega\tilde{u}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{1}{1 + i\Xi(r)/\omega} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi}, \quad (12.64)$$

$$-i\omega\tilde{p} = -\frac{\rho_0 c_0^2}{1 + i\sigma(r)/\omega} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\rho_0 c_0^2}{1 + i\Xi(r)/\omega} \left( \tilde{u}_r + \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (12.65)$$

**Шаг 4.** Переписываем уравнения (12.63), (12.64) в “приличном” виде:

$$(-i\omega + \sigma(r))\tilde{u}_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}, \quad (12.66)$$

$$(-i\omega + \Xi(r))\tilde{u}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi}. \quad (12.67)$$

Уравнение (12.65) выглядит плохо, но мы знаем, что делать. Разбиваем  $\tilde{p}$  на два слагаемых:

$$\tilde{p} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 \quad (12.68)$$

а уравнение (12.65) — на две части:

$$-i\omega\tilde{p}_1 = -\frac{\rho_0 c_0^2}{1 + i\sigma(r)/\omega} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}, \quad (12.69)$$

$$-i\omega\tilde{p}_2 = -\frac{1}{r} \frac{\rho_0 c_0^2}{1 + i\Xi(r)/\omega} \left( \tilde{u}_r + \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (12.70)$$

после чего переписываем их в виде

$$(-i\omega + \sigma(r))\tilde{p}_1 = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r}, \quad (12.71)$$

$$(-i\omega + \Xi(r))\tilde{p}_2 = -\frac{\rho_0 c_0^2}{r} \left( \tilde{u}_r + \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (12.72)$$

**Шаг 5.** Применяем к уравнениям (12.66), (12.67), (12.68), (12.71), (12.72) обратное преобразование Фурье:

$$p = p_1 + p_2, \quad (12.73)$$

$$\dot{u}_r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} - \sigma(r)u_r, \quad (12.74)$$

$$\dot{u}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} - \Xi(r)u_\varphi. \quad (12.75)$$

$$\dot{p}_1 = -\rho_0 c_0^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sigma(r)p_1, \quad (12.76)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\rho_0 c_0^2}{r} \left( \tilde{u}_r + \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \Xi(r)p_2. \quad (12.77)$$

Это дает систему уравнений PML.

### Задачи

1. Построить уравнения PML для линеаризованных уравнений гидродинамики в полярных координатах  $(r, \varphi)$ , обеспечивающие эвакуацию волн на границе области  $r_1 < r < r_2$ ,  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ .
2. Построить уравнения PML для линеаризованных уравнений гидродинамики в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , обеспечивающие эвакуацию волн на границе цилиндра  $z_1 < z < z_2$ ,  $r < R$ .
3. Разобраться в выводе уравнений PML для волнового уравнения в трехмерном пространстве

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) u = 0$$

по статье [7].

# Литература

1. И.К.Даугавет, *Теория приближенных методов. Линейные уравнения.* СПб.: БХВ-Петербург, 2006, 288с.
2. R.S.Langley, A transfer matrix analysis of the energetics of structural wave motion and harmonic vibration // Proc. R. Soc. Lond. A, 452 (1996), P.1631–1648.
3. Л.Д.Ландау, Л.Д.Лифшиц. Теоретическая физика, Т.VII, Теория упругости. М.:Наука, 1987г.
4. Ю.Н.Работнов, Механика деформируемого твердого тела. М.:Наука, 1988.
5. Э.Дьелесан, Д.Руайе, Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.:Наука, 1982.
6. J.-P. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // Journ. Comp. Phys., V. 114 (1994), P. 185–200.
7. M.J. Grote, I. Sim, Efficient PML for the wave equation, arXiv:1001.0319