

Оглавление

Глава 1. Асимптотические ряды

§1. Понятие асимптотического ряда	1
§2. Вычисление интегралов	10
§3. Интегралы типа Фурье и вычисление волновых полей	18
§4. Спектр частотно-модулированного сигнала	28
§5. Особые точки обыкновенных дифференциальных уравнений. При- меры и классификация	35
§6. Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравне- ний в особых точках	44
§7. Контрольная работа 1	49

Глава 2. Задачи теории колебаний

§8. Прямое разложение в задачах теории колебаний. Равномерные и неравномерные разложения	50
§9. Метод многих масштабов	57
§10. Метод усреднения. Параметрический резонанс	63
§11. ВКБ-приближение	67
§12. Сингулярно-возмущенные задачи. Сращивание асимптотических разложений	79
§13. Задачи к зачету	89

Литература	94
----------------------	----

Глава 1

Асимптотические ряды

§1. Понятие асимптотического ряда

Термин “асимптотика” применяют, когда говорят о поведении какой-либо функции при очень больших или очень малых значениях одного из физических параметров. В настоящем курсе рассматриваются асимптотики решений задач теории колебаний и задач теории дифракции. В теории колебаний малым параметром может быть мера отклонения системы от линейной системы (например, от простейшего линейного осциллятора). В теории дифракции малый параметр — это обычно отношение длины волны к характерным геометрическим размерам экранов.

Обычно задачу в полной постановке аналитически решить не удастся, однако имеется возможность построить разложение решения в ряд по малому параметру (асимптотический ряд), вернее построить несколько первых членов такого ряда. Это дает удобное приближенное решение физической задачи.

Существует формальная теория асимптотических разложений. Эта теория построена на неожиданных, на первый взгляд, свойствах. Так, она оперирует, преимущественно, расходящимися рядами. Для детального ознакомления с теорией асимптотических рядов порекомендуем монографию А.Х.Найфэ [1], содержащую большое количество задач, имеющих отношение к радиофизике.

Пример 1

Рассмотрим трансцендентное уравнение

$$x \operatorname{tg} x = 1. \quad (1.1)$$

Это уравнение содержит алгебраическую и тригонометрическую функции, поэтому аналитически решить его не удастся. Попробуем построить его приближенное решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}. \quad (1.2)$$

В правой и левой части стоят нечетные функции переменной x , поэтому действительные корни уравнения на отрицательной полуоси симметричны соответствующим корням на положительной полуоси, т.е. все действительные корни исчерпываются множествами $\{x_n\}$ и $\{-x_n\}$, $x_n > 0$.

Будем решать уравнение графически. Отложим на одном графике функции $\operatorname{tg} x$ и $1/x$ (см. Рис. 1.1). Точки пересечения графиков представляют собой корни уравнения. Из рисунка очевидно, что имеется бесконечное число корней x_n , а также что при больших n

$$x_n \approx \pi n.$$

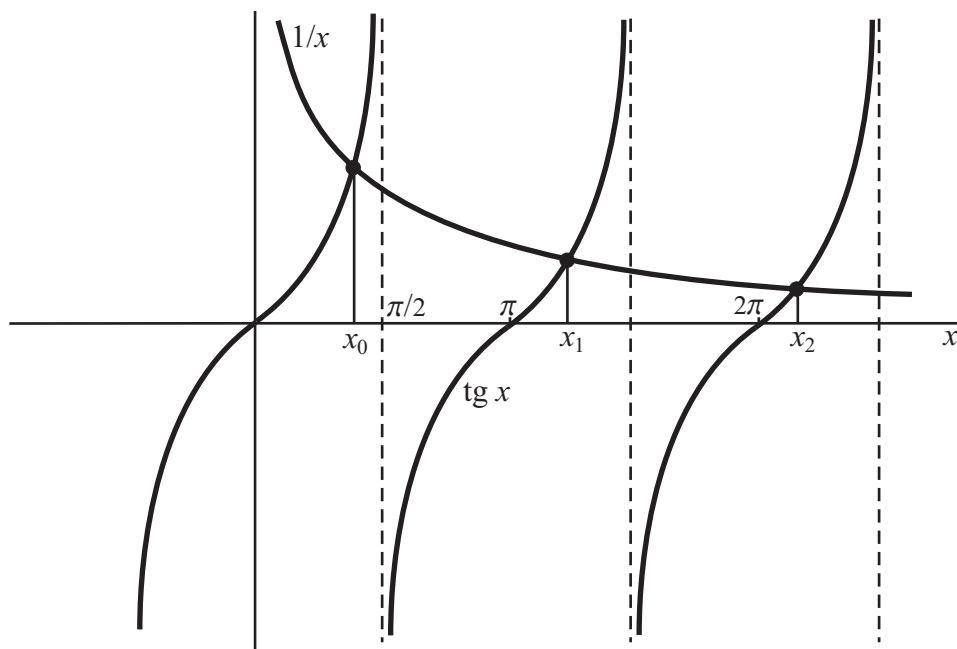


Рис. 1.1: Графическое решение уравнение (1.2)

Итак, попытаемся найти приближенные значения корней x_n при больших значениях n . Большой параметр n в данном случае принимает лишь дискретные значения. Изложим на данном примере общую схему применения метода возмущений.

Шаг 1. Выбор шаблона разложения

Это самый важный шаг в решении задачи. Никакого общего метода выбора правильного шаблона не существует. Имеется ряд рецептов, указывающих что

делать, если тот или иной разумный шаблон не привел к хорошему результату. Иногда шаблон называют немецким словом Ansatz (анзац).

В данном случае шаблон имеет вид

$$x_n = \pi n + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots, \quad (1.3)$$

т.е. он представляет собой ряд по обратным степеням n . Для задачи с большим параметром это представляется осмысленным. Шаблон пока не является приближенным решением, поскольку значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3 \dots$ не определены.

Шаг 2. Подстановка шаблона в уравнение

Здесь мы не пытаемся получить значения коэффициентов a_n в общем виде, поэтому ограничимся лишь первыми членами ряда (а именно, членами, содержащими степени не ниже n^{-3}). Будем использовать разложение тангенса в ряд Тейлора:

$$\operatorname{tg}(\pi n + a) = a + \frac{2}{3!}a^3 + \dots, \quad (1.4)$$

а также функции $1/x$ в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\pi n + a} = \frac{1}{\pi n(1 + a/(\pi n))} = \frac{1}{\pi n} \left(1 - \frac{a}{\pi n} + \frac{a^2}{(\pi n)^2} - \frac{a^3}{(\pi n)^3} + \dots \right). \quad (1.5)$$

Здесь

$$a = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots,$$

$$a^2 = \frac{a_1^2}{n^2} + 2\frac{a_1 a_2}{n^3} + \dots,$$

$$a^3 = \frac{a_1^3}{n^3} + \dots$$

Собирая вместе все эти выражения, получаем итоговое представление для уравнения (1.2):

$$\left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} \right) + \frac{1}{3} \frac{a_1^3}{n^3} = \frac{1}{\pi n} - \frac{a_1}{\pi^2 n^3}. \quad (1.6)$$

Шаг 3. Почленное решение уравнения

Будем решать (1.6) как цепочку уравнений при различных степенях n^{-1} . Будем решать уравнения этой цепочки последовательно, начиная с младших степеней:

$$n^{-1} : \quad a_1 = \frac{1}{\pi}, \quad (1.7)$$

$$n^{-2} : \quad a_2 = 0, \quad (1.8)$$

$$n^{-3} : \quad a_3 + \frac{1}{3}a_1^3 = -\frac{a_1}{\pi^2 n^3}. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.7) в (1.9) и собирая слагаемые, получаем приближенное решение

$$x_n \approx \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{4}{3} \frac{1}{(\pi n)^3}. \quad (1.10)$$

Для того, чтобы оценить, насколько полученное решение приближает точные значения, приведем следующую таблицу.

n	$x_n^{(0)}$	$x_n^{(1)}$	$x_n^{(3)}$	x_n	$\Delta x_n^{(3)}$	$1/(\pi n)^5$
1	3.141	3.459	3.416	3.425	0.008	0.003
2	6.283	6.442	6.436	6.437	$3 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
3	9.424	9.530	9.529	9.529	$4 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$

Здесь

$$\begin{aligned} x_n^{(0)} &= \pi n, \\ x_n^{(1)} &= \pi n + \frac{1}{\pi n}, \\ x_n^{(3)} &= \pi n + \frac{1}{\pi n} - \frac{4}{3} \frac{1}{(\pi n)^3}. \end{aligned}$$

$\Delta x_n^{(3)}$ — отклонение $x_n^{(3)}$ от точного решения. Из таблицы видно, что отклонение приближенного решения быстро падает с ростом n . Значение $n = 3$ уже можно считать “большим”, однако и при $n = 1$ приближение работает неплохо.

Кроме того, из таблицы можно сделать предварительный вывод, что следующий отброшенный член, вероятнее всего, пропорционален $(\pi n)^{-5}$.

Пример 2

Оценим значение интеграла

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-x}}{\lambda + x} dx \quad (1.11)$$

при больших положительных значениях параметра λ . Заметим, что интеграл (1.11) не вычисляется в элементарных функциях.

Прежде всего, определим, что значит “большое значение”. Ключевым моментом здесь является поведение экспоненциального множителя. Его значения, превышающие, скажем, 0.1, сосредоточены на отрезке от 0 до нескольких единиц (чуть больше 3). Значит, при $\lambda \gg 1$ величина λ больше естественного масштаба изменения подинтегральной функции.

Введем новую переменную интегрирования

$$\tau = \frac{x}{\lambda}.$$

Теперь интеграл (1.11) может быть переписан в виде

$$f(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}}{1+\tau} d\tau. \quad (1.12)$$

В результате этого преобразования удалось представить в виде произведения двух функций: экспоненты, содержащей большой параметр, и гладкой функции $(1+\tau)^{-1}$, не содержащей большого параметра. Такое разбиение на множители типично для вычисления асимптотик интегралов. Примерный вид этих множителей показан на Рис. 1.2.

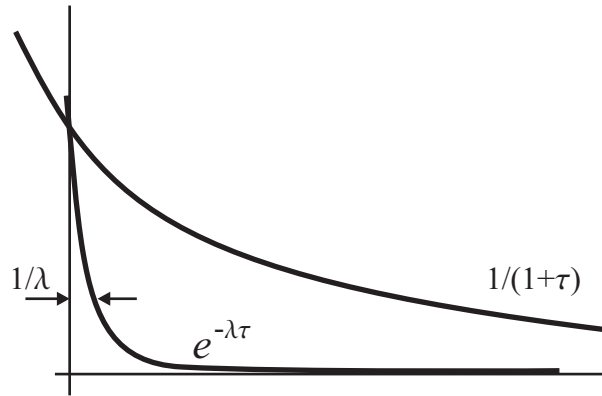


Рис. 1.2: Сомножители в подынтегральном выражении в (1.12)

Дальше рассуждают так. Пусть λ очень велико. Тогда экспоненциальный множитель в (1.12) очень мал везде, кроме малой окрестности нуля. Это значит, что значение интеграла определяется поведением подынтегральной функции вблизи нуля. Представим функцию $(1+\tau)^{-1}$ в виде ряда:

$$\frac{1}{1+\tau} = 1 - \tau + \tau^2 - \tau^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tau^n \quad \text{при } \tau \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Подставим (формально) (1.13) в (1.12) и проинтегрируем полученный ряд почленно:

$$f(\lambda) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \tau^n d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\lambda^n}. \quad (1.14)$$

Здесь используется табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau = n!$$

Выражение (1.14) и называется асимптотическим рядом.

Заметим, что ряд (1.14) расходится при всех λ . Это следствие того, что ряд (1.13) сходится только при $\tau < 1$, а подставлять его приходится в интеграл с пределами от $\tau = 0$ до ∞ .

Однако оказывается, что такие ряды могут использоваться для практических вычислений. Более того, во многих случаях сходящиеся ряды, не являющиеся асимптотическими, оказываются не пригодными для практических вычислений из-за медленной сходимости (типичный пример — ряды Фурье).

Для того, чтобы проиллюстрировать свойства асимптотического ряда, исследуем остаточный член (1.14). Оборвем ряд (1.13) на члене с номером N и воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+\tau} = \sum_{n=0}^N (-\tau)^n + \frac{(-\tau)^{N+1}}{1+\tau}. \quad (1.15)$$

Функция $f(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n n!}{\lambda^n} + R_N(\lambda), \quad (1.16)$$

где

$$R_N(\lambda) = \lambda(-1)^{N+1} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{N+1} e^{-\lambda\tau}}{1+\tau} d\tau.$$

Заметим, что при $\tau > 0$

$$\frac{1}{1+\tau} < 1.$$

Воспользуемся этим неравенством и оценим интеграл:

$$|R_N(\lambda)| < \frac{(N+1)!}{\lambda^{N+1}}. \quad (1.17)$$

Таким образом, остаточный член асимптотического ряда численно не превышает первого отброшенного члена ряда. Кроме того, при фиксированном N имеем $R_N(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Это значит, что сумма первых N членов асимптотического ряда представляет значение функции $f(\lambda)$ все точнее и точнее с ростом

λ (при этом для фиксированного значения λ невозможно получить точное значение $f(\lambda)$, устремляя N к бесконечности).

Поведение остаточного члена при различных λ и N иллюстрируется на Рис. 1.3. Для большей наглядности показан логарифм остаточного члена. Из рисунка видно, что при данном λ минимум остаточного члена достигается при значении N , близком к λ . Такая оценка позволяет при каждом λ выбрать оптимальное значение N .

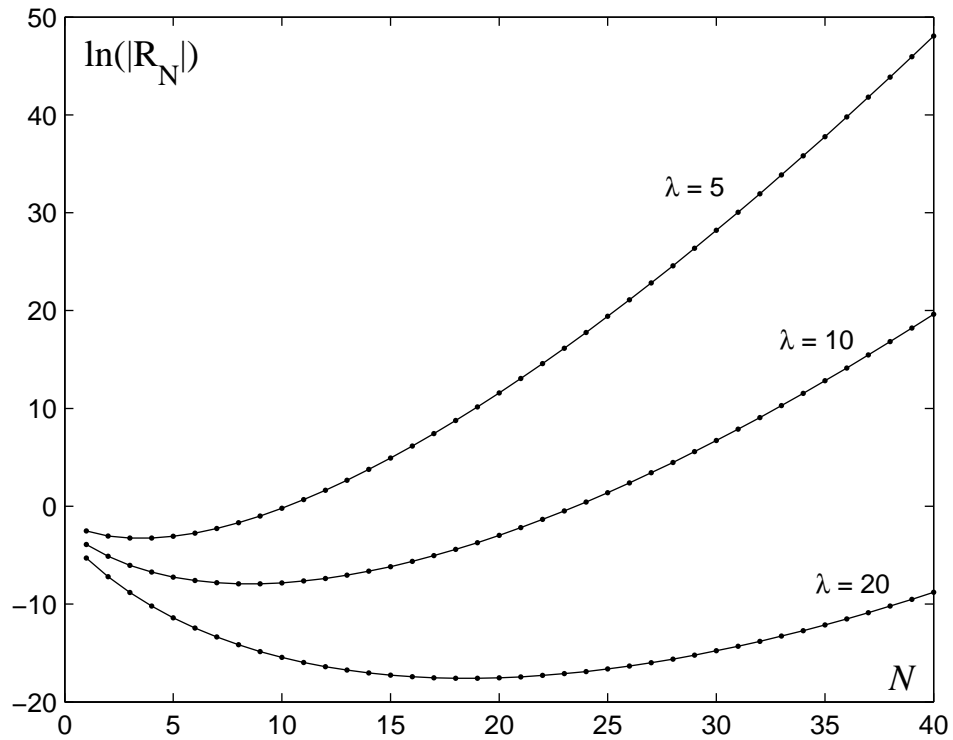


Рис. 1.3: Остаточный член при различных λ , N

На практике вычисляется всего несколько членов асимптотического ряда (один, два или три), а затем ряд используется для вычисления функции при весьма больших значениях параметра.

Тот факт, что для функция $f(\lambda)$ представляется данным асимптотическим рядом, записывают в виде

$$f(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\lambda^n}. \quad (1.18)$$

Определение асимптотического ряда по Пуанкаре

Рассмотренные примеры подводят нас к определению асимптотического ряда по Пуанкаре.

Ряд называется асимптотическим по Пуанкаре, если а) ошибка R_N , обусловленная усечением ряда на N -м члене численно не превосходит первого отброшенного члена, и б) при фиксированном N и при стремлении большого параметра к бесконечности (или малого параметра к нулю) ошибка R_N стремится к нулю.

То же самое определение может быть записано в другой форме:

Ряд называется асимптотическим, если каждый следующий член меньше предыдущего, а остаточный член сравним по порядку с первым отброшенным членом.

В этом определении термины “меньше” и “сравним по порядку” понимаются в смысле терминов “о малое” и “о большое” из анализа. А именно, пусть $u_n(\lambda)$ — члены асимптотического ряда, а R_n — остаточный член. Тогда первое условие записывается в виде

$$\frac{u_n(\lambda)}{u_{n+1}(\lambda)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.19)$$

а второе в виде

$$\frac{R_n(\lambda)}{u_{n+1}(\lambda)} \rightarrow C_n \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (1.20)$$

где C_n — некоторая ненулевая константа. Очень важно, что в обоих выражениях стоит $\lambda \rightarrow \infty$, а не $n \rightarrow \infty$. Именно этим асимптотический ряд отличается от обычного сходящегося.

При разборе второго примера нам удалось доказать, что полученный ряд обладает свойствами асимптотического. Далее мы не будем этого делать, а асимптотичность соответствующих рядов будем принимать на веру.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Дано уравнение

$$x^3 - 3x - 2 + \epsilon = 0,$$

где ϵ — малый параметр.

- а) Получить решение вблизи $x = 2$.
- б) Получить решение вблизи $x = -1$.

-
- 2.** В цилиндре длины L и сечения S , закрытом с одного конца, находится жидкость плотности ρ и сжимаемости K . С другого конца цилиндр закрыт легким поршнем, который движется по цилиндру с трением. Коэффициент трения (отношение силы к скорости) равен η .
- а) При каком соотношении параметров коэффициент трения можно считать малым?
- б) Для малых значений коэффициента трения оценить затухание стоячей волны с номером n .
- 3.** Получить представление (1.16), интегрируя (1.12) по частям.

§2. Вычисление интегралов

Разбор домашнего задания

Разберем первую из задач, заданных на дом на прошлой лекции. Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 - 3x - 2 + \epsilon = 0, \quad (2.1)$$

в котором ϵ — малый параметр. Отметим, что это “гуманная” формулировка задачи. Менее гуманная формулировка предлагала бы приближенно решить, например, уравнение

$$x^3 - 3x - 1.8 = 0. \quad (2.2)$$

При этом необходимо было бы догадаться, что это задача по теории возмущений и самостоятельно разбить уравнение на невозмущенную часть и возмущение (при этом, очевидно, $\epsilon = 0.2$).

Перепишем уравнение в виде

$$(x + 1)^2(x - 2) + \epsilon = 0 \quad (2.3)$$

Невозмущенное уравнение имеет простой корень $x = 2$ и кратный корень $x = -1$. Разумно ожидать, что возмущенное уравнение будет иметь корни, близкие к 2 и -1 .

Будем искать корень, близкий к $x = 2$. Построим анзац в виде степенного ряда

$$x = 2 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \dots \quad (2.4)$$

Подставим анзац в уравнение и оставим члены не выше второй степени по ϵ . В результате получим

$$\epsilon(1 + 9a_1) + \epsilon^2(6a_1^2 + 9a_2) + O(\epsilon^3) = 0. \quad (2.5)$$

Из уравнения при ϵ^1 получаем

$$a_1 = -\frac{1}{9}.$$

Далее, из уравнения при ϵ^2 получаем

$$a_2 = -\frac{2}{243}.$$

Таким образом, данный корень дается приближенной формулой

$$x = 2 - \frac{1}{9}\epsilon - \frac{2}{243}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \quad (2.6)$$

Попробуем применить тот же метод к отысканию корней вблизи $x = -1$. Будем использовать анзац

$$x = -1 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \dots \quad (2.7)$$

Подставим его в уравнение. В результате с точностью до членов второго порядка (включительно) получим

$$\epsilon - 3a_1^2\epsilon^2 + O(\epsilon^3) = 0. \quad (2.8)$$

Заметим, что решить это уравнение почленно нет никакой возможности, поскольку уравнение при ϵ^1 имеет вид $1 = 0$. Таким образом данный анзац не позволяет решить задачу.

Выясним причины этого. Как и раньше, будем искать решение графически. Перепишем уравнение в виде

$$(x + 1)^2(x - 2) = -\epsilon. \quad (2.9)$$

Найдем пересечение графиков функций, стоящих в правой и левой части.левой части соответствует кубическая парабола, а правой — прямая, параллельная оси абсцисс (см. Рис. 2.1).

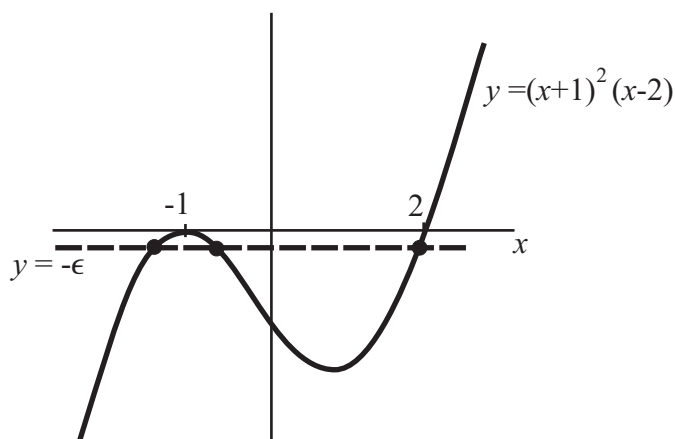


Рис. 2.1: К разбору домашнего задания

Рассмотрим графики вблизи точки $x = -1$. Кубическая парабола в этой точке имеет нулевую первую производную и ненулевую вторую, поэтому локально она хорошо приближается квадратичной параболой. Очевидно, отклонение корня от $x = -1$ имеет порядок $\sqrt{\epsilon}$, что не может быть описано в рамках анзаца (2.7).

Построим другой анзац, в большей мере соответствующий нашему пониманию поведения корней:

$$x = -1 + a_1\epsilon^{1/2} + a_2\epsilon + a_3\epsilon^{3/2} + O(\epsilon^2), \quad (2.10)$$

т.е. ряд по полуцелым степеням ϵ . Подставим анзац в уравнение. Получим

$$\epsilon(1 - 3a_1^2) + \epsilon^{3/2}(a_1^3 - 6a_1a_2) + O(\epsilon^2) = 0. \quad (2.11)$$

Отсюда

$$a_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_2 = \frac{1}{18}.$$

Таким образом, кратный корень $x = -1$ невозмущенной задачи превращается в пару корней

$$x = -1 \pm \frac{\epsilon^{1/2}}{3^{1/2}} + \frac{\epsilon}{18} + O(\epsilon^{3/2}) \quad (2.12)$$

Интегралы типа Лапласа

Перейдем к заявленной теме лекции, а именно к асимптотической оценке интегралов.

Рассмотрим интеграл вида

$$I(s) = \int_a^b f(x)e^{-sx} dx, \quad (2.13)$$

где s — большой положительный параметр, а $f(x)$ — достаточно гладкая функция, не содержащая большого параметра. Это простейший интеграл типа Лапласа. Очевидно, к данному типу принадлежит интеграл, рассмотренный во втором примере предыдущей лекции. Сейчас мы рассмотрим эти интегралы более подробно, а также рассмотрим различные обобщения такого интеграла.

Как следует из рассмотрения, сделанного в предыдущей лекции, экспоненциальный множитель быстро убывает с ростом x , и основной вклад в интеграл дает концевая точка $x = a$. Разложим функцию $f(x)$ в степенной ряд в окрестности этой точки:

$$f(x) = A_0(x - a)^\alpha + A_1(x - a)^{\alpha+1} + \dots \quad (2.14)$$

Отметим, что на этот раз мы не требуем, чтобы ряд содержал только целые степени, т.е. α может, например, принимать значения $1/2$ или $-1/2$. Важно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha > -1$, обеспечивающее сходимость интеграла.

Младшим степеням $(x - a)$ соответствуют старшие члены асимптотического ряда. Главный (т.е. самый старший) член ряда оценивается как

$$I(s) = A_0 e^{-sa} \int_a^b (x - a)^\alpha e^{-s(x-a)} dx + \dots =$$

$$A_0 e^{-sa} \int_a^\infty (x - a)^\alpha e^{-s(x-a)} dx + \dots = \frac{A_0 e^{-sa} \Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}. \quad (2.15)$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера, определяемая с помощью соотношения

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (2.16)$$

Обратим внимание на то, что в (2.15) произошел переход от интеграла по отрезку (a, b) к интегралу по полуоси (a, ∞) . Такой переход возможен, поскольку разность (т.е. интеграл по полуоси (b, ∞)) экспоненциально мала по сравнению со вкладом окрестности точки a . Такой прием является обычным для асимптотической оценки интегралов. Если оказывается, что главный член дает только один из концов интервала, то при оценке этого главного члена со вторым концом интервала можно делать что угодно (как правило, положить его равным бесконечности).

Формула (2.15) очень важна. Рекомендуется запомнить ее или запомнить то место, где она записана.

Рассмотрим различные обобщения данной формулы.

Комплексные значения s

Пусть значение s не является большим положительным действительным, а равно $s = |s|\sigma$, где $|s|$ — большая положительная действительная величина, а σ — комплексное число, по модулю равное единице.

Экспонента, стоящая в (2.13), приобретает вид

$$\exp\{-\operatorname{Re}[\sigma]|s|\} \exp\{-i\operatorname{Im}[\sigma]|s|\}.$$

Первый множитель отвечает за рост / убывание, а второй множитель — за осцилляции. При $\operatorname{Re}[\sigma] > 0$ рассуждения об убывании экспоненциальной функции остаются справедливыми, и оценка (2.15) остается верной. При $\operatorname{Re}[\sigma] < 0$ экспоненциальная функция перестает быть убывающей и делается возрастающей с ростом x . Поэтому основной вклад в интеграл дает конец отрезка $x = b$. Формально можно свести задачу к предыдущей с помощью замены $x \rightarrow -x$.

Если $\operatorname{Re}[\sigma] = 0$, то экспоненциального убывания подынтегральной функции нет. Вместо этого имеются быстрые осцилляции. Такой интеграл будет изучаться в разделе “интегралы типа Фурье”.

Более сложный вид экспоненциального множителя

Пусть интеграл имеет вид

$$I(s) = \int_a^b f(x) \exp\{-sg(x)\} dx \quad (s = \sigma|s|) \quad (2.17)$$

Пусть $\operatorname{Re}[\sigma] > 0$, $g(x)$ — монотонно возрастающая функция, $g'(a) \neq 0$. Пользуясь тем же рассуждением, приходим к выводу, что главный вклад в интеграл дает конечная точка интервала $x = a$. Формально можно свести задачу к предыдущей, перейдя к новой переменной $t = g(x)$. Тогда

$$I(s) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(t)) \frac{e^{-st} dt}{g'(g^{-1}(t))}, \quad (2.18)$$

где g^{-1} — обратная функция. Оценка старшего члена интеграла есть

$$I(s) \approx \frac{A_0 e^{-sg(a)}}{(sg'(a))^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha + 1). \quad (2.19)$$

Вычисление интегралов методом перевала

Рассмотрим в качестве примера интеграл, определяющий функцию Ханкеля первого рода:

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \exp\{ix \cos \theta\} d\theta. \quad (2.20)$$

Интегрирование происходит в комплексной плоскости переменной θ по контуру γ , показанному на Рис. 2.2.

Данное интегральное представление называется интегралом Сонина. Его происхождение вполне очевидно. Преобразование к переменной $k = \cos \theta$ приводит к интегралу Фурье

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{1-k^2}} dk, \quad (2.21)$$

т.е. функция Ханкеля — Фурье-образ функции $(1-k^2)^{-1/2}$.

Построим оценку функции Ханкеля при больших положительных x . Заметим, что подынтегральное выражение в (2.20) везде на контуре γ по модулю

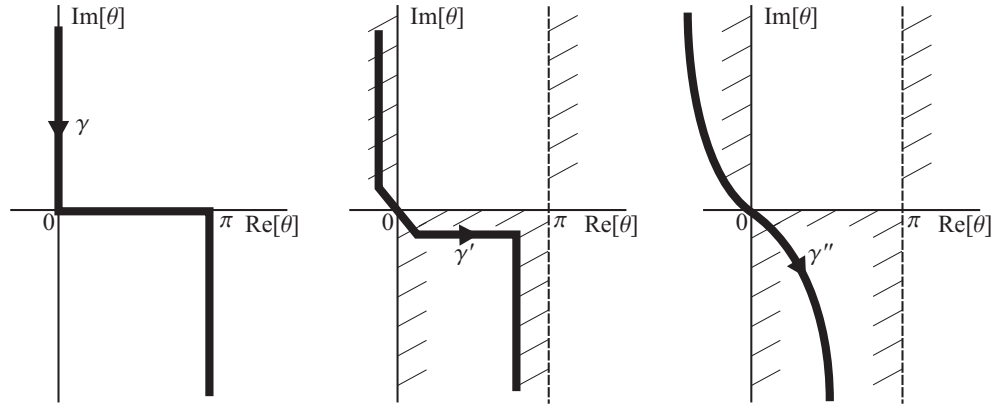


Рис. 2.2: Контур интегрирования для вычисления функции Ханкеля

равно единице, поэтому говорить о том, что какая-то точка контура дает основной вклад, пока нельзя. Для того, чтобы это стало возможным, необходимо деформировать контур интегрирования.

Рассмотрим экспоненциальный множитель общего вида $\exp\{ixg(\theta)\}$. Если в какой-то точке $\text{Im}[g(\theta)] > 0$, то значение этого множителя в этой точке стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, т.е. подынтегральная функция “экспоненциально мала”. Постараемся сделать так, чтобы подынтегральная функция почти везде была экспоненциально мала и нигде не была экспоненциально велика. Заштрихуем на комплексной плоскости θ области, где $\text{Im}[\cos \theta] > 0$ (см. Рис. 2.2) и сместим контур в заштрихованную область. Точка $\theta = 0$ остается на месте, поскольку она является точкой перевала (лежит на стыке двух областей роста и двух областей убывания). Для наших целей достаточно сместить контур в область убывания совсем немного (например, превратить его в контур γ'), однако обычно деформацию осуществляют таким образом, чтобы контур интегрирования превратился в контур наискорейшего спуска (т.е. чтобы функция $\text{Im}[g(\theta)]$ росла на нем как можно скорее) или в контур постоянной фазы (т.е. чтобы функция $\text{Re}[g(\theta)]$ оставалась постоянной). Подумайте, почему это одно и то же. Контур наискорейшего спуска обозначим γ'' .

Рассмотрим интеграл по контуру γ'' . Подынтегральная функция на нем мала везде, кроме окрестности точки перевала. Вблизи окрестности точки перевала разложим косинус в ряд Тейлора:

$$H_0^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} \int_{\gamma''} \exp\{ix(1 - \theta^2/2)\} d\theta. \quad (2.22)$$

Далее введем локальную координату τ , такую что $\theta = e^{-i\pi/4}\tau$.

$$H_0^{(1)}(x) \approx \frac{e^{ix-i\pi/4}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x\tau^2/2\} d\tau. \quad (2.23)$$

Заметим, что интегрирование в (2.22) и (2.23) производится по разным контурам. Такая замена правомерна, поскольку разница экспоненциально мала.

Наконец, пользуясь табличной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-t^2\} dt = \sqrt{\pi}, \quad (2.24)$$

получаем

$$H_0^{(1)}(x) \approx \frac{e^{ix-i\pi/4}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}. \quad (2.25)$$

Очень полезно выяснить, какая именно окрестность точки $\theta = 0$ дает вклад в интеграл. Оценкой размера этой окрестности служит то, что в ней показатель экспоненты, например, в (2.22) по модулю меньше единицы. То есть, окрестность определяется соотношением

$$|\theta| < \sqrt{2/x}. \quad (2.26)$$

Разумеется, двойка в этой формуле большого смысла не имеет, поскольку мы ищем лишь оценку по порядку величины. Важно, что размер окрестности оказывается порядка $x^{-1/2}$.

Более общий вид рассматриваемого интеграла есть

$$I(s) = \int f(x) \exp\{-sg(x)\} dx \quad (2.27)$$

суть метода перевала состоит в следующем. Контур интегрирования смещается в направлении наибольшего возрастания функции действительной части $g(x)$. Контур можно смещать в поперечном направлении до тех пор, пока он не ляжет на точку перевала, которая находится на стыке двух областей роста и двух областей убывания $\text{Re}[g]$. В этой точке градиент $\text{Re}[g]$ равен нулю, а значит комплексная производная g' равна нулю. Будем считать, что вторая производная g не обращается в нуль. Точка перевала $x = x_*$ определяется соотношениями

$$g'(0) = 0, \quad g''(x_*) \neq 0. \quad (2.28)$$

Для определенности будем полагать, что вторая производная $g''(x_*)$ действительна и больше нуля. Выполнения этих условий можно достичь, производя замену независимой переменной. Пусть также

$$f(x_*) \neq 0. \quad (2.29)$$

Тогда главный член в асимптотическом разложении интеграла имеет вид

$$I(s) \approx f(x_*)e^{-sg(x_*)} \sqrt{\frac{2\pi}{sg''(x_*)}} \quad (2.30)$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Оценить интеграл

$$I(s) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} e^{sx} dx$$

при больших положительных x .

2. Оценить интеграл

$$I(x) = \int_{\gamma''} \sin^m(\theta) \exp\{ix \cos \theta\} d\theta$$

при больших положительных x и целых m .

§3. Интегралы типа Фурье и вычисление волновых полей

Вычисление интегралов типа Фурье

Рассмотрим интеграл вида

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \exp\{i\omega g(x)\} dx, \quad (3.1)$$

где ω — большой действительный положительный параметр, а $g(x)$ — действительная функция.

Подынтегральная функция является быстро осциллирующей. Величина $\omega g'$ представляет собой локальную частоту осцилляций, а $f(x)$ — локальную амплитуду (огibaющую).

Вид подынтегральной функции показан на Рис. 3.1. При интегрировании вблизи почти любой внутренней точки промежутка имеется множество “положительных” и “отрицательных” полупериодов, и они компенсируют друг друга. Нескомпенсированные полупериоды возникают либо вблизи концов интервала интегрирования, либо там, где локальная частота обращается в нуль.

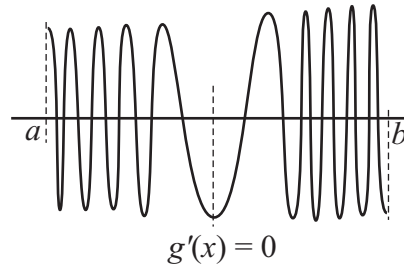


Рис. 3.1: Подынтегральная функция для интеграла типа Фурье

Для строгого анализа интеграла предположим, что функции f и g продолжаются аналитически в некоторую полосу комплексной плоскости, содержащую отрезок a, b действительной оси. Деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы почти все его точки оказались в областях с $\text{Im}[g(x)] > 0$, т.е. в областях экспоненциального убывания. На действительной оси останутся концевые точки и точки перевала (точки с $g' = 0$). Концевым точкам будут соответствовать интегралы типа Лапласа, а точкам перевала — перевальные интегралы.

Рассмотрим пример. Пусть надо оценить интеграл

$$I(\omega) = \int_{-1}^2 (x + 10) \exp\{i\omega x^2\} dx \quad (3.2)$$

Здесь $f(x) = x + 10$, $g(x) = x^2$. Найдем точки перевала. Из уравнения $g' = 0$ получаем, что имеется единственная точка перевала $x = 0$, и она принадлежит промежутку интегрирования. Деформируем контур интегрирования как показано на Рис. 3.2.

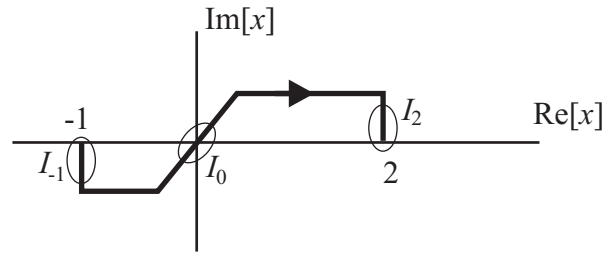


Рис. 3.2: Контур интегрирования для интеграла (3.2)

Основные (не экспоненциально малые) вклады в интеграл дают концевые точки и точка перевала:

$$I(\omega) \approx I_{-1} + I_2 + I_0. \quad (3.3)$$

Вклады концевых точек оцениваем, производя замену переменных и пользуясь формулой (2.19). Так, для окрестности точки $x = -1$ вводим переменную τ , такую что $x = -1 - i\tau$. Получаем

$$I_{-1} = -i \frac{9e^{i\omega}}{2\omega}.$$

Для окрестности точки $x = 2$ вводим переменную τ с помощью соотношения $x = 2 + i\tau$. Получаем

$$I_2 = \frac{3ie^{4i\omega}}{\omega}$$

Наконец, для окрестности точки перевала вводим переменную τ с помощью соотношения $x = e^{i\pi/4}\tau$. Применяя формулу (2.30), получаем

$$I_0 = \frac{10e^{i\pi/4}}{\sqrt{\omega}}.$$

Отметим, что вклады концевых точек пропорциональны ω^{-1} , а вклад точки перевала пропорционален $\omega^{-1/2}$, т.е. точка перевала дает доминирующий вклад.

Вычисление волновых полей

Применим метод, развитый выше, к вычислению волнового поля. Рассмотрим задачу о рассеянии плоской волны на полосе. Ограничимся рассмотрением двумерного сечения задачи, в котором полоса вырождается в отрезок оси x . Концы отрезка имеют координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ (см. Рис 3.3).

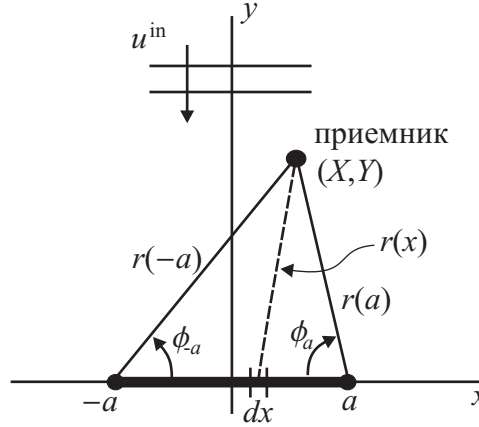


Рис. 3.3: Геометрия задачи о дифракции на отрезке

Плоская волна падает на отрезок вдоль оси y в отрицательном направлении. Будем считать, что падающая волна имеет вид

$$u^{\text{in}} = \exp\{-iky\}. \quad (3.4)$$

Здесь k — волновое число. Нашей задачей будет вычислить рассеянное поле в области $y > 0$ при большом положительном значении k .

Не будем вдаваться в тонкости теории дифракции. Рассеянное поле вычислим, применив принцип Гюйгенса–Френеля. Это будет, конечно, весьма нестрогое, но такой подход близок к известному и достаточно осмысленному приближению Кирхгофа, и рассматриваемые интегралы вполне типичны для теории дифракции. Будем считать, что каждая точка полосы (отрезка) является источником вторичных волн. Вторичная волна, рассеянная бесконечно малым участком полосы шириной dx имеет вид

$$du^{\text{sc}}(Q) = Au^{\text{in}}(P) \frac{\exp\{ikr\}}{\sqrt{kr}} dx, \quad (3.5)$$

где A — некоторый постоянный коэффициент, Q — точка наблюдения, P — точка полосы, в которой происходит перерассеяние, r — расстояние между точками P и Q , $u^{\text{in}}(P)$ — значение падающего поля в точке перерассеяния.

Данная формула отражает наше представление о том, как выглядит расходящаяся волна в двумерной задаче. Рассеянное поле в приближении Кирхгофа выглядит сходным образом, однако его вид чуть более сложен. Кроме того, разумеется, в приближении Кирхгофа выписывается явный вид для коэффициента A .

Заметим, что в данном случае падающее поле одинаково и равно 1 во всех точках отрезка. Пусть точка наблюдения Q имеет координаты (X, Y) , а точка отрезка P имеет координаты $(x, 0)$. Полное рассеянное поле, полученное суммированием полей от всех точек отрезка, есть

$$u^{\text{sc}}(X, Y) = A \int_{-a}^a \frac{\exp\{ikr(x)\}}{\sqrt{kr(x)}} dx, \quad (3.6)$$

где $r(x)$ имеет вид

$$r(x) = \sqrt{(x - X)^2 + Y^2}. \quad (3.7)$$

Очевидно, мы получили интеграл вида (3.1), где $r(x)$ играет роль функции g . Перед нами стоит задача получения асимптотической оценки этого интеграла.

В соответствии с процедурой, описанной выше, мы заменяем интегрирование по действительному отрезку $x \in (-a, a)$ на интегрирование по некоторому контуру в комплексной плоскости x . Нас не должно смущать то, что физически осмысленная переменная x начинает принимать комплексные значения. Написав интеграл (3.6), мы временно забываем о физическом смысле входящих в него величин. Более того, мы рассматриваем аналитические продолжения всех входящих в интеграл функций.

Для определения способа деформации интеграла необходимо проанализировать поведение функции $\text{Im}[r(x)]$ при x , принадлежащих некоторой окрестности отрезка $(-a, a)$. Прежде всего определим, при каких x выполняется $\text{Im}[r(x)] = 0$. Очевидно, это достигается на объединении действительной оси и отрезка $(X - iY, X + iY)$ (см. Рис. 3.4). Точки $X \pm iY$ являются точками ветвления функции.

Точка $x = X$ находится на стыке четырех областей, разделяемых линиями с $\text{Im}[r(x)] = 0$. Это указывает на то, что она может являться точкой перевала. Кроме того, элементарное вычисление показывает, что $r'(X) = 0$, $r''(X) \neq 0$, а это есть формальное определение точки перевала.

Определим, какая из областей соответствует $\text{Im}[r(x)] > 0$. Для этого рассмотрим точку $x = x_1 + ix_2$ с действительными $x_1 \neq X$ и x_2 . Пусть x_2 очень мало. Выполним приближенные вычисления:

$$r(x_1 + ix_2) \approx \sqrt{(x_1 - X)^2 + 2ix_2(x_1 - X) + Y^2} \approx$$

$$\sqrt{(x_1 - X)^2 + Y^2} \left(1 + \frac{ix_2(x - X)}{(x_1 - X)^2 + Y^2} \right) \quad (3.8)$$

Из последней формулы видно, что $\text{Im}[r(x)]$ и x_2 имеют одинаковый знак при $x > X$ и разный знак при $x < X$. На Рис. 3.4 заштрихованы области, в которые можно деформировать контур интегрирования, добиваясь экспоненциального убывания подынтегральных функций.

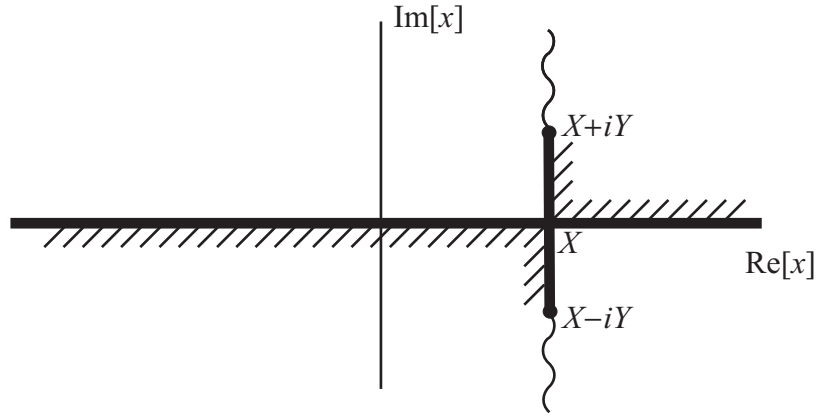


Рис. 3.4: Области экспоненциального убывания подынтегральной функции

Имеются три случая:

- а) $-a < X < a$,
- б) $X < -a$,
- в) $X > a$.

Деформация контуров интегрирования для каждого из этих трех случаев показана на Рис. 3.5. В первом случае асимптотическая оценка интеграла содержит три члена: вклады от концевых точек, оцениваемые как интегралы типа Лапласа, и вклад от точки перевала. В двух других случаях имеются только вклады от концевых точек.

Начнем со случая а). Представим оценку интеграла в виде суммы трех вкладов:

$$u^{\text{sc}} \approx I_{-a} + I_a + I_X, \quad (3.9)$$

где первые два члена — вклады от концевых точек, а третий — вклад точки перевала. Для оценки вклада I_{-a} введем локальную переменную τ , такую что

$$x = -a - i\tau.$$

Выполняя вычисления, получаем

$$I_{-a} \approx -\frac{iA}{\sqrt{kr(-a)}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ ikr(-a) \left(1 + \frac{i\tau(a+X)}{r(-a)} \right) \right\} =$$

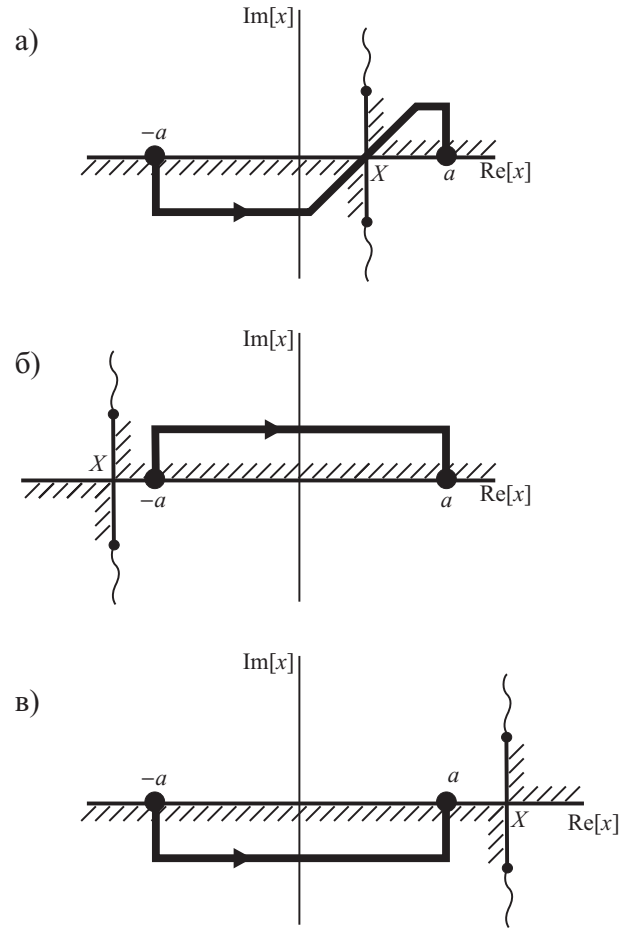


Рис. 3.5: Деформация контура интегрирования

$$-\frac{iA}{\sqrt{kr(-a)}} e^{ikr(-a)} \frac{r(-a)}{k(a+X)} = \frac{e^{ikr(-a)}}{\sqrt{kr(-a)}} \frac{A}{ik \cos(\phi_{-a})} \quad (3.10)$$

Здесь $r(-a) = \sqrt{(a+X)^2 + Y^2}$, $\cos(\phi_{-a}) = (a+X)/r(-a)$. Угол ϕ_{-a} показан на Рис. 3.3.

Первый множитель в итоговом выражении (3.10) описывает расходящуюся цилиндрическую волну, источник которой находится в точке с координатами $(-a, 0)$. Второй множитель описывает угловую зависимость данной волны. Обратим внимание на то, что при $\phi_{-a} = \pi/2$ угловой множитель имеет особенность.

Очевидно, второе слагаемое в (3.9) имеет вид

$$I_a \approx \frac{e^{ikr(a)}}{\sqrt{kr(a)}} \frac{A}{ik \cos(\phi_a)}. \quad (3.11)$$

Оценим вклад I_X . Введем переменную τ для окрестности точки перевала:

$$x = X + e^{i\pi/4}\tau. \quad (3.12)$$

Выполним оценку интеграла по методу перевала:

$$I_X \approx \frac{Ae^{i\pi/4}}{\sqrt{kY}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ik\sqrt{i\tau^2 + Y^2}\}d\tau \approx \frac{Ae^{ikY+i\pi/4}}{\sqrt{kY}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k\tau^2}{2Y}\right\}d\tau =$$

$$\frac{A\sqrt{2\pi}e^{ikY+i\pi/4}}{k}. \quad (3.13)$$

Здесь был использован тот факт, что $r(X) = Y$.

Вычисленный вклад имеет характер плоской волны, уходящей в положительном направлении оси y . Как и положено плоской волне, она не затухает с расстоянием. С помощью формулы (3.13) можно задним числом определить A . Этот параметр зависит от свойств поверхности рассеивателя. Если плоская волна отражается от поверхности с коэффициентом отражения 1, то $A\sqrt{2\pi}i/k = 1$, а если она отражается с коэффициентом -1 , то $A\sqrt{2\pi}i/k = -1$.

Таким образом, три вклада в (3.9) имеют физически осмысленную трактовку. Вклады, соответствующие концевым точкам, представляют собой краевые волны, рассеянные концами отрезка, а вклад, соответствующий точке перевала, представляет собой отраженную плоскую волну.

В случае б) и в) выражение упрощается:

$$u^{\text{sc}} \approx I_{-a} + I_a, \quad (3.14)$$

где I_{-a} и I_a формально имеют тот же вид, что и в (3.10), (3.11). То есть поле представляет собой сумму краевых волн, а вклад плоской волны отсутствует. Это происходит потому, что точка наблюдения в этих случаях не попадает в область геометрической видимости плоской отраженной волны.

Рассмотрим важный вопрос о применимости построенных приближений. Очевидно, что эти приближения не могут быть применимы для всех (X, Y) , поскольку выше было отмечено, что диаграмма направленности для краевой волны имеет особенность, у которой нет никакого физического смысла.

Для того, чтобы соответствующие оценки были применимы, необходимо, чтобы каждому из вкладов “не мешали” другие вклады. А именно, чтобы концевые точки и точки перевала находились достаточно далеко друг от друга. На предыдущей лекции мы оценивали размер области, в которой подынтегральная функция для перевального интеграла не мала. Применяя тот же метод к данному случаю, получаем оценку размера перевальной области:

$$\Delta x_X \sim \sqrt{\frac{2Y}{k}}. \quad (3.15)$$

Выполним аналогичную оценку для интегралов типа Лапласа. Будем следовать тому же методу: отклонение показателя экспоненты в подынтегральной функции на границе области должно быть порядка единицы. Это дает оценку

$$\Delta x_{\pm a} \sim \frac{1}{k \cos(\phi_{\pm a})}. \quad (3.16)$$

Прежде всего, выясним, когда концевая точка (например, точка $x = a$) не мешает точке перевала. В соответствии с оценкой (3.15),

$$(a - X) \gg \sqrt{\frac{2Y}{k}},$$

т.е.

$$\frac{k(a - X)^2}{2Y} \gg 1, \quad (3.17)$$

Теперь выясним, когда точка перевала не мешает концевой точке. В соответствии с оценкой (3.16),

$$(a - X) > \frac{1}{k \cos(\phi_a)} \left(= \frac{r(a)}{k(a - X)} \right).$$

Заметим, что нас интересует в основном “плохая” область, в которой при больших k выполняется $\cos(\phi_a) \approx 0$ и, следовательно, $r(a) \approx Y$. Таким образом, вторая оценка совпадает с (3.17) с точностью до коэффициента.

Примерный вид “плохих” областей показан на Рис. 3.6. Плохие области заштрихованы. При достаточно больших значениях Y они начинают пересекаться, и плоская отраженная волна пропадает. Это происходит при

$$\frac{ka^2}{Y} > 1.$$

Заметим, что это школьная оценка дальней границы области, в которой наблюдается дифракция Френеля (или поршневой зоны).

“Плохие” области называют полутеневыми (penumbral zones). В полутеневых областях выполняется сопряжение асимптотик, соответствующих только краевым волнам и сумме краевых и плоской волны. В этих областях пользоваться построенными разложениями нельзя. Вместо этого приходится использовать интеграл, более сложный, чем был использован ранее (хотя тоже упрощенный). Для примера рассмотрим область, соответствующую краевой точке $x = -a$.

В полутеневой области $r(-a) \approx Y$. Этим приближением можно пользоваться в медленной части подынтегральной функции. В быстрой части (т.е. в экспоненте) функция r умножается на большой параметр k и подставляется в экспоненту, поэтому погрешность этой аппроксимации приводит к очень негативным последствиям.

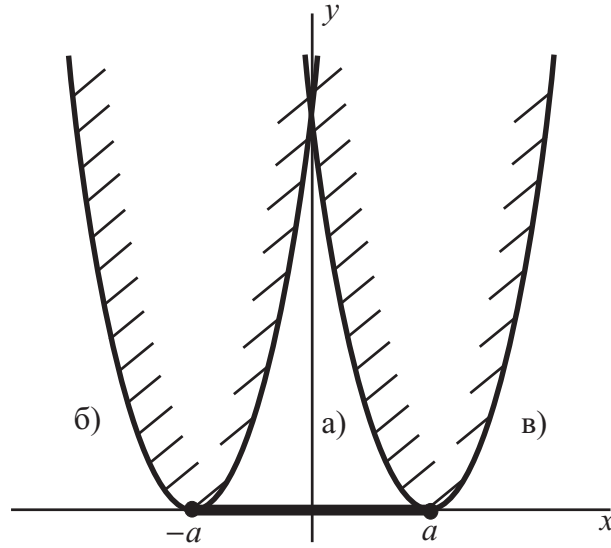


Рис. 3.6: Полутеневые зоны

Итак, интеграл, связанный с окрестностью точки $x = -a$ оценивается как

$$u_{-a}^{\text{sc}} \approx \frac{A}{\sqrt{kY}} \int_{-(X+a)}^{\infty} \exp\{ik\sqrt{\tau^2 + Y^2}\} d\tau \approx \frac{Ae^{ikY}}{\sqrt{kY}} \int_{-(X+a)}^{\infty} \exp\left\{\frac{ik\tau^2}{2Y}\right\} d\tau. \quad (3.18)$$

Введем функцию

$$F(t) = \int_t^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau. \quad (3.19)$$

С ее помощью (3.18) запишется в виде

$$u_{-a}^{\text{sc}} \approx \frac{A\sqrt{2}}{k} F\left(-\sqrt{\frac{k}{2Y}}(X+a)\right). \quad (3.20)$$

Эта формула описывает достаточно сложный переходный процесс в полутеневой области. Именно она ответственна за осцилляции, которые наблюдаются при дифракции на полуплоскости.

Сделаем еще одно важное замечание. С задачей о дифракции на полосе (как и с любой другой дифракционной задачей) связаны две очень разные асимптотики, которые нельзя путать. Первая — это коротковолновое приближение, которое мы рассмотрели выше. В нем предполагается, что размеры рассеивателя фиксированы, положение точки наблюдения фиксировано, а длина волны стремится к нулю (т.е. $k \rightarrow \infty$). Вторая асимптотика — это приближение дальнего

поля (дифракция Фраунгофера). В этом приближении предполагается, что размеры рассеивателя фиксированы, длина волны фиксирована, а расстояние от рассеивателя до точки наблюдения стремится к бесконечности. Данные приближения обладают, вообще говоря, противоположными свойствами. Так, в первом приближении имеется плоская отраженная волна, а во втором ее нет.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. С помощью метода Лапласа и метода перевала построить асимптотики функции $F(t)$ при больших положительных и отрицательных t и убедиться, что при больших положительных $X + a$ асимптотика (3.20) переходит в сумму краевой и отраженной волны, а при больших отрицательных $X + a$ асимптотика (3.20) дает только краевую волну.
2. Рассмотрим двумерную задачу дифракции на окружности. Пусть плоская волна падает на окружность радиуса R вдоль оси x (см. Рис. 3.7). Волновое число k представляет собой большой параметр. Приемник расположен на оси x на расстоянии d от поверхности окружности. С помощью приближения Гюйгенса–Френеля оценить поле на приемнике. Выделить зону малых d , где окружность представляет собой “почти плоскость” и зону больших d , где окружность есть “почти точечный рассеиватель”.

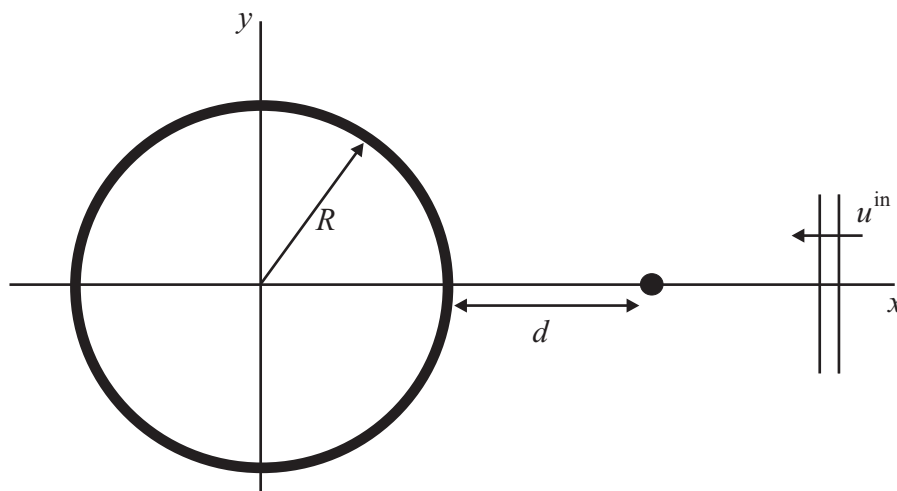


Рис. 3.7: Геометрия задачи о дифракции на окружности

§4. Спектр частотно-модулированного сигнала

Рассмотрим еще один пример вычисления интеграла типа Фурье. Этот пример пришел из радиофизики. Как известно, в радиовещании применяются два основных способа кодирования сигнала — амплитудная модуляция и частотная модуляция. В обоих случаях имеется полезный низкочастотный сигнал, который надо передать, закодировав им некоторый высокочастотный сигнал. В случае с амплитудной модуляцией все обстоит достаточно просто: высокочастотный (несущий) сигнал умножается на сумму полезного сигнала и некоторой константы. Таким образом, полезный сигнал входит в огибающую получившегося сигнала. Если круговая частота полезного сигнала есть Ω , а круговая частота несущей есть ω , то итоговый сигнал содержит компоненты на частотах ω и $\omega \pm \Omega$ (см. Рис. 4.1). Ширина спектра амплитудно-модулированного сигнала есть 2Ω .

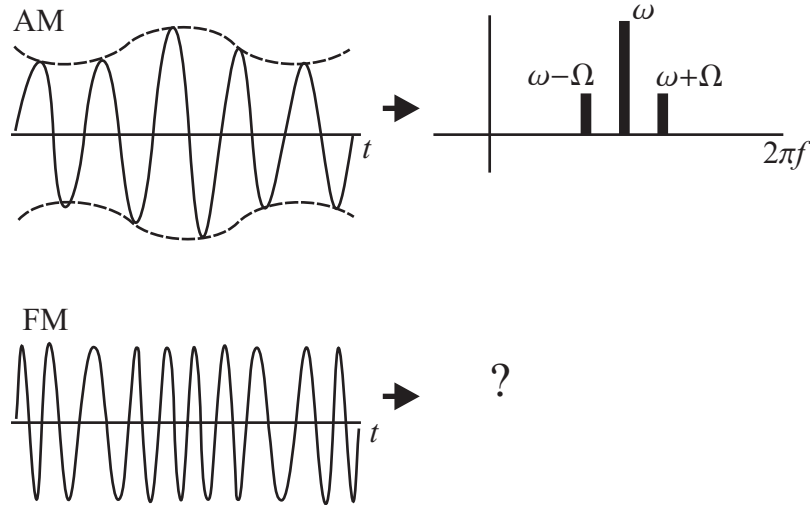


Рис. 4.1: AM и FM сигналы и их спектры

При частотной модуляции низкочастотный сигнал пропорционален локальной частоте итогового сигнала. В качестве примера рассмотрим частотно-модулированный сигнал

$$u(t) = \exp\{i\Lambda(t + m \cos t)\}, \quad (4.1)$$

где Λ — большой положительный параметр. Локальная частота есть производная фазы, и она равна $\Lambda(1 - m \sin t)$. Мы полагаем, что данный сигнал частотно модулирован сигналом $-\sin t$ с глубиной модуляции m , причем $0 < m < 1$.

Нашей целью будет вычисление спектра сигнала (4.1). Для простоты выберем Λ целым. Тогда сигнал периодическим, поэтому достаточно разложить

его в ряд Фурье на отрезке $(-\pi, \pi)$. Таким образом, задача сводится к оценке интеграла

$$I_n(\Lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{i\Lambda(t + m \cos t) - int\} dt \quad (4.2)$$

при натуральных n .

Очевидно, спектр смещается в область высоких частот при росте Λ , поэтому имеет смысл рассматривать несколько иной интеграл, а именно

$$I(\eta, \Lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{i\Lambda(t + m \cos t) - i\Lambda\eta t\} dt \quad (4.3)$$

Мы оценим данный интеграл при фиксированных η и больших Λ с тем, чтобы использовать его значения при целых $n = \Lambda\eta$.

Интеграл (4.3) представляет собой интеграл типа Фурье (3.1) с функцией

$$g(t) = t(1 - \eta) + m \cos t. \quad (4.4)$$

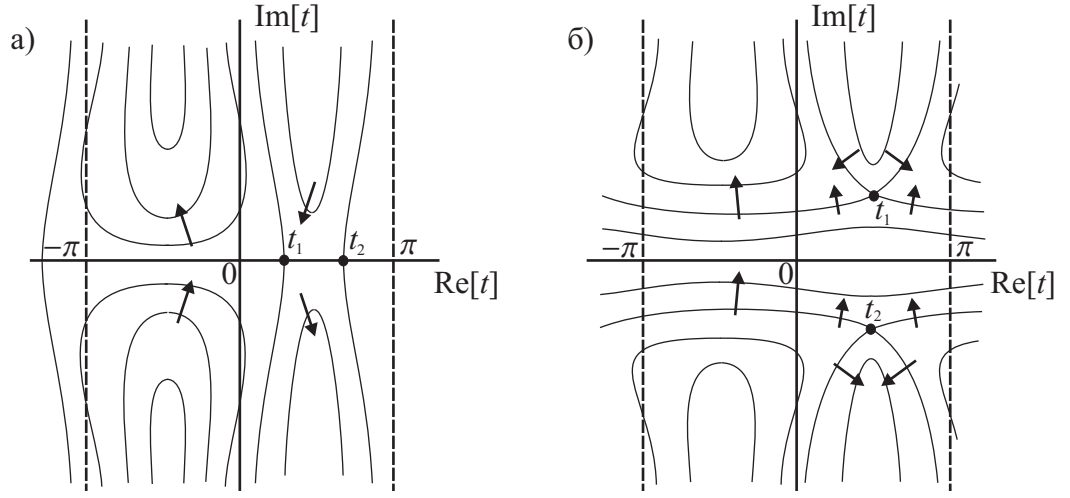
Мы будем следовать процедуре оценки интегралов типа Фурье, изложенной выше, т.е. попытаемся деформировать контур интегрирования $(-\pi, \pi)$ в область экспоненциального убывания подынтегральной функции. Прежде всего, найдем положение потенциальных точек перевала. Для этого решим уравнение $g'(t) = 0$. Рассмотрим два случая: а) когда $m < |1 - \eta|$, б) когда $m > |1 - \eta|$. В первом случае на одном периоде имеются два действительных корня уравнения, и это корни

$$t_1 = \arcsin\left(\frac{1 - \eta}{m}\right), \quad t_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \eta}{m}\right). \quad (4.5)$$

Здесь мы полагаем, что $(1 - \eta) > 0$. Во втором случае ответ формально такой же, но корни уравнения являются не действительными, а комплексными числами с действительной частью $\pi/2$ и противоположными мнимыми частями.

Построим линии уровня функции $\text{Im}[g(t)]$. Вид этих линий для случаев а) и б) качественно различается (см. Рис. 4.2). В случае а) вид этих линий сходен с линиями для $\text{Im}[\cos t]$. Точки перевала лежат на линии $\text{Im}[g] = 0$. В случае б) точки перевала лежат на линиях с $\text{Im}[g] \neq 0$. Верхняя точка перевала соответствует значению $\text{Im}[g] > 0$, а нижняя соответствует $\text{Im}[g] < 0$. Стрелки на рисунке показывают направление возрастания $\text{Im}[g]$.

Деформация контуров интегрирования для случаев а) и б) показана на Рис. 4.3. Заметим, что в силу периодичности прямолинейные участки контуров, идущие к конечным точкам интервала, компенсируют друг друга, и вклад в интеграл дают только перевальные точки.

Рис. 4.2: Линии уровня для функции $\text{Im}[g(t)]$

Рассмотрим случай а). Интеграл содержит вклады от двух точек перевала:

$$I(\eta, \Lambda) \approx I_{t_1} + I_{t_2}. \quad (4.6)$$

Вычислим I_{t_1} . Для этого разложим функцию $g(t)$ в ряд вблизи t_1 :

$$g(t) \approx (1 - \eta)t_1 + m \cos t_1 - m \frac{(t - t_1)^2}{2} \cos t_1. \quad (4.7)$$

Заметим, что

$$\cos t_1 = \sqrt{1 - \frac{(1 - \eta)^2}{m^2}}.$$

Элементарные вычисления дают

$$I_{t_1} = \exp i\Lambda[(1 - \eta)t_1 + m \cos t_1] e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda \sqrt{m^2 - (1 - \eta)^2}}}. \quad (4.8)$$

Аналогично,

$$I_{t_2} = \exp i\Lambda[(1 - \eta)(\pi - t_1) - m \cos t_1] e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda \sqrt{m^2 - (1 - \eta)^2}}}. \quad (4.9)$$

Окончательно получаем

$$I(\eta, \Lambda) = 2e^{i\pi\Lambda(1-\eta)/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda \sqrt{m^2 - (1 - \eta)^2}}} \times$$

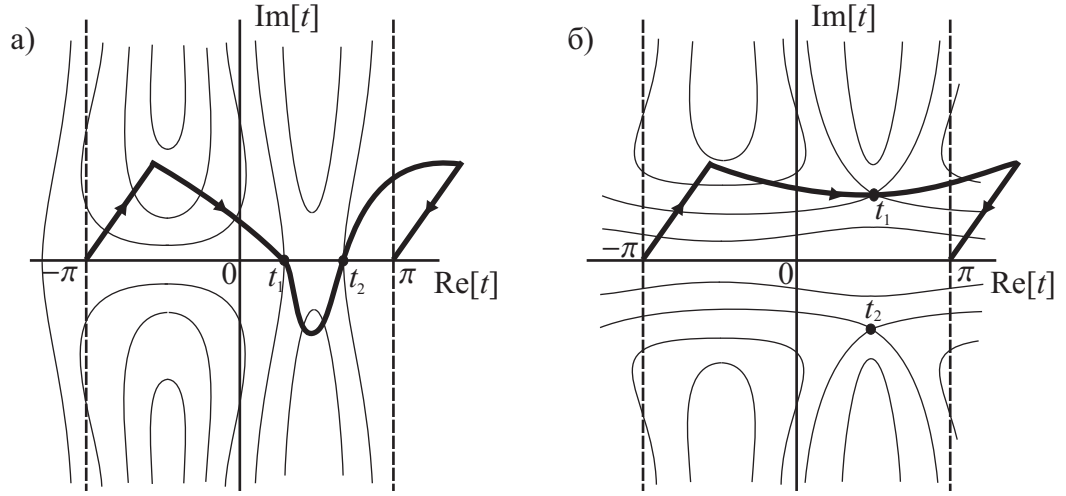


Рис. 4.3: Деформация контуров интегрирования

$$\cos \left(\Lambda(t_1 - \pi/2)(1 - \eta) + \Lambda\sqrt{m^2 - (1 - \eta)^2} - \pi/4 \right). \quad (4.10)$$

Отметим, что в знаменателе содержится выражение $(m^2 - (1 - \eta)^2)^{1/4}$, которое обращается в нуль, когда случай а) переходит в случай б).

Теперь рассмотрим случай б). Поскольку фрагменты контура интегрирования, примыкающие к концам интервала, компенсируют друг друга, а точка перевала находится в области экспоненциального убывания подынтегральной функции, интеграл экспоненциально мал. Нам необходимо оценить его величину. Контур интегрирования проведен таким образом, что везде, кроме точки перевала, подынтегральная функция экспоненциально мала по сравнению со своим значением в точке перевала. Таким образом, точка перевала дает основной вклад в интеграл. Оценим этот вклад.

Пусть точка перевала t_1 такова, что $\text{Re}[t_1] = \pi/2$, $\text{Im}[t_1] > 0$. Тогда в окрестности точки перевала

$$g(t) = (1 - \eta)t_1 - i\sqrt{(1 - \eta)^2 - m^2} + i\frac{(t - t_1)^2}{2}\sqrt{(1 - \eta)^2 - m^2}. \quad (4.11)$$

Оценка перевального интеграла дает

$$I(\eta, \Lambda) = e^{i\Lambda(1-\eta)\pi/2} \sqrt{\frac{2\pi}{\Lambda\sqrt{(1-\eta)^2 - m^2}}} \exp\{\Lambda(\sqrt{(1-\eta)^2 - m^2} - (1-\eta)\text{Im}[t_1])\}. \quad (4.12)$$

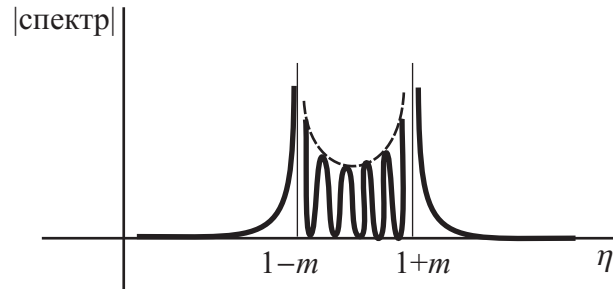


Рис. 4.4: Вид спектра частотно-модулированного сигнала

Вид спектра частотно-модулированного сигнала показан на Рис. 4.4. Частоты с $1 - m < \eta < 1 + m$ соответствуют случаю а). Квадратный корень описывает огибающую спектра, а косинус — осцилляции, вызванные интерференцией вкладов от точек перевала. Участки $\eta < 1 - m$ и $\eta > 1 + m$ соответствуют случаю б). В них наблюдается быстрое (экспоненциальное) убывание спектра при удалении от точек $\eta = 1 \pm m$.

Мы видим, что весь спектр делится на участок, где интеграл не экспоненциально мал и где он экспоненциально мал. Участок, где спектр не мал, дается соотношением $|1 - \eta| < m$ или $|\Lambda - n| < \Lambda m$. Очевидно, это ровно те значения, которые являются локальными частотами сигнала в некоторых точках. Это достаточно очевидный результат. Амплитуды показывают, грубо говоря, какова протяженность участков с нужной локальной частотой. Остальные частоты также присутствуют в спектре, но соответствующие компоненты малы. Асимптотика (4.13) позволяет оценить эти компоненты.

В случае, если сигнал имеет общий вид

$$u(t) = \exp\{i\omega t + iM \cos \Omega t\},$$

ширина спектра оценивается как $2M\Omega$, что отличается от оценки для амплитудно-модулированного сигнала. Обычно $M \gg 1$, поэтому FM сигнал занимает более широкую полосу, чем АМ.

Мы оценили интеграл (4.3) при $|1 - \eta| > m$ и при $|1 - \eta| < m$. Обе оценки не могут быть применены при $|1 - \eta| \approx m$. Проанализируем этот случай. Пусть для определенности m и $1 - \eta$ положительны, и

$$1 - \eta = m(1 + \epsilon), \quad (4.13)$$

где ϵ — малая величина. В этом случае подынтегральная функция быстро осциллирует везде, кроме окрестности точки $t = \pi/2$. В этой окрестности разложим косинус до членов третьего порядка:

$$\cos t \approx -\tau + \tau^3/6, \quad \tau = t - \pi/2.$$

Третий порядок выбран, поскольку член второго порядка обращается в нуль, а член первого порядка не позволяет вычислить интеграл.

Таким образом,

$$g(t) = m(1 + \epsilon)\frac{\pi}{2} + m\left(\epsilon\tau + \frac{\tau^3}{6}\right) \quad (4.14)$$

и

$$I(\eta, \Lambda) \approx e^{i\Lambda m(1+\epsilon)\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\Lambda m\left(\epsilon\tau + \frac{\tau^3}{6}\right)\right\} d\tau \quad (4.15)$$

Интеграл, входящий в последнее выражение, сводится к функции Эйри. Воспользуемся определением функции Эйри:

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\left(zx + \frac{x^3}{3}\right)\right\} dx \quad (4.16)$$

Пользуясь этим определением, перепишем интеграл в виде

$$I \approx 2\pi e^{i\Lambda m(1+\epsilon)\pi/2} \left(\frac{2}{\Lambda m}\right)^{1/3} \text{Ai}\left((\Lambda m)^{2/3} 2^{1/3} \epsilon\right). \quad (4.17)$$

Таким образом, имеются три асимптотики для I . Очевидно, эти асимптотики должны быть как-то согласованы друг с другом. А именно, асимптотика (4.17) должна переходить в (4.10) и (4.13). Для того, чтобы показать, как это происходит, необходимо определить процедуру сращивания асимптотических разложений, что будет сделано значительно позже.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Оценить, при каком соотношении $1 - \eta$ и m применимы асимптотики (4.10) и (4.13). Эта оценка позволяет, в свою очередь, оценить максимальную амплитуду спектра.
2. Показать, что функция Эйри $u(z) = \text{Ai}(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u'' - zu = 0. \quad (4.18)$$

3. Вычислить (выразить через Гамма-функцию) $\text{Ai}(0)$.

4. Пользуясь определением (4.16), построить асимптотики функции Эйри при больших положительных и больших отрицательных z . Указание: выполнить замену переменной $x = \tau z^\alpha$, подобрав α таким образом, чтобы выполнялось

$$zx + \frac{x^3}{3} = z^\beta \left(\tau \pm \frac{\tau^3}{3} \right)$$

для некоторого β . Затем воспользоваться методом перевала.

§5. Особые точки обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры и классификация

Разбор задачи 2 из лекции 3. Дифракция на цилиндре

Начнем с модельного представления поля

$$u_{sc} = A \int u_{in}(\phi) \frac{e^{ikr(\phi)}}{\sqrt{kr(\phi)}} R d\phi \quad (5.1)$$

Здесь ϕ — угол, отсчитываемый вдоль поверхности цилиндра от горизонтального направления, R — радиус цилиндра. Будем считать, что фаза падающей волны на поверхности цилиндра в точке $\phi = 0$ равна нулю. Тогда

$$u_{in} = \exp\{ikR(1 - \cos \phi)\}. \quad (5.2)$$

Функция $r(\phi)$ вычисляется с помощью теоремы косинусов (см. Рис. 5.1):

$$r(\phi) = \sqrt{R^2 + (R + d)^2 - 2R(R + d) \cos \phi}. \quad (5.3)$$

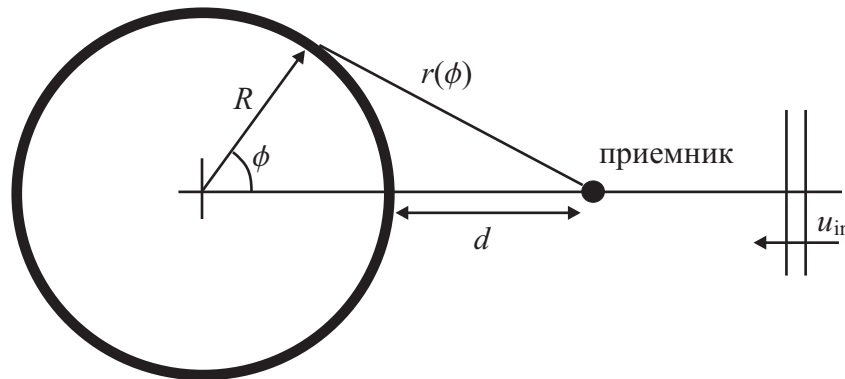


Рис. 5.1: Геометрия задачи о дифракции на цилиндре

Важный вопрос — это стоит ли проводить интегрирование по теневой области цилиндра, т.е. брать в качестве интервала интегрирования $(-\pi, \pi)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ или что-то еще. На самом деле, ответ “что-то еще”. Имеются три соображения. Во-первых, физическая интуиция подсказывает, что теневая область не должна давать вклад в рассеянное поле. Во-вторых, приближенная формула (5.1) справедлива (при некотором значении A , которое еще надо найти) только при

углах падения и отражения, близких к нормальному. Наконец, в-третьих, вблизи границы освещенной и теневой областей (т.е. вблизи точек $\phi = \pm\pi/2$) волновое поле имеет весьма сложную структуру. Это так называемая фоковская зона (названная так потому что она была исследована В.А. Фоком [3]). Поле в этой зоне гладко спадает от значений, соответствующих освещенной зоне до почти нулевых значений, соответствующих теневой зоне. Поскольку поле спадает гладко, концевые точки как таковые отсутствуют.

Здесь мы не касаемся очень важных и интересных деталей, связанных с наличием волн соскальзывания, огибающих цилиндрическую поверхность.

В соответствии с развитой ранее теорией, основной вклад в такой интеграл могут давать точки стационарной фазы и концевые точки. Будем учитывать точку стационарной фазы $\phi = 0$ (других таких точек в освещенной области нет), и не будем учитывать концевые точки вовсе.

Построим приближения для фазы $u_{\text{in}}(\phi)$ и для $r(\phi)$, оставляя члены второго порядка малости по ϕ :

$$u_{\text{in}} \approx \exp\{ikR\phi^2/2\} \quad (5.4)$$

$$r(\phi) \approx \sqrt{d^2 + \phi^2 R(R+d)} \approx d + \frac{\phi^2 R(R+d)}{2d}. \quad (5.5)$$

Таким образом, интеграл приобретает вид

$$u_{\text{sc}} \approx \frac{ARe^{ikd}}{\sqrt{kd}} \int \exp\left\{ik\frac{\phi^2 R(R+2d)}{2d}\right\} d\phi. \quad (5.6)$$

Вычисляя его с помощью метода перевала, получаем выражение

$$u_{\text{sc}} \approx \frac{Ae^{ikd}}{k} \sqrt{\frac{2\pi iR}{R+2d}}. \quad (5.7)$$

При $d \ll R$ можно пренебречь вторым слагаемым в знаменателе. Поле в этом случае имеет вид плоской волны

$$u_{\text{sc}} = Ae^{ikd} \frac{\sqrt{2\pi i}}{k}. \quad (5.8)$$

При $d \gg R$ можно пренебречь первым слагаемым в знаменателе. Поле в этом случае имеет вид цилиндрически расходящейся волны

$$u_{\text{sc}} = \frac{Ae^{ikd}}{\sqrt{kd}} \sqrt{\frac{\pi iR}{k}}. \quad (5.9)$$

Последнее выражение позволяет оценить сечение рассеяния цилиндра, т.е. в данном случае длину отрезка, который рассеивает волны так же, как цилиндр. Эта длина

$$L_{\text{eff}} = \sqrt{\pi R/k}, \quad (5.10)$$

т.е. величина порядка среднего геометрического между радиусом цилиндра и длиной волны.

О дифференциальных уравнениях и их особых точках

Данная лекция представляет собой “дополнительные главы” к курсу обыкновенных дифференциальных уравнений и, отчасти, к курсу методов математической физики. В этих курсах встречались так называемые *специальные функции*. Здесь мы немного проясним их свойства.

С точки зрения, излагаемой в этой и следующей лекции, почти все специальные функции представляют собой решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, коэффициенты которых являются рациональными функциями. Полюса коэффициентов являются *особыми точками* соответствующего дифференциального уравнения. Свойства уравнения в большой степени зависят от количества и типа его особых точек. Кроме того, очень важно иметь представления об асимптотических рядах, в которые раскладываются решения вблизи особых точек.

Вводный пример 1. Уравнение Бесселя вблизи нуля

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение — уравнение Бесселя:

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)u(x) = 0, \quad (5.11)$$

где x — независимая переменная, $u(x)$ — неизвестная функция, m — параметр (целое неотрицательное число), штрих обозначает дифференцирование по x . Пусть m не является целым или полуцелым числом (полуцелое число — это целое плюс $1/2$). Случай целого m достаточно сложен, и он рассматривается в следующей лекции. Случай полуцелого m разбирается в домашнем задании.

Будем искать решение уравнения (5.11) вблизи точки $x = 0$. Предположим, что решение может быть представлено в виде

$$u(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (5.12)$$

где a_n — коэффициенты, μ — неизвестный параметр. Пусть $a_0 \neq 0$ (этого можно добиться подбором μ).

Предположим, что ряды можно дифференцировать почленно. Производные

имеют вид

$$u'(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (\mu + n) a_n x^{n-1},$$

$$u''(x) = x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} (\mu + n)(\mu + n - 1) a_n x^{n-2}.$$

Подставим (5.12) в (5.11). Получим

$$x^\mu \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2} x^n [(\mu + n + 2)^2 - m^2] + x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.13) будем решать почленно, т.е. приравняем нулю коэффициенты при каждой из степеней x :

$$x^{\mu-2} : [\mu^2 - m^2] a_0 = 0, \quad (5.14)$$

$$x^{\mu-1} : [(\mu + 1)^2 - m^2] a_1 = 0, \quad (5.15)$$

$$x^{\mu+n} : [(\mu + n + 2)^2 - m^2] a_{n+2} + a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.16)$$

Из (5.14) следует, что $\mu = \pm m$.

Значение a_0 можно выбрать каким угодно. Пусть $a_0 = 1$. Из (5.15) и того, что $m \neq \pm 1/2$, следует, что $a_1 = 1$.

Рекуррентная формула (5.16) позволяет вычислить последовательно значения $a_2, a_4, a_6 \dots$:

$$a_2 = -\frac{1}{(\mu + 2)^2 - m^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{(\mu + 2)^2 - m^2} \times \frac{1}{(\mu + 4)^2 - m^2}$$

$$a_6 = -\frac{1}{(\mu + 2)^2 - m^2} \times \frac{1}{(\mu + 4)^2 - m^2} \times \frac{1}{(\mu + 6)^2 - m^2}$$

$$\dots$$

Кроме того, $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$.

Заметим, что коэффициенты ряда таковы, что ряд сходится при всех $x > 0$. Однако для практических вычислений ряд (5.12) годится лишь при малых (по сравнению с единицей) значениях x .

Выписанные формулы дают представление о том, почему выше мы потребовали, чтобы m не было целым или полуцелым. Действительно, в исключенных нами случаях знаменатели коэффициентов могут обращаться в ноль. Как это

обычно бывает в теории возмущений, такое поведение указывает на то, что необходимо искать другой анзац решения.

Построенные нами решения с точностью до постоянных множителей совпадают с функциями Бесселя $J_m(x)$ и $J_{-m}(x)$. Первая функция соответствует выбору $\mu = m$, а вторая $\mu = -m$. По паре функций $J_m(x)$, $J_{-m}(x)$ обычно еще строится функция Неймана

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos(\pi m) - J_{-m}(x)}{\sin(\pi m)}.$$

Вводный пример 2. Уравнение Бесселя вблизи бесконечности

Исследуем поведение решений уравнения (5.11) при больших значениях x . Представление (5.12) не является асимптотическим рядом при $x \rightarrow \infty$, поскольку $n + 1$ -й член ряда по модулю больше n -ого при больших x .

Наивный (он окажется неверным) путь решения проблемы состоит в том, чтобы по аналогии с первым примером искать асимптотику решения уравнения (5.11) в виде ряда по обратным степеням x :

$$u(x) \sim x^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad (5.17)$$

где $a_0 \neq 0$.

Подставим ряд (5.17) и его производные в уравнение (5.11). Приравняем коэффициенты при различных степенях x нулю. Получим:

$$\begin{aligned} x^\mu &: a_0 = 0, \\ x^{\mu-1} &: a_1 = 0, \\ x^{\mu-n-2} &: a_{n+2} + [(\mu - n)^2 - m^2]a_n = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что все коэффициенты ряда равны нулю. Такой результат свидетельствует о том, что никакое решение уравнения (5.11) не имеет асимптотики вида (5.17).

Оказывается, следует искать асимптотику решения в несколько ином виде:

$$u(x) \sim x^\mu e^{\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad (5.18)$$

где μ и α — числовые параметры, $a_0 \neq 0$. В книге Ф.Олвера [2], которую мы настоятельно рекомендуем изучить, детально обсуждается, какую асимптотику следует выбирать в каждом конкретном случае.

Продифференцируем разложение (5.18) почленно и подставим в уравнение (5.11). Получим

$$x^\mu e^{\alpha x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 + 1)a_n}{x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2\alpha(\mu - n) + 3\alpha]a_{n-1}}{x^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(\mu - n + 2)^2 - m^2]a_{n-2}}{x^n} \right] = 0. \quad (5.19)$$

Приравняем нулю коэффициенты при различных степенях x . При $x^\mu e^{\alpha x}$ имеем:

$$(\alpha^2 + 1)a_0 = 0. \quad (5.20)$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = \pm i. \quad (5.21)$$

При $x^{\mu-1} e^{\alpha x}$ получаем, учитывая (5.21)

$$(2\alpha(\mu - 1) + 3\alpha)a_0 = 0. \quad (5.22)$$

Отсюда

$$\mu = -\frac{1}{2}. \quad (5.23)$$

Наконец, при $x^{\mu-n} e^{\alpha x}$, $n = 2, 3, \dots$ имеем рекуррентную формулу

$$2\alpha(1 - n)a_{n-1} + [(3/2 - n)^2 - m^2]a_{n-2} = 0. \quad (5.24)$$

Последнее выражение дает возможность, задавшись каким-либо значением a_0 , построить последовательно a_1 , a_2 , a_3 и т.д.

Легко видеть, что коэффициенты растут, как $n!$, и ряд (5.18) расходится при всех x . Однако, исследовав остаточный член ряда, можно показать, что ряд является асимптотическим (его остаточный член имеет порядок первого отброшенного члена). За деталями отсылаем к книге [2].

Отметим, что до тех пор, пока остаточный член ряда (5.18) не исследован, этот ряд следует называть формальным, а не асимптотическим. Однако методы, использованные нами для вычисления интеграла и решения дифференциального уравнения, обычно приводят к асимптотическим рядам.

Таким образом, для случая $x \rightarrow \infty$ построены асимптотики двух решений, соответствующих $\alpha = i$ и $\alpha = -i$. Первое из решений с точностью до постоянного множителя равно функции Ханкеля первого рода $H_m^{(1)}(x)$, а второе — функции Ханкеля второго рода $H_m^{(2)}(x)$. Полусумма этих функций является функцией Бесселя, рассмотренной во втором примере. Такая ситуация вполне

характерна для теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для каждой особой точки существует пара линейно-независимых решений (если, конечно, уравнение имеет порядок 2), обладающих в известной мере характерным поведением в окрестности данной точки. Эти пары решений, как правило, различны для каждой особой точки.

Подытожим результаты, полученные для уравнения Бесселя. Почти во всех точках два линейно-независимых решения уравнения регулярны. Регулярность нарушается вблизи точек ноль и бесконечность. Вблизи нуля имеется пара линейно-независимых решений $(J_m(x), N_m(x))$, которые ведут себя как $\sim x^m$ и $\sim x^{-m}$, соответственно (случай целых и полуцелых m пока не рассматривается). Вблизи бесконечности имеется пара решений $(H_m^{(1)}(x), H_m^{(2)}(x))$, ведущих себя как $\sim e^{ix}/\sqrt{x}$ и $\sim e^{-ix}/\sqrt{x}$, соответственно. Каждая из этих пар может быть выбрана в качестве базиса, по которому (с постоянными коэффициентами) можно разложить любую другую пару решений. Например,

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x), \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x), \quad (5.25)$$

Классификация особых точек

Рассмотрим общее линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2}{dz^2}w(z) + f(z)\frac{d}{dz}w(z) + g(z)w(z) = 0. \quad (5.26)$$

Данное уравнение будем рассматривать в некоторой комплексной окрестности точки $z = z_0$. Будем считать, что коэффициенты уравнения $f(z)$ и $g(z)$ — однозначные функции переменной z в этой окрестности.

Сперва рассмотрим случай, когда функции $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции z в данной окрестности. Можно применить стандартные теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений и сделать заключение о том, что для данной области уравнение имеет пару аналитических решений. Такая точка z_0 называется *обыкновенной*.

В противоположность обыкновенным бывают *особые* точки. В особой точке коэффициенты уравнения имеют полюса. А именно, для особой точки справедливо представление

$$f(z) = \frac{\varphi(z - z_0)}{(z - z_0)^m}, \quad g(z) = \frac{\psi(z - z_0)}{(z - z_0)^n} \quad (5.27)$$

для некоторых целых чисел m , n и функций φ , ψ , аналитических в некоторой окрестности нуля. Поведение решений уравнения зависит от порядков сингулярностей m и n . Проведем классификацию особых точек. *Рангом* особой точки называется минимальное целое число l такое, что существует представление

(5.27) с

$$m = l + 1, \quad n = 2(l + 1). \quad (5.28)$$

При этом, конечно, одна или обе функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ могут быть равны нулю в нуле.

Сформулированное условие позволяет определить ранг особой точки по порядкам полюсов функций f и g в z_0 . Так, рангу 0 соответствуют пары (1,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2). Первое число в паре — порядок полюса функции f , второе число — порядок функции g . Рангу 1 соответствуют пары (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (1,3), (1,4), (0,3), (0,4). Особые точки более высокого ранга мы здесь не рассматриваем.

Особые точки ранга 0 называются *регулярными*. Не следует путать обыкновенные точки и регулярные особые точки.

Все сказанное выше относилось к конечным точкам z_0 . Теория аналитических функций комплексного аргумента позволяет в качестве z_0 рассматривать бесконечность. Для этого необходимо выполнить конформное преобразование, переводящее бесконечность в некоторую конечную точку, например в ноль. Таким преобразованием является, например,

$$\tau = \frac{1}{z}. \quad (5.29)$$

Пусть решение w переходит в $u(\tau) = w(1/\tau)$. Уравнение (5.26) переходит в уравнение

$$\frac{d^2}{d\tau^2}u(\tau) + p(\tau)\frac{d}{d\tau}u(\tau) + q(\tau)u(\tau) = 0 \quad (5.30)$$

с коэффициентами

$$p(\tau) = \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}f(1/\tau), \quad q(\tau) = \frac{1}{\tau^4}g(1/\tau). \quad (5.31)$$

Если точка 0 уравнения (5.30) является особой и имеет ранг l , то точка $z = \infty$ уравнения (5.26) также имеет ранг l (поскольку на комплексной сфере это одно и то же уравнение). Если точка 0 является обыкновенной точкой уравнения (5.30), то бесконечность является обыкновенной точкой уравнения (5.26).

Применим данную классификацию к рассмотренному ранее уравнению Бесселя. Среди конечных точек только при $z = 0$ коэффициенты имеют особенности, и это особенности порядка 1 и 2. Таким образом, ноль — регулярная особая точка уравнения. Проанализируем бесконечность. Преобразование (5.31), примененное к коэффициентам

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad g(z) = 1 - \frac{m^2}{z^2} \quad (5.32)$$

дает

$$p(\tau) = \frac{1}{\tau}, \quad q(\tau) = \frac{1 - m^2\tau^2}{\tau^4}. \quad (5.33)$$

Поскольку второй коэффициент имеет в нуле полюс четвертого порядка, бесконечность — иррегулярная особая точка исходного уравнения с рангом 1.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Построить в явном виде решения уравнения Бесселя при $m = 1/2$ и $m = 3/2$. Указание: начать строить асимптотический ряд вблизи бесконечности и убедиться, что он обрывается на некотором члене, т.е. представляет собой конечную сумму.
2. Пусть коэффициенты уравнения (5.26) раскладываются в бесконечности в (сходящиеся) степенные ряды

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{z^n}.$$

- а) Указать условия, накладываемые на f_n и g_n , при которых бесконечность является обыкновенной точкой уравнения.
- б) Указать условия, накладываемые на f_n и g_n , при которых бесконечность является регулярной особой точкой уравнения.

3. Найти и проанализировать особые точки уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} u(x) \right] + n(n + 1)u(x) = 0.$$

§6. Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений в особых точках

Регулярные особые точки

Начнем с рассмотрения регулярной особой точки. Пусть это конечная точка z_0 . Бесконечную точку можно перевести в ноль дробно-линейным преобразованием. Пусть коэффициенты уравнения представляются в виде степенных рядов

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n, \quad g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - z_0)^n. \quad (6.1)$$

При этом мы предполагаем, что какой-то из тройки коэффициентов f_0, g_0, g_1 может быть равен нулю, но они не равны нулю все одновременно.

Для анализа поведения решений выпишем уравнение (5.26), сохраняя только старшие члены в каждом из коэффициентов, т.е. члены с f_0 и g_0 :

$$w'' + \frac{f_0}{z - z_0} w' + \frac{g_0}{(z - z_0)^2} w = 0. \quad (6.2)$$

Это однородное (в алгебраическом смысле) уравнение. В общем случае оба его решения представляют собой степенные функции. Будем искать решение этого уравнения в виде $w = C(z - z_0)^\mu$. Подставляя данный вид решения в уравнение, получаем

$$\mu(\mu - 1) + f_0\mu + g_0 = 0. \quad (6.3)$$

Это квадратное уравнение для определения значений μ . Почти всегда оно дает два корня для μ , а именно μ_1 и μ_2 . Уравнение (6.3) (хотя оно и записано для упрощенного уравнения (6.2)) играет большую роль для исходного уравнения (5.26). Оно называется *определяющим* для данной регулярной особой точки, а его корни $\mu_{1,2}$ называются *показателями* данной особой точки.

Вернемся к исходному уравнению (5.26) с коэффициентами (6.1). Будем искать его решение в виде степенного ряда

$$w(z) = (z - z_0)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (6.4)$$

Подставляя данный анзац в уравнение и приравнивая нулю члены при одинаковых степенях $(z - z_0)$, получаем цепочку уравнений

$$Q(\mu + s)a_s = - \sum_{j=0}^{s-1} [(\mu + j)f_{s-j} + g_{s-j}]a_j, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

где

$$Q(\mu + s) \equiv (\mu + s)(\mu + s - 1) + (\mu + s)f_0 + g_0. \quad (6.6)$$

В старшем члене (т.е. при $s = 0$) уравнение (6.5) имеет решение, если μ является корнем определяющего уравнения (6.3). Выберем в качестве μ один из корней $\mu_{1,2}$ и попытаемся продолжить цепочку, т.е. построить все элементы последовательности a_n . Это удастся, если далее при $s = 1, 2, \dots$ ни одно из значений $Q(\mu + s)$ не обращается в нуль. Более тонкие оценки показывают, что при этом получается абсолютно сходящийся (в некоторой окрестности) ряд. Разложения двух линейно-независимых решений уравнения (5.26) имеют самый простой вид

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6.7)$$

$$w_2(z) = (z - z_0)^{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad (6.8)$$

где последовательности a_n и b_n получаются из рекуррентной формулы (6.5).

Обратимся к более сложному случаю, когда один из коэффициентов $Q(\mu + s)$, $s = 1, 2, \dots$ обращается в нуль. При этом возможны два варианта. В первом варианте обращается в нуль также и правая часть соответствующего рекуррентного соотношения. При этом a_s может принимать произвольное значение, и можно продолжить ряд, получая a_{s+1}, a_{s+2}, \dots . Во втором (более общем) варианте правая часть в нуль не обращается, и ряд дальше строить нельзя. В этом случае анзац (6.4) перестает работать.

Очевидно, один из коэффициентов $Q(\mu + s)$, $s = 1, 2, \dots$ обращается в нуль, если разность корней определяющего уравнения $\mu_1 - \mu_2$ равна натуральному числу, и в качестве μ выбран меньший из корней, т.е. μ_2 . “Правильный” анзац для решений в этом случае имеет вид

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6.9)$$

$$w_2 = A \ln(z - z_0) w_1(z) + (z - z_0)^{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n. \quad (6.10)$$

Понять, откуда в (6.10) берется логарифм, непросто. Мы отсылаем читателя к книге [2]. При выполнении одного из домашних заданий предстоит убедиться, что данный анзац “работает”.

Имеется еще один случай, когда разность корней определяющего уравнения равна нулю, т.е. уравнение имеет кратный корень. В этом случае неприятность

заключается не в том, что при построении цепочки мы сталкиваемся с делением на ноль, а в том, что с помощью описанной процедуры удастся построить только одно решение, а нам нужно два. Оказывается, что в этом случае работает анзац

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (6.11)$$

$$w_2 = A \ln(z - z_0) w_1(z) + (z - z_0)^{\mu_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n. \quad (6.12)$$

Подытожим сказанное. Пусть уравнение имеет регулярную особую точку. Последовательность действий по ее анализу выглядит следующим образом.

1. Если особая точка $z_0 = \infty$ — выполнить дробно линейное преобразование и воспользоваться формулами (5.31).
2. Построить разложение коэффициентов (6.1).
3. Построить определяющее уравнение (6.3) и найти его показатели μ_1 и μ_2 (т.е. корни определяющего уравнения).
4. Если разность показателей не равна целому числу, воспользоваться анзацем (6.7), (6.8). Коэффициенты a_n и b_n при этом искать, применяя формулу (6.5).
5. Если разность показателей $\mu_1 - \mu_2$ равна натуральному числу, воспользоваться анзацем (6.9), (6.10). Коэффициенты a_n искать с помощью формулы (6.5). Первые коэффициенты b_n (до $b_{\mu_1 - \mu_2}$) также искать по формуле (6.5). Если в правой части уравнения для $b_{\mu_1 - \mu_2}$ стоит ноль, положить $A = 0$ и не рассматривать логарифмические члены.
6. Если разность корней $\mu_1 - \mu_2$ равна нулю, воспользоваться анзацем (6.9), (6.10). Коэффициенты a_n искать с помощью формулы (6.5).

Для анзацев (6.10) и (6.12) не рекомендуется использовать общую рекуррентную формулу (она весьма сложна). Вместо этого предлагается подставлять (6.10) и (6.12) непосредственно в уравнение (5.26) и приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $(z - z_0)$.

Иррегулярная особая точка ранга 1

Рассмотрим поведение решений в окрестности иррегулярной особой точки ранга 1. Будем полагать, что эта точка находится в бесконечности. Рассмотрим

уравнение (5.26), коэффициенты которого при больших $|z|$ представимы рядами по обратным степеням z :

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f_s}{z^s}, \quad g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_s}{z^s}. \quad (6.13)$$

Будем полагать, хотя бы одно из чисел f_0, g_0, g_1 не равно нулю.

Будем искать решение в окрестности бесконечности в виде ряда

$$w(z) = e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s}{z^s}. \quad (6.14)$$

Здесь λ и μ — параметры, которые надо найти. Подставим ряд в уравнение. В старшем члене (при $e^{\lambda z} z^{\mu}$) получим

$$\lambda^2 + f_0 \lambda + g_0 = 0. \quad (6.15)$$

Это уравнение называется характеристическим, а его корни — характеристическими значениями особой точки.

В следующем порядке (при $e^{\lambda z} z^{\mu-1}$) имеем

$$(f_0 + 2\lambda)\mu = -(f_1 \lambda + g_1). \quad (6.16)$$

Процедура отыскания основных параметров такова. Решается характеристическое уравнение (6.15). Его корни равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{f_0}{2} \pm \left(\frac{f_0^2}{4} - g_0 \right)^{1/2}. \quad (6.17)$$

Два корня соответствуют двум линейно-независимым решениям уравнения. Выбирается один из этих корней. Он подставляется в (6.16), и находится соответствующее ему значение μ .

Случай, когда дискриминант уравнения (6.15) равен нулю, здесь не рассматривается. За деталями отсылаем к [2].

Решения, построенные для регулярных особых точек, представляют собой степенные ряды, абсолютно сходящиеся в пределах некоторого круга. Напротив, решения для иррегулярных особых точек ранга 1 обычно расходятся. В книге [2] показано, что эти ряды являются асимптотическими.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Построить первые 3 члена решений уравнения Бесселя для $m = 1$ вблизи нуля.
2. Найти особые точки и указать анзацы решений в этих особых точках для уравнения Лагерра

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0. \quad (6.18)$$

§7. Контрольная работа 1

1. Оценить интеграл

$$I(x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{1/2} dt \quad (7.1)$$

при больших положительных x .

2. В определении функции Эйри

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(zx + \frac{x^3}{3} \right) \right\} dx \quad (7.2)$$

при больших $|z|$ выполнить замену переменных таким образом, чтобы интеграл свелся к стандартному интегралу типа Фурье:

$$I(\Lambda) = \int f(\tau) \exp\{i\Lambda g(\tau)\} d\tau.$$

3. Пусть в трехмерном случае вторичная волна, рассеянная участком площади препятствия, имеет вид

$$du_{\text{sc}}(P') = u_{\text{in}}(P'') \frac{A}{kr} e^{ikr} ds, \quad (7.3)$$

где P' — положение приемника, P'' — положение участка рассеивателя, r — расстояние между точками P' и P'' , $u_{\text{in}}(P'')$ — значение падающей волны в точке P'' , ds — элемент площади рассеивателя, A — некоторый коэффициент.

Плоская волна падает на сферу радиуса R из бесконечности вдоль оси x . Центр сферы находится на оси x в точке $R + d$. Считая, что рассеяние происходит только на освещенной части сферы, примыкающей к точке геометрического отражения, оцените рассеянную волну.

4. Найти особые точки и указать анзацы решений в этих особых точках для уравнения Куммера

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0 \quad (7.4)$$

Глава 2

Задачи теории колебаний

§8. Прямое разложение в задачах теории колебаний. Равномерные и неравномерные разложения

Пример: маятник с переменной длиной подвеса

Рассмотрим задачу, известную из теории колебаний. Это задача о маятнике переменной длины. Угол отклонения маятника $u(t)$ описывается в линейном приближении уравнением

$$\ddot{u} + (1 + \epsilon \sin(\Omega t))u = 0, \quad (8.1)$$

где ϵ — малый параметр, а Ω — частота, с которой происходят изменения длины. Данная частота представляет собой важный параметр задачи. Эта частота должна сравниваться с круговой частотой свободных колебаний маятника, т.е. с $\omega = 1$. Как известно, при определенных соотношениях Ω/ω наблюдается *параметрический резонанс*, который мы планируем рассмотреть в одной из следующих лекций.

Построим для данной задачи *прямое разложение*. Это означает, что решение ищется в виде простейшего степенного ряда

$$u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + \dots \quad (8.2)$$

Подставим данный степенной ряд в уравнение и приравняем нулю коэффициенты, стоящие при различных степенях ϵ . Получим

$$\epsilon^0 : \ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad (8.3)$$

$$\epsilon^1 : \ddot{u}_1 + u_1 = -u_0 \sin(\Omega t), \quad (8.4)$$

$$\epsilon^2 : \ddot{u}_2 + u_2 = -u_1 \sin(\Omega t), \quad (8.5)$$

...

Первое из этих уравнений представляет собой однородное невозмущенное уравнение. Его решение можно записать в виде

$$u(t) = A \sin(t + \phi) \quad (8.6)$$

при произвольных постоянных (действительных) A и ϕ . Все остальные уравнения являются неоднородными, причем в правой части в них стоят члены, найденные на предыдущих шагах.

Рассмотрим уравнение для определения $u_1(t)$, т.е. (8.4). Подставим в правую часть этого уравнения (8.6) и воспользуемся тригонометрической формулой “произведение синусов”. В результате получим

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \frac{A}{2} [\cos((\Omega + 1)t + \phi) - \cos((\Omega - 1)t - \phi)]. \quad (8.7)$$

Решение этого уравнения складывается из произвольного решения однородного уравнения и “частного” решения, вызванного правой частью. В данном случае эти две составляющие легко разделить. Уравнение (8.4) представляет собой уравнение колебаний. Общее решение однородного уравнения представляет собой свободные колебания на частоте $\omega = 1$, а частное решение можно выбрать как вынужденные колебания на частотах $\Omega + 1$ и $\Omega - 1$.

Будем считать, что свободное решение (8.4) равно нулю. Это предположение не ограничивает общность, поскольку ненулевое свободное решение (8.4) можно просто прибавить к (8.6). Вынужденные колебания в этом случае имеют вид

$$u_1(t) = \frac{A}{2[1 - (\Omega + 1)^2]} \cos((\Omega + 1)t + \phi) - \frac{A}{2[1 - (\Omega - 1)^2]} \cos((\Omega - 1)t - \phi). \quad (8.8)$$

Вид разложения (8.8) указывает на проблемы, возникающие с прямым разложением. Первое, что можно отметить, это то, что при $\Omega = 2$ данным разложением пользоваться нельзя, поскольку знаменатель во втором слагаемом обращается в нуль. Разумеется, то, что знаменатель в (8.8) обращается в нуль, не говорит о том, что данное уравнение не имеет решения. Просто формула (8.8) описывает стационарное решение уравнения (8.7), а при $\Omega = 2$ такого решения нет. Вместо этого приходится выписывать нестационарное решение, амплитуда которого растет со временем. При рассмотрении следующего примера будет подробно рассказано как это сделать. Данный случай соответствует одному из *параметрических резонансов* системы, т.е. состоянию, при котором амплитуда колебаний неограниченно возрастает. Анализируя использованную процедуру можно предположить, что существуют значения Ω , которые дают ноль в знаменателе в следующих порядках прямого разложения (а именно, $\Omega = 2/n$ при целых n). Эти значения также соответствуют параметрическим резонансам. Если ни в каком порядке ноль не появляется, прямое разложение “работает”.

Таким образом, при большинстве значений Ω прямое разложение удастся построить для стационарного решения, но при некоторых (резонансных) Ω имеются члены разложения, растущие со временем. Если стационарное разложение удастся построить, то говорят, что прямое разложение *равномерно по времени*. Напротив, при резонансных Ω разложение называют *неравномерным* на бесконечном временном интервале. Таким разложением нельзя пользоваться напрямую, поскольку оно обычно не отражает основных свойств решения.

Отметим, что при резонансных Ω разложение является неравномерным только при неограниченно растущем t . Если же нас интересует изменение t лишь в конечных пределах, то прямое разложение можно и нужно использовать.

Большая часть данной главы посвящена тому, что и как делать, чтобы заменить неравномерное прямое разложение каким-либо равномерным разложением. Обычно это связано с необходимостью как следует понять поведение решения задачи.

Простейший случай неравномерного разложения

Рассмотрим “учебный” пример, в котором возмущению подвергается частота колебаний:

$$\ddot{u} + (1 + \epsilon)u = 0. \quad (8.9)$$

Этот пример не слишком интересен, однако известно точное решение уравнения, поэтому появляется возможность понять, что происходит с прямым разложением.

Будем использовать прямое разложение (8.2). Цепочка уравнений для членов разложения имеет вид

$$\epsilon^0 : \ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad (8.10)$$

$$\epsilon^1 : \ddot{u}_1 + u_1 = -u_0, \quad (8.11)$$

$$\epsilon^2 : \ddot{u}_2 + u_2 = -u_1, \quad (8.12)$$

...

Выберем решение уравнения (8.10) в виде

$$u_0 = Ae^{it}. \quad (8.13)$$

Разумеется, решение физической задачи не может быть комплексной величиной. Такая запись может означать, что в конце мы возьмем действительную часть от того, что получилось.

Рассмотрим уравнение (8.11). Оно представляет собой неоднородное уравнение для линейного резонатора. Правая часть (вынуждающая сила для (8.11))

сама имеет осциллирующий характер. Что особенно важно, частота вынуждающей силы совпадает с частотой собственных колебаний, т.е. в (8.11) происходит возбуждение осциллятора на его резонансной частоте.

Напомним как искать решение уравнения (8.11). Воспользуемся методом вариации постоянных. Будем искать решение в виде

$$u_1 = C(t)e^{it}. \quad (8.14)$$

Для $C(t)$ получим уравнение

$$\ddot{C} + 2i\dot{C} = -A. \quad (8.15)$$

Нас интересует следующее решение данного уравнения:

$$C(t) = -\frac{A}{2i}t. \quad (8.16)$$

Такой выбор решения обусловлен тем, что мы хотим, чтобы свободные колебания были близки к нулю при малых t .

Таким образом,

$$u_1(t) = -\frac{A}{2i}te^{it}. \quad (8.17)$$

Недостаток этого решения состоит в том, что при $t \sim \epsilon^{-1}$ член ϵu_1 становится сравним по величине с u_0 , т.е. уже не является малой поправкой. Решение утрачивает свою асимптотичность. Это типичный пример неравномерности прямого разложения.

Отметим, что полученное двучленное разложение $u = u_0 + \epsilon u_1$ не отражает поведения решения. Действительно, точное решение

$$u_{\text{ex}} = A \exp\{it\sqrt{1 + \epsilon}\} \quad (8.18)$$

представляет собой колебания с немного измененной частотой, а не линейно растущие колебания.

Покажем, что полученное разложение все же имеет прямое отношение к точному решению. Если рассматривать прямое разложение как ряд Тейлора по ϵ , то

$$\left. \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (8.19)$$

Очевидно, вычисленное по этой формуле решение u_1 совпадает с (8.17). То есть линейно растущее решение действительно представляет собой разность между экспонентами с немного различными частотами, но справедливо это лишь на

ограниченном интервале $t \ll \epsilon^{-1}$. Далее необходимо строить остальные члены ряда Тейлора.

Линейно растущий (по сравнению с предыдущим членом) член в асимптотическом разложении называется секулярным или вековым. В следующих лекциях мы будем пытаться строить разложения таким образом, чтобы секулярных членов не возникало.

Покажем, каким образом (хотя и очень нестрого) можно использовать прямое разложение, построенное выше. Это не заменяет построения более осмысленного решения, но иногда позволяет понять происходящее. Двучленное разложение можно записать в виде

$$u_0 + \epsilon u_1 = B(t)e^{it}, \quad (8.20)$$

где

$$B(t) = A(1 + i\epsilon t/2). \quad (8.21)$$

Представим коэффициент $B(t)$ в виде амплитуды и фазы $B(t) = b(t)e^{i\phi(t)}$. Тогда из (8.21) получаем

$$\left. \frac{db}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (8.22)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\epsilon}{2}. \quad (8.23)$$

Сделаем смелое допущение и снимем ограничение $t = 0$ (в конце концов, все моменты времени равноправны). Получатся эволюционные уравнения, правильно описывающие в первом приближении колебательный процесс.

Частица в поле бегущей волны

Следующий пример демонстрирует полезность прямого разложения. Рассмотрим частицу в поле бегущей волны. А именно, пусть координата частицы описывается функцией $x(t)$, а уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \epsilon \sin(x - t). \quad (8.24)$$

Мы считаем, что масса частицы равна единице, а коэффициент трения равен α . Как и раньше, ϵ — малый параметр.

Наша задача — понять, совершает ли частица наряду с малым колебательным движением еще и медленный дрейф вдоль оси x . Подход к задаче такой. Мы строим первое приближение к движению частицы и, пользуясь построенным первым приближением, вычисляем второе приближение к правой части (8.24). Это второе приближение является оценкой силы, действующей на частицу во втором приближении. Если имеется ненулевое среднее значение этой

силы, то можно оценить среднюю скорость дрейфа, используя это среднее значение.

Начнем строить прямое разложение. Пусть

$$x(t) = x_0 + \epsilon x_1(t). \quad (8.25)$$

Уравнение для x_1 имеет вид

$$\ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 = \sin(x_0 - t). \quad (8.26)$$

Будем искать решение в виде $x_1 = A \sin(x_0 - t) + B \cos(x_0 - t)$. Подставляя этот вид решения в уравнение, получаем систему

$$-A + \alpha B = 1, \quad -B - \alpha A = 0, \quad (8.27)$$

откуда

$$A = -\frac{1}{1 + \alpha^2}, \quad B = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}. \quad (8.28)$$

Очевидно, в первом приближении частица совершает малые колебания, и никакого дрейфа нет.

Подставим построенное первое приближение в правую часть уравнения (8.24), а именно вычислим $\epsilon \sin(x_0 + \epsilon x_1 - t)$. Для этого разложим синус в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 - t$:

$$\epsilon \sin(x_0 + \epsilon x_1 - t) \approx \epsilon \sin(x_0 - t) + \epsilon x_1 \cos(x_0 - t). \quad (8.29)$$

Усредним (8.29) по периоду колебаний. Очевидно, среднее значение произведения синуса и косинуса дает нуль, а среднее значение квадрата косинуса — одну вторую. Поэтому

$$\langle \epsilon \sin(x_0 + \epsilon x_1 - t) \rangle \approx \frac{\epsilon^2}{2} B. \quad (8.30)$$

Для медленного дрейфа имеем уравнение

$$\ddot{X} + \alpha \dot{X} = \epsilon^2 \frac{\alpha}{2(1 + \alpha^2)}, \quad (8.31)$$

что дает скорость дрейфа

$$V = \frac{\epsilon^2}{2(1 + \alpha^2)}. \quad (8.32)$$

Таким образом, частица всегда дрейфует в сторону распространения волны. Отметим, что скорость имеет ненулевой предел при $\alpha \rightarrow 0$, однако, если в самом начале в уравнении (8.24) положить $\alpha = 0$, получится нулевая скорость дрейфа.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Построить второе приближение для уравнения (8.1). Определить, для каких частот Ω трехчленное разложение является неравномерным.
2. Для магнитного момента $\vec{M}(t)$ в трехмерном пространстве выполняется уравнение Блоха

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \epsilon \vec{M} \times \vec{B}. \quad (8.33)$$

Магнитное поле \vec{B} представлено скрещенными осциллирующими полями, направленными вдоль осей x и y , смещенными по фазе друг относительно друга:

$$\vec{B} = \vec{x} \cdot \sin(t) + \vec{y} \cdot \sin(t + \phi). \quad (8.34)$$

Считая ϵ малым параметром, найти среднюю скорость прецессии магнитного момента.

3. Вдоль оси x между двумя абсолютно упругими стенками летает упругий мячик. Одна стенка закреплена при $x = 0$, а другая совершает движение по закону $x = F(t)$. Мячик летает быстро, а стенка движется медленно (определите самостоятельно, что это значит в данном случае). Найти приближенный закон изменения модуля скорости шарика в зависимости от времени.

§9. Метод многих масштабов

На предыдущей лекции была продемонстрирована основная проблема, возникающая при построении прямого разложения в задаче теории колебаний. Эта проблема — появление секулярных членов в разложении. Средством решения этой проблемы является построение более сложного анзаца, в котором при надлежащем выборе параметров удастся избежать появления секулярных членов.

Иллюстративный пример. Осциллятор с затуханием

Рассмотрим следующий (учебный) пример. Рассмотрим линейный осциллятор с малым затуханием

$$\ddot{x} + x = -2\epsilon\dot{x}. \quad (9.1)$$

Решение этого уравнения есть

$$x(t) = \operatorname{Re}[Ae^{\alpha t}], \quad (9.2)$$

где параметр α находится из квадратного уравнения

$$\alpha^2 + 1 = -2\epsilon\alpha. \quad (9.3)$$

Корни этого уравнения нетрудно найти:

$$\alpha = -\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1} \quad (9.4)$$

или

$$\alpha \approx -\epsilon \pm i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) \quad (9.5)$$

Выпишем решение в следующем виде:

$$x \approx \operatorname{Re}[Ae^{it}e^{-\epsilon t}e^{-i\epsilon t^2/2}]. \quad (9.6)$$

Первая экспонента описывает колебания невозмущенной системы, вторая — затухание колебаний, третья — малую поправку к частоте колебаний. Заметим, что эти три процесса имеют различный временной масштаб. А именно, введем три разных “времени”:

Обычное

$$T_0 = t, \quad (9.7)$$

медленное

$$T_1 = \epsilon t, \quad (9.8)$$

очень медленное

$$T_2 = \epsilon^2 t, \quad (9.9)$$

Таким образом, мы можем переписать (9.6)

$$x \approx \operatorname{Re}[Ae^{iT_0} e^{-T_1} e^{-iT_2/2}]. \quad (9.10)$$

Процедура, которую мы хотим предложить, достаточно проста в применении, но сложна для понимания. Вместо поиска функции одной переменной $x(t)$ мы будем искать функцию нескольких независимых переменных $x(T_0, T_1, T_2)$. После того, как решение будет найдено, вместо времен T_0, T_1, T_2 мы подставляем (9.7), (9.8), (9.9), чтобы получить функцию одной переменной.

Попытаемся построить решение задачи об осцилляторе с затуханием с помощью использования нескольких времен (многих масштабов). А именно, будем использовать анзац

$$x = \sum_n \epsilon^n x_n(T_0, T_1, T_2, \dots) \quad (9.11)$$

Ограничимся только первыми тремя временами и только тремя членами в разложении.

Построим полную производную по t по обычным правилам:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}. \quad (9.12)$$

Вторая производная имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right). \quad (9.13)$$

Подставим первую и вторую производные в уравнение (9.1) и распишем уравнение по степеням ϵ :

$$\epsilon^0 : \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 = 0, \quad (9.14)$$

$$\epsilon^1 : \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0}, \quad (9.15)$$

$$\epsilon^1 : \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial x_1}{\partial T_0}. \quad (9.16)$$

Решим первое уравнение, т.е. (9.14). Очевидно, его общее решение есть

$$x_0 = A_0(T_1, T_2) e^{iT_0} + \text{К.С.}, \quad (9.17)$$

где под “К.С.” в правой части обозначены члены, комплексно сопряженные к выписанным. Коэффициент $A_0(T_1, T_2)$ зависит от двух более медленных времен и на этом шаге определен быть не может.

Подставим (9.17) в правую часть уравнения (9.15). Получим

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = -2i \frac{\partial A_0}{\partial T_1} e^{iT_0} - 2i A_0 e^{iT_0} + \text{К.С.} \quad (9.18)$$

Уравнение (9.18) описывает линейный осциллятор, возбуждаемый на резонансной частоте. В общем случае это приводит к росту амплитуды колебаний, т.е. к появлению резонансных членов в x_1 . Попробуем не допустить этого. Для этого сделаем так, чтобы в правой части возбуждение, содержащее резонансную экспоненту e^{iT_0} , обратилось в ноль. Очевидно, это эквивалентно условию

$$\frac{\partial A_0}{\partial T_1} + A_0 = 0. \quad (9.19)$$

Отметим, что это же условие приводит к тому, что вклад на второй резонансной экспоненте (e^{-iT_0}) также равен нулю.

Решение этого уравнения легко выписать:

$$A_0(T_1, T_2) = \tilde{A}_0(T_2) e^{-T_1}. \quad (9.20)$$

Уравнение (9.18) становится однородным, и его решение дается формулой

$$x_1 = A_1(T_1, T_2) e^{iT_0} + \text{К.С.} \quad (9.21)$$

Для того, чтобы построить $A_0(T_2)$, обратимся к уравнению (9.16). Подставим в его правую часть (9.20) и (9.21):

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + x_2 = -e^{iT_0} \left[2i A_1(T_1, T_2) + 2i \frac{\partial A_1}{\partial T_1} - \tilde{A}_0 e^{-T_1} + 2i \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial T_2} e^{-T_1} \right] + \text{К.С.} \quad (9.22)$$

Снова потребуем, чтобы возбуждение на резонансной частоте отсутствовало (это требование отсутствия секулярных членов). Данное требование приводит к условию

$$\frac{\partial A_1}{\partial T_1} + A_1 = \frac{i}{2} \left(-\tilde{A}_0 + 2i \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial T_2} \right) e^{-T_1}, \quad (9.23)$$

которое мы рассматриваем как дифференциальное уравнение относительно A_1 . Заметим, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (9.23), имеет решение $C(T_2) e^{-T_1}$. Правая часть пропорциональна этому решению (как функция T_1). Это означает, что решение уравнения (9.23) будет содержать функцию

$T_1 e^{-T_1}$. Такая функция неограниченно растет по сравнению с \tilde{A}_0 , а поэтому она представляет собой секулярный член. Секулярный член отсутствует, если коэффициент при e^{-T_1} равен нулю, т.е.

$$-\tilde{A}_0 + 2i \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial T_2} = 0 \quad (9.24)$$

Решение этого уравнения есть

$$\tilde{A}_0 = \hat{A}_0 e^{-iT_2/2}. \quad (9.25)$$

Собирая вместе (9.25), (9.20) и (9.17), получаем решение (9.10).

Здесь мы построили разложение с точностью до времени второго порядка медленности. В дальнейшем изложении мы будем ограничиваться только первым медленным временем T_1 .

Осциллятор Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + u = \epsilon(1 - u^2)\dot{u}. \quad (9.26)$$

Прежде всего, попробуем понять качественно поведение системы, описываемой таким уравнением. Правая часть (судя по наличию в ней \dot{u}) является затуханием. Если среднее значение (в не ясном пока смысле) выражения $1 - u^2$ меньше нуля, то это обычное затухание, при котором амплитуда колебаний убывает. Если же эта средняя часть больше нуля, то это отрицательное затухание, при котором амплитуда колебаний возрастает. Таким образом, в системе имеется отрицательная обратная связь, которая поддерживает среднее значение u^2 на каком-то постоянном уровне.

Для решения задачи используем двучленный анзац

$$u = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1). \quad (9.27)$$

При ϵ^0 получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \quad (9.28)$$

Его решение есть

$$u_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \text{К.С.} \quad (9.29)$$

При ϵ^1 имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + (1 - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial T_0}. \quad (9.30)$$

Подставим (9.29) в (9.30). Получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2i(A'e^{iT_0} - \bar{A}'e^{-iT_0}) + iAe^{iT_0} - i\bar{A}e^{-iT_0} - i(Ae^{iT_0} + \bar{A}e^{-iT_0})^2 \cdot (Ae^{iT_0} - \bar{A}e^{-iT_0}). \quad (9.31)$$

Здесь черта сверху обозначает комплексное сопряжение, а штрих — дифференцирование по T_1 . Правая часть после раскрытия скобок содержит слагаемые с экспонентами $e^{\pm 3iT_0}$ и $e^{\pm iT_0}$. Резонансными являются члены с экспонентами $e^{\pm iT_0}$. Для подавления секулярных членов потребуем, чтобы коэффициент при e^{iT_0} обращался в нуль:

$$-2iA' + iA - iA^2\bar{A} = 0, \quad (9.32)$$

откуда

$$\frac{dA}{dT_1} = \frac{1}{2}A(1 - |A|^2). \quad (9.33)$$

Это уравнение описывает зависимость комплексной амплитуды от медленного времени и носит название *укороченного уравнения* для данной задачи.

Решим данное уравнение. Представим комплексную амплитуду A с помощью действительных амплитуды и фазы:

$$A(T_1) = a(T_1)e^{i\phi(T_1)}. \quad (9.34)$$

Подставим (9.34) в уравнение (9.33), сократим на $e^{i\phi}$ и выделим в уравнении действительную и мнимую части. В действительной части получим

$$a' = \frac{1}{2}a(1 - a^2), \quad (9.35)$$

а в мнимой

$$\phi' = 0. \quad (9.36)$$

Последнее соотношение означает, что в первом порядке по ϵ поправки к частоте нет.

Проанализируем (9.35). Стационарное значение, т.е. $a' = 0$, достигается при $a = 1$. Следовательно, стационарная амплитуда колебаний системы равна 2.

Решим уравнение (9.35) с помощью разделения переменных. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{da}{a(1 - a^2)} = \frac{dT_1}{2} \quad (9.37)$$

Разложим левую часть в сумму простых дробей:

$$\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2(a-1)} - \frac{1}{2(a+1)} \right] da = \frac{dT_1}{2}. \quad (9.38)$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} = Ce^{T_1/2} \quad (9.39)$$

или

$$a(T_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + De^{-T_1}}}. \quad (9.40)$$

Таким образом, мы описали динамику осциллятора Ван-дер-Поля.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Решить уравнение (9.23) с помощью метода вариации постоянной.
2. Рассмотреть нелинейный осциллятор

$$\ddot{u} + (1 + \epsilon u^2)u = 0 \quad (9.41)$$

при малых ϵ методом многих масштабов. Найти поправку к частоте колебаний в первом приближении.

§10. Метод усреднения. Параметрический резонанс

Пример 1. Разбор домашнего задания

Разберем задачу, предложенную на дом в предыдущей лекции, но сделаем это в рамках “нового” метода, а именно метода усреднения. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + (1 + \epsilon u^2)u = 0 \quad (10.1)$$

с малым параметром ϵ . Это уравнение описывает осциллятор с малой кубической нелинейностью. У такого осциллятора частота свободных колебаний зависит от амплитуды. Необходимо найти эту зависимость.

Перепишем уравнение (10.1), оставив в левой части невозмущенную задачу:

$$\ddot{u} + u = -\epsilon u^3. \quad (10.2)$$

Представим решение задачи в виде

$$u = a(t) \cos(t + \beta(t)) \quad (10.3)$$

с амплитудой и фазой, медленно зависящими от времени. Очевидно, это не очень хорошее представление, поскольку одну неизвестную функцию мы заменяем на две. Поэтому необходимо какое-то ограничение, которое снимает неоднозначность. Это ограничение выберем в виде

$$\dot{u} = -a(t) \sin(t + \beta(t)). \quad (10.4)$$

Непосредственное дифференцирование (10.3) дает

$$\dot{u} = \dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) - a \sin(t + \beta), \quad (10.5)$$

так что ограничение (10.4) означает, что

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a\dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (10.6)$$

Разделение производной (10.5) на (10.4) и (10.6) — это разделение на быструю и медленную части.

Вычислим вторую производную u :

$$\ddot{u} = -a \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta). \quad (10.7)$$

Подставим вторую производную в уравнение (10.2):

$$-\dot{a} \sin(t + \beta) - a\dot{\beta} \cos(t + \beta) = -\epsilon a^3 \cos^3(t + \beta) \quad (10.8)$$

Будем рассматривать систему из уравнений (10.8), (10.6). Выражая из этих уравнений \dot{a} и $\dot{\beta}$, получаем систему

$$\dot{a} = \epsilon a^3 \cos^3(t + \beta) \sin(t + \beta), \quad (10.9)$$

$$\dot{\beta} = \epsilon a^2 \cos^4(t + \beta). \quad (10.10)$$

Отметим, что до настоящего момента никаких приближений не делалось, т.е. уравнения (10.9), (10.10) являются точными. Пришло время упростить эти уравнения, сделав некоторые приближения. А именно, мы считаем, что амплитуда и фаза изменяются медленно, поэтому хорошим приближением будет усреднить правые части по периоду колебаний, т.е. рассматривать уравнения

$$\dot{a} = \epsilon a^3 \langle \cos^3(t + \beta) \sin(t + \beta) \rangle, \quad (10.11)$$

$$\dot{\beta} = \epsilon a^2 \langle \cos^4(t + \beta) \rangle. \quad (10.12)$$

Выполняя усреднение, получаем укороченные уравнения

$$\dot{a} = 0, \quad (10.13)$$

$$\dot{\beta} = \frac{3}{8} \epsilon a^2. \quad (10.14)$$

Следовательно, поправка к частоте колебаний есть $\Delta\omega = 3/8a^2$.

Пример 2. Параметрический резонанс

Рассмотрим уравнение параметрического резонанса

$$\ddot{u} + [1 + \delta + \epsilon \cos(2t)]u = 0, \quad (10.15)$$

где δ и ϵ — малые параметры. Структура этого уравнения для простоты выкладок несколько изменена по сравнению с использованной ранее (см. (8.1)). А именно, разумно было бы подстраивать частоту изменения коэффициента (частоту Ω). Здесь же она жестко задана, а вместо этого с помощью параметра δ подстраивается частота свободных колебаний осциллятора. Частота изменения коэффициента примерно равна удвоенной частоте свободных колебаний, что соответствует первому параметрическому резонансу.

Отметим, что мы считаем малые параметры δ и ϵ величинами одного порядка малости. Для описания резонансов более высокого порядка приходится считать эти параметры имеющими разный порядок.

Нашей целью будет определение области на плоскости (δ, ϵ) , в которой наблюдается параметрический резонанс.

Перепишем уравнение в виде

$$\ddot{u} + u = -[\delta + \epsilon \cos(2t)]u. \quad (10.16)$$

Представим решение в виде

$$u = A(t) \cos(t) + B(t) \sin(t), \quad (10.17)$$

где A и B — медленно меняющиеся функции t . Введем ограничение

$$\dot{u} = -A \sin t + B \cos t, \quad (10.18)$$

эквивалентное условию

$$\dot{A} \cos t + \dot{B} \sin t = 0. \quad (10.19)$$

Вторая производная u имеет вид

$$\ddot{u} = -\dot{A} \sin t - A \cos t + \dot{B} \cos t - B \sin t. \quad (10.20)$$

Подставляя (10.20) в уравнение (10.16), получаем

$$-\dot{A} \sin t + \dot{B} \cos t = -\delta(A \cos t + B \sin t) - \epsilon \cos(2t)(A \cos t + B \sin t). \quad (10.21)$$

Будем рассматривать систему, состоящую из уравнений (10.21), (10.19). Выделяя \dot{A} и \dot{B} с помощью линейного преобразования, получим

$$\dot{A} = \delta(A \cos t + B \sin t) \sin t + \epsilon(A \cos t + B \sin t) \cos(2t) \sin t, \quad (10.22)$$

$$\dot{B} = -\delta(A \cos t + B \sin t) \cos t - \epsilon(A \cos t + B \sin t) \cos(2t) \cos t, \quad (10.23)$$

Усредним правые части уравнений по периоду колебаний. В результате получим систему укороченных уравнений

$$\dot{A} = \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\epsilon}{4} \right) B, \quad (10.24)$$

$$\dot{B} = -\left(\frac{\delta}{2} + \frac{\epsilon}{4} \right) A. \quad (10.25)$$

Для определения области, в которой наблюдается параметрический резонанс, проанализируем систему (10.24), (10.25) на устойчивость. Заметим, что это линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами. Решим характеристическое уравнение этой системы, т.е. найдем такие значения $\alpha_{1,2}$, что существуют решения вида

$$\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} e^{\alpha t}.$$

Эти значения α совпадают с собственными значениями матрицы, описывающей систему, т.е. матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta}{2} - \frac{\epsilon}{4} \\ -\frac{\delta}{2} - \frac{\epsilon}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Данные собственные значения равны

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} - \delta^2}. \quad (10.26)$$

Очевидно, при $|\epsilon/2| > |\delta|$ значения $\alpha_{1,2}$ оба действительные, и одно из них больше нуля. Это соответствует экспоненциальному росту, т.е. параметрическому резонансу. При $|\epsilon/2| < |\delta|$ оба значения чисто мнимые, и резонанс не наблюдается.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + [1 + \delta + \epsilon \cos(2t)]u = 0,$$

с помощью метода многих масштабов. При этом положить $\delta = D\epsilon$, где D — фиксированное число порядка единицы. Получить укороченные уравнения.

2. Рассмотреть уравнение

$$\ddot{u} + [1 + \delta + \epsilon \cos(2t)]u = 0$$

с помощью метода усреднения, полагая

$$u = a(t) \cos(t + \beta(t)).$$

3. Найти, при каком соотношении ϵ и δ имеет место второй параметрический резонанс, описываемый уравнением

$$\ddot{u} + [1 + \delta + \epsilon \cos t]u = 0.$$

§11. ВКБ–приближение

Попытка применить метод многих масштабов

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + \lambda^2 q(t)u = 0 \quad (11.1)$$

при *больших* положительных значениях λ . Это уравнение представляет большой интерес для квантовой физики и теории волн, так как описывает коротковолновое приближение в одномерных задачах. Очевидно, его можно обобщить на двух- и трехмерный случай, получив задачу о распространении коротких волн в среде с переменным показателем преломления.

Прежде всего, покажем, что метод многих масштабов не позволяет получить решение этой задачи. Отметим, что на метод многих масштабов в данном случае можно возложить некоторые надежды, поскольку явным образом в задаче присутствуют два масштаба времени: “нормальное” (это масштаб изменения функции $q(t)$) и “быстрое” (связанное с периодом колебаний в системе). Если q — положительная константа, то частота колебаний равна $\lambda\sqrt{q}$. Поэтому логично выбрать в качестве нормального и быстрого времени переменные

$$T_0 = t, \quad T_{-1} = \lambda t. \quad (11.2)$$

Будем искать решение в виде двучленного разложения

$$u = u_0(T_{-1}, T_0) + \frac{1}{\lambda} u_1(T_{-1}, T_0). \quad (11.3)$$

Производные по времени записываются (по член $\sim \lambda$) в виде

$$\frac{d}{dt} = \lambda \frac{\partial}{\partial T_{-1}} + \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad (11.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial T_{-1}^2} + 2\lambda \frac{\partial^2}{\partial T_{-1} \partial T_0}. \quad (11.5)$$

Подставим эти производные в уравнение и выделим члены при λ^2 и λ , т.е. в двух старших порядках:

$$\lambda^2 : \left(\frac{\partial^2}{\partial T_{-1}^2} + q(T_0) \right) u_0 = 0, \quad (11.6)$$

$$\lambda : \left(\frac{\partial^2}{\partial T_{-1}^2} + q(T_0) \right) u_1 = -2 \frac{\partial^2}{\partial T_{-1} \partial T_0} u_0. \quad (11.7)$$

Решение первого уравнения записывается в виде

$$u_0 = A(T_0) \exp\{\sqrt{-q(T_0)}T_{-1}\} + B(T_0) \exp\{-\sqrt{-q(T_0)}T_{-1}\} \quad (11.8)$$

Подставим (11.8) в уравнение (11.7). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_{-1}^2} u_1 + q(T_0)u_1 = \\ -2[(\sqrt{-q}A)' + (\sqrt{-q})' T_{-1}\sqrt{-q}A]e^{\sqrt{-q}T_{-1}} + 2[(\sqrt{-q}B)' - (\sqrt{-q})' T_{-1}\sqrt{-q}B]e^{-\sqrt{-q}T_{-1}}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

где штрих обозначает дифференцирование по T_0 . Такой вид правой части может привести к появлению секулярных членов вида $T_{-1} \exp\{\pm\sqrt{-q(T_0)}T_{-1}\}$, а также $(T_{-1})^2 \exp\{\pm\sqrt{-q(T_0)}T_{-1}\}$. Условие отсутствия секулярных членов есть $A \equiv 0$ и $B \equiv 0$. Таким образом, анзац (11.3) оказывается непригодным. Чуть позже мы поймем почему.

Структура ВКБ–приближения

Будем искать одно из решений уравнения (11.1) в виде

$$u = \exp\{\lambda G(t, \lambda)\}, \quad (11.10)$$

$$G(t, \lambda) = G_0(t) + \lambda^{-1}G_1(t) + \lambda^{-2}G_2(t) + \dots \quad (11.11)$$

Сразу заметим, что общее решение уравнения (11.1) не удастся выразить в виде (11.10), зато можно будет так записать два линейно–независимых решения, а затем представить общее решение как их линейную комбинацию.

Ограничимся двучленным разложением для G , т.е. членами с G_0 и G_1 . Запишем производные

$$\dot{u} = \lambda \frac{\partial G}{\partial t} e^{\lambda G}, \quad (11.12)$$

$$\ddot{u} = \left[\lambda^2 \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)^2 + \lambda \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \right] e^{\lambda G}, \quad (11.13)$$

Подставляя вторую производную в уравнение, сокращая на экспоненту и собирая члены при старших степенях λ , получаем

$$\lambda^2 : (G'_0)^2 + q = 0, \quad (11.14)$$

$$\lambda : 2G'_0 G'_1 + G''_0 = 0, \quad (11.15)$$

Первое уравнение имеет два решения:

$$G_0(t) = \pm \int^t \sqrt{-q(\tau)} d\tau. \quad (11.16)$$

Рассмотрим второе уравнение. Перепишем его в виде

$$G_1' = -\frac{1}{2} \frac{G_0''}{G_0'} \left(= -\frac{1}{2} (\ln(G_0'))' \right). \quad (11.17)$$

Таким образом,

$$G_1 = C - \ln((-q)^{1/4}) \quad (11.18)$$

Выпишем окончательное решение уравнения (11.1):

$$u(t) = \frac{C_1 \exp\{\lambda \int^t \sqrt{-q(\tau)} d\tau\} + C_2 \exp\{-\lambda \int^t \sqrt{-q(\tau)} d\tau\}}{(-q(t))^{1/4}}. \quad (11.19)$$

Здесь C_1 и C_2 — некоторые константы.

Аббревиатура “ВКБ” расшифровывается как Вентцель–Крамерс–Бриллюэн.

Попытаемся понять, почему не работает метод многих масштабов. Рассмотрим выражение (11.8) и сравним его с решением (11.19). Покажем, что экспоненты в (11.19) не могут быть представлены в виде (11.8). Действительно, возможность их представить в таком виде будет означать, что например функция

$$T_{-1} \sqrt{-q(T_0)} - \lambda \int^t \sqrt{-q(\tau)} d\tau$$

не является быстрой функцией времени. А она таковой является при любом непостоянном множителе q .

Понятие точки поворота

В области, где коэффициент $q(t)$ положителен, два линейно-независимых решения уравнения (11.1) представляют (согласно формуле (11.19)) осцилляции с медленно меняющейся амплитудой. Если считать t пространственной координатой, то решения представляют собой волны, бегущие вправо и влево. Если в некоторой области коэффициент $q(t)$ отрицателен, то решения представляют собой экспоненциально растущее и экспоненциально убывающее решение. В области, где коэффициент $q(t)$ близок к нулю, формула (11.19) просто не работает. Точка, в которой $q = 0$, называется *точкой поворота*.

Будем считать t пространственной переменной и рассмотрим некоторую (достаточно обширную) область, в которой (непрерывная функция) $q(t)$ пересекает ноль один раз. Пусть на левой границе области $q > 0$, а на правой границе $q < 0$. Внутри области есть единственная точка поворота t_* .

Пусть граничное условие на правой границе представляет собой условие убывания, т.е. из пары решений выбирается только экспоненциально убывающее. В этом случае решение в области представляется при $t < t_*$ суммой волн, бегущих вправо и влево, а при $t > t_*$ единственной убывающей волной. Это

можно рассматривать как процесс отражения волны, бегущей вправо, от точки поворота. Нашей целью будет описание точки поворота как отражателя волн.

Прежде всего, выясним, в какой области t_* нельзя пользоваться формулой (11.19). Будем считать, что в окрестности $t = t_*$ функция q хорошо аппроксимируется линейной:

$$q(t) \approx \alpha(t_* - t), \quad (11.20)$$

где α — некоторый коэффициент порядка единицы.

Критерием того, что анзац (11.10), (11.11) перестает работать, будем считать то, что члены G_0 и λG_1 становятся одного порядка. При этом удобнее сравнивать не сами члены, а их производные. Очевидно,

$$G'_1 = -\frac{1}{2} \frac{G''_0}{G'_0} = -\frac{1}{4} \frac{q'}{q}.$$

Пользуясь тем, что $G'_0 = \sqrt{-q}$, получаем, что анзац работает лишь при

$$4\lambda\alpha^{1/2}|t - t_*|^{3/2} \gg 1. \quad (11.21)$$

Если это неравенство не выполняется, то формулами (11.19), полученными с помощью рассмотренного анзаца, пользоваться нельзя.

Отражение от точки поворота. Рассмотрение при помощи функции Эйри

Будем рассматривать уравнение в трех областях:

$$I: \quad t < t_* - D,$$

$$II: \quad t > t_* + D,$$

$$III: \quad t_* - D < t < t_* + D,$$

$$D = (4\lambda\sqrt{\alpha})^{-2/3}.$$

В первой области можно пользоваться решением (11.19). Запишем его в виде

$$u_I(t) = \frac{\exp\{i\lambda \int_{t_*}^t \sqrt{q(\tau)} d\tau\} + R \exp\{-i\lambda \int_{t_*}^t \sqrt{q(\tau)} d\tau\}}{q(t)^{1/4}}. \quad (11.22)$$

В этом решении будем полагать, что первый член представляет собой падающую на точку поворота волну, а второй — отраженную. Будем считать, что падающая волна имеет единичную амплитуду. Коэффициент R в этом случае имеет смысл коэффициента отражения. Наша цель будет состоять в том, чтобы его найти.

Во второй области решение запишем в виде убывающей волны

$$u_{II}(t) = T \frac{\exp\{-\lambda \int_{t_*}^t \sqrt{-q(\tau)} d\tau\}}{(-q(t))^{1/4}}. \quad (11.23)$$

Коэффициент T представляет собой коэффициент прохождения.

Нужно отметить, что для устранения неопределенности нижний предел интегрирования в (11.22) и (11.23) выбран в точке t_* .

Изложенная теория пока не позволяет нам найти коэффициенты R и T . Чтобы это сделать, построим решение в третьей области u_{III} , причем для этого не будем использовать ВКБ приближение. Затем расширим области применимости решения в третьей области за ее пределы, и попытаемся “срастить” первое решение со вторым, а второе — с третьим. В процессе сращивания найдутся коэффициенты R и T .

Сам процесс сращивания решений выглядит следующим образом. Строятся асимптотики решения u_{III} , которые совпадают с ВКБ-асимптотиками (11.22) и (11.23) с точностью до постоянных коэффициентов. Сращивание и заключается в подборе этих коэффициентов.

Итак, займемся построением приближенного решения в третьей области. Будем считать, что коэффициент имеет вид

$$q = -\alpha(t - t_*). \quad (11.24)$$

Решение этого уравнения выражается в виде линейной комбинации функций Эйри (которые являются решениями уравнения Эйри (4.18)):

$$u_{III} = a \cdot \text{Ai}(z) + b \cdot \text{Bi}(z). \quad (11.25)$$

Здесь

$$z = \alpha^{1/3} \lambda^{2/3} (t - t_*) \approx -\alpha^{-2/3} \lambda^{2/3} q(t). \quad (11.26)$$

Коэффициенты a и b пока не определены.

Обратимся к асимптотикам функций Эйри. Эти асимптотики могут быть получены из интегральных представлений, но мы здесь просто возьмем из справочника. В области положительных $z \gg 1$ асимптотики (их первые члены) имеют вид

$$\text{Ai}(z) \approx \frac{\exp\{-\frac{2}{3}z^{3/2}\}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}, \quad (11.27)$$

$$\text{Bi}(z) \approx \frac{\exp\{\frac{2}{3}z^{3/2}\}}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}. \quad (11.28)$$

При отрицательных $z \ll -1$ имеют место асимптотики

$$\text{Ai}(-z) \approx \frac{\sin\{\frac{2}{3}z^{3/2} + \pi/4\}}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}, \quad (11.29)$$

$$\text{Bi}(-z) \approx \frac{\cos\{\frac{2}{3}z^{3/2} + \pi/4\}}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}. \quad (11.30)$$

Будем считать доказанным, что асимптотики (11.27)–(11.30) выполняются вне третьей области. Это достаточно тонкая теорема, которая включает оценку члена, порожденного следующим членом разложения $q(t)$ в ряд Тейлора вблизи $t = t_*$.

У нас имеются коэффициенты a, b, R, T , которые надо определить. Прежде всего, заметим, что $\text{Bi}(z)$ экспоненциально возрастает в области II. Поскольку такого члена в u_{II} нет, логично предположить, что $b = 0$. Далее, в той же области

$$a \cdot \text{Ai}(z) = a \frac{\exp\{-\frac{2}{3}\lambda\alpha^{1/2}(t - t_*)^{3/2}\}}{2\sqrt{\pi}(\lambda/\alpha)^{1/6}(-q)^{1/4}}. \quad (11.31)$$

Сравнивая данное выражение с асимптотикой (11.27), замечаем, что эти асимптотики совершенно одинаковы, если постоянные множители удовлетворяют соотношению

$$T = a \frac{\alpha^{1/6}}{2\sqrt{\pi}\lambda^{1/6}}. \quad (11.32)$$

Таким образом, нам удалось срастить асимптотики в областях II и III, и при этом мы избавились от двух неопределенных параметров.

Перепишем асимптотику (11.29):

$$a \cdot \text{Ai}(z) = a \frac{\exp\{i(\frac{2}{3}\lambda(t_* - t)^{3/2}\alpha^{1/2} + \frac{\pi}{4})\} - \exp\{-i(\frac{2}{3}\lambda(t_* - t)^{3/2}\alpha^{1/2} + \frac{\pi}{4})\}}{2i\sqrt{\pi}(\lambda/\alpha)^{1/6}q^{1/4}} \quad (11.33)$$

Сравнивая (11.33) с (11.22), получаем

$$-a \frac{\alpha^{1/6}e^{-i\pi/4}}{2i\sqrt{\pi}\lambda^{1/6}} = 1, \quad (11.34)$$

$$a \frac{\alpha^{1/6}e^{-i\pi/4}}{2i\sqrt{\pi}\lambda^{1/6}} = R, \quad (11.35)$$

откуда

$$R = e^{-i\pi/2}. \quad (11.36)$$

Это очень важная формула. Она означает, что отражению от точки поворота соответствует положительный набег фазы на $\pi/2$ или на четверть периода. Поясним, почему множитель $e^{-i\pi/2}$ соответствует положительному набегу фазы.

Рассмотрим более привычный случай, когда присутствует и пространственная и временная переменная, а именно пусть волна, распространяющаяся вправо, имеет вид $\exp\{i(\xi - \tau)\}$, где τ — время, а ξ — положение в пространстве. Заметим, что выше роль ξ играла переменная t . Положительный набег фазы на $\pi/2$ связан с увеличением времени на $\pi/2$, т.е. дается множителем $e^{-i\pi/2}$.

Из (11.34) и (11.32) нетрудно найти, что

$$T = e^{i\pi/4}. \quad (11.37)$$

“Дифференцирование” импульсного сигнала при отражении от точки поворота

Выясним, как ведет себя импульсный сигнал при увеличении фазы на $\pi/2$. Разумеется, можно говорить только об изменении фазы каждой из гармоник сигнала в его Фурье представлении.

Пусть имеется некоторый сигнал $u(\tau)$. Выполним преобразование Фурье по формуле

$$U(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (11.38)$$

Сигнал синтезируется из спектра по формуле

$$u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (11.39)$$

Увеличению фазы каждой из гармоник на $\pi/2$ соответствует преобразование спектра

$$U(\omega) \rightarrow -i \frac{\omega}{|\omega|} U(\omega) \quad (11.40)$$

(здесь мы используем тот факт, что гармоникам с отрицательными частотами соответствует множитель $e^{i\pi/2}$).

Заметим, что дифференцированию по времени соответствует преобразование

$$U(\omega) \rightarrow -i\omega U(\omega). \quad (11.41)$$

С точки зрения фазы эти преобразования сходны, поэтому имеются основания думать, что преобразование (11.40) действует в чем-то сходно с дифференцированием. На Рис. 11.1 и 11.2 показано, как оператор, описываемый в Фурье-представлении формулой (11.40), действует на импульсы в виде гауссианы и N-волны. На обоих рисунках штриховой линией обозначен исходный сигнал, а сплошной — результат действия оператора.

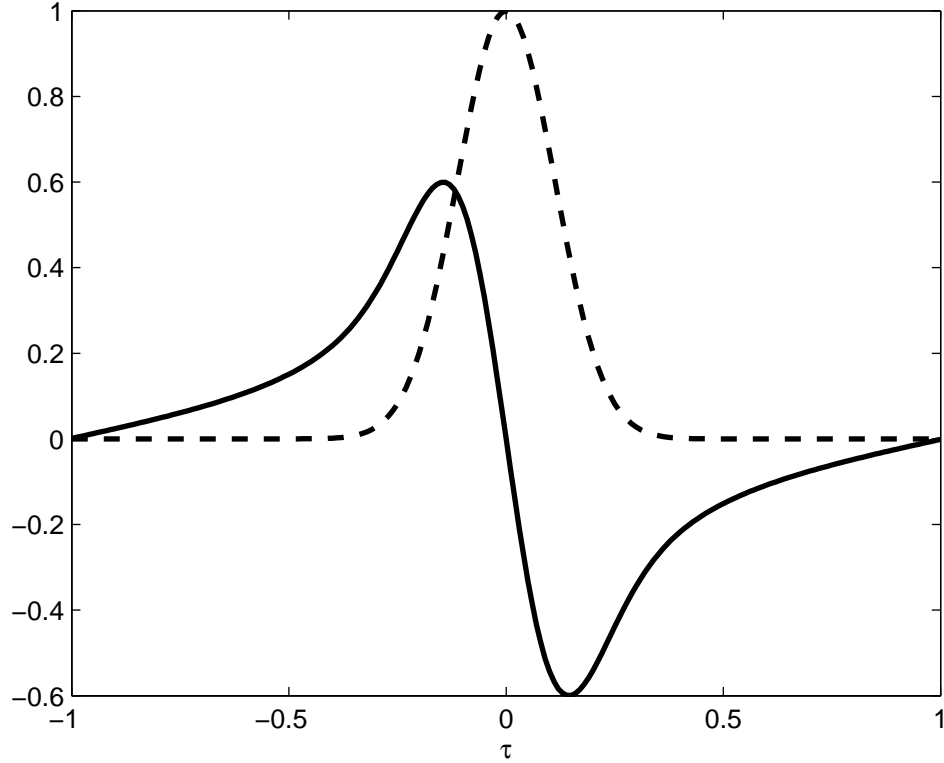


Рис. 11.1: Действие оператора (11.40) на сигнал в виде гауссианы

Из рисунков видно, что результат действия оператора действительно качественно повторяет дифференцирование. В частности, из N-волны получается так называемая U-волна. Конечно, это не совсем дифференцирование, но определенное сходство имеется.

Точка поворота и каустики

Продemonстрируем, каким образом точки поворота ВКБ-приближения появляются в акустике. Рассмотрим задачу о рефракции волн. Пусть волны распространяются в плоскости (x, y) . Пусть среда однородна вдоль оси x , а вдоль оси y имеет переменный показатель преломления. Для определенности положим, что скорость волн растет с y как

$$c^2(y) = \frac{c_0^2}{1 - \alpha y}. \quad (11.42)$$

Параметр α выберем достаточно малым (таким образом, чтобы в некоторой рассматриваемой области скорость не обращалась в бесконечность). Будем по-

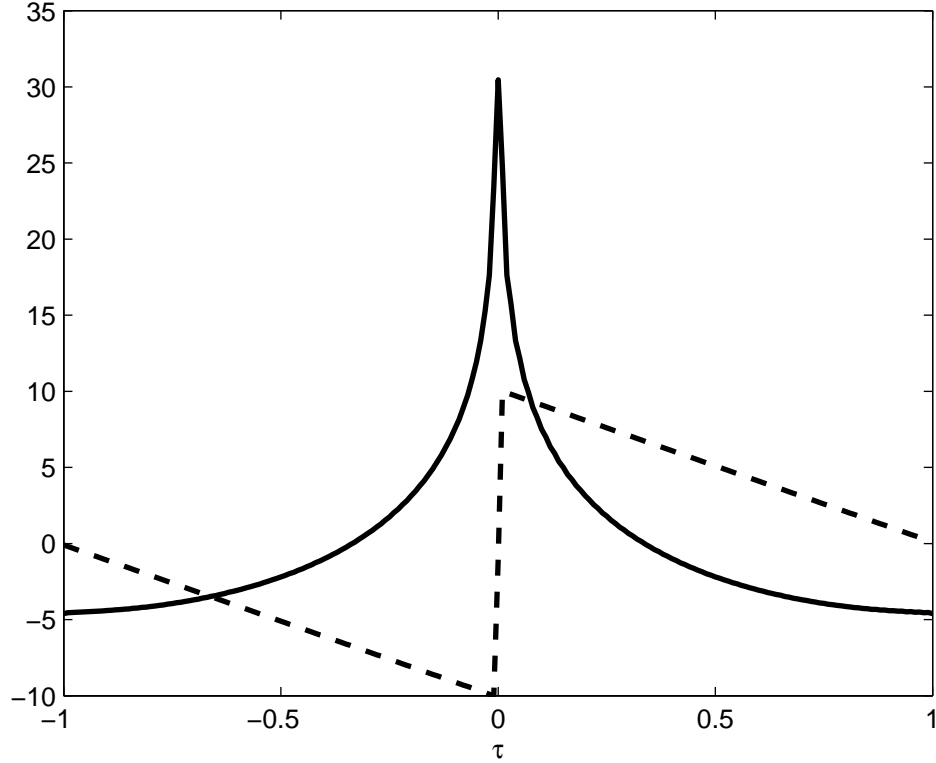


Рис. 11.2: Действие оператора (11.40) на сигнал в виде N-волны

лагать, что рассмотрение производится в полуплоскости $y > 0$, а при $y = 0$ находится твердая граница.

Волны на частоте ω в среде описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}(1 - \alpha y)u = 0. \quad (11.43)$$

Физически волны в такой среде испытывают рефракцию (см. Рис. 11.3). Именно этот процесс мы собираемся описать математически.

Запустим в среду семейство параллельных лучей, пересекающих ось x под углом ϕ . Зависимость поля от x будет иметь вид $\exp\{i\omega x \cos(\phi)/c_0\}$. Выделим эту зависимость явно и запишем поле в виде

$$u(x, y) = w(y) \exp\{i\omega x \cos(\phi)/c_0\}.$$

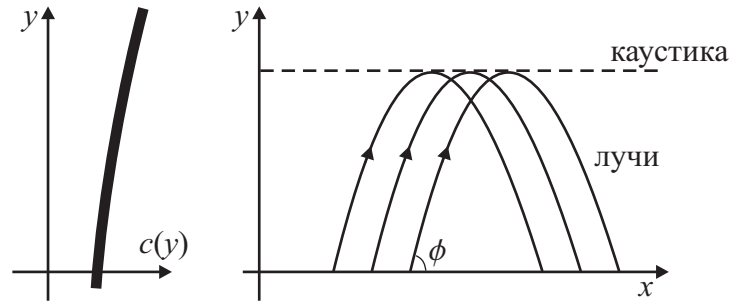


Рис. 11.3: Рефракция лучей и каустика

Для $U(y)$ выполняется уравнение

$$\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} (\sin^2 \phi - \alpha y) w = 0. \quad (11.44)$$

Рассмотрим высокочастотное приближение, т.е. будем считать величину ω/c_0 большим параметром. Заметим, что поскольку она не является безразмерной, необходимо сказать, по сравнению с чем эта величина является большой. Для этого лучше всего ввести безразмерные переменные с самого начала. Лучше всего это сделать таким образом, чтобы α и c_0 были в новых переменных равны единице. Заметим, что уравнение (11.44) имеет тот же вид, что (11.1), и все только что изложенное к нему относится. Таким образом, мы можем заключить про это уравнение, что

1. Точка поворота соответствует обращению в ноль коэффициента, т.е.

$$y_* = \sin^2 \phi / \alpha. \quad (11.45)$$

2. Ниже точки поворота решение имеет вид суммы волн, распространяющихся вверх и вниз. Эта сумма описывается асимптотикой (11.22).
3. Коэффициент отражения R в (11.22) равен $e^{-i\pi/2}$.
4. Выше точки поворота поле экспоненциально затухает и описывается формулой (11.23).
5. В окрестности точки поворота решение описывается функцией Эйри.

Линия $y = y_*$ является огибающей всего семейства лучей. Такая линия называется в геометрической оптике и акустике *каустикой*. Как мы видим, каустика описывается точкой поворота соответствующего уравнения. Оказывается, все

выведенные закономерности справедливы для отражения луча от каустики любой природы. В частности, лучи могут быть прямолинейными (это соответствует среде с постоянным показателем преломления), а волновая картина может быть сформирована зеркалами где-то в другой области (см. Рис. 11.4).

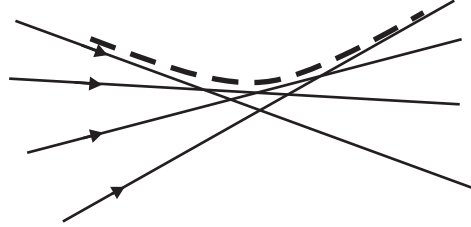


Рис. 11.4: Каустика в случае прямолинейных лучей

Волновод. Условия квантования

Рассмотрим систему, описанную выше, как волновод и найдем значения ϕ , соответствующие модам в этом волноводе. Для этого попытаемся построить решения уравнения (11.44), удовлетворяющие граничным условиям на поверхностях $y = 0$ и $y = y_*$. сами решения будем искать в виде (11.32). В качестве граничного условия при $y = 0$ возьмем $w' = 0$, что соответствует жесткой границе. При $y = y_*$ граничное условие выписывать не будем, а вместо этого будем использовать соотношение (11.36). Очевидно, уравнение имеет решение при условии

$$\exp \left\{ 2i \frac{\omega}{c_0} \int_0^{t_*} (\sin^2 \phi - \alpha y)^{1/2} dy - i\pi/2 \right\} = 1 \quad (11.46)$$

или

$$2i \frac{\omega}{c_0} \int_0^{t_*} (\sin^2 \phi - \alpha y)^{1/2} dy - i\pi/2 = 2\pi m. \quad (11.47)$$

Выражение (11.47) означает, что полный набег фазы вдоль оси y , включающий проходы от 0 до y_* и обратно, добавку $-i\pi/2$ на верхней границе и нулевую добавку на нижней границе, равен в сумме нескольким полным периодам.

Последнее соотношение и есть “условие квантования”, из которого можно найти значения ϕ_m , соответствующие волноводным модам. При этом необходимо помнить, что y_* также зависит от ϕ .

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Показать, что уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (11.48)$$

с помощью замены

$$y(x) = \Psi(x)u(x) \quad (11.49)$$

при подходящем $\Psi(x)$ сводится к уравнению

$$u'' + \left(q - \frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} \right) u = 0. \quad (11.50)$$

2. Пусть N -волна периодична с периодом 2π и задается на отрезке $(-\pi, \pi)$ функцией

$$u_N(\tau) = \begin{cases} (1 - \tau/\pi), & \tau > 0 \\ (-1 + \tau/\pi) & \tau < 0 \end{cases} \quad (11.51)$$

Эта функция представляется рядом Фурье вида

$$u(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-im\tau} \quad (11.52)$$

для некоторого набора коэффициентов a_m . U -волна задается формулой

$$u_U(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(-i \frac{m}{|m|} \right) a_m e^{-im\tau} \quad (11.53)$$

для того же набора коэффициентов. Найти асимптотику u_U вблизи точки $\tau = 0$.

3. Рассмотреть уравнение Шредингера с параболической потенциальной ямой

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 (A - x^2) u = 0. \quad (11.54)$$

При достаточно больших λ найти значения A , при которых существуют ограниченные на всей оси x решения. Сравнить полученные значения с известными из квантовой механики.

§12. Сингулярно–возмущенные задачи. Сращивание асимптотических разложений

Демонстрационный пример. Анализ

Пусть необходимо решить уравнение

$$\epsilon u'' + u' + u = 0 \quad (12.1)$$

для функции $u(x)$ на отрезке $x \in [0, 1]$ с неоднородными граничными условиями

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 1. \quad (12.2)$$

Как обычно, ϵ — малый параметр. Уравнение (12.1) имеет второй порядок, так что наличие пары граничных условий обосновано.

Задачи, у которых малый параметр стоит при старшей производной, называют *сингулярно возмущенными*. Такие задачи обладают рядом специфических свойств по сравнению с остальными задачами теории возмущений.

Сперва будем предполагать, что решение возмущенной задачи мало (на величину порядка ϵ) отличается от решения невозмущенной задачи. Положим $\epsilon = 0$ и рассмотрим невозмущенную задачу с уравнением

$$u' + u = 0. \quad (12.3)$$

У этого уравнения имеется решение $u = Ce^{-x}$, известное с точностью до одного коэффициента. Подбирая этот коэффициент, невозможно добиться, чтобы выполнялись оба граничных условия, даже если разрешено, чтобы эти условия выполнялись не точно, а приближенно. Таким образом, решить невозмущенную задачу в общем случае не представляется возможным. Причина этого ясна: при переходе к невозмущенной задаче порядок уравнения уменьшается на единицу, а количество граничных условий остается прежним.

Уравнение (12.1) выбрано таким образом, чтобы для него можно было построить точное решение. Построим его и попробуем понять, что происходит. Точное решение уравнения (12.1) имеет вид

$$u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (12.4)$$

где показатели $\lambda_{1,2}$ определяются из уравнения

$$\epsilon \lambda^2 + \lambda + 1 = 0, \quad (12.5)$$

а коэффициенты $C_{1,2}$ определяются из граничных условий.

Уравнение (12.4) имеет корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}. \quad (12.6)$$

Применяя формулы приближенных вычислений, получаем

$$\lambda_1 \approx -1, \quad \lambda_2 = -\epsilon^{-1} + 1. \quad (12.7)$$

Первый корень соответствует невозмущенному уравнению, а второй новый. Заметим, что второй корень является большим (он содержит малый параметр в минус первой степени). Соответствующее ему слагаемое представляет собой быстро убывающую экспоненту.

Решение уравнения (12.1) с граничными условиями (12.2) представляет собой сумму “обычной” и быстро убывающей экспонент. Его график для $\epsilon = 0.01$ показан на Рис. 12.1. Очевидно, почти везде решение мало отличается от решения невозмущенного уравнения, однако вблизи левого края интервала имеется область, в которой отличие сильно. В этой области работает быстро убывающая экспонента, обеспечивающая сопряжение невозмущенного решения и граничного условия. Эта область называется *пограничный слой*. Толщина пограничного слоя в данном случае имеет порядок ϵ^{-1} .

Демонстрационный пример. Сращивание асимптотических разложений

Продолжим исследование уравнения (12.1) с граничными условиями (12.2). Будем рассматривать решение в двух областях: “внешней” (там, где действует невозмущенное уравнение) и “внутренней” (там, где пограничный слой). В данном случае мы уже знаем, что пограничный слой примыкает к границе $x = 0$. В общем случае это приходится выяснять методом проб и ошибок. Внешнее решение будем обозначать $u^{(o)}$ (от “outer”), а внутреннее $u^{(i)}$ (от “inner”). В обоих случаях можно строить решения в виде рядов, например

$$u^{(o)} = u_0^{(o)} + \epsilon u_1^{(o)} + \epsilon^2 u_2^{(o)} + \dots$$

однако мы здесь ограничимся только старшими членами в обоих разложениях (опуская нулевой индекс).

Внешнее решение соответствует уравнению (12.3) и имеет вид

$$u^{(o)} = C e^{-x}. \quad (12.8)$$

Коэффициент C выбирается таким образом, чтобы выполнялось граничное условие при $x = 1$, т.е.

$$C = e. \quad (12.9)$$

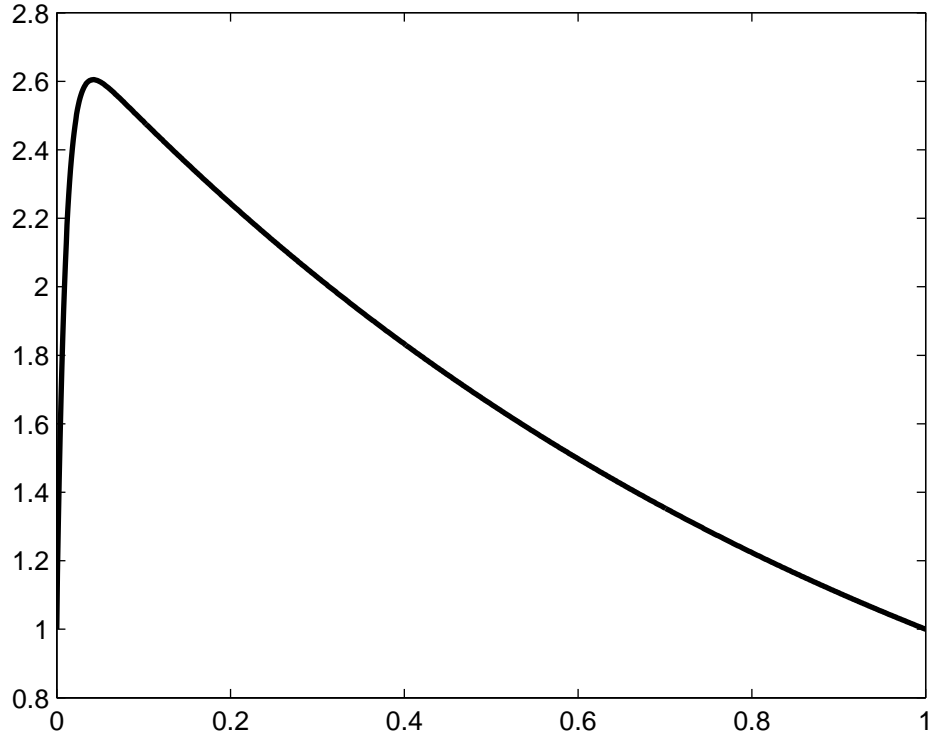


Рис. 12.1: График решения уравнения (12.1) с граничными условиями (12.2)

Обратимся к построению внутреннего решения. В соответствии с результатами предварительного анализа, в пределах погранслоя происходит быстрое изменение поля. Для нормального описания необходимо растянуть эту область, введя в пределах погранслоя внутреннюю переменную

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}. \quad (12.10)$$

Эта переменная в пределах погранслоя изменяется на величину порядка единицы.

Перепишем уравнение (12.1) в новой переменной. Заметим, что

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 u^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{du^{(i)}}{d\xi} + u^{(i)} = 0. \quad (12.11)$$

Выделим из этого уравнения старшие члены, т.е. члены, стоящие при ϵ^{-1} . Получим приближенное уравнение

$$\frac{d^2 u^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{du^{(i)}}{d\xi} = 0. \quad (12.12)$$

Общее решение того уравнения есть

$$u^{(i)} = A + De^{-\xi}. \quad (12.13)$$

Константы A и D выбираются так, чтобы, во-первых, выполнялось граничное условие $u^{(i)}(0) = 1$, а, во-вторых, внутреннее решение гладко переходило во внешнее на границе этих областей. Первое условие дает

$$A + D = 1. \quad (12.14)$$

Обратимся ко второму условию. Для его удовлетворения существует формальная процедура, называемая *сращиванием асимптотических разложений*. Она заключается в следующем. Строятся асимптотики внутреннего решения во внешней области и внешнего решения во внутренней области. Эти асимптотики обозначаются, соответственно, как $(u^{(i)})^{(o)}$ и $(u^{(o)})^{(i)}$. Затем налагается условие, чтобы старшие члены этих асимптотик совпадали:

$$(u^{(i)})^{(o)} = (u^{(o)})^{(i)}. \quad (12.15)$$

Это и есть условие сращивания асимптотик.

Асимптотика $(u^{(i)})^{(o)}$ строится в два шага. На первом шаге решение записывается через внешнюю переменную:

$$u^{(i)} = A + De^{-x/\epsilon}. \quad (12.16)$$

На втором шаге берется старший асимптотики этого решения при $\epsilon \rightarrow 0$ и фиксированном ненулевом x :

$$(u^{(i)})^{(o)} = A. \quad (12.17)$$

Аналогично, для построения $(u^{(o)})^{(i)}$ это решение выписывается через переменную ξ :

$$u^{(o)} = Ce^{-\xi\epsilon} \quad (12.18)$$

и берется старший член асимптотики при $\epsilon \rightarrow 0$ и фиксированном ξ :

$$(u^{(o)})^{(i)} = C. \quad (12.19)$$

Условие сращивания имеет вид

$$A = C.$$

Отсюда $A = e$, $D = 1 - e$. Ответ записывается в виде

$$u = u^{(o)} + u^{(i)} - (u^{(o)})^{(i)} = e^{1-x} - (e-1)e^{-x/\epsilon}. \quad (12.20)$$

Замечания

1. Мы воспользовались своим знанием о том, что пограничный слой находится вблизи левого конца интервала. С тем же успехом он мог оказаться и у правого края (или у каждого из краев). В общем случае приходится пробовать разные варианты, т.е. пытаться построить погранслоем у каждого из концов. Если он там строится, т.е. существует решение ведущее себя нужным образом, то он там и есть.
2. Вместо переменной (12.10) имеет смысл пробовать более общий вид

$$\xi = \frac{x}{\epsilon^\mu}. \quad (12.21)$$

Параметр μ подбирается таким образом, чтобы уравнение для внутреннего решения допускало решения в виде погранслоя.

Движение жидкости вблизи границы в случае малой вязкости

Рассмотрим практически важную задачу о формировании пограничного слоя в жидкости в окрестности твердой границы. Рассмотрим двумерную линейную задачу в плоскости (x, y) (см. Рис. 12.2). Пусть жидкость занимает верхнюю полуплоскость $y > 0$, а граница соответствует прямой $y = 0$. Будем описывать движение жидкости обычными переменными — давлением p и колебательной скоростью частиц $u = (u_x, u_y)$. Сперва выпишем уравнения для нестационарного случая, а затем зафиксируем частоту ω и перейдем к стационарной задаче.

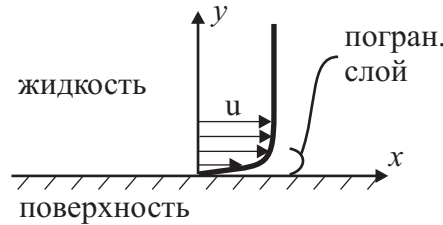


Рис. 12.2: Геометрия задачи о пограничном слое в жидкости

Рассмотрим движение невязкой жидкости. Как известно, такая жидкость описывается линеаризованными уравнениями гидродинамики: уравнением Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (12.22)$$

и уравнением непрерывности / состояния

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (12.23)$$

Здесь ρ и c — равновесные значения плотности и скорости звука в жидкости.

Граничное условие на линии $y = 0$ представляет собой условие непротекания жидкости сквозь поверхность:

$$u_y \Big|_{y=0} = 0. \quad (12.24)$$

При этом на компоненту u_x никаких условий не накладывается, то есть разрешается проскальзывание жидкости вдоль границы.

Теперь рассмотрим жидкость с малой вязкостью (тоже в линейном приближении). Заменяем уравнение Эйлера (12.22) на линейризованное уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left[-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right]. \quad (12.25)$$

Здесь ζ — коэффициент объемной вязкости, а η — коэффициент сдвиговой вязкости.

В случае малой вязкости жидкость “прилипает” к границе, поэтому граничное условие включает ограничение как на u_x , так и на u_y :

$$u_y \Big|_{y=0} = 0, \quad u_x \Big|_{y=0} = 0, \quad (12.26)$$

Коэффициенты ζ и η будем считать малыми (в каком смысле — укажем потом), причем одного порядка малости. Это можно выразить следующим образом:

$$\frac{\zeta}{\epsilon} \sim 1, \quad \frac{\eta}{\epsilon} \sim 1,$$

ϵ — малый параметр.

Заметим, что ситуация напоминает сингулярно-возмущенную задачу, рассмотренную в начале параграфа. Уравнение (12.25) (по сравнению с (12.22)) содержит более высокие производные \mathbf{u} . При этом добавляется еще одно граничное условие. На самом деле, наоборот, понятие пограничного слоя пришло из гидродинамики вязкой жидкости в остальные области механики и теории волн. Мотивирующей и направляющей задачей является как раз задача о движении жидкости с малой вязкостью вблизи границы.

Нетрудно видеть что уравнение (12.22) (вместе с граничным условием (12.24)) является по отношению к (12.25) невозмущенной задачей. Будем считать, что

эта задача как-то осмысленно поставлена, т. е. имеются, например, внешние силы, возбуждающие движение жидкости, и задано поведение при больших y и $|x|$. Предположим, что данная задача имеет однозначное решение. Построим это решение. Будем считать, что это решение есть *внешнее решение* по отношению к задаче, построенной на уравнении (12.25) с граничным условием (12.26), то есть это $u^{(o)}$ и $p^{(o)}$. Точнее, эти величины представляют собой старшие (по ϵ) члены внешнего разложения.

Построим теперь первые члены *внутреннего разложения* решения задачи (12.25), (12.26). Понятно, что пограничный слой будет находиться вблизи поверхности $y = 0$. Введем внутреннюю (растянутую) переменную вместо y :

$$\xi \equiv \frac{y}{\epsilon^\alpha}, \quad (12.27)$$

параметр α еще надо определить. Будем искать функции $u_x^{(i)}(x, \xi, t)$, $u_y^{(i)}(x, \xi, t)$, $p^{(i)}(x, \xi, t)$.

Распишем уравнения (12.25) и (12.23):

$$\rho \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial \xi^2} \right) + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial x \partial \xi} \right), \quad (12.28)$$

$$\rho \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial \xi} + \eta \left(\frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial \xi^2} \right) + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \left(\frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} \frac{\partial^2 u_y^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial x \partial \xi} \right), \quad (12.29)$$

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial t} = -\rho c^2 \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial \xi} \right). \quad (12.30)$$

Выберем $\alpha = 1/2$ и выпишем старшие члены в уравнениях (12.28), (12.29), (12.30). При этом будем учитывать, что ζ и η — величины первого порядка по ϵ :

$$\rho \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x} + \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial \xi^2}, \quad (12.31)$$

$$\frac{\partial p^{(i)}}{\partial \xi} = 0, \quad (12.32)$$

$$\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial \xi} = 0. \quad (12.33)$$

Попытаемся решить построенные уравнения. Из (12.33) следует, что $u_y^{(i)}$ не зависит от ξ . Условие сращивания асимптотических разложений, очевидно, имеет вид

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u_y^{(i)}(x, \xi, t) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y^{(o)}(x, y, t). \quad (12.34)$$

Следовательно,

$$u_y^{(i)} = u_y^{(o)}(x, 0, t). \quad (12.35)$$

Аналогично,

$$p^{(i)} = p^{(o)}(x, 0, t). \quad (12.36)$$

Представим $u_x^{(i)}$ в виде

$$u_x^{(i)}(x, \xi, t) = u_x^{(o)}(x, 0, t) + v(x, \xi, t). \quad (12.37)$$

Заметим, что из внешней задачи следует

$$\rho \frac{\partial u_x^{(o)}(x, 0, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p^{(o)}(x, 0, t)}{\partial x}.$$

Поэтому из (12.31) имеем

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \quad (12.38)$$

Перейдем к стационарной задаче. Пусть круговая частота равна ω , а зависимость всех величин от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$. Уравнение (12.38) перейдет в

$$-i\omega v = \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad (12.39)$$

Решение данного уравнения есть

$$v(x, \xi, t) = A(x)e^{-\xi\sqrt{\epsilon/\delta} - i\omega t} + B(x)e^{\xi\sqrt{\epsilon/\delta} - i\omega t}, \quad \delta \equiv \sqrt{\frac{i\eta}{\rho\omega}}. \quad (12.40)$$

Заметим, что по порядку малости $\delta \sim \sqrt{\eta} \sim \sqrt{\epsilon}$.

Величина δ имеет положительную мнимую часть, поэтому второй член экспоненциально растет с ξ . Такой член не может удовлетворять условиям сращивания асимптотических разложений. Поэтому $B(x) = 0$. Коэффициент $A(x)$ находится из граничного условия $u_x^{(i)} = 0$:

$$A(x) = -u_x^{(o)}(x, 0), \quad (12.41)$$

т. е. внутреннее решение (записанное для удобства в обычной переменной y) имеет вид

$$u_x^{(i)}(x, y) = u_x^{(o)}(x, 0)(1 - e^{-y/\delta})e^{-i\omega t}. \quad (12.42)$$

Величина $|\delta|$ представляет собой оценку толщины пограничного слоя.

Представленное рассуждение, несомненно, оставляет ряд вопросов. Например, это вопросы такие. Почему в качестве граничного условия невозмущенной

задачи выбирается первое условие (12.26), а не, например, второе? Почему параметр α равен $1/2$? Почему значения $p^{(i)}$, $u_x^{(i)}$, $u_y^{(i)}$ выбираются нулевого порядка малости, а не, например, минус первого?

На эти и подобные вопросы ответ всегда один. Мы попробовали все эти варианты и убедились, что они не приводят к осмысленным решениям. Схема использования метода сращивания асимптотических разложений предполагает либо априорное знание о поведении решения, либо перебор всех возможных моделей и оставление разумной.

Колебательное течение несжимаемой вязкой жидкости в трубе

В случае изначально несжимаемой жидкости уравнения упрощаются. Рассмотрим слой $0 < y < H$ с жесткими границами (см. Рис. 12.3). Пусть длина трубы равна L . На концах трубы заданы однородные по сечению значения давления $p_1 e^{-i\omega t}$ и $p_2 e^{-i\omega t}$.

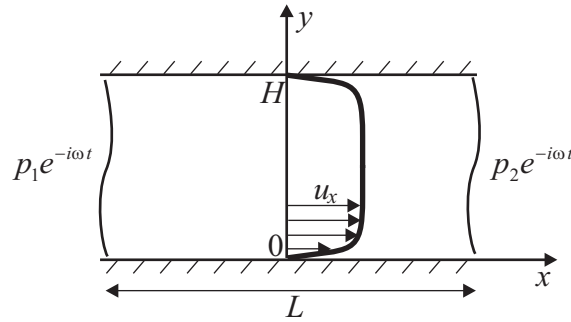


Рис. 12.3: Колебательное движение в трубе

Будем считать движение жидкости чисто продольным ($u_y = 0$). При этом компонента u_x будет зависеть только от y . Градиент давления постоянен во всей трубе и равен

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{L} e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Уравнение (12.25) запишется как

$$-i\omega u_x = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 u_x}{dy^2}. \quad (12.43)$$

(зависимость $e^{-i\omega t}$ опущена). Граничные условия есть

$$u_x(0) = u_x(L) = 0. \quad (12.44)$$

Внешняя задача представлено уравнением

$$-i\omega u_x^{(o)} = \frac{p_1 - p_2}{\rho L}. \quad (12.45)$$

без граничных условий. То есть

$$u_x^{(o)} = i \frac{p_1 - p_2}{\omega \rho L}. \quad (12.46)$$

Построим внутреннее решение вблизи $y = 0$. Введем растянутую переменную (12.27). Внутреннее уравнение имеет вид

$$-i\omega u_x^{(i)} = \frac{p_1 - p_2}{\rho L} + \frac{\eta}{\rho \epsilon^{2\alpha}} \frac{d^2 u_x^{(i)}}{d\xi^2}. \quad (12.47)$$

Выбор $\alpha = 1/2$ делается вполне понятным. При этом выборе уравнение становится наиболее “богатым” (в старшем порядке больше всего членов, а решение имеет вид пограничного слоя).

Общее решение (12.48) есть

$$u_x^{(i)} = i \frac{p_1 - p_2}{\omega \rho L} + A e^{-\xi \sqrt{\epsilon}/\delta} + B e^{\xi \sqrt{\epsilon}/\delta}. \quad (12.48)$$

Параметр δ определяется той же формулой, что и выше. Условие сращивания, как и раньше, имеет вид

$$\lim_{y \rightarrow 0} u_x^{(o)}(y) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} u_x^{(i)}(\xi). \quad (12.49)$$

Член с коэффициентом B растет при $\xi \rightarrow \infty$, поэтому он не может удовлетворять условию сращивания. Выбираем $B = 0$. Коэффициент A находится из граничного условия $u_x^{(i)}(0) = 0$:

$$u_x^{(i)} = i \frac{p_1 - p_2}{\omega \rho L} \left(1 - e^{-\xi \sqrt{\epsilon}/\delta}\right) = i \frac{p_1 - p_2}{\omega \rho L} \left(1 - e^{-y/\delta}\right). \quad (12.50)$$

Пограничный слой при $y = H$ строится аналогично.

Очевидно, построение внутреннего решения в случае несжимаемой жидкости не приводит к упрощению уравнения, а именно, уравнение (12.47) не проще и не сложнее, чем (12.43). В этом смысле данный пример несколько тривиален (в отличие от предыдущего). Единственное, в чем сращивание разложений позволяет упростить исходную задачу, это возможность не учитывать взаимное влияние пограничных слоев один на другой.

§13. Задачи к зачету

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Оценить интеграл при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. Оценить интеграл при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{-\lambda x} \sqrt{1-x^2} dx$$

3. Построить асимптотику функции ошибок

$$\operatorname{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$$

при больших действительных отрицательных z .

4. Функция Эйри $\operatorname{Ai}(z)$ определяется интегралом

$$\operatorname{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(t^3/3 + zt) dt$$

Найти ее асимптотики при больших положительных и больших отрицательных z .

5. Функция Эйри $\operatorname{Bi}(z)$ определяется интегралом

$$\operatorname{Bi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\exp(-t^3/3 + zt) + \sin(t^3/3 + zt)] dt$$

Найти ее асимптотики при больших положительных и больших отрицательных z .

6. Найти поправку к собственной частоте колебаний для нелинейного осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^5 = 0$$

при малом ϵ .

7. Записать укороченное уравнение и описать поведение системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \epsilon \operatorname{sign}(u) = 0,$$
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

при малом ϵ .

8. Записать укороченное уравнение и описать поведение системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \epsilon \operatorname{sign}(\dot{u}) = 0,$$
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

при малом ϵ .

9. Вывести и решить укороченные уравнения для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \epsilon (\dot{u})^3 = 0$$

при малом ϵ .

10. Вывести и решить укороченные уравнения для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \epsilon \dot{u} u^4 = 0$$

при малом ϵ .

11. Вывести укороченные уравнения и найти поправку к собственной частоте для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \epsilon (\dot{u})^2 u = 0$$

при малом ϵ .

- 12.** Исследовать особые точки уравнения (определить тип особых точек и найти показатели) для уравнения

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right) u = 0.$$

относительно функции $u(z)$.

- 13.** Решить краевую задачу для уравнения

$$\epsilon y'' + y' = 1$$

на отрезке $x \in [0, 1]$ с граничными условиями

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Здесь ϵ — малый параметр.

- 14.** Решить краевую задачу для уравнения

$$\epsilon y'' + y' = x$$

на отрезке $x \in [0, 1]$ с граничными условиями

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

Здесь ϵ — малый параметр.

- 15.** Рассматривается двумерная задача в плоскости (x, z) . Плоская волна вида e^{ikz} падает снизу на линзу широкой апертуры. В результате за линзой на линии $z = +0$ формируется поле

$$u_{\text{in}} = \exp\{-ikx^2/F\}.$$

Здесь F — фокусное расстояние. k — большой положительный параметр. Поле при $z > 0$ вычисляется с помощью приближенной формулы

$$u(X, Z) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} u_{\text{in}}(x, +0) dx,$$

где r — расстояние от точки наблюдения (X, Z) до вторичного источника $(x, +0)$.

Построить асимптотики поля на оси линзы (при $X = 0$) до фокуса (при $Z < F$) и после фокуса (при $Z > F$). На сколько изменяется фаза волны при прохождении фокуса?

16. Рассматривается трехмерная задача в пространстве (x, y, z) . Плоская волна вида e^{ikz} падает снизу на линзу широкой апертуры. В результате за линзой на линии $z = +0$ формируется поле

$$u_{\text{in}} = \exp\{-ik(x^2 + y^2)/F\}.$$

Здесь F — фокусное расстояние. k — большой положительный параметр. Поле при $z > 0$ вычисляется с помощью приближенной формулы

$$u(X, Y, Z) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{kr} u_{\text{in}}(x, y, +0) dx, dy$$

где r — расстояние от точки наблюдения (X, Y, Z) до вторичного источника $(x, y, +0)$.

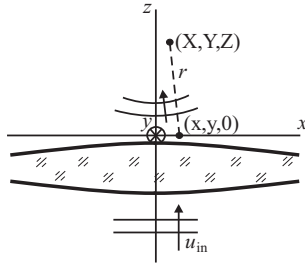


Рис. 13.1: Прохождение волны через линзу

Построить асимптотики поля на оси линзы (при $X = 0, Y = 0$) до фокуса (при $Z < F$) и после фокуса (при $Z > F$). На сколько изменяется фаза волны при прохождении фокуса?

17. Решить краевую задачу для уравнения

$$\epsilon y'' + iy = 1, \quad y = y(x)$$

на отрезке $x \in [-1, 1]$ с граничными условиями

$$y(-1) = y(1) = 0.$$

Здесь ϵ — малый положительный параметр.

18. Оценить значение интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-1}^2 \cos(\lambda \cos x) dx$$

при больших положительных λ .

19. Функция Бесселя задается интегралом

$$J_\nu(z) = \int_{\Gamma} \exp\{z \cos t + i\nu(t - \pi/2)\} dt.$$

Контур интегрирования показан на Рис. 13.2. Выписать асимптотику функции Бесселя при фиксированном ν и большом положительном z .

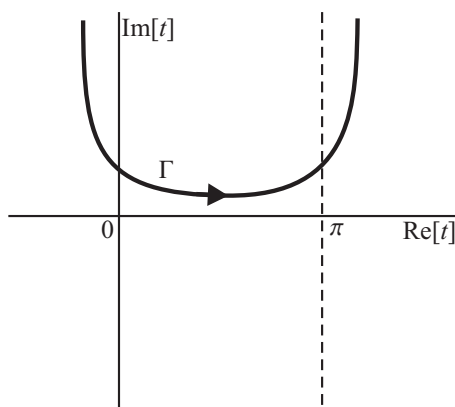


Рис. 13.2: Контур интегрирования для функции Бесселя

20. Волновод занимает область $y > 0$ на плоскости (x, y) . На границе $y = 0$ выполняется условие Неймана $\partial u / \partial y = 0$. Поле в волноводе описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2(1 - \alpha y)u = 0$$

Здесь k — большой параметр, а α — фиксированное положительное значение. Волноводные моды имеют вид $u(x, y) = e^{ik\gamma x} w(y)$, где γ — постоянная распространения. Найти приближенно значение γ_n для моды с большим номером n . Указание: свести задачу к исследованию поведения функции Эйри и воспользоваться асимптотикой

$$\text{Ai}(-z) = \frac{\sin(\frac{2}{3}z^{3/2} + \pi/4)}{\sqrt{\pi}z^{1/4}}.$$

Литература

1. А. Найфэ *Введение в методы возмущений*. М.: Мир, 1984, 532 с.
2. Ф. Олвер *Асимптотика и специальные функции*. М.: Наука, 1990, 528 с.
3. В. А. Фок *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. М.: Издательство ЛКИ, 2010, 520 с.