

Корольков Андрей Игоревич

**Новые решения двумерных задач дифракции  
акустических волн на периодических решетках из  
поглощающих экранов и на импедансной полосе**

Специальность: 01.04.06 – акустика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

Шанин Андрей Владимирович

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	21
<b>Глава 1. Постановка задач дифракции на поперечных экранах (вайнштейновских задач) в параболическом приближении</b> . . . . .	24
1.1. Вводные замечания к главе 1 . . . . .	24
1.2. Задача Л. А. Вайнштейна в точной и приближенных формулировках . . . . .	25
1.3. Краевая функция Грина и ее диаграмма направленности . . . . .	40
1.4. О формулах расщепления . . . . .	42
1.5. Основные результаты главы . . . . .	46
<b>Глава 2. Дифракционная решетка с экранами разной высоты. Метод формулы расщепления и спектрального уравнения</b> . . . . .	48
2.1. Вводные замечания к главе 2 . . . . .	48
2.2. Постановка задачи . . . . .	49
2.3. Краевые функции Грина . . . . .	50
2.4. Формула расщепления . . . . .	53
2.5. Спектральное уравнение . . . . .	54
2.6. ОЕ—обозначения . . . . .	56
2.7. ОЕ—уравнение . . . . .	57
2.8. Эволюционное уравнение 1 типа . . . . .	58
2.9. Эволюционное уравнение 2 типа . . . . .	61
2.10. Асимптотическая оценка коэффициента $R_0$ . . . . .	62
2.11. Оценка добротности резонаторов Фабри—Перо с помощью (2.94) . . . . .	64
2.12. Численное решение ОЕ—уравнения . . . . .	65
2.13. Основные результаты главы . . . . .	69
<b>Глава 3. Описание вайнштейновских задач в рамках метода Винера—Хопфа—Фока</b> . . . . .	70
3.1. Постановка задачи . . . . .	70
3.2. Вывод уравнений Винера—Хопфа—Фока . . . . .	72
3.3. Формальное решение функциональной задачи Винера—Хопфа—Фока . . . . .	75

3.4.	Исследование коэффициента отражения в предельном случае . . . . .	76
3.5.	Связь метода ОЕ—уравнения и метода Винера—Хопфа—Фока . . . . .	78
3.6.	Основные результаты главы . . . . .	80
<b>Глава 4.</b>	<b>Дифракция на импедансной полосе . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1.	Постановка задачи . . . . .	81
4.2.	Переход к параболическому приближению . . . . .	82
4.3.	Рассмотрение задачи с импедансными граничными условиями методом Г. Д. Малюжинца . . . . .	82
4.4.	Решение параболического уравнения . . . . .	83
4.5.	Вычисление диаграммы направленности в параболическом приближении . . . . .	85
4.6.	Оптическая теорема для параболической задачи . . . . .	86
4.7.	Поверхностная волна, бегущая вдоль отрезка . . . . .	89
4.8.	Случай идеальных граничных условий . . . . .	89
4.9.	Численная проверка формулы (4.28) . . . . .	91
4.10.	Рассмотрение задачи в точной постановке. Симметризация . . . . .	91
4.11.	Локальное поведение поля вблизи вершин . . . . .	93
4.12.	Вывод функциональной задачи Винера—Хопфа—Фока . . . . .	94
4.13.	Вспомогательные функциональные задачи Винера—Хопфа—Фока и формула расщепления . . . . .	99
4.14.	Формулировка матричной задачи Римана—Гильберта для вспомогательных функциональных задач . . . . .	103
4.15.	Семейство задач Римана—Гильберта . . . . .	108
4.16.	Вывод ODE1 . . . . .	112
4.17.	Численное решение ОЕ—уравнений . . . . .	116
4.18.	Основные результаты главы . . . . .	121
<b>Заключение</b>	. . . . .	<b>123</b>
<b>Список сокращений и условных обозначений</b>	. . . . .	<b>124</b>
<b>Приложение А. Формула расщепления для задачи дифракции на идеальной полосе</b>	. . . . .	<b>126</b>
<b>Приложение Б. Об эквивалентности многолистных поверхностей</b>	. . . . .	<b>132</b>

Приложение В. Вывод интегральных формул и теоремы взаимности для диаграмм направленности краевых функций Грина . . . . .	134
Приложение Г. Метод граничных интегральных уравнений . . . . .	138
Приложение Д. Условия излучения для параболического уравнения . . . . .	140
Приложение Е. Индекс задачи Римана—Гильберта . . . . .	141
Список литературы . . . . .	142

## Введение

**Цели и задачи диссертационной работы.** В данной работе рассмотрены некоторые двумерные задачи теории дифракции. А именно, рассмотрена задача дифракции на импедансном отрезке и задача дифракции высокочастотной волны на решетке, состоящей из периодически расположенных поглощающих экранов разной высоты.

В качестве цели настоящего исследования ставилось аналитическое и численное рассмотрение этих задач с помощью метода формулы расщепления, спектрального уравнения и ОЕ—уравнения, а также метода параболического уравнения. Основные задачи, которые решались в рамках поставленной цели, следующие:

1. Получение аналитического выражения для коэффициента генерации главного дифракционного максимума (коэффициента зеркального отражения) при дифракции высокочастотной плоской волны, на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты.
2. Построение численного алгоритма, позволяющего вычислять коэффициенты генерации всех дифракционных максимумов при дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты.
3. Установление связи между методом Винера—Хопфа—Фока, традиционно применяемым для решения задач дифракции на периодических решетках, и методом спектрального уравнения и ОЕ—уравнения.
4. Получение простого выражения для диаграммы направленности поля, рассеянного на импедансном отрезке, справедливого в параболическом приближении, т. е. при скользящем падении высокочастотной волны.
5. Исследование задачи дифракции на импедансном отрезке в точной постановке в рамках метода формулы расщепления и ОЕ—уравнения. Разработка на основе метода ОЕ—уравнения нового алгоритма численного решения задачи. ОЕ—уравнение – это метод, развитый в [1, 2].

### **Актуальность темы исследования.**

Задача дифракции на отрезке (см. Рис. 0.1) привлекает внимание исследователей уже более века. Данная задача является канонической задачей дифракции в том смысле, что ее решение может быть использовано как часть решения более сложной задачи, например,

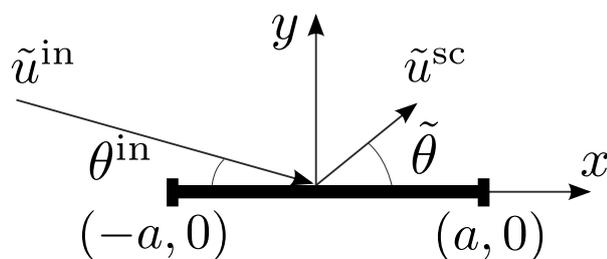


Рис. 0.1. Геометрия задачи дифракции на отрезке

в рамках методов геометрической теории дифракции (ГТД) и физической теории дифракции (ФТД) [3, 4], и, возможно [5]. Задача дифракции на отрезке с идеальными граничными условиями хорошо изучена и может считаться решенной [6]. К сожалению, отрезок с импедансными граничными условиями исследован в гораздо меньшей степени. Решение этой задачи до сих пор не найдено, а существующие методы трудоемки и зачастую опираются на численное решение соответствующих интегральных уравнений.

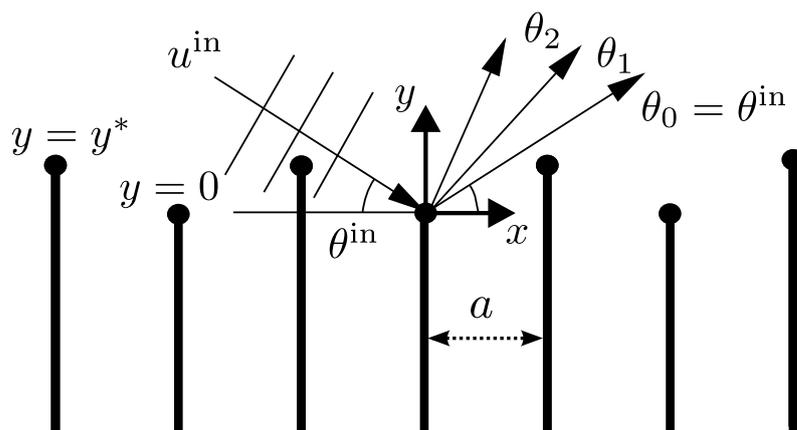


Рис. 0.2. Геометрия периодической решетки, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты

Задачи дифракции на периодических решетках, состоящих из полностью поглощающих экранов (на Рис. 0.2 изображен пример такой решетки), кажутся на первый взгляд экзотическими. Однако такие задачи имеют вполне конкретный физический смысл. Актуальность исследования данных периодических решеток была показана в работах [7, 8]. Классическая задача Л. А. Вайнштейна о дифракции на торце плоского волновода может быть сведена к задаче дифракции на решетке, состоящей из полубесконечных полностью поглощающих экранов [7]. В [8] был предложен алгоритм сведения акустических задач в любых открытых двумерных прямоугольных резонаторах к задачам дифракции на периодически расположенных, полностью поглощающих экранах. Такие задачи называются в работе *вайнштейнов-*

*скими.* Хорошо известно, что в рамках уравнения Гельмгольца не существует граничных условий, соответствующих полностью поглощающим экранам. В настоящем исследовании поглощающие экраны понимаются в смысле параболического приближения, в котором соответствующие граничные условия формулируются элементарно.

Задача дифракции на торце плоского волновода была решена Л. А. Вайнштейном с помощью метода Винера—Хопфа—Фока [9]. Для более глубокого понимания мотивации данного исследования остановимся на ключевом результате, полученном в [9]. Результат состоит в следующем. Высокочастотная мода (т. е. мода с длиной волны много меньшей ширины волновода) вблизи частоты отсечки имеет коэффициент отражения, близкий к  $-1$ . Отметим, что в терминах эквивалентной задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов, это значит, что волна, падающая на решетку, почти полностью от неё отражается. Этот результат является достаточно неожиданным, поскольку в торце волновода отсутствуют какие-либо структуры, способные обеспечить почти идеальное отражение. Напротив, интуитивно ожидается коэффициент отражения близкий к  $0$ , что соответствует выходу энергии волны из волновода в окружающее пространство. Близость коэффициента отражения к  $-1$  объясняет высокую добротность резонатора Фабри—Перо при отсутствии фокусирующих элементов. Возникает вопрос, будет ли коэффициент отражения в других близких задачах стремиться к  $-1$ ? К несчастью, решение, полученное методом Винера—Хопфа—Фока, не является физически прозрачным и ответ на этот вопрос не очевиден. Прямое обобщение метода Винера—Хопфа—Фока на более сложные задачи ведет к матричной задаче Винера—Хопфа—Фока, аналитическое решение которой зачастую не может быть найдено. В частности, в случае полубесконечного плоского волновода, состоящего из параллельных несимметричных неймановских стенок (см. Рис. 0.3), необходимо решать матричную задачу Винера—Хопфа—Фока размерности  $2 \times 2$ , не сводящуюся к известным задачам. Альтернативой в данном случае является рассмотрение эквивалентной задачи о дифракции на периодической решетке, состоящей из поглощающих экранов разной высоты (Рис. 0.2), к которой может быть применен метод формулы расщепления и спектрального уравнения. Таким образом, тему исследований можно считать актуальной.

### **Научная новизна.**

1. Выведена формула расщепления, спектральное уравнение и эволюционные уравнения для задачи дифракции на периодической решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты, в параболическом приближении.
2. Получена асимптотическая оценка коэффициента генерации главного дифракционного

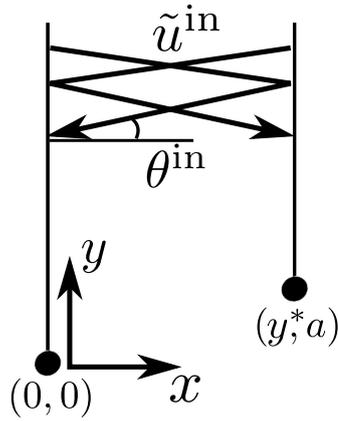


Рис. 0.3. Геометрия полубесконечного волновода, состоящего из параллельных несимметричных неймановских стенок

порядка (коэффициента зеркального отражения) при скользящем угле падения в задаче дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты.

3. Сформулировано ОЕ—уравнение для задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты. Предложен алгоритм численного решения ОЕ—уравнения.
4. Получено выражение для диаграммы направленности для задачи дифракции на импедансном отрезке в высокочастотном случае при скользящем падении. Сформулировано ОЕ—уравнение для задачи дифракции на импедансной полосе и предложен алгоритм его численного решения.

**Достоверность** результатов, относящихся к двумерным задачам дифракции, обеспечивается корректным использованием математического аппарата и численным сравнением с решениями соответствующих интегральных уравнений.

**Практическая значимость.**

Решение двумерной задачи дифракции на импедансном отрезке представляет практический интерес для радио- и гидролокации. Новое выражение для диаграммы направленности может быть использовано при решении задач дифракции на телах сложной формы, имеющих части в форме полосы или ленты в рамках методов ГТД и ФТД.

Поправка к  $-1$  для коэффициента генерации главного дифракционного порядка несет информацию о энергии, излученной из волновода. Последний факт имеет большое значение для расчета оптических и акустических плоскопараллельных резонаторов. В двумерном случае такие резонаторы могут быть представлены как отрезки плоского волновода, и с

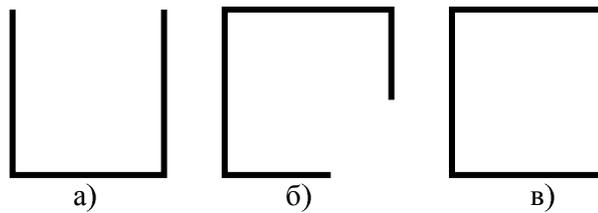


Рис. 0.4. Примеры открытых резонаторов. Стенки резонаторов являются идеальными

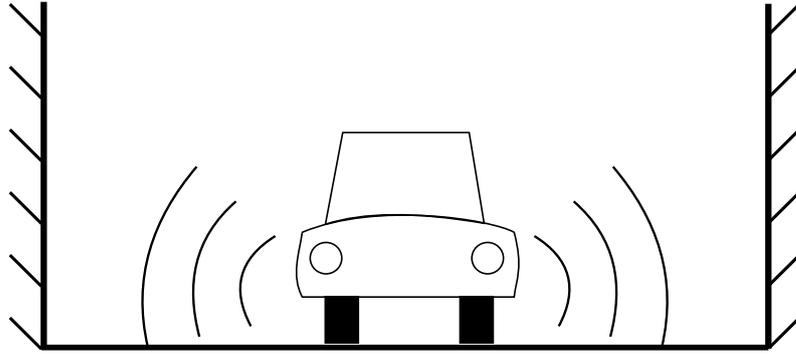


Рис. 0.5. Шумозащитные экраны на дороге как пример открытого акустического резонатора

помощью коэффициента генерации может быть вычислена добротность резонатора [10, 11].

Кроме того, задачи дифракции на решетках могут быть использованы для анализа двумерных плоских открытых резонаторов, например для анализа резонаторов, изображенных на Рис. 0.4. Конструкции, близкие к резонатору, изображенному на Рис. 0.4 а), могут встречаться на автомобильных шоссе. Действительно, в последнее время для изоляции автомобильного шума применяются шумозащитные отражающие экраны (см. Рис. 0.5). В сумме с поверхностью земли шумозащитные экраны образуют открытый резонатор, в котором могут возникать высокочастотные акустические колебания. Также в качестве открытых резонаторов могут рассматриваться комнаты с окнами, т. е. результаты, полученные в данном исследовании, имеют значение для архитектурной акустики, так как возникновение высокочастотных мод в комнатах может отрицательно сказаться на их акустическом качестве.

Помимо всего прочего, решетки, состоящие из поглощающих экранов, используются для снижения шума в помещениях (см. Рис. 0.6). В промышленной акустике такие решетки называются звукопоглотителями кулисного типа. Они обеспечивают большее поглощение, чем равномерно распределенный по поверхности помещения поглотитель, занимающий такую же площадь.

Метод ОЕ—уравнения, развитый для задачи дифракции на периодической решетке, состоящей из поглощающих экранов, и для задачи дифракции на импедансной полосе, пред-

### кулисные поглотители

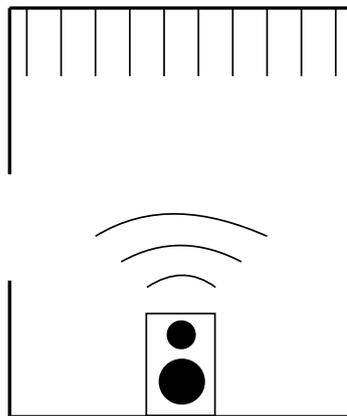


Рис. 0.6. Пример использования решетки из поглощающих экранов для снижения шума в помещении

ставляет собой альтернативу классическому методу Винера—Хопфа—Фока. ОЕ—формулировка является аналитическим результатом, который может быть использован для построения численных решений.

#### **На защиту выносятся следующие основные положения:**

1. Для задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты, справедлива формула расщепления, спектральное уравнение, эволюционное уравнение, ОЕ—уравнение.
2. Для задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты, справедливы полученные в работе эволюционные уравнения и асимптотическая формула для коэффициента генерации главного дифракционного максимума.
3. Коэффициент генерации главного дифракционного максимума в задаче дифракции высокочастотной плоской волны на решетке, состоящей из экранов разной высоты, стремится к  $-1$  при угле падения, стремящемся к  $0$ .
4. Для двумерной задачи дифракции на импедансном отрезке выполняются ОЕ—уравнения, полученные в работе.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. “Ломоносов 2013”, 8—13 апреля, Москва;
2. “Дни дифракции’13”, 27 мая—1 июня 2013, Санкт-Петербург;

3. XXVII Сессия Научного совета РАН по акустике и XXVII сессия Российского акустического общества, 16—18 апреля 2014, Санкт-Петербург;
4. 1-я Всероссийская акустическая конференция, 6—10 октября 2014, Москва;
5. “Дни дифракции’14”, 26—30 мая 2014, Санкт-Петербург;
6. “Волноводы: асимптотические методы и численный анализ”, 21—23 мая 2015, Неаполь, Италия;
7. “Дни дифракции’15”, 25—29 мая 2015, Санкт-Петербург,

а также на семинарах Санкт-Петербургского отделения математического института им. Стеклова РАН (руководитель проф. В. М. Бабич) и кафедры акустики физического факультета МГУ.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 14 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, 3 статьи в сборниках трудов конференций и 6 тезисов докладов.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 6 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, 6 приложений и библиографии. Общий объем диссертации 148 страниц, включая 49 рисунков. Библиография включает 110 наименований на 7 страницах.

**Методы диссертационного исследования.** Хорошо известно, что к задачам дифракции на идеальных объектах (на границах которых выполнены граничные условия Неймана или Дирихле) с относительно простой геометрией может быть применен метод отражений, и исходная задача может быть сведена к задаче дифракции на разветвленной поверхности. Впервые такой подход был применен А. Зоммерфельдом к задаче дифракции на полуплоскости [12]. Ему удалось получить решение в замкнутом виде. Позже метод отражений применялся к задаче дифракции на отрезке [13], клине [14–17], а также к другим двумерным задачам дифракции [18]. В главах 1 и 2 постановка задачи на разветвленной поверхности является первым подготовительным шагом.

Перейдем к примерам. В качестве простейшего примера рассмотрим двумерную задачу дифракции плоской волны на идеальном отрезке (см. Рис. 0.1). Разрезая физическую плоскость вдоль отрезка и склеивая с отраженным относительно оси  $y$  экземпляром, получим двухлистную поверхность с двумя точками ветвления (см. Рис. 0.7). Цифрами обозначены правила склейки листов (одноименные берега склеиваются друг с другом). Данная поверхность похожа по структуре на риманову поверхность функции  $\sqrt{z^2 - a^2}$ ,  $z = x + iy$ , однако в данном случае все переменные действительны. Как и в случае римановых поверхностей, разрезы разветвленных поверхностей можно непрерывно деформировать. Например, другое представление той же двухлистной поверхности изображено на Рис. 0.8.

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны на построенной поверхности. Пусть, для определенности, падающая волна существует только на первом листе. Обозначим решение данной задачи (имеется ввиду задача для уравнения Гельмгольца) символом  $\tilde{u}(x, y)$ , а решение исходной задачи для граничных условий Дирихле и Неймана символами  $\tilde{u}^D(x, y)$  и  $\tilde{u}^N(x, y)$  соответственно (постановка задач обсуждается в Главе 4). Тогда, если известно решение  $\tilde{u}(x, y)$ , решение исходных задач может быть получено с помощью следующей формулы:

$$\tilde{u}^{N,D}(x, y) = \tilde{u}(x, y) \pm \tilde{u}(x, -y). \quad (0.1)$$

Верхний знак соответствует граничным условиям Неймана, нижний – Дирихле. В Приложении А строится решение данной задачи в параболическом приближении с помощью метода метода формулы расщепления.

В качестве другого характерного примера рассмотрим задачу дифракции на торце полубесконечного волновода, изображенного на Рис. 0.9. Применим метод отражений. Разрежем волновод вдоль стенок, многократно отразим и склеим полученные поверхности. Продолжая данную процедуру, получим бесконечнолистную поверхность, изображенную на Рис. 0.10. Отметим, что число точек ветвления также бесконечно. Другое эквивалентное представление данной поверхности, которое может быть получено непрерывной деформацией разрезов, изображено на Рис. 0.11. Формальное доказательство эквивалентности этих поверхностей приводится в Приложении Б. Данная задача рассматривается в Главе 1. В Главе 2 рассматривается полубесконечный волновод со стенками разной высоты, разветвленная поверхность которого близка по структуре к поверхностям, изображенным на Рис. 0.10 и 0.11.

Наконец, приведем пример конечнолистной поверхности с бесконечным количеством точек ветвления. Рассмотрим плоский волновод с поперечной стенкой (Рис. 0.12). Применяя метод отражений к стенкам волновода, получим задачу дифракции на дифракционной решетке, состоящей из периодически расположенных отрезков одинаковой длины. Теперь,

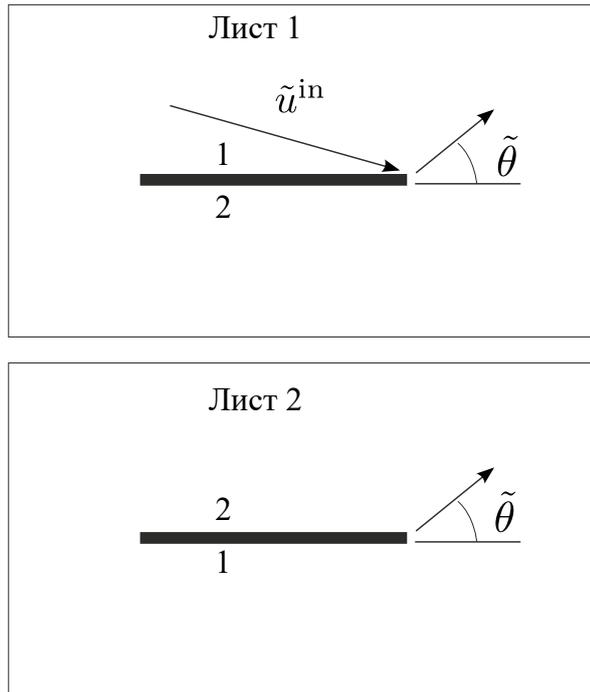


Рис. 0.7. Схема двухлистной поверхности

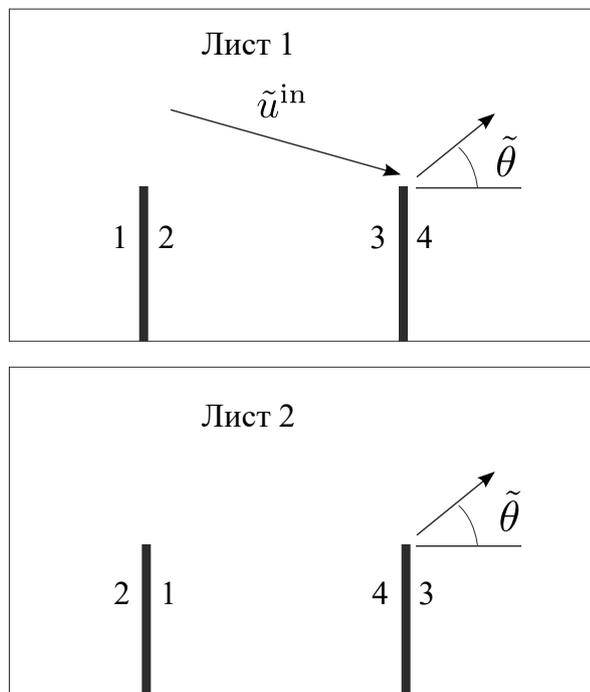


Рис. 0.8. Альтернативное представление двухлистной поверхности

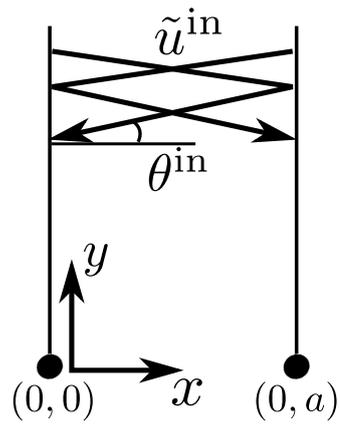


Рис. 0.9. Геометрия полубесконечного волновода

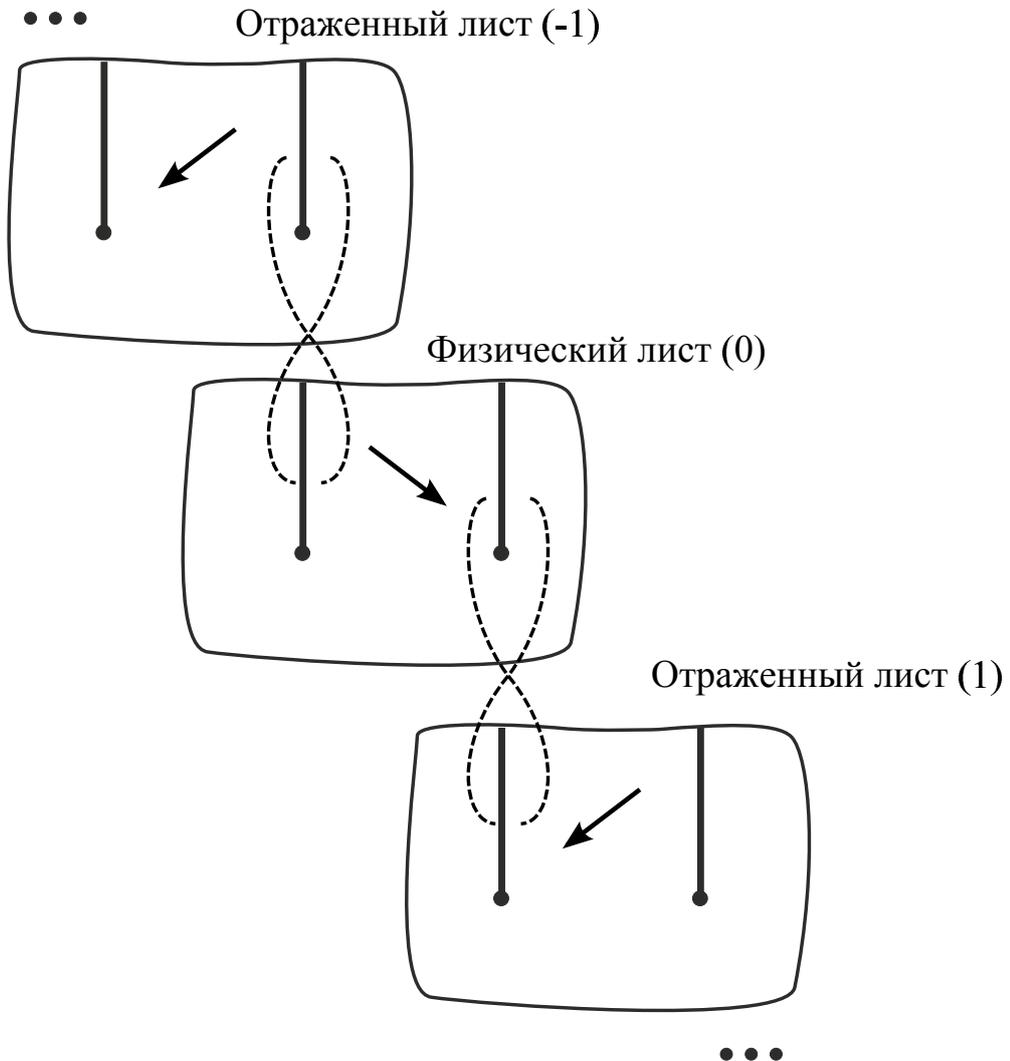


Рис. 0.10. Схема многолистной поверхности

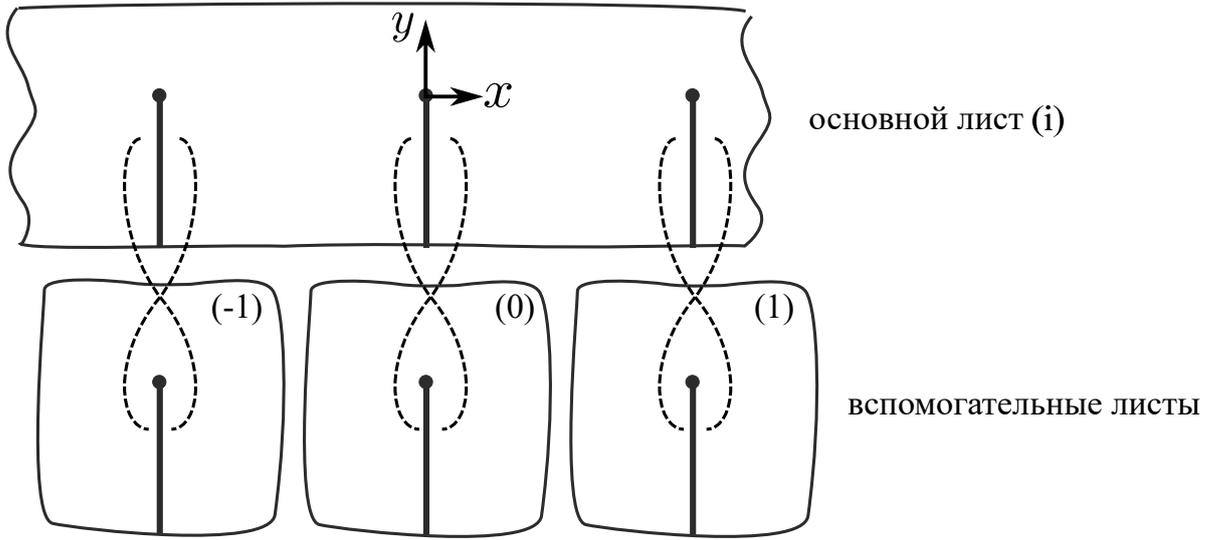


Рис. 0.11. Альтернативное представление многолистной поверхности

применяя метод отражений к отрезкам, получим задачу дифракции на двухлистной поверхности с бесконечным количеством точек ветвления (Рис. 0.13).

В диссертации используется метод параболического уравнения. Впервые параболическое уравнение для исследования задач дифракции было предложено М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком [19–23], а в применении к волноводным задачам данный метод был развит Л. А. Вайнштейном [24]. Во всех главах настоящей работы, кроме Главы 4, исследование производится в параболическом приближении. К сожалению, математически строгая постановка задач в параболическом приближении весьма затруднительна, и соответствующая теория параболического уравнения до сих пор не развита. Автор данного исследования не ставит перед собой цели вести изложение на математическом уровне строгости, напротив, придерживается уровня строгости физического. Остановимся на свойствах параболического уравнения. В данной работе используется следующее основное свойство. Будем рассматривать параболическое уравнение теории дифракции

$$\left(2ik_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0. \quad (0.2)$$

В данной работе считается, что в любой полосе  $x' < x < x''$  без препятствий и точек ветвления поле описывается интегральной формулой

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y') g(x - x', y - y') dy', \quad (0.3)$$

где  $g(x, y)$  – функция Грина параболического уравнения:

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi ix}} \exp\left\{\frac{ik_0 y^2}{2x}\right\}. \quad (0.4)$$

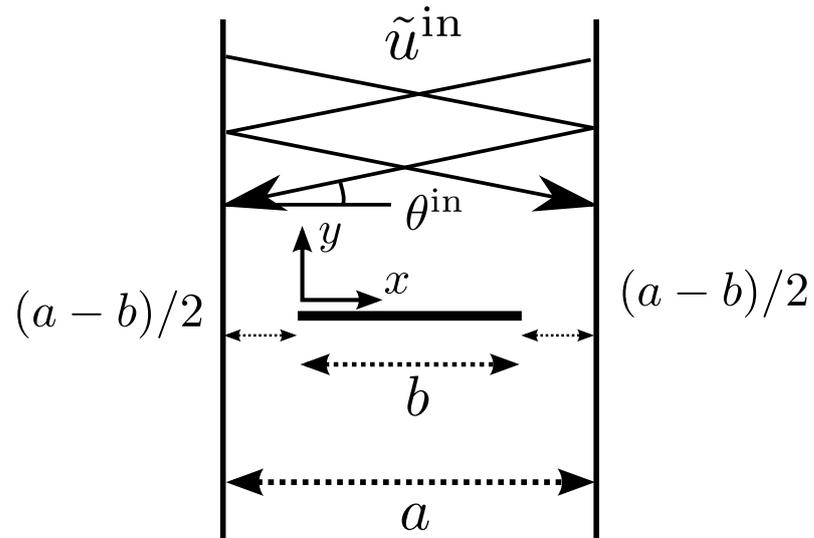


Рис. 0.12. Геометрия волновода с поперечной стенкой

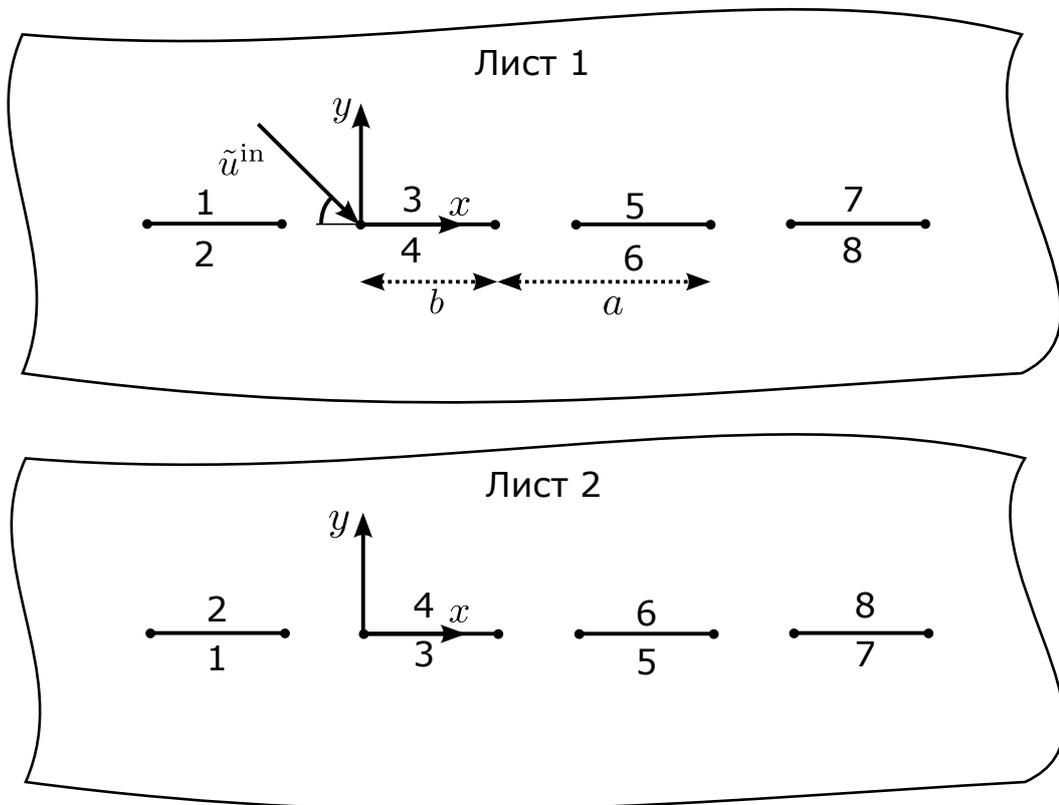


Рис. 0.13. Схема двухлистной поверхности с бесконечным количеством точек ветвления

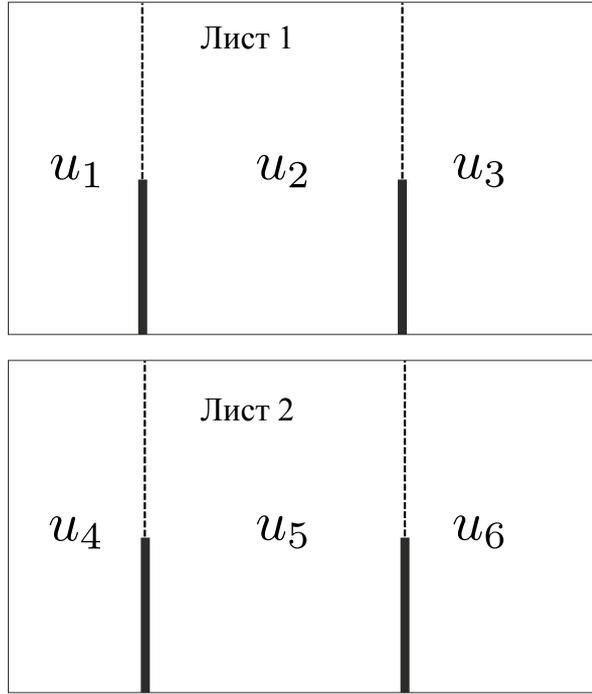


Рис. 0.14. Области определения полей  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$

В задачах на разветвленных поверхностях поверхность делится на полосы, в которых справедлива формула (0.3). Границами таких полос являются разрезы, поле на которых продолжается по непрерывности. Например, на поверхности, изображенной на Рис. 0.8, можно выделить шесть таких полос. Введем в каждой полосе поля  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ , как показано на Рис. 0.14. Таким образом, продолжая на разрезах поле по непрерывности, получим, что поле  $u_2$  связано с полями  $u_1$  и  $u_4$  следующей формулой:

$$u_2(x, y) = \int_0^{\infty} u_1(-a, y')g(x+a, y-y')dy' + \int_{-\infty}^0 u_4(-a, y')g(x+a, y-y')dy', \quad (0.5)$$

а поле  $u_5$  формулой:

$$u_5(x, y) = \int_0^{\infty} u_4(-a, y')g(x+a, y-y')dy' + \int_{-\infty}^0 u_1(-a, y')g(x+a, y-y')dy'. \quad (0.6)$$

Легко видеть, что полученное таким образом поле является кусочно-гладким на разветвленной поверхности. Подробно вопросы применимости параболического приближения обсуждаются в Главе 1.

Рассмотрим задачу для параболического уравнения на поверхности, изображенной на Рис. 0.11. Будем считать, что падающая волна существует только на одном листе. Тогда поле на правых берегах разрезов равно нулю по непрерывности (на вспомогательных листах поле

на левых берегах разрезов равно нулю), т. е. разрезы на основном листе ведут себя как полностью поглощающие экраны. Именно в таком смысле в данном исследовании понимаются полностью поглощающие экраны. Постановка задачи на системе полностью поглощающих экранах позволяет исключить анализ поля на вспомогательных листах.

После постановки задачи на разветвленной поверхности и перехода к параболическому приближению следующим подготовительным шагом является введение краевых функций Грина (КФГ). Краевые функции Грина являются удобным инструментом теории дифракции, см. например [25]. Будем вводить КФГ  $v(x, y)$  следующим образом. В области без препятствий поле КФГ равно полю функции Грина параболического уравнения (0.4), а после разрезов поле продолжается по формулам, аналогичным формулам (0.5) и (0.6). Поясним на примере поверхности, изображенной на Рис. 0.8. Пусть на листе 1 в точке  $(-a, 0)$ , находится источник амплитуды 1, а на втором листе в точке с теми же координатами – амплитуды  $-1$  (всегда считается, что источники находятся чуть правее точки ветвления). Аналогично Рис. 0.13 введем функцию Грина в полосах  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  Тогда имеем:

$$v_1(x, y) = 0, \quad v_4(x, y) = 0, \quad (0.7)$$

$$v_2(x, y) = g(x + a, y), \quad v_5(x, y) = -g(x + a, y) \quad (0.8)$$

$$v_3(x, y) = \int_0^{\infty} g(2a, y')g(x - a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^0 g(2a, y')g(x - a, y - y')dy', \quad (0.9)$$

$$v_6(x, y) = \int_{-\infty}^0 g(2a, y')g(x - a, y - y')dy' - \int_0^{\infty} g(2a, y')g(x - a, y - y')dy'. \quad (0.10)$$

Следующим шагом является введение диаграммы направленности краевой функции Грина. Существует два способа: естественный и интегральный. Естественный способ заключается в проведении прямой аналогии с классическим определением диаграммы направленности:

$$v(x, y) = V(\theta)g(x, y) + o((k_0x)^{-1/2}). \quad (0.11)$$

Здесь  $V(\theta)$  – диаграмма направленности. К сожалению, такое определение трудно обосновать в задачах дифракции на многолистных поверхностях с бесконечным количеством точек ветвления (см. Рис. 0.11 и 0.13). В этом случае в качестве определения берется интегральное соотношение, полученное с помощью теоремы Грина для параболического уравнения. Это соотношение связывает диаграмму направленности поля с интегралом от поля по поверхности «рассеивателя» (в данном случае роль «рассеивателей» выполняют разрезы разветвленной поверхности). Формулировка теоремы Грина для параболического уравнения и

вывод интегрального соотношения для разветвленных поверхностей, подобных поверхности, изображенной на Рис. 0.11, приводится в Приложении В.

Заключительным подготовительным шагом является вывод формулы расщепления, выражающей решение задачи для падающей плоской волны через решение задач для краевых функций Грина. Формула расщепления также является широко используемым инструментом в теории дифракции, так как зачастую задачи для краевых функций Грина проще, чем исходные [26]. Вывод формулы расщепления проводится в три шага. Во-первых, к полному полю  $u$  применяется оператор расщепления:

$$H = \left( \frac{\partial}{\partial y} + ik_0\theta^{\text{in}} \right). \quad (0.12)$$

Отметим, что в задаче для параболического уравнения с падающей плоской волной полное поле  $u$  может быть представлено в следующем виде:

$$u = u^{\text{sc}} + u^{\text{in}}, \quad (0.13)$$

где

$$u^{\text{in}} = \exp \left\{ -ik_0x(\theta^{\text{in}})^2/2 - ik_0y\theta^{\text{in}} \right\} \quad (0.14)$$

– падающая волна, а  $u^{\text{sc}}$  – рассеянное поле. Легко видеть, что оператор  $H[u]$  уничтожает падающую волну. Кроме того, оператор  $H[u]$  является оператором симметрии параболического уравнения. То есть  $H[u](x, y)$  также является решением. Однако при дифференцировании исходного поля по  $y$  в точках ветвления (напомним, что в этих точках поле является разрывным) появляются точечные источники. Во-вторых, применяется теоремы единственности (доказательство теоремы единственности для параболического уравнения приведено в Главе 1). В результате поле  $H[u](x, y)$  представляется в виде линейной комбинации функций Грина с некоторыми коэффициентами. В-третьих, эти коэффициенты вычисляются с помощью теоремы взаимности. Посредством представления (0.11) осуществляется переход от полей к диаграммам направленности. Приведем здесь формулу расщепления для задачи дифракции на разветвленной поверхности, изображенной на Рис. 0.8:

$$S(\theta, \theta^{\text{in}}) = \frac{\exp\{ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2\}V(\theta) + \exp\{ik_0a\theta^2/2\}V(\theta^{\text{in}})}{ik_0(\theta + \theta^{\text{in}})}, \quad (0.15)$$

где введена диаграмма направленности рассеянного поля  $u^{\text{sc}}$  по формуле:

$$u^{\text{sc}}(x, y) = S(\theta, \theta^{\text{in}})g(x, y) + o((k_0x)^{-1/2}), \quad (0.16)$$

а  $V(\theta)$  – диаграмма направленности краевой функции Грина  $v(x, y)$  (см. (0.11)). Таким образом, как и было отмечено выше, формула расщепления (0.15) связывает решение исходной

задачи (задачи с падающей плоской волной) и решение задачи для краевой функции Грина. Фактически, формулы (0.15), (0.7-0.10) и (0.1) дают решение задачи дифракции на идеальной полосе в параболическом приближении.

После того как сделаны все подготовительные шаги и формула расщепления получена, остается решить задачи для краевых функций Грина. Для этого используется метод спектрального, эволюционного и ОЕ—уравнений. Подробное обсуждение этих методов проводится в Главе 2.

В главе 4 с помощью схожего набора методов рассматривается задача дифракции на полосе с импедансными граничными условиями в точной постановке (для уравнения Гельмгольца).

## Обзор литературы

Для двумерной задачи дифракции на отрезке хорошо исследован лишь случай полосы с идеальными граничными условиями (Дирихле или Неймана). Данная задача впервые была решена методом разделения переменных в эллиптических координатах. Решение было представлено в виде ряда по функциям Матье [27, 28]. К сожалению, в высокочастотном случае данное решение неэффективно, из-за медленной сходимости ряда. В некоторых других задачах проблема медленной сходимости ряда преодолевалась с помощью преобразования Ватсона [29, 30]. Автору настоящей работы неизвестны какие либо результаты в этом направлении в отношении задачи дифракции на полосе.

Было предпринято большое количество попыток получить решение задачи дифракции на отрезке, аналогичное решению Зоммерфельда для полуплоскости [12]. Они подробно изложены в обзоре [13]. К несчастью, для данной задачи подход Зоммерфельда, заключающийся в рассмотрении задачи дифракции на двухлистной поверхности, не может быть успешно применен. Несмотря на это, в параболическом приближении подход Зоммерфельда позволяет легко и быстро получить ответ. Это демонстрируется в Приложении А. Отметим, что впервые задача дифракции на идеальной полосе рассматривалась в параболическом приближении в [31].

Эффективным с практической точки зрения в высокочастотном случае является подход на основе дифракционного ряда [32–38]. Дифракционный ряд в наиболее общем виде получен в [18]. Также приближенные результаты могут быть получены с помощью геометрической теории дифракции [39–42]. Следует отметить подход П. Я. Уфимцева [43–45, 45, 46], базирующийся на схожих идеях.

Наиболее полное асимптотическое рассмотрение задачи дифракции на идеальной полосе дано в [5, 47]. В [5, 47] изучается дифракция плоской волны со ступенчатым профилем. Решение дается в замкнутой форме для любого дифракционного порядка. К сожалению, чтобы получить решение стационарной задачи, необходимо провести суммирование по всем дифракционным порядкам.

Важные с математической точки зрения результаты были получены в [6, 48, 49]. В этих работах задача дифракции на идеальной полосе сводится к конфлюентному уравнению Гойна. Таким образом, данную задачу можно считать решенной хотя бы в математическом смысле. Результаты, полученные в [6], развиты в [25, 50, 51].

Задача дифракции на импедансном отрезке до сих пор не решена. Данная задача не может быть решена методом разделения переменных, поэтому в случае низких частот необ-

ходимо решать задачу для пары интегральных уравнений [52, 53]. В высокочастотном случае может быть применен метод дифракционного ряда [54, 55]. Также для решения задачи дифракции на импедансном отрезке могут быть использованы так называемые гибридные техники, сочетающие в себе аналитический и численный подходы [56–58]. В некоторых случаях гибридные техники позволяют существенно ускорить процедуру численного решения задачи. Кроме того, может быть применен метод приближенной факторизации [59, 60]. В [61] данная задача рассматривается в рамках модифицированной теории физической оптики. Аналитическая теория рассеяния на импедансном отрезке далека от завершения.

Одним из основных методов диссертационного исследования является метод формулы расщепления. Формула расщепления выражает решение исходной задачи через комбинацию решений более простых – эталонных задач. Впервые формула расщепления для идеальной полосы была получена в работе [6]. В работах [62–64] формула расщепления была получена для задачи дифракции поверхностных волн на периодически расположенных волнорезах одинаковой длины. Существенное развитие метода формулы расщепления в применении к двумерным задачам дифракции на кусочно-плоских рассеивателях было достигнуто в работах [25, 50, 51, 65–74], собранных в [75]. Стоит отметить, что формула расщепления может быть использована для исследования некоторых трехмерных задач дифракции [76–78].

Перейдем к рассмотрению работ, касающихся задач дифракции в открытых волноводах и открытых резонаторах. Простейшим примером задач этого класса является задача дифракции на торце плоского полубесконечного волновода. Точное решение этой задачи было получено в [9, 79, 80], с помощью скалярного метода Винера–Хопфа–Фока. Позже был исследован волновод круглого сечения [81–83]. Другой, более простой с практической точки зрения подход используется в работе [84], посвященной плоскому резонатору Фабри–Перо. В данной работе в рамках приближения Киргхофа была получена пара интегральных уравнений, которые впоследствии решались численно. В работах [85–87] проводится рассмотрение задачи дифракции на торце плоского волновода в рамках равномерной асимптотической теории (UAT). Кроме того, в рамках лучевого приближения были исследованы более сложные задачи [88–91]. Схожая задача рассматривается в [92, 93], а именно рассматривается волновод с фланцами. С помощью решения из [9] строятся первые два члена асимптотического разложения. В [94] рассмотрен полубесконечный плоский волновод, закрытый резонатором. В [7] задача о плоском волноводе была решена в параболическом приближении с помощью метода формулы расщепления. В [8] было показано, что задача дифракции на полубесконечном плоском волноводе может быть сведена к задаче распространения плоской волны вдоль периодически расположенных полубесконечных полностью поглощающих экранов. Также к

периодическим поглощающим структурам были сведены некоторые другие открытые резонаторы, в частности резонатор Фабри–Перо. В [2] рассматривается сложная периодическая решетка из поглощающих экранов.

Более сложной с математической точки зрения является задача дифракции на волноводе, состоящего из параллельных несимметричных неймановских стенок. Данная задача может быть сведена к матричной задаче Винера–Хопфа–Фока, решение которой в общем случае не известно. Приближенное решение матричной задачи построено в [95, 96], где матричная задача сводится к системе бесконечных линейных уравнений. В [97] данная задача исследуется с помощью методов геометрической теории дифракции.

# Постановка задач дифракции на поперечных экранах (вайнштейновских задач) в параболическом приближении

## 1.1. Вводные замечания к главе 1

В данной главе рассматриваются вопросы корректной математической постановки задач вайнштейновского класса, а именно задач дифракции высокочастотной волны на периодических дифракционных решетках, состоящих из полностью поглощающих экранов. Рассматривается простейшая периодическая структура, состоящая из полубесконечных поглощающих экранов, отстоящих друг от друга на одинаковое расстояние (см. Рис. 1.1). Показывается, каким образом к такой задаче приводит переформулировка классической задачи Л. А. Вайнштейна о дифракции на торце плоского волновода. Рассмотрение проводится двумя различными способами: с помощью параболического уравнения теории дифракции и с помощью интегралов Френеля. Эквивалентность этих подходов позволяет использовать интегралы Френеля для строгого доказательства теорем, а параболическое уравнение – для придания физической ясности результатам.

С помощью метода отражений можно переформулировать задачу о дифракции на торце волновода в виде задачи отражения волны от бесконечной периодической дифракционной решетки, состоящей из точек ветвления разветвленной поверхности. Процедура переформулировки и постановки задачи на многолистной поверхности обсуждается в разделе 1.2.2. Формулировка задачи, связанная с дифракцией на решетке, представляется удобной,

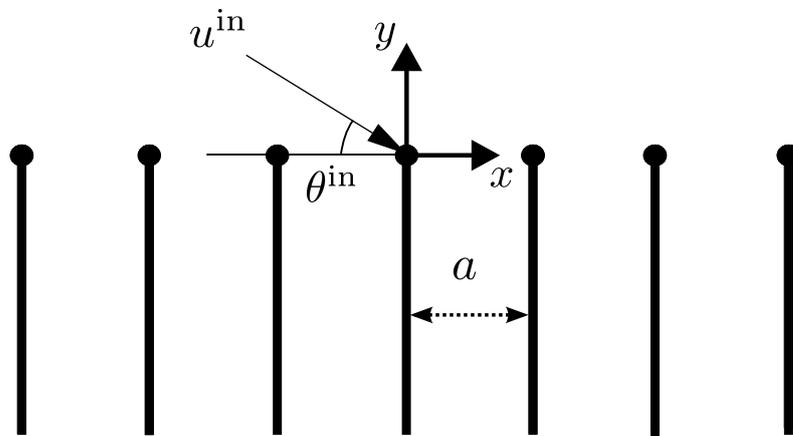


Рис. 1.1. Геометрия решетки. Вертикальными линиями обозначены поглощающие экраны

поскольку позволяет ввести краевые функции Грина. При рассмотрении высокочастотного случая можно воспользоваться параболическим приближением. При этом вместо решеток из точек ветвления можно рассматривать решетку из идеально поглощающих экранов. К сожалению, строгая с математической точки зрения постановка задачи, а также корректное определение краевых функций Грина представляются весьма затруднительным в рамках метода параболического уравнения. Для этих целей используется более формальный подход на основе интегралов Френеля. Эквивалентность метода параболического уравнения и подхода в рамках интегралов Френеля демонстрируется в разделе 1.2.6.

Основной целью данной главы является формальный вывод формулы расщепления в рамках подхода на основе интегралов Френеля. Формула выводится в разделе 1.4.

Результаты, полученные в данной главе, легко обобщаются на периодические решетки, исследуемые в Главах 2 и 3. Это позволяет в Главах 2 и 3 не останавливаться подробно на постановке дифракционных задач и на доказательстве формул расщепления.

## 1.2. Задача Л. А. Вайнштейна в точной и приближенных формулировках

### 1.2.1. Постановка задачи Л. А. Вайнштейна

Рассмотрим задачу о двумерном волноводе с геометрией, изображенной на Рис. 0.9. Стенки представляют собой полупрямые  $y > 0$ ,  $x = 0, a$ . На плоскости  $(x, y)$  (везде, кроме стенок волновода) выполняется уравнение Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \right) \tilde{u}(x, y) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\tilde{u}(x, y)$  – полевая переменная, а  $k_0$  – параметр (волновое число). Будем предполагать, что  $k_0$  обладает маленькой положительной мнимой частью в соответствии с принципом предельного поглощения. На стенках заданы граничные условия Неймана. Падающая волна бежит по волноводу в сторону отрицательных  $y$  и имеет вид:

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{-ik_0 y \sin \theta^{\text{in}}\} \cos(k_0 x \cos \theta^{\text{in}}), \quad (1.2)$$

где  $\theta^{\text{in}}$  — угол распространения бриллюэновской парциальной волны. Этот угол удовлетворяет условию

$$\exp\{2ik_0 a \cos \theta^{\text{in}}\} = 1, \quad (1.3)$$

следующему из граничных условий. Рассеянное поле в волноводе представляется в виде разложения по волноводным модам:

$$\tilde{u}^{\text{sc}} \equiv \tilde{u} - \tilde{u}^{\text{in}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{R}_n \exp\{iky \sin \theta_n\} \cos(kx \cos \theta_n), \quad (1.4)$$

где  $\tilde{R}_n$  – коэффициенты рассеяния в волноводные моды,  $\theta_n$  – углы, под которыми распространяются парциальные волны. Значения  $\theta_n$  удовлетворяют соотношению:

$$\exp\{2ika \cos \theta_n\} = 1. \quad (1.5)$$

Для нахождения рассеянного поля необходимо определить коэффициенты отражения  $\tilde{R}_n$ .

Рассеянное поле должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда, а полное поле – условиям Мейкснера в вершинах. В такой постановке задача дифракции на торце плоского волновода была решена Л. А. Вайнштейном с помощью метода Винера–Хопфа–Фока [9]. Далее рассматривается лишь случай падения высокочастотной волны при частоте, близкой к частоте отсечки, то есть требуется выполнение следующих условий:

$$k_0 a \gg 1, \quad \theta^{\text{in}} \ll 1. \quad (1.6)$$

Л. А. Вайнштейном было показано, что при выполнении более сильного условия

$$\theta^{\text{in}} \sqrt{k_0 a} \ll 1 \quad (1.7)$$

падающая волна почти полностью отражается от торца волновода с коэффициентом отражения, близким к  $-1$ . Этот результат является ценным с физической точки зрения, поскольку он объясняет высокую добротность резонаторов типа Фабри–Перо. Поправка к  $-1$  позволяет вычислить потери в таких резонаторах.

Малость угла падения позволяет считать дифракционный процесс приосевым и использовать приближение Френеля, учитывая лишь дифракцию под малыми углами.

### 1.2.2. Применение метода отражений и формулировка задачи на разветвленной поверхности

Приступим к формулировке задачи Л. А. Вайнштейна на многолистной поверхности. Разрежем физический лист (исходную плоскость  $(x, y)$ ) вдоль стенок волновода. Построим бесконечное число копий физического листа, снабдив их целыми индексами (физическому листу присвоим индекс 0). Листы с нечетными индексами симметрично отразим вокруг вертикальной оси. Склеим получившиеся листы по правилу, показанному на Рис. 0.10. Получим

разветвленную поверхность, имеющую бесконечное число точек ветвления второго порядка и бесконечное число листов.

Полное поле вместе с первой производной непрерывны на полученной поверхности, в том числе и в точках склейки листов. Из этого следует, что оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца в точках склейки [15] и, вообще говоря, бесконечно гладко на склейке везде, кроме точки ветвления. В рамках подхода, предложенного Зоммерфельдом [12], перейдем от рассмотрения задачи на плоскости с экранами к рассмотрению задачи на многолистной поверхности без экранов, но с точками ветвления. Известно, что эти задачи эквивалентны.

Построенная поверхность имеет сложную структуру и её трудно анализировать. Вместо этого исследуется поверхность, изображенная на Рис. 0.11. Она состоит из основного листа с бесконечным количеством разрезов вдоль линий  $x = an$ ,  $y < 0$  и вспомогательных листов, имеющих по одному разрезу. Вспомогательные листы проиндексированы целыми числами, а основной лист помечен буквой  $i$ . Лист с индексом  $n$  имеет разрез вдоль линии  $x = an$ ,  $y < 0$ . Схема соединения листов показана на рисунке.

Понять, что поверхности, изображенные на Рис. 0.10 и Рис. 0.11, эквивалентны (точнее, что это разные способы разрезать одну и ту же поверхность), можно следующим образом. Для этого достаточно заметить, что основной лист соответствует внутренности волновода, а по вспомогательным листам распространяются волны, вышедшие из волновода. Строгое доказательство эквивалентности поверхностей вынесено в Приложение Б.

Падающее поле  $\tilde{u}^{\text{in}}$  на поверхности, изображенной на Рис. 0.11, представляет собой сумму двух плоских волн, распространяющихся под углом  $\theta^{\text{in}}$  и  $\pi - \theta^{\text{in}}$  к оси  $x$ . Вследствие линейности задачи, будем рассматривать только волну, распространяющуюся под углом  $\theta^{\text{in}}$ :

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{-ik_0 y \sin \theta^{\text{in}} + ik_0 x \cos \theta^{\text{in}}\}, \quad (1.8)$$

При необходимости решение с двумя волнами может быть получено с помощью принципа суперпозиции.

При выполнении условия (1.5) поле на построенной многолистной поверхности будет периодически с периодом  $2a$ . Можно наложить более слабое условие периодичности

$$\exp\{iak_0(\cos \theta^{\text{in}} - \cos \tilde{\theta}_n)\} = 1, \quad (1.9)$$

следующее из теории Флоке. При этом выполнение (1.5) больше не требуется.

Таким образом, с помощью метода отражений задача о дифракции на торце плоского волновода была сведена к задаче о рассеянии плоской волны на точках ветвления многолистной поверхности. Математическая постановка задачи для уравнения Гельмгольца (1.1)

ничем не отличается от постановки задачи, например, на двулистной поверхности с одной точкой ветвления, рассмотренной Зоммерфельдом [12].

Новая задача ставится следующим образом. На периодическую решетку, *состоящую из точек ветвления разветвленной поверхности*, по основному листу падает высокочастотная плоская волна под скользящим углом. Периодичность геометрии задачи приводит к тому, что в верхней полуплоскости на основном листе поле, рассеянное решеткой, представляется в виде ряда по дифракционным максимумам. Необходимо определить коэффициенты рассеяния в эти максимумы (коэффициенты генерации дифракционных максимумов  $\tilde{R}_n$ ). Эти коэффициенты, очевидно, равны коэффициентам отражения в волноводные моды для исходной задачи.

### 1.2.3. Параболическое уравнение на разветвленной поверхности

Малость угла падения  $\theta^{\text{in}}$  и малость длины волны по сравнению с периодом  $a$  позволяет рассматривать данную задачу в параболическом приближении теории дифракции. Это означает, что пренебрегаются цилиндрические волны, рассеянные точками ветвления под большим углом. Таким образом, имеется основное направление распространения (ось  $x$ ), а волновое поле представляется в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \exp\{ik_0x\}u(x, y), \quad (1.10)$$

где функция  $u$  зависит от своих аргументов медленно (по сравнению с экспонентой). Уравнение Гельмгольца (1.1) заменяется параболическим уравнением (0.2).

Падающая волна (1.8) в параболическом приближении переходит в (0.14). Падающая волна приходит сверху по основному листу, который представляет собой многократно отраженную внутренность волновода (см. Рис. 0.11). На остальных листах падающей волны нет, поскольку в терминах исходной задачи это означало бы наличие падающей волны снаружи волновода. На основном листе полное поле представляет собой сумму падающего и рассеянного поля:

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}. \quad (1.11)$$

На вспомогательных листах поле представлено только рассеянной частью. Разумеется, при этом рассеянное поле является разрывным на линиях склейки листов (полное поле на линиях склейки, разумеется, непрерывно). На основном листе рассеянная часть поля удовлетворяет параболическому уравнению везде вне разрезов.

Условие (1.3) в параболическом приближении переходит в

$$\exp\{2ik_0a(1 - (\theta^{\text{in}})^2/2)\} = 1. \quad (1.12)$$

Рассеянное поле на основном листе при  $y > 0$  имеет вид

$$u^{\text{sc}} = \sum_n R_n \exp \left\{ -ik_0 x \theta_n^2 / 2 + ik_0 \theta_n y \right\}, \quad (1.13)$$

где

$$\theta_n = \left( (\theta^{\text{in}})^2 + \frac{2\pi n}{k_0 a} \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Последнее равенство следует из параболического аналога (1.9). Отметим, что  $\theta_0 = \theta^{\text{in}}$ .

Условия в вершинах для параболического уравнения переходят в требование ограниченности поля  $u(x, y)$  вблизи точек ветвления (тем самым гарантируется отсутствие источников в точках ветвления). Условие излучения заключается в отсутствии в поле  $u^{\text{sc}}$  компонент, распространяющихся из бесконечности к линии  $y = 0$ . В Приложении Д это условие формулируется с помощью принципа предельного поглощения.

Поведение решений параболического уравнения на разветвленной поверхности отличается от поведения решения уравнения Гельмгольца на такой же поверхности. Различия вызваны тем, что параболическое уравнение имеет первый порядок по переменной  $x$ . Эти различия заключаются в следующем. Рассмотрим вспомогательный лист с индексом  $n$ . Поскольку на этом листе падающей волны нет, на этом листе поле  $u$  равно нулю при  $x < an$ . Для построения на этом листе волнового поля при  $x > an$  необходимо решать для параболического уравнения задачу Коши с начальными данными  $u(an + 0, y) = 0, y > 0; u(an + 0, y) = u_i(an - 0, y), y < 0$ , где  $u_i(an - 0, y)$  — поле на основном листе слева от разреза.

Разрезы на основном листе можно рассматривать в качестве полностью поглощающих экранов в том смысле, что полное поле  $u(x, y)$  на основном листе справа от каждого из разрезов равно нулю. Причина этого заключается в том, что поле на основном листе справа от разреза непрерывно продолжает поле слева от разреза на вспомогательном листе, а там оно равно нулю. Таким образом, в параболическом приближении задача о рассеянии на решетке из точек ветвления эквивалентна задаче о рассеянии на решетке из идеально поглощающих экранов, изображенной на Рис. 1.1.

Такой подход не нов и впервые был предложен Фоксом и Ли [84] в применении к резонатору Фабри – Перо. Формулировка задачи на плоскости с поглощающими экранами является предпочтительной (по сравнению с формулировкой на многолистной поверхности), поскольку позволяет рассматривать поле на одном листе. Ниже используется именно такая формулировка. Поле на вспомогательных листах необходимо строить, если надо проанализировать рассеяние из торца волновода в окружающее пространство.

Сформулируем граничные условия для рассеянного поля  $u^{\text{sc}}$  на основном листе поверхности. В соответствии со сказанным, на правых берегах разрезов, т. е. при  $x = an + 0, y < 0$ ,

полное поле должно быть равно нулю. Это значит, что

$$u^{\text{sc}}(an + 0, y) = \psi_n(y), \quad y < 0, \quad (1.15)$$

где

$$\psi_n(y) \equiv -u^{\text{in}}(an, y) = -\exp\{-ik_0an(\theta^{\text{in}})^2/2 - ik_0\theta^{\text{in}}y\}. \quad (1.16)$$

В данной постановке задача была решена А. В. Шаниным в [7].

Поставленная задача для  $u^{\text{sc}}$  обладает геометрической периодичностью. Кроме того, правая часть граничных условий обладает свойством

$$\psi_{n+1}(y) = \chi\psi_n(y), \quad \chi \equiv \exp\{-ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2\}. \quad (1.17)$$

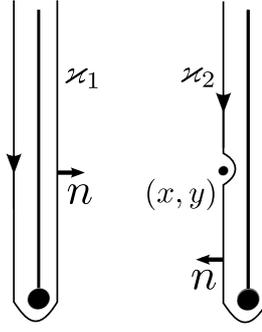
В соответствии с принципом Флоке, аналогичному соотношению должно удовлетворять решение:

$$u^{\text{sc}}(x + a, y) = \chi u^{\text{sc}}(x, y). \quad (1.18)$$

Перечислим последовательность переформулировок исходной задачи об отражении от торца волновода для уравнения Гельмгольца.

- Применен метод отражений, сформулирована задача для уравнения Гельмгольца на многолистной поверхности.
- Изменены положения разрезов для многолистной поверхности (от Рис. 0.10 к Рис. 0.11). Также изменены обозначения листов.
- Падающая волна (1.2), состоящая из двух парциальных волн, заменена на волну (1.8), представляющую собой одну парциальную волну.
- Уравнение Гельмгольца заменено на параболическое уравнение теории дифракции.
- Вспомогательные листы многолистной поверхности убраны, разрезы превращены в идеально поглощающие экраны.

Как было сказано выше, для поставленной задачи дифракции в параболическом приближении есть определенные сложности с доказательством теоремы существования и единственности решения. Поэтому далее строится формализм на основе интегралов Френеля, где подобных проблем не возникает.

Рис. 1.2. Контура  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$ .

#### 1.2.4. Описание задачи о волноводе с помощью интегралов Френеля

Вернемся к классической задаче Л. А. Вайнштейна (Рис. 0.9) для уравнения Гельмгольца (1.1). Применим вторую формулу Грина ко всей плоскости, из которой извлечены окрестности стенок волновода. Границей извлеченных областей служат контура  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$ , изображенные на Рис. 1.2:

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(x, y) = - \int_{\varkappa_1 + \varkappa_2} \left[ \tilde{u}(x', y') \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x - x', y - y') - G(x - x', y - y') \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}}(x', y') \right] dl, \quad (1.19)$$

где немые переменные  $x', y'$  пробегают значения по контуру  $\varkappa_1 + \varkappa_2$ ,

$$G(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (1.20)$$

$H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали, направленный как показано на Рис. 1.2. Контур  $\varkappa_2$  обходит точку  $(x, y)$  по полуокружности радиуса  $\epsilon$ ; рассматривается предел при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Учитывая, что на стенках волновода выполняются граничные условия Неймана, имеем

$$\tilde{u}(a, y) = -2 \int_{\varkappa_1} \tilde{u}(0, y') \frac{\partial G(a, y - y')}{\partial \mathbf{n}} dy'. \quad (1.21)$$

Воспользуемся приближением Киргхофа, а именно пренебрежем интегралом по теневой поверхности экрана. Будем рассматривать дифракцию в приближении Френеля, т. е. учтем, что дифракция происходит под малыми углами, а падающая волна является высокочастотной и близкой к частоте отсечки (1.6). В таком случае справедлива следующая аппроксимация ядра интегрального уравнения (1.21):

$$-2 \frac{\partial G(x - x', y - y')}{\partial \mathbf{n}} \approx g(x - x', y - y') \exp\{ik_0(x - x')\}, \quad (1.22)$$

где  $g(x, y)$  — функция Грина параболического уравнения (см. (0.4)).

Введем поле  $u(x, y)$  следующим образом:

$$u(x, y) \equiv \tilde{u}(x, y) \exp\{-ik_0x\}. \quad (1.23)$$

Поле, введенное таким образом, не эквивалентно полю в параболическом приближении, введенному выше. Это следует из того факта, что в задаче на периодической решетке ставится более слабое условие периодичности (1.9). Новый символ не вводится в целях сохранения прозрачности изложения.

Функция  $g(x, y)$  определена при  $x > 0$ . Для удобства доопределим ее как ноль при  $x < 0$ . При  $x = 0$  функция имеет разрыв. Используя (1.22) и (1.23), получим приближенное интегральное уравнение:

$$u(a, y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y')u(0, y')dy', \quad y > 0. \quad (1.24)$$

Еще раз применяя формулу Грина, получаем второе уравнение:

$$e^{-2ik_0a}u(0, y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y')u(a, y')dy', \quad y > 0. \quad (1.25)$$

Введем рассеяное поле  $u^{\text{sc}}$  по формуле  $u^{\text{sc}}(x, y) = \tilde{u}^{\text{sc}}(x, y) \exp\{-ik_0x\}$ .

Учитывая легко проверяемый факт, что при  $x > x'$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x - x', y - y')u^{\text{in}}(x', y')dy' = u^{\text{in}}(x, y), \quad (1.26)$$

получим интегральные соотношения для функций:  $u^{\text{sc}}(0, y)$  и  $u^{\text{sc}}(a, y)$

$$u^{\text{sc}}(a, y) = \int_0^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y')g(a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^0 u^{\text{in}}(0, y')g(a, y - y')dy', \quad (1.27)$$

$$e^{-2ik_0a}u^{\text{sc}}(0, y) = \int_0^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y')g(a, y - y')dy' - \int_{-\infty}^0 u^{\text{in}}(a, y')g(a, y - y')dy'. \quad (1.28)$$

Для произвольной функции  $v(\cdot)$  введем операторы

$$\Pi_{++}[v(\cdot)](y) = \int_0^{\infty} v(y')g(a, y - y')dy', \quad y > 0, \quad (1.29)$$

$$\Pi_{+-}[v(\cdot)](y) = \int_{-\infty}^0 v(y')g(a, y - y')dy', \quad y > 0, \quad (1.30)$$

$$\Pi_{-+}[v(\cdot)](y) = \int_0^{\infty} v(y')g(a, y - y')dy', \quad y < 0, \quad (1.31)$$

$$\Pi_{--}[v(\cdot)](y) = \int_{-\infty}^0 v(y')g(a, y - y')dy', \quad y < 0, \quad (1.32)$$

где  $\cdot$  обозначает немую переменную в интегральном операторе. Здесь имеется в виду, что результат действия оператора  $\Pi_{++}$  или  $\Pi_{+-}$  доопределен нулем при  $y \leq 0$ , а результат действия оператора  $\Pi_{-+}$  или  $\Pi_{--}$  доопределен нулем при  $y \geq 0$ .

Свойство (1.26) в новых обозначениях переписется в виде

$$\Pi_{--}[\psi_0](y) + \Pi_{-+}[\psi_0](y) + \Pi_{+-}[\psi_0](y) + \Pi_{++}[\psi_0](y) = e^{-ik_0a}\psi_0(y). \quad (1.33)$$

Уравнения (1.27) и (1.28) запишутся в виде

$$u^{\text{sc}}(a, y) = \Pi_{++}[u^{\text{sc}}(0, \cdot)](y) - \Pi_{+-}[u^{\text{in}}(0, \cdot)](y), \quad (1.34)$$

$$e^{-2ik_0a}u^{\text{sc}}(0, y) = \Pi_{++}[u^{\text{sc}}(a, \cdot)](y) - \Pi_{+-}[u^{\text{in}}(a, \cdot)](y). \quad (1.35)$$

### 1.2.5. Аналог метода отражений для описания с помощью френелевских интегралов

Применение метода отражений и переход от задачи о рассеянии на торце волновода к задаче о рассеянии на решетке из точек ветвления (или эквивалентной ей задаче о рассеянии на решетке из поглощающих экранов) имеет важное теоретическое значение, поскольку позволяет ввести краевые функции Грина. Здесь строится аналог метода отражений для уравнений (1.34), (1.35).

Применим «метод отражений» к системе (1.34), (1.35). Прежде всего, пользуясь (1.12), заметим, что

$$e^{-2ik_0a} = \chi^2.$$

Кроме того, в правых частях (1.34) и (1.35) можно использовать обозначения (1.16). Введя обозначения

$$u_0(y) \equiv u^{\text{sc}}(0, y), \quad u_1(y) \equiv u^{\text{sc}}(a, y), \quad y > 0 \quad (1.36)$$

перепишем (1.34), (1.35) в виде

$$u_1(y) = \Pi_{++}[u_0](y) + \Pi_{+-}[\psi_0](y), \quad (1.37)$$

$$\chi^2 u_0(y) = \Pi_{++}[u_1](y) + \Pi_{+-}[\psi_1](y), \quad (1.38)$$

Данная система замкнута относительно двух неизвестных функций. Построим бесконечную систему, обобщающую (1.37), (1.38). Для этого введем неизвестные функции  $u_n(y)$ ,  $y > 0$ , не только для  $n = 0, 1$ , но и для всех целых  $n$  и сформулируем цепочку уравнений

$$u_{n+1}(y) = \Pi_{++}[u_n](y) + \Pi_{+-}[\psi_n](y). \quad (1.39)$$

Очевидно, если построено решение системы (1.37), (1.38), то построено и решение системы (1.39).

Цепочка уравнений (1.39) представляет собой основные уравнения, которые решаются в рамках развиваемого авторами метода. Именно для этих уравнений вводятся краевые функции Грина и строится формула расщепления. Правой частью для этой цепочки будем называть набор известных функций  $\psi_n(y)$ .

В силу (1.17) решение системы (1.39) должно удовлетворять условию Флоке

$$u_{n+1}(y) = \exp\{-ik_0 a \theta_0^2 / 2\} u_n(y), \quad (1.40)$$

т. е. система (1.39) редуцируется к уравнению

$$\chi u_0(y) = \Pi_{++}[u_0](y) + \Pi_{+-}[\psi_0](y). \quad (1.41)$$

Система (1.39) представляет собой аналог применения принципа отражения к (1.37), (1.38). Главный выигрыш, который следует из сравнения (1.39) с (1.37), и (1.38) с (1.41) — это возможность исследовать решения этой системы при произвольном наборе функций  $\psi_n$ , а не только для функций (1.16). В частности, краевая функция Грина получается, если положить  $\psi_n(y) = \delta_{n,0} \delta(y)$ .

Цепочка (1.39) позволяет выписать формальное решение уравнения (1.41):

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{-n} (\Pi_{++})^{n-1} \Pi_{+-}[\psi_0] \quad (1.42)$$

(в том, что данная функция является решением (1.41), можно убедиться прямой подстановкой).

### 1.2.6. Эквивалентность параболического уравнения и интегралов Френеля

Вернемся к рассмотрению задачи дифракции на многолистной поверхности (Рис. 0.11) в параболическом приближении. Главное преимущество использования метода параболического уравнения заключается в упрощении описания распространения волн вдоль координаты  $x$ . Действительно, в любой полосе  $x' < x < x''$  без препятствий или точек ветвления поле

$u(x, y)$  описывается интегральной формулой (0.3). Цепочка уравнений (1.39) связана с параболическим уравнением следующим образом. Пусть функции  $u_n(y)$ ,  $y > 0$ , введенные в предыдущем разделе, есть значения поля  $u(an, y)$  на основном листе поверхности, на которой выполняется параболическое уравнение. Пусть на этом листе выполняются граничные условия (1.15). Тогда формула (0.3) для  $x' = an$ ,  $x = a(n + 1)$  представляет собой (1.39).

Отметим, что для определения поля на всей поверхности достаточно решить уравнения (1.39) на основном листе, а потом воспользоваться формулой (0.3) на вспомогательных листах.

### 1.2.7. Формулы для коэффициентов отражения

Предположим, что цепочка уравнений (1.39) каким-либо образом решена. Для решения поставленной дифракционной задачи необходимо вычислить коэффициенты  $R_n$  разложения (1.13). В настоящем разделе будут построены формулы, выражающие  $R_n$  через функции  $u_n(y)$ . Формула, которую требуется доказывать, имеет следующий вид:

$$R_n = -\frac{\chi^{-1}}{a\theta_n} \int_{-\infty}^0 \exp\{-ik_0\theta_n y\} (\Pi_{-+}[u_0](y) + \Pi_{--}[\psi_0](y) - \chi\psi_0(y)) dy. \quad (1.43)$$

Вывод этой формулы в рамках формализма параболического уравнения подробно описан в [2]. Приведем его здесь в сокращенном виде.

Во-первых, для коэффициентов  $R_n$  справедлива следующая формула:

$$R_n = \frac{\exp\{-ik_0\theta_n y_*\}}{a} \int_0^a u^{\text{sc}}(x, y_*) \exp\{ik_0 x \theta_n^2 / 2\} dx \quad (1.44)$$

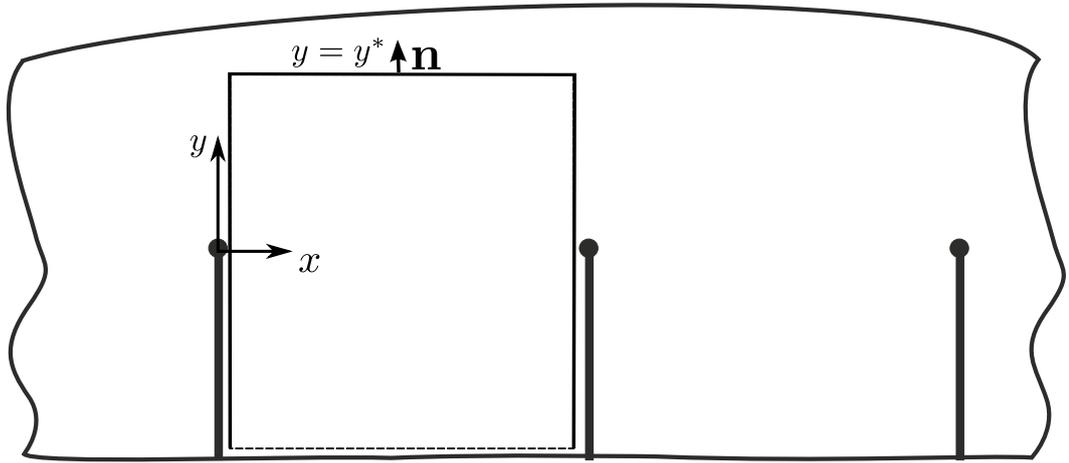
для любого  $y_* > 0$ . Для доказательства этого утверждения заметим, что функция

$$u^{\text{sc}}(x, y) \exp\{ik_0 x \theta_n^2 / 2\}$$

периодична по  $x$ . Разложение этой функции в ряд Фурье дает (1.13). Коэффициенты разложения даются формулой (1.44). Дифференцируя (1.44) по  $y_*$ , получаем еще одно выражение для  $R_n$ :

$$R_n = \frac{\exp\{-ik_0\theta_n y_*\}}{ik_0\theta_n a} \int_0^a \frac{\partial u^{\text{sc}}(x, y_*)}{\partial y_*} \exp\{ik_0 x \theta_n^2 / 2\} dx, \quad (1.45)$$

связывающее коэффициенты  $R_n$  с вертикальной производной рассеянного поля. Во-вторых, для параболического уравнения справедлива формула Грина.

Рис. 1.3. Область  $\Omega$  для вывода (1.49)

**Утверждение 1.1** (теорема Грина). Пусть пара функций  $\nu(x, y)$  и  $w(x, y)$  удовлетворяют в некоторой области  $\Omega$  неоднородным уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \nu = f(x, y), \quad \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w = h(x, y). \quad (1.46)$$

Тогда выполняется равенство

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})\nu] dl = 2ik_0 \int_{\Omega} [fw - hv] ds, \quad (1.47)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя единичная нормаль к границе  $\partial\Omega$ , а векторные потоки  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  задаются как

$$\mathbf{v} = (ik_0\nu, \partial_y\nu) \quad \mathbf{w} = (-ik_0w, \partial_yw). \quad (1.48)$$

Применяя теорему Гаусса–Остроградского можно легко убедиться в справедливости данного утверждения.

Применяя (1.47) с функциями

$$\nu = u^{\text{sc}}(x, y) \quad w = \exp\{ik_0x\theta_n^2/2 - ik_0y\theta_n\}$$

по области, изображенной на Рис. 1.3, и используя формулу (1.44), легко получить следующее выражение для коэффициентов  $R_n$ :

$$R_n = -\frac{1}{\theta_n a} \int_{-\infty}^0 (u^{\text{sc}}(x-0, y) - u^{\text{sc}}(x+0, y)) \exp\{-ik_0y\theta_n\} dy. \quad (1.49)$$

Нижний участок контура на Рис. 1.3 соответствует  $y = -L$ , при  $L \rightarrow -\infty$ . Верхний

участок есть отрезок  $y = y_*$ ,  $0 < x < a$ . Действительно, применяя теорему Грина получим:

$$\begin{aligned} \exp\{-ik_0\theta_n y_*\} \int_0^a [\partial_{y_*} u_{sc} + ik_0\theta_n] \exp\{ik_0 x \theta_n^2 / 2\} dx = \\ 2ik_0 \int_0^{-\infty} u^{sc}(x-0, y) \exp\{-ik_0 y \theta_n\} dy + 2ik_0 \int_{-\infty}^0 u^{sc}(x+0, y) \exp\{-ik_0 y \theta_n\} dy. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Здесь было учтено, что интегралы по отрезкам  $x = 0$ ,  $0 < y < y_*$  и  $x = a$ ,  $0 < y < y_*$  компенсируют друг друга из-за периодичности. Группируя члены, а также используя (1.44) и (1.45), получаем (1.49).

Заметим, что в (1.49)

$$u^{sc}(x-0, y) = \Pi_{-+}[u_{-1}](y) + \Pi_{--}[\psi_{-1}](y) = \chi^{-1}(\Pi_{-+}[u_{-1}](y) + \Pi_{--}[\psi_{-1}](y)), \quad y < 0$$

в силу (0.3). Кроме того,

$$u^{sc}(x+0, y) = \psi_0(y), \quad y < 0$$

в силу граничных условий. В результате (1.49) сводится к (1.43).

Выведем представление (1.44) с помощью формализма интеграла Френеля (и уравнения (1.39)). Обратим внимание на то, что в представлении интеграла Френеля нет координаты  $x$ , поэтому целью является построение разложения

$$u_0(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp\{ik_0 y \theta_n\}. \quad (1.51)$$

Для вывода представления (1.51) и построения формул для  $R_n$  воспользуемся техникой, имеющей общие черты с методом Винера–Хопфа–Фока. Введем функцию

$$\phi(y) \equiv \chi^{-1}(\Pi_{-+}[u_0](y) + \Pi_{--}[\psi_0](y)) = \Pi_{-+}[u_{-1}](y) + \Pi_{--}[\psi_{-1}](y), \quad y < 0. \quad (1.52)$$

Сложим равенства

$$\chi u_0 = \Pi_{++}[u_0] + \Pi_{+-}[\psi_0],$$

и

$$\chi \phi = \Pi_{-+}[u_0](y) + \Pi_{--}[\psi_0](y).$$

Получим

$$\chi(u_0(y) + \phi(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a, y - y') (u_0(y') + \Theta(y')\psi_0(y')) dy', \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.53)$$

где

$$\Theta(y) \equiv \begin{cases} 0, & y \geq 0, \\ 1, & y < 0. \end{cases} \quad (1.54)$$

Введем односторонние преобразования Фурье как

$$\mathcal{F}_+[f](\xi) = \int_0^{\infty} f(y)e^{i\xi y} dy, \quad (1.55)$$

$$\mathcal{F}_-[f](\xi) = \int_{-\infty}^0 f(y)e^{i\xi y} dy. \quad (1.56)$$

Применим преобразование Фурье (оператор  $\mathcal{F}_- + \mathcal{F}_+$ ) к (1.53):

$$\mathcal{F}_+[u_0] + \mathcal{F}_-[\phi] = \exp\left\{-ia\frac{\xi^2}{2k_0}\right\} (\mathcal{F}_+[u_0] + \mathcal{F}_-[\psi_0]), \quad (1.57)$$

где явно вычислен Фурье-образ функции  $g(a, \cdot)$ . Выразим Фурье-образ функции  $u_0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+[u_0](\xi) = & \quad (1.58) \\ & \left(\exp\left\{-ia\frac{\xi^2}{2k_0}\right\} - \chi\right)^{-1} \left(\chi\mathcal{F}_-[\phi](\xi) - \exp\left\{-ia\frac{\xi^2}{2k_0}\right\} \mathcal{F}_-[\psi_0](\xi)\right). \end{aligned}$$

Обратим преобразование Фурье по формуле

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_+[f](\xi)e^{-i\xi y} d\xi, \quad (1.59)$$

замкнув контур интегрирования в нижней полуплоскости. Заметим, что Фурье-образы функций  $\phi$  и  $\psi_0$  регулярны в нижней полуплоскости и убывают там как  $1/|\xi|$ . Знаменатель в нижней полуплоскости имеет нули в точках  $\xi_n = -k_0\theta_n$ . Вычисляя интеграл методом вычетов, получаем

$$u_0(y) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\theta_n} \exp\{ik_0\theta_n y\} \mathcal{F}_-[\phi - \psi_0](-k_0\theta_n). \quad (1.60)$$

Сумма (1.60) имеет вид разложения (1.51) с

$$R_n = -\frac{1}{a\theta_n} \mathcal{F}_-[\phi - \psi_0](-k_0\theta_n). \quad (1.61)$$

Выражение (1.61) есть (1.43) в других обозначениях.

Приведем еще одну формулу для коэффициентов рассеяния. Учитывая (1.33), преобразуем (1.61) к виду

$$R_n = -\frac{1}{a\theta_n} \chi^{-1} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[u_0 - \psi_0]](-k_0\theta_n). \quad (1.62)$$

### 1.2.8. О единственности решения уравнения (1.41)

Как было сказано выше, вместо цепочки уравнений (1.39) достаточно рассмотреть уравнение (1.41). Допустим, что уравнение (1.41) имеет два решения –  $u_0$  и  $\hat{u}_0$ . Тогда их разность должна удовлетворять однородному уравнению

$$\chi(u_0 - \hat{u}_0) = \Pi_{++}[u_0 - \hat{u}_0], \quad (1.63)$$

Покажем, что решение этого уравнения, принадлежащее  $L_2$ , в приближении малого поглощения (см. Приложение Д) тривиально.

Перепишем уравнение (1.63) так, чтобы оператор в правой части имел сверточный характер:

$$\chi(u_0 - \hat{u}_0) + \Pi_{-+}[u_0 - \hat{u}_0] = (\Pi_{++} + \Pi_{-+})[u_0 - \hat{u}_0].$$

Применим к последнему равенству преобразование Фурье:

$$\chi \mathcal{F}_+[u_0 - \hat{u}_0] + \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[u_0 - \hat{u}_0]] = \exp\{-ia\xi^2/(2k_0)\} \mathcal{F}_+[u_0 - \hat{u}_0] \quad (1.64)$$

Определим норму следующим образом:

$$|u|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dy. \quad (1.65)$$

Воспользуемся тем фактом, что преобразование Фурье сохраняет  $L_2$ -норму (равенство Парсеваля). Равенство Парсеваля для преобразования Фурье, заданного формулами (1.55,1.56) имеет вид:

$$|u|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} |\mathcal{F}_+[u] + \mathcal{F}_-[u]|_{L_2}^2. \quad (1.66)$$

Кроме того, заметим, что  $|\chi| = 1$  (см. Приложение Д). Таким образом, из (1.64) и (1.66) следует, что

$$|u_0 - \hat{u}_0|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \exp\{-a\xi^2 k_0''/(2|k_0|^2)\} |\mathcal{F}_+[u_0 - \hat{u}_0]|_{L_2}^2 \leq |u_0 - \hat{u}_0|_{L_2}^2$$

Экспоненциальный множитель по модулю меньше единицы везде, кроме  $\xi = 0$ . Поэтому во втором неравенстве равенство могло бы достигаться только когда спектр  $\mathcal{F}_+[u_0 - \hat{u}_0]$  локализован в точке  $\xi = 0$ , что невозможно. Следовательно, решение уравнения (1.41) единственно.

Сделаем несколько замечаний.

- Величина  $k_0\theta_0 = k_0\theta_0^2/\theta_0$  имеет малую положительную мнимую часть. Это гарантирует, что  $\psi_n$  имеет конечную  $L_2$ -норму.

- Каждая из величин  $k_0\theta_n^2$  является чисто действительной. Это значит, что все комбинации  $k_0\theta_n$  имеют положительную мнимую часть (малую для распространяющихся мод и большую для затухающих). Это позволяет сформулировать условие излучения для задачи в формализме интегралов Френеля. Оно заключается в том, что при комплексном  $k$  каждая из функций  $u_n(y)$  имеет конечную норму в  $L_2$ .

### 1.3. Краевая функция Грина и ее диаграмма направленности

#### 1.3.1. Определение краевой функции Грина в рамках параболического уравнения

В рамках параболического уравнения введем краевую функцию Грина  $v(x, y)$  как решение неоднородного уравнения:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = \delta(x - 0)\delta(y), \quad (1.67)$$

то есть источник располагается на основном листе многолистной поверхности (см. Рис. 0.11) вблизи точки ветвления  $(0, 0)$ . Аргумент  $x - 0$  означает, что рассматривается предел семейства задач с источником в точке  $+\epsilon$  при  $\epsilon$  стремящемся к нулю. При таком определении логично называть диаграммой направленности  $V(\theta)$  краевой функций Грина  $v(x, y)$  коэффициент асимптотического разложения (0.11), где в предельной процедуре  $y$  и  $x$  предполагаются большими положительными, а их отношение постоянным. Такое определение аналогично определению диаграммы направленности функции Грина для уравнения Гельмгольца, где главный член поля представляется в виде функции Грина свободного пространства, умноженной на зависящую только от угла диаграмму направленности. Применяя формулу Грина для параболического уравнения к функциям

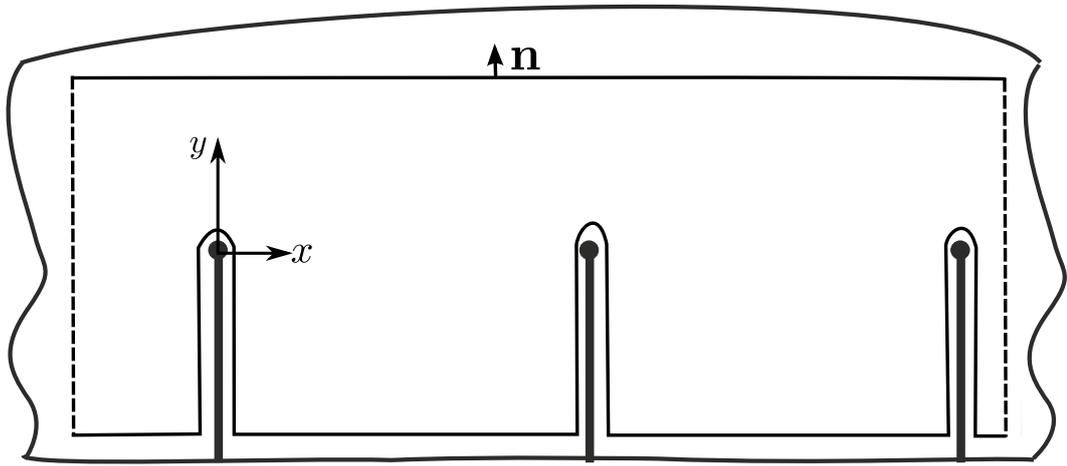
$$\nu = v(x, y), \quad w = \exp\{ik_0x\theta^2/2 -iky\theta\},$$

с  $\theta > 0$  в области, показанной на Рис. 1.4, можно получить следующую формулу для диаграмм направленности:

$$V(\theta) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{ik_0\theta^2 an/2\} \mathcal{F}_-[v(an - 0, \cdot)](-k_0\theta). \quad (1.68)$$

Для доказательства данного утверждения потребуются следующие формулы:

$$V(\theta) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y_*) \exp \left\{ k_0 \left( \frac{\theta^2}{2} x - \theta y_* \right) \right\} dx, \quad (1.69)$$

Рис. 1.4. Область  $\Omega$  для вывода (1.68)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_y v(x, y_*) \exp \left\{ \frac{ik_0 \theta^2 x}{2} \right\} dx = ik\theta \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, y_*) \exp \left\{ \frac{ik_0 \theta^2 x}{2} \right\} dx, \quad (1.70)$$

для произвольного  $y_* > 0$ . Данные формулы доказываются с помощью Теоремы Грина. Их доказательство вынесено в Приложение В. Применяя формулу Грина, учитывая (1.69, 1.70), а также принимая во внимание тот факт, что интегралы по бесконечно удаленным участкам обращаются в нуль, получаем (1.68).

При определении краевой функции Грина в рамках параболического уравнения возникают две основных проблемы. Первая заключается в необходимости корректной постановки дифракционной задачи с точечным источником, расположенным вблизи точки ветвления. Вторая (более серьезная) проблема заключается в доказательстве справедливости асимптотики (0.11). Для того, чтобы избежать этих трудностей, используется формализм интегралов Френеля. В рамках этого формализма проблем не возникает (достаточно доказать сходимость соответствующих интегралов и рядов), но некоторый недостаток заключается в том, что диаграмма направленности краевой функции Грина не имеет очевидного физического смысла в этом формализме.

### 1.3.2. Определение диаграммы направленности краевой функции Грина в рамках интегралов Френеля

Определим функции  $v_n(y)$ ,  $y > 0$  следующим образом:

$$v_n \equiv 0, \quad n < 1, \quad (1.71)$$

$$v_1(y) = g(a, y), \quad (1.72)$$

$$v_{n+1}(y) = \Pi_{++}[v_n](y), \quad n > 1. \quad (1.73)$$

При  $y \leq 0$  доопределим данные функции как 0. Легко проверить, что набор функций  $v_n$  удовлетворяет цепочке уравнений (1.39) с правыми частями

$$\psi_n(y) = \delta_{n,0}\delta(y), \quad (1.74)$$

где первая дельта — символ Кронекера, а вторая — обозначение дельта-функции. При таком определении необходимо пояснить, что

$$\Pi_{+-}[\delta(\cdot)](y) = g(a, y).$$

Заметим, что в соответствии с (0.3) при  $y > 0$

$$v_n(y) = v(an, y), \quad n \geq 1,$$

где  $v(x, y)$  — краевая функция Грина, введенная в предыдущем разделе.

Введем диаграмму направленности  $V(\theta)$ , используя (1.68) как определение. Для этого заметим, что при  $y < 0$

$$v(a - 0, y) = g(a, y),$$

$$v(an - 0, y) = \Pi_{-+}[v_{n-1}](y), \quad n > 1.$$

Таким образом, аналог формулы (1.68), использующий величины, определенные в рамках формализма интегралов Френеля, есть

$$V(\theta) = 1 - \chi^{-1} \mathcal{F}_-[g(a, \cdot)](-k_0\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \chi^{-(n+1)} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[v_n]](-k_0\theta). \quad (1.75)$$

## 1.4. О формулах расщепления

### 1.4.1. Вывод слабой формулы расщепления

Докажем формулу расщепления, связывающую решение исходной задачи о падающей плоской волне с краевыми функциями Грина. Для рассматриваемой задачи эта формула имеет вид

$$R_n = \frac{V(\theta_n)V(\theta^{\text{in}})}{ik_0a\theta_n(\theta_n + \theta^{\text{in}})}. \quad (1.76)$$

В рамках параболического уравнения формула расщепления выводится в два шага [7]. На первом шаге к решению исходной задачи применяется дифференциальный оператор  $H$ , сохраняющий граничные условия и обращающий в нуль падающую плоскую волну. В результате анализа поля и применения теоремы единственности удается выразить результат применения оператора, т. е.  $H[u]$ , в виде линейной комбинации краевых функций Грина. Полученное выражение называется *слабой формулой расщепления*. На втором шаге применяется

теорема взаимности для параболического уравнения, и диаграмма направленности исходной задачи выражается через диаграммы направленности краевых функций Грина. Проблема такого вывода заключается в том, что его первая часть проводится на физическом уровне строгости, а доказательство теоремы единственности требует значительных усилий. Здесь формула расщепления выводится в рамках формализма на основе интегралов Френеля.

Опишем коротко процедуру вывода слабой формулы расщепления в рамках параболического описания. Будем рассматривать постановку для полностью поглощающих экранов. Применим к полному полю  $u$  оператор (0.12). Этот оператор обращает в нуль падающую волну и сохраняет граничные условия на экранах. При этом «портятся» условия на концах экранов, т. е. поле  $H[u]$  не содержит падающей волны, но имеет источники в концах экранов. Для выяснения амплитуды источников используется следующее (заведомо нестрогое) рассуждение. По определению производной, при малых  $\epsilon$

$$H[u] \approx H^\epsilon[u] = \frac{1}{\epsilon}(u(x, y) - u(x, y - \epsilon)) + ik_0\theta_0 u. \quad (1.77)$$

Рассмотрим поле  $H^\epsilon[u]$  в окрестности точки  $(0, 0)$ . При  $x = +0$ ,  $y < 0$  поле, очевидно, удовлетворяет граничному условию  $H^\epsilon[u] = 0$  справа от экрана. При  $x = 0$ ,  $0 < y < \epsilon$  поле  $H^\epsilon[u]$  имеет разрыв, т. е. не удовлетворяет однородному параболическому уравнению. Разрыв на этом отрезке равен  $\epsilon^{-1}u(-0, y - \epsilon)$ . Функция  $u(-0, y)$  вблизи  $y = 0$  является непрерывной, поэтому при малых  $\epsilon$  значение  $u(-0, y - \epsilon)$  на отрезке  $0 < y < \epsilon$  можно заменить на  $u(-0, 0)$ . Разрывное поле приближенно удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) H^\epsilon[u] = \frac{1}{\epsilon} u(-0, 0) \delta(x) \xi^\epsilon(y), \quad (1.78)$$

где  $\xi^\epsilon(y)$  — функция, равная единице на отрезке  $0 < y < \epsilon$  и нулю вне этого отрезка. При стремлении  $\epsilon$  к нулю правая часть стремится к  $\delta(x)\delta(y)u(-0, 0)$ . Таким образом, вблизи края экрана поле имеет точечный источник, амплитуда которого равна значению поля слева от источника. Поле, создаваемое точечным источником, есть краевая функция Грина  $v(x, y)$ . Повторяя эти рассуждения для каждого экрана, получаем слабую формулу расщепления

$$H[u] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(an - 0, 0) v(x + an, y). \quad (1.79)$$

Получим эту же формулу в рамках формализма интегралов Френеля. Применим оператор

$$H'[\cdot] = \frac{d}{dy} + ik_0\theta^{\text{in}}$$

к уравнению (1.39). Заметим, что ядро интегральных операторов  $\Pi_{++}$  и  $\Pi_{+-}$  зависит от разности аргументов, поэтому производную по  $y$  можно выразить через производную по

переменной интегрирования, а затем применить интегрирование по частям. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy} + ik\theta_0\right) \int_0^{\infty} g(a, y - y') u_n(y') dy' = \\ - g(a, y - y') u_n(y') \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{d}{dy'} u_n(y') g(a, y - y') dy'. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Для второго члена уравнения (1.39) имеем аналогичное соотношение. В подстановке слагаемое с бесконечностью равно нулю в силу принципа предельного поглощения. Кроме того,

$$H'[\psi_n](y) = 0. \quad (1.81)$$

В результате получаем уравнение

$$H'[u_{n+1}](y) = \Pi_{++}[H'[u_n]](y) + g(a, y)(u_n(0) - \psi_n(0)). \quad (1.82)$$

Полученная цепочка уравнений относительно функций  $H'[u_{n+1}]$  представляет собой систему (1.39) с правой частью, равной  $\psi'_n = (u_n(0) - \psi_n(0))\delta(y)$ . Известен отклик на правую часть вида  $\delta_{n,0}\delta(y)$  (это краевая функция Грина). Сконструируем из краевых функций Грина функции  $w_n$ , удовлетворяющие цепочке уравнений

$$w_{n+1}(y) = \Pi_{++}[w_n](y) + g(a, y)(u_n(0) - \psi_n(0)).$$

Это функции

$$w_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (u_m(0) - \psi_m(0)) v_{n-m}(y).$$

Данные функции, как и функции  $H'[u_n]$ , удовлетворяют условию Флоке  $w_{n+1} = \chi w_n$ , поэтому по доказанной ранее теореме единственности  $H'[u_n] = w_n$  и

$$H'[u_n](y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (u_m(0) - \psi_m(0)) v_{n-m}(y), \quad (1.83)$$

что и представляет собой слабую формулу расщепления (аналог (1.79)). В силу свойства Флоке ее можно переписать в виде

$$H'[u_n](y) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi^{-m+n} (u_0(0) - \psi_0(0)) v_m(y). \quad (1.84)$$

#### 1.4.2. Вывод сильной формулы расщепления

В рамках подхода, основанного на параболическом уравнении, слабая формула расщепления (1.79) преобразуется в сильную (1.76) следующим образом [2]. Перейдем в (1.79) к

диаграммам направленности поля (т. е. рассмотрим главный член асимптотики в дальнем поле). Заметим, что оператор  $H$  действует на диаграмму направленности как умножение на  $ik_0(\theta + \theta_0)$ . После несложных преобразований, относящихся к определению диаграмм направленности и коэффициентов отражения, (см. [2, 7]), получаем выражение

$$ik_0(\theta_n + \theta^{\text{in}})R_n = \frac{1}{a\theta_n}u(-0, 0)V(\theta_n) \quad (1.85)$$

После этого с помощью теоремы взаимности доказывается тождество

$$u(-0, 0) = V(\theta^{\text{in}}). \quad (1.86)$$

В результате получается сильная формула расщепления (1.76).

Смысл тождества (1.86) легко понять на физическом уровне строгости. Диаграмма направленности краевой функции Грина  $V(\theta)$  может быть определена следующим образом. Возьмем источник в точке  $(+0, 0)$ , а точку наблюдения выберем как  $(X, \theta X)$  для достаточно большого  $X$ . Диаграмма направленности приближенно определяется как поле в точке наблюдения, домноженное на некий множитель, компенсирующий набег фазы и геометрическое затухание. В то же время, величина  $u(-0, 0)$  – значение поля, порожденного плоской волной, вблизи начала координат. Плоскую волну можно заменить на точечный источник, находящийся в точке  $(-X, \theta_0 X)$  для достаточно большого  $X$ . Амплитуда источника выбирается так, чтобы скомпенсировать набег фазы и геометрическое затухание. Легко видеть, что  $V(\theta)$  и  $u(-0, 0)$  представляют собой одну и ту же величину с точностью до перестановки местами источника и точки наблюдения и изменения направления оси  $x$ . Возможность выполнить такое преобразование дает теорема взаимности для параболического уравнения.

Теперь необходимо вывести формулу (1.76) с помощью интегралов Френеля. Будем исходить из слабой формулы расщепления (1.84). Выберем  $n = 0$  и подействуем на эту формулу операторами  $\Pi_{-+}$  и  $\mathcal{F}_-$  для придания ей формы (1.62):

$$\mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[H'[u_0]]](-k_0\theta) = (u_0(0) - \psi_0(0)) \sum_{m=1}^{n-1} \chi^{-m} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[v_m]](-k_0\theta), \quad (1.87)$$

Преобразуем левую часть формулы. Заметим, что

$$H'[u_0] = H'[u_0 - \psi_0].$$

Кроме того, с помощью интегрирования по частям легко доказать тождества

$$\Pi_{-+}[H'[f]](y) = H'[\Pi_{-+}[f]](y) - f(0)g(y), \quad (1.88)$$

$$\mathcal{F}_-[H'[f]](\xi) = i(k_0\theta_0 - \xi)\mathcal{F}_-[f](y) - f(0), \quad (1.89)$$

для любой гладкой функции  $f$ . С помощью этих свойств легко показать, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[H'[u_0]]](-k_0\theta) = \\ ik_0(\theta + \theta_0)\mathcal{F}[\Pi_{-+}[u_0 - \psi_0]](-k_0\theta) - (u_0(0) - \psi_0(0))\mathcal{F}[g](-k_0\theta) + \Pi_{-+}[u_0 - \psi_0](0). \end{aligned}$$

Пользуясь уравнением (1.39), а также свойством (1.33), получаем

$$\Pi_{-+}[u_0 - \psi_0](0) = \chi(u_0(0) - \psi_0(0)).$$

Используя (1.62) и заменяя  $\theta$  на  $\theta_n$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[H'[u_0]]](-k_0\theta_n) = \\ - ik_0(\theta_n + \theta_0)a\theta_n\chi R_n + (u_0(0) - \psi_0(0))(\chi - \mathcal{F}_-[g](-k_0\theta_n)). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Теперь преобразуем левую часть (1.87). В соответствии с (1.75)

$$\sum_{m=1}^{n-1} \chi^{-m} \mathcal{F}_-[\Pi_{-+}[v_m^0]](-k_0\theta) = -\chi V(\theta) + \chi - \mathcal{F}_-[g](-k_0\theta) \quad (1.91)$$

Сравнивая (1.91) с (1.90), получаем

$$R_n = \frac{(u_0(0) - \psi_0(0))V(\theta_n)}{ik_0a\theta_n(\theta^{\text{in}} + \theta_n)}, \quad (1.92)$$

т. е. (1.85).

Теперь покажем, что

$$u_0(0) - \psi_0(0) = V(\theta^{\text{in}}), \quad (1.93)$$

т. е. что выполняется (1.86). Заметим, что  $\psi_0(0) = -1$ . Согласно (1.42)

$$u_0(0) - \psi_0(0) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \chi^{-m} (\Pi_{++})^{m-1} [\Pi_{+-}[f]](0), \quad f(y) = \exp\{-ik_0\theta^{\text{in}}y\}. \quad (1.94)$$

Определяя  $V(\theta_0)$  как (1.75), замечаем, что ряд (1.75) совпадает с (1.94) почленно. При этом в каждом члене порядок интегрирования в (1.75) обратен порядку интегрирования в (1.94). Это доказывает (1.93) и, следовательно, (1.76).

## 1.5. Основные результаты главы

1. С помощью метода отражений задача дифракции на торце плоского волновода была сведена к задаче дифракции плоской волны на точках ветвления многолистной поверхности. Было показано, что в параболическом приближении многолистная поверхность может быть заменена периодической решеткой из поглощающих экранов.

2. С помощью подхода на основе интегралов Френеля было показано, что параболическая задача получается из исходной применением приближений Кирхгофа и Френеля. Также была доказана теорема единственности для параболической задачи.
3. В рамках формализма на основе интегралов Френеля было введено понятие краевой функции Грина и сформулировано определение диаграммы направленности краевой функции Грина.
4. В рамках формализма на основе интегралов Френеля была доказана формула расщепления в слабой и сильной формулировках.

## Глава 2

## Дифракционная решетка с экранами разной высоты.

## Метод формулы расщепления и спектрального уравнения

## 2.1. Вводные замечания к главе 2

В настоящей главе исследуется задача дифракции на решетке из поглощающих экранов разной высоты (см. Рис. 0.2). Стандартными методами данная задача может быть сведена к матричному уравнению Винера—Хопфа—Фока, решение которого неизвестно. Ниже будет изложен метод формулы расщепления и спектрального уравнения, не опирающийся на технику Винера—Хопфа—Фока.

Физическая задача, дающая мотивацию данному исследованию, это задача излучения из торца плоского волновода, состоящего из параллельных несимметричных стенок (см. Рис. 2.1 а).

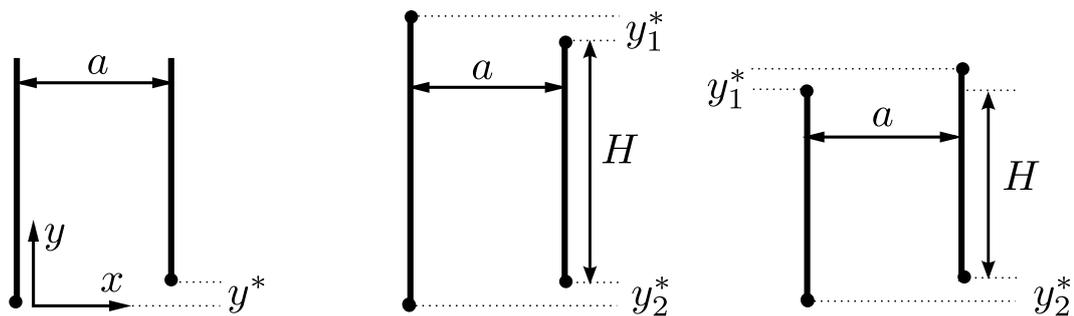


Рис. 2.1. Геометрия изучаемых систем: а) открытый волновод, б), в) резонаторы Фабри—Перо

В случае, если задача о дифракции на решетке используется для описания резонатора Фабри—Перо, она описывает волны в резонаторе с параллельными зеркалами разного размера или с зеркалами, сдвинутыми друг относительно друга (см. Рис. 2.1 б), в)).

Структура главы следующая. В разделе 2.2 задача ставится в параболическом приближении. В разделе 2.3 вводятся краевые функции Грина. В разделе 2.4 выводится формула расщепления, выражающая коэффициенты генерации дифракционных максимумов через диаграммы направленности краевых функций Грина. В разделе 2.5 выводится спектральное уравнение, представляющее собой обыкновенное дифференциальное уравнение для диаграмм направленности краевых функций Грина. В разделах 2.8, 2.9 выводятся эволюционные уравнения 1-го и 2-го рода, описывающие поведение краевых функций Грина и коэффициен-

та спектрального уравнения при изменении геометрического параметра задачи  $y^*$ . В разделе 2.10 с помощью эволюционного уравнения строится асимптотика диаграмм направленности краевых функций Грина и асимптотика коэффициента генерации основного дифракционного максимума  $R_0$ .

## 2.2. Постановка задачи

Рассмотрим плоскость  $(x, y)$ , на которой для полевой переменной  $u$  выполняется параболическое уравнение теории дифракции (0.2) На плоскости расположены экраны, занимающие полупрямые  $x = x_m, y < y_m, m \in \mathbb{Z}$ ,

$$x_m = at \quad (2.1)$$

$$y_m = \begin{cases} 0 & m \text{ четное} \\ y^* & m \text{ нечетное} \end{cases} \quad (2.2)$$

Поле на экранах имеет разрывы. Экраны являются идеально поглощающими, т. е. на правых сторонах экранов (при  $x = x_m + 0, y < y_m$ ) выполняются граничные условия

$$u(x_m + 0, y) = 0. \quad (2.3)$$

Полное поле представляется суммой

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}},$$

где  $u^{\text{in}}$  – падающая плоская волна (см. 0.14), а  $u^{\text{sc}}$  – рассеянное поле.

Заметим, что граничные условия для  $u^{\text{sc}}$  имеют вид

$$u^{\text{sc}}(x_m + 0, y) = -u^{\text{in}}(x_m, y), \quad y < y_m. \quad (2.4)$$

Постановка дополняется условиями в концевых точках экранов, а также условиями излучения. Как показано в Главе 1, условия в концевых точках заключаются в том, что полное поле предполагается ограниченным вблизи концевых точек экранов  $(x_m, y_m)$ . Ограниченность поля гарантирует отсутствие источников вблизи концевых точек. Условие излучения заключаются в том, что рассеянное поле не содержит компонент, приходящих из области больших  $|y|$  (это учитывается при построении Фурье-разложений решения).

Геометрический период решетки экранов составляет  $2a$  вдоль оси  $x$ . Константа Флоке равна

$$\chi = \exp\{-ik_0a(\theta^{\text{in}})^2\}.$$

Следовательно, в верхней полуплоскости (при  $y > \max(0, y^*)$ ) рассеянное поле может быть представлено в виде ряда (1.13), с

$$\theta_n = \sqrt{(\theta^{\text{in}})^2 + \frac{2\pi n}{k_0 a}}. \quad (2.5)$$

Цель исследования – найти коэффициенты генерации дифракционных максимумов, т. е.  $R_n$  при таких  $n$ , что  $\theta_n$  действительно.

Задача содержит четыре геометрических параметра:  $k_0$ ,  $a$ ,  $y^*$ ,  $\theta^{\text{in}}$ . Структура параболического уравнения такова, что с точностью до перенормировки задача зависит всего от двух безразмерных комбинаций: от  $\theta^{\text{in}}\sqrt{k_0 a}$  и  $y^*\sqrt{k_0/a}$ . Первый параметр определяет для параболической задачи область очень малых углов, а именно, при

$$\theta^{\text{in}}\sqrt{k_0 a} \ll 1$$

в задаче Л. А. Вайнштейна асимптотически  $R_0 \approx -1$ . Также, в соответствии с (2.5), величина  $1/\sqrt{k_0 a}$  по порядку близка к разнице  $\theta_1 - \theta_0$ . Второй безразмерный параметр представляет собой отношение разности высот экранов  $y^*$  к величине первой зоны Френеля  $\sqrt{a/k_0}$ . Именно величина первой зоны Френеля (а не длина волны) является значимым параметром в направлении оси  $y$ . Таким образом,

$$y^*\sqrt{k_0/a} \ll 1$$

соответствует малой разности высот экранов.

Рассмотрение не ограничивается малыми значениями безразмерных параметров, однако наибольший интерес представляют малые значения. Кроме того, в конце строится асимптотика коэффициента  $R_0$  при малых значениях безразмерных параметров.

### 2.3. Краевые функции Грина

Введем краевые функции Грина  $v_0$  и  $v_1$  как решения следующих *неоднородных* параболических уравнений:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_0 = \delta(x - 0, y), \quad (2.6)$$

и

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_1 = \delta(x - a - 0, y - y^*) \quad (2.7)$$

на плоскости с поглощающими экранами, описанными выше. Таким образом, во вспомогательных задачах имеются точечные источники. Эти источники изображены на Рис. 2.2.

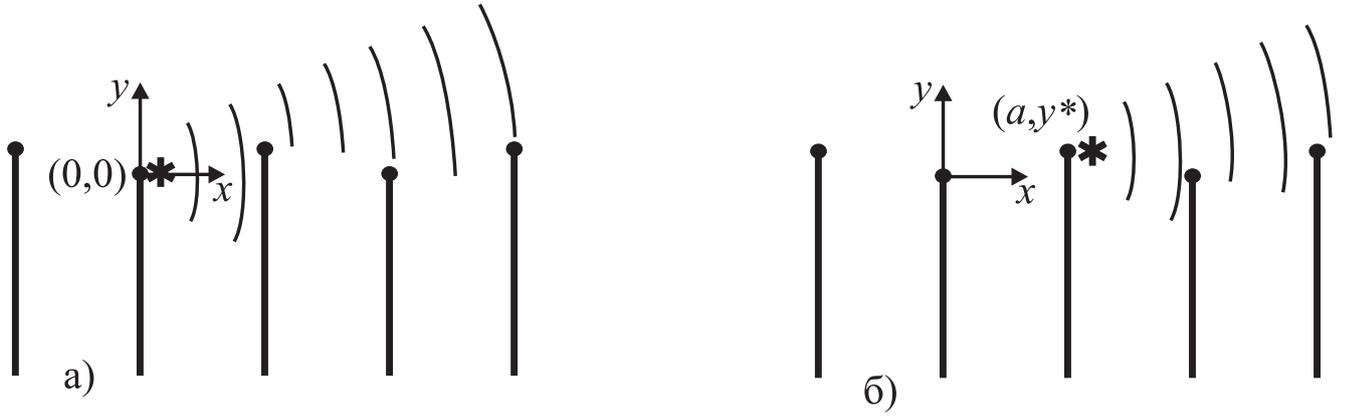


Рис. 2.2. Задачи для краевых функций Грина: Случай а) соответствует  $v_0$ , Случай б) соответствует  $v_1$

Аргументы  $x - 0$  и  $x - a - 0$  означают, что источники располагаются правее точек  $(0, 0)$  и  $(a, y^*)$ . Такое расположение гарантирует, что функция  $v_0(x, y)$  в области  $0 < x < a$  равна  $g(x, y)$ , а функция  $v_1(x, y)$  в области  $a < x < 2a$  равна  $g(x - a, y - y^*)$ . Краевые Функция Грина  $v_0(x, y)$  и  $v_1(x, y)$  тождественно равны нулю при  $x < 0$  и  $x < a$  соответственно.

Учитывая периодичность задачи вдоль оси  $x$ , легко видеть, что краевые функции Грина  $v_n$  для точечных источников, расположенных в краях всех остальных экранов, выражаются через  $v_0$  и  $v_1$  с помощью трансляций вдоль координаты  $x$ :

$$v_{m+2n}(x, y) = v_m(x - 2an, y).$$

Определим диаграммы направленности  $V_m$  краевых функций Грина  $v_m$  как коэффициент в старшем члене асимптотики

$$v_m(x, y) = g(x - x_m, y - y_m)V_m \left( \frac{y - y_m}{x - x_m} \right) + o((x - x_m)^{-1/2}), \quad m = 0, 1. \quad (2.8)$$

С помощью формулы (0.3) можно получить формальное выражение для краевых функций Грина. Очевидно,

$$v_m(x, y) = 0 \quad \text{при } x < x_m. \quad (2.9)$$

Далее,

$$v_m(x, y) = g(x - x_m, y - y_m) \quad \text{при } x_m < x < x_{m+1}, \quad (2.10)$$

$$v_m(x, y) = \int_{y_n}^{\infty} v_m(x_n - 0, y')g(x - x_n, y - y')dy' \quad \text{при } x_n < x < x_{n+1}. \quad (2.11)$$

Таким образом, выражение для поля  $v_m(x, y)$  в полосе  $x_n < x < x_{n+1}$  содержит  $n - m$  вложенных интегралов. Такие выражения, однако, не слишком удобны для вычисления диаграмм направленности функций  $V_m(\theta)$ .

Введем величины, играющие важную роль в дальнейшем изложении, а именно значения краевых функций Грина на краях экранов:

$$z_{m,n} = \lim_{x \rightarrow x_n - 0} v_m(x_n, y_n) \quad m < n. \quad (2.12)$$

Предельный переход необходим, поскольку в точке  $(x_n, y_n)$  решение параболического уравнения, определяемое формулой (2.11), не является непрерывным. Берется левый предел, поскольку слева от экрана поле гладко.

Докажем важную формулу, которая используется при выводе спектрального и эволюционного уравнений. Пусть рассматривается чуть более общая задача, в которой края поглощающих экранов имеют координаты  $(x_m, y_m)$  произвольные, а не связанные условием (2.1), (2.2). Для такой задачи также можно ввести краевые функции Грина. Более того, явный вид краевых функций Грина будет задаваться рекуррентными формулами (2.9), (2.10), (2.11). Рассмотрим семейство таких задач, индексируемое параметром  $\alpha$ . В этом семействе величины  $y_m$  являются функциями  $\alpha$  (достаточно гладкими). Краевые функции Грина этого семейства будем обозначать как  $v_m(\alpha, x, y)$ , а краевые значения (аналогичные (2.12)) как  $z_{m,n}(\alpha)$ .

**Утверждение 2.1.** *Выполняется формула*

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m(\alpha, x, y)}{\partial \alpha} = \\ \sum_{n=m+1}^{\infty} \left( \frac{\partial y_m}{\partial \alpha} - \frac{\partial y_n}{\partial \alpha} \right) z_{m,n}(\alpha) v_n(\alpha, x, y) - \frac{\partial y_m}{\partial \alpha} \frac{\partial v_m(\alpha, x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Введем для каждого  $x$  параметр  $n(x)$  такой, что  $x_{n(x)} < x \leq x_{n(x)} + 1$ . Доказательство теоремы элементарно проводится индукцией по  $n(x) - m$ . При этом используются формулы (2.10), (2.11). Действительно, при  $n(x) = m$  работает формула (2.10), и этот случай проверяется легко (в правой части (2.13) отсутствует сумма). Это база индукции. Выполним индукционный переход. Пусть теорема верна для  $n(x) - m = l - 1$ . Для  $n(x) - m = l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{y_{m+l}}^{\infty} v_m(x_{m+l} - 0, y') g(x - x_{m+l}, y - y') dy' = \\ &- \frac{\partial y_{m+l}}{\partial \alpha} v_m(x_{m+l} - 0, y_{m+l}) g(x - x_{m+l}, y - y_{m+l}) \\ &+ \int_{y_{m+l}}^{\infty} \frac{\partial v_m(x_{m+l} - 0, y')}{\partial \alpha} g(x - x_{m+l}, y - y') dy'. \end{aligned}$$

В последнем интеграле производная может быть преобразована по формуле (2.13) (здесь используется предположение индукции). Принимая во внимание, что

$$\int_{y_{m+l}}^{\infty} v_n(x_{m+l} - 0, y') g(x - x_{m+l}, y - y') dy' = v_n(x, y),$$

а также что

$$\int_{y_{m+l}}^{\infty} \frac{\partial v_m(\alpha, x_{m+l} - 0, y')}{\partial \alpha} g(x - x_{m+l}, y - y') dy' = \left( -z_{m,m+l}(\alpha) v_{m+l}(\alpha, x, y) + \frac{\partial v_m(\alpha, x, y)}{\partial y} \right) \frac{\partial y_m}{\partial \alpha},$$

получаем справедливость (2.13) для  $n(x) - m = l$ .

## 2.4. Формула расщепления

Формула расщепления связывает искомые коэффициенты генерации дифракционных порядков с диаграммами направленности краевых функций Грина. Эта формула дается следующей теоремой:

**Утверждение 2.2.** *Выполняется тождество*

$$R_m = \frac{\sum_{n=0}^1 V_n(\theta^{\text{in}}) V_n(\theta_m) \exp \{ ik_0 x_n (\theta_m^2 - (\theta^{\text{in}})^2) / 2 - ik_0 y_n (\theta_m - \theta^{\text{in}}) \}}{2ik_0 a \theta_m (\theta^{\text{in}} + \theta_m)}. \quad (2.14)$$

Таким образом, формула расщепления сводит исходную задачу к задаче отыскания диаграмм направленности краевых функций Грина  $V_0, V_1$ .

Будем следовать подходу, основанному на параболическом уравнении. Вывод формулы расщепления проводится на физическом уровне строгости. Однако формула (2.14) может быть получена на математическом уровне строгости с помощью подхода на основе интегралов Френеля, развитого в Главе 1.

Применим к полному полю  $u(x, y)$  оператор расщепления (0.12). Поле  $w(x, y) = H[u](x, y)$  удовлетворяет параболическому уравнению и граничным условиям на экранах, удовлетворяет условию излучения, имеет источники в вершинах  $(x_m, y_m)$  с амплитудами  $u_m(x_m, y_m)$ . Используя единственность решения дифракционной задачи, можно представить  $w(x, y)$  как суперпозицию краевых функций Грина  $v_n$ :

$$H[u](x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x_n - 0, y_n) v_n(x, y). \quad (2.15)$$

Значения поля на краях экранов  $u(x_m - 0, y_m)$  могут быть выражены через краевые функции Грина с помощью теоремы взаимности для параболического уравнения. Выражение имеет вид (см. Приложение В, Утверждение В.3)

$$u(x_m - 0, y_m) = \exp \left\{ -ik_0 x_m (\theta^{\text{in}})^2 / 2 + ik_0 y_m \theta^{\text{in}} \right\} V_m(\theta^{\text{in}}). \quad (2.16)$$

Подставляя это выражение в (2.15) и переходя от полей к диаграммам направленности, получим (2.14).

Наиболее простой вид имеет формула (2.14) для зеркального отражения, т. е. для  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{(V_0(\theta^{\text{in}}))^2 + (V_1(\theta_m))^2}{4ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2}. \quad (2.17)$$

## 2.5. Спектральное уравнение

**Утверждение 2.3.** Вектор-строка из диаграмм направленности  $(V_0(\theta), V_1(\theta))$  удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\theta}(V_0, V_1) = (V_0, V_1) \mathbf{\Pi}(\theta y^*) \mathbf{C}(\theta, y^*) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*), \quad (2.18)$$

с начальными условиями

$$V_0(+\infty) = 1, \quad V_1(+\infty) = 1, \quad (2.19)$$

где

$$\mathbf{\Pi}(\theta y^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-ik_0 y^* \theta\} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{C}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} \\ C_{1,0} & C_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$C_{0,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} (x_{2m} - x_0) z_{0,2m} \exp \left\{ ik_0 (x_{2m} - x_0) \theta^2 / 2 \right\}, \quad (2.22)$$

$$C_{1,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} (x_{2m+1} - x_0) z_{0,2m+1} \exp \left\{ ik_0 (x_{2m+1} - x_0) \theta^2 / 2 \right\}, \quad (2.23)$$

$$C_{0,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} (x_{2m+2} - x_1) z_{1,2m+2} \exp \left\{ ik_0 (x_{2m+2} - x_1) \theta^2 / 2 \right\}, \quad (2.24)$$

$$C_{1,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} (x_{2m+1} - x_1) z_{1,2m+1} \exp \left\{ ik_0 (x_{2m+1} - x_1) \theta^2 / 2 \right\}. \quad (2.25)$$

Для вывода спектрального уравнения воспользуемся формулой (2.13). Зафиксируем  $m$  (как 0 или 1). Введем семейство задач, имеющих такие же значения  $x_n$ , как (2.1), но иные значения  $y'_m$ :

$$y'_n = y_n + \alpha(x_n - x_m).$$

Обозначим краевые функции Грина семейства как  $v_n(\alpha, x, y)$ . Прямой проверкой можно убедиться, что  $v_n(\alpha, x, y)$  связано с  $v_n(x, y)$  следующим соотношением:

$$v_n(\alpha, x, y) = v_n(x, y - \alpha(x - x_m)) \exp\{ik_0\alpha(y - y_m) + ik_0\alpha^2(x - x_m)/2\}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$K_m[v_m] = -\frac{\partial v_m}{\partial \alpha}, \quad (2.26)$$

где

$$K_m = (x - x_m) \frac{\partial}{\partial y} - ik_0 y \quad (2.27)$$

– оператор параболического поворота.

Применим к  $v_n(\alpha, x, y)$  формулу (2.13) и положим  $\alpha = 0$ . Учитывая (2.26), имеем

$$K_m[v_m](x, y) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (x_n - x_m) z_{m,n} v_n(x, y).$$

Переходя в последней формуле от полей к диаграммам направленности, получим (2.18).

Переформулируем спектральное уравнение в более общем виде.

**Утверждение 2.4.** *Выполняется обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \mathbf{\Pi}(\theta y^*) \mathbf{C}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*), \quad (2.28)$$

где

$$\bar{V}_{0,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l,0}(\theta) \exp\{ik_0(x_{2l} - x_0)p\}, \quad (2.29)$$

$$\bar{V}_{1,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l+1,0}(\theta) \exp\{ik_0(x_{2l+1} - x_0)p\}, \quad (2.30)$$

$$\bar{V}_{0,1}(\theta, p) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{V}_{2l,1}(\theta) \exp\{ik_0(x_{2l} - x_1)p\}, \quad (2.31)$$

$$\bar{V}_{1,1}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l+1,1}(\theta) \exp\{ik_0(x_{2l+1} - x_1)p\} \quad (2.32)$$

для

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{m,n}(\theta) = & \\ & - \exp\{ik_0(x_m - x_n)\theta^2/2\} \int_{-\infty}^{y_m} v_n(x_m - 0, y) \exp\{-ik_0\theta(y - y_n)\} dy, \quad m > n, \quad (2.33) \\ & \tilde{V}_{m,m}(\theta) \equiv 1, \\ & \tilde{V}_{m,n}(\theta) \equiv 0, \quad m < n, \end{aligned}$$

а  $p$  — произвольный комплексный параметр с неотрицательной мнимой частью.

Величины  $\bar{V}_{0,0}(\theta, p)$  связаны с диаграммами направленности следующим образом:

$$V_0(\theta) = \bar{V}_{0,0}(\theta, 0) + \bar{V}_{1,0}(\theta, 0), \quad V_1(\theta) = \bar{V}_{0,1}(\theta, 0) + \bar{V}_{1,1}(\theta, 0). \quad (2.34)$$

Данные соотношения следуют из формулы, аналогичной формуле (1.68), которая в данном случае имеет вид:

$$V_m(\theta) = 1 - \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp\left\{ik_0\frac{\theta^2}{2}(x_n - x_m)\right\} \int_{-\infty}^{y_n} v_m(x_n - 0, y) \exp\{ik_0\theta(y_m - y)\} dy. \quad (2.35)$$

Смысл величин, введенных выше, можно пояснить следующим образом. Формула (2.35) выражает диаграмму направленности краевой функции Грина через интегралы от поля на поверхностях экранов. Первый член, не содержащий интеграл (единица) представляет собой вклад непосредственно от точечного источника. Параметр  $p$  не имеет физического смысла и представляет собой переменную дискретного преобразования Фурье по номеру экрана. При  $p = 0$  из (2.28) следует спектральное уравнение (2.18).

Таким образом, если бы была построена матрица  $\mathbf{C}(\theta)$ , можно было бы определить диаграммы направленности  $V_0, V_1$  путем непосредственного интегрирования спектрального уравнения (2.18) с начальными условиями (2.19).

Формулы (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) не могут быть использованы для непосредственного построения коэффициента  $\mathbf{C}(\theta)$ , поскольку входящие в них ряды сходятся медленно. Ниже используется другая техника (основанная ОЕ—уравнении или на эволюционном уравнении) для определения  $\mathbf{C}(\theta)$ .

## 2.6. ОЕ—обозначения

Рассмотрим матричное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(\tau) \mathbf{K}(\tau), \quad (2.36)$$

где  $\mathbf{X}(\tau)$ ,  $\mathbf{X}(\tau)$  матричные функции размерности  $2 \times 2$ , зависящие от комплексной переменной  $\tau$ ,  $\mathbf{K}(\tau)$  – коэффициент уравнения,  $\mathbf{X}(\tau)$  – неизвестная матричная функция. Пусть начальное условие имеет следующий вид

$$\mathbf{X}(\tau_1) = \mathbf{I}.$$

Будем решать уравнение (2.36) вдоль контура  $h$  с началом в точке  $\tau_1$  и концом в точке  $\tau_2$ .

Тогда по определению

$$\text{OE}_h^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau] \equiv \mathbf{X}(\tau_2). \quad (2.37)$$

Будем называть оператор  $\text{OE}_h^R$  упорядоченной экспонентой, взятой по контуру  $h$ . Верхний индекс  $R$  указывает на то, что коэффициент  $\mathbf{K}(\tau)$  стоит справа в уравнении (2.36). Для уравнения вида

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\mathbf{X}}(\tau) = \tilde{\mathbf{K}}(\tau) \tilde{\mathbf{X}}(\tau) \quad (2.38)$$

аналогичным образом можно ввести левую упорядоченную экспоненту  $\text{OE}_h^L$ .

Перечислим очевидные свойства упорядоченной экспоненты:

- Пусть  $h'$  является контуром  $h$ , проходимым в обратном направлении. Тогда

$$\text{OE}_{h'}^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau] = (\text{OE}_h^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau])^{-1} \quad (2.39)$$

$$\text{OE}_{h'}^L [d\tau \mathbf{K}(\tau)] = (\text{OE}_h^L [d\tau \mathbf{K}(\tau)])^{-1} \quad (2.40)$$

- Пусть  $h$  является конкатенацией двух контуров  $h_1$  и  $h_2$ , причем сначала проходится контур  $h_1$ , а затем  $h_2$ . Тогда

$$\text{OE}_h^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau] = \text{OE}_{h_1}^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau] \text{OE}_{h_2}^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau], \quad (2.41)$$

$$\text{OE}_h^L [d\tau \mathbf{K}(\tau)] = \text{OE}_{h_2}^L [d\tau \mathbf{K}(\tau)] \text{OE}_{h_1}^L [d\tau \mathbf{K}(\tau)]. \quad (2.42)$$

## 2.7. OE—уравнение

Покажем, что спектральное уравнение (2.28) может быть дополнено двумя условиями при  $\theta = +\infty$  и  $\theta = -\infty$ :

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}(p), \quad (2.44)$$

где

$$\mathbf{T}(p) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{ik_0ap\} \\ -\exp\{ik_0ap\} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Для этого вычислим явно величины  $\bar{V}_{0,0}, \bar{V}_{1,0}, \bar{V}_{0,1}, \bar{V}_{1,1}$  при  $\theta \rightarrow \pm\infty$  с помощью (2.29 - 2.32) и (2.33). Действительно

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{V}_{n+1,n} = 0, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \tilde{V}_{n+1,n} &= -\exp\{ik_0a\theta^2/2\} \int_{-\infty}^{y_{n+1}} g(a-0, y) \exp\{-ik_0\theta(y-y_n)\} dy = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y_{n+1}-y_n-\theta\sqrt{2a}/(2k_0)} e^{iz^2} dz = -1. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Учитывая, что  $\tilde{V}_{n,n} = 1$  получаем пределы (2.43) и (2.44) при условии, что все остальные члены (т.е.  $\tilde{V}_{m,n}(\theta), m > n+1$ ) стремятся к нулю при  $|\theta| \rightarrow \infty$ . Это следует из того, что  $L^2$ -норма членов  $\tilde{V}_{m,n}(\theta), m > n+1$  конечна и растет с ростом  $m$  не более чем степенным образом. Подробное доказательство последнего утверждения может быть найдено в [2].

Таким образом, функция  $\mathbf{C}(\theta)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\text{OE}_{\gamma}^R[\mathbf{\Pi}(\theta y^*) \mathbf{C}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*) d\theta] = \mathbf{T}(p) \quad (2.48)$$

для любого  $p$  при  $\text{Im}[p] \geq 0$ , контур  $\gamma$  представляет собой действительную ось, проходимую в отрицательном направлении. В левой части  $\theta$  рассматривается как немая переменная, а  $p$  как параметр.

Уравнение (2.48) будем называть ОЕ—уравнением. ОЕ—уравнение представляет собой задачу подбора неизвестного коэффициента обыкновенного матричного дифференциального уравнения по известным граничным условиям. ОЕ—уравнение (2.48) образует однопараметрическое семейство по параметру  $p$ . Наличие такого семейства позволяет построить численное решение уравнения путем подбора неизвестного коэффициента  $\mathbf{C}(\theta)$  при каждом заданном значении параметра  $p$ .

## 2.8. Эволюционное уравнение 1 типа

Введем матрицу:

$$\mathbf{D}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} \\ D_{1,0} & D_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

$$D_{0,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} z_{0,2m} \exp\{ik_0(x_{2m} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (2.50)$$

$$D_{1,0}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{0,2m+1} \exp \left\{ ik_0(x_{2m+1} - x_0)\theta^2/2 \right\}, \quad (2.51)$$

$$D_{0,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{1,2m+2} \exp \left\{ ik_0(x_{2m+2} - x_1)\theta^2/2 \right\}, \quad (2.52)$$

$$D_{1,1}(\theta, y^*) = \sum_{m=1}^{\infty} z_{1,2m+1} \exp \left\{ ik_0(x_{2m+1} - x_1)\theta^2/2 \right\}. \quad (2.53)$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{C} = \frac{1}{ik_0\theta} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta}. \quad (2.54)$$

**Утверждение 2.5.** Вектор-строка из диаграмм направленности  $(V_0(\theta), V_1(\theta))$  удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению по параметру  $y^*$ :

$$\frac{d}{dy^*}(V_0, V_1) = (V_0, V_1)\mathbf{\Pi}(\theta y^*)\tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*)\mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*), \quad (2.55)$$

где

$$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & D_{0,1} \\ -D_{1,0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Для доказательства этой теоремы воспользуемся формулой (2.13). В качестве параметра  $\alpha$  возьмем  $y^*$ . Получим

$$\frac{\partial v_m(x, y)}{\partial y^*} = - \sum_{n=m+1}^{\infty} (\psi_n - \psi_m) z_{m,n} v_n(x, y) - \psi_m \frac{\partial v_m(x, y)}{\partial y},$$

где  $\psi_n = 1$  для нечетных  $n$  и  $\psi_n = 0$  для четных  $n$ . В частности,

$$\frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y^*} = - \sum_{l=0}^{\infty} z_{0,2l+1} v_{2l+1}(x, y), \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y^*} = \sum_{l=0}^{\infty} z_{1,2l+2} v_{2l+2}(x, y) - \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y}. \quad (2.58)$$

Переходя к диаграммам направленности, получим:

$$\frac{\partial V_0}{\partial y^*} = -V_1 \exp\{-ik_0\theta y^*\} \sum_{l=0}^{\infty} z_{0,2l+1} \exp \left\{ ik_0(x_{2l+1} - x_0)\frac{\theta^2}{2} \right\}, \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y^*} = V_0 \exp\{ik_0\theta y^*\} \sum_{l=0}^{\infty} z_{1,2l+2} \exp \left\{ ik_0(x_{2l+2} - x_1)\frac{\theta^2}{2} \right\}. \quad (2.60)$$

Последняя пара уравнений может быть переписана в виде (2.55). Теорема доказана.

Как и в случае спектрального уравнения, эволюционное уравнение может быть записано в более общем виде для величин  $\bar{V}_{m,n}(\theta, p)$ .

**Утверждение 2.6.** *Справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \Pi(\theta y^*) \tilde{\mathbf{D}}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (2.61)$$

Для доказательства данного утверждения вернемся к (2.57)–(2.58). Домножим правую и левую часть на

$$-\exp\{ik_0(x_m - x_n)\theta^2/2 - ik_0\theta(y - y_n)\}, \quad n = 0, 1$$

и проинтегрируем по линии  $x = x_m - 0$ ,  $-\infty < y < y_m$ . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,0}(\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} z_{0,2l+1} \exp\{ik_0(x_{2l+1} - x_0)\theta^2/2 - ik_0\theta y^*\} \tilde{V}_{m,2l+1} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,1}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} z_{1,2l+2} \exp\{ik_0(x_{2l+2} - x_1)\theta^2/2 + ik_0\theta y^*\} \tilde{V}_{m,2l+2} \quad (2.63)$$

Введем величины:

$$a_{l,n}(\theta) = z_{n,l} \exp\{ik_0(x_l - x_n)\theta^2/2\}. \quad (2.64)$$

Уравнения (2.62) - (2.63) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,0}(\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,0} \tilde{V}_{m,2l+1}(\theta) \exp\{-ik_0\theta y^*\} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \tilde{V}_{m,1}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+2,1} \tilde{V}_{m,2l+2}(\theta) \exp\{ik_0\theta y^*\} \quad (2.66)$$

Заметим, что функции  $\tilde{V}_{m,n}$  и коэффициенты  $a_{l,n}$  удовлетворяют условиям периодичности

$$\tilde{V}_{m,n}(\theta) = \tilde{V}_{m+2,n+2}(\theta), \quad a_{m,n}(\theta) = a_{m+2,n+2}(\theta).$$

Кроме того, правые части уравнений имеют сверточный характер. Эти обстоятельства позволяют применить к уравнениям (2.65) и (2.66) дискретное преобразование Фурье. Домножим (2.65) и (2.66) на  $\exp\{ik_0(x_m - x_n)p\}$  для произвольного  $p$  с  $\text{Im}[p] \geq 0$  и просуммируем по всем  $m$ . В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \Pi(\theta y^*) \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_{0,1} \\ -\bar{a}_{1,0} & 0 \end{pmatrix} \Pi^{-1}(\theta y^*), \quad (2.67)$$

где

$$\bar{a}_{1,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,0}(\theta) \exp\{ik_0(x_{2l+1} - x_0)p\}, \quad (2.68)$$

$$\bar{a}_{0,1}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+2,1}(\theta) \exp\{ik_0(x_{2l+2} - x_1)p\}. \quad (2.69)$$

Кроме того, сравнивая (2.51)–(2.52) с (2.68)–(2.69), получаем

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_{0,1} \\ -\bar{a}_{1,0} & 0 \end{pmatrix}(\theta, p) = \tilde{\mathbf{D}}(\sqrt{\theta^2 + 2p}), \quad (2.70)$$

откуда и следует (2.55). Теорема доказана.

## 2.9. Эволюционное уравнение 2 типа

**Утверждение 2.7.** Матрица  $\mathbf{D}(\theta, y^*)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y^*} \right) = -k_0^2 y^* \theta \left[ \tilde{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\Xi} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta}, \tilde{\mathbf{D}} \right], \quad (2.71)$$

где

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

$[\cdot, \cdot]$  – коммутатор:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}, \quad (2.73)$$

$\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – произвольные матрицы.

Будем называть (2.71) эволюционным уравнением 2 типа.

Для доказательства рассмотрим уравнения (2.28) и (2.61), выписанные относительно матрицы  $(\bar{V}_{m,n})$  при  $p = 0$  и воспользуемся очевидным свойством:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y^*} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Раскрывая скобки в данном равенстве и исключая величины  $\bar{V}_{m,n}$ , получим матричное уравнение

$$\frac{1}{ik_0 \theta} \frac{\partial}{\partial y^*} \left( \boldsymbol{\Pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta} \boldsymbol{\Pi}^{-1} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \boldsymbol{\Pi} \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\Pi}^{-1} \right) + \frac{1}{ik_0 \theta} \boldsymbol{\Pi} \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta}, \tilde{\mathbf{D}} \right] \boldsymbol{\Pi}^{-1}. \quad (2.75)$$

Домножая уравнение слева на  $\boldsymbol{\Pi}^{-1}$  и справа на  $\boldsymbol{\Pi}$ , а также учитывая, что

$$\boldsymbol{\Pi}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial y^*} = -ik_0 \theta \boldsymbol{\Xi}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}^{-1}}{\partial y^*} \boldsymbol{\Pi} = ik_0 \theta \boldsymbol{\Xi}, \quad (2.76)$$

получаем (2.71). Теорема доказана.

Интегрируя эволюционное уравнение 2-го типа при  $y^* = 0$ , имеем

$$\frac{\partial \mathbf{D}(\theta, 0)}{\partial y^*} = \begin{pmatrix} (D_{0,1})^2 & 0 \\ 0 & -(D_{0,1})^2 \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Выражение для  $D_{0,1}(\theta, 0)$  может быть определено с помощью (2.52):

$$D_{0,1}(\theta, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} z_{0,2m+1} \exp \{ ik_0(x_{2m+1})\theta^2/2 \}, \quad (2.78)$$

Величины  $z_{0,n}$  при  $y^* = 0$  представляется следующими вложенными интегралами:

$$z_{0,n} = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g(a, y_1) g(a, y_2 - y_1) \dots g(a, y_n - y_{n-1}) g(x - x_n, y - y_n) dy_1 \dots dy_n. \quad (2.79)$$

Интегралы вида (2.79) вычислены явно в [98].

$$z_{0,n} = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi ai}} \frac{1}{(n+1)^{3/2}}. \quad (2.80)$$

Получаем

$$D_{0,1}(\theta, 0) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi ai}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{ink_0 a \theta^2/2}}{n^{3/2}} - \frac{e^{ink_0 a \theta^2}}{(2n)^{3/2}} \right) \quad (2.81)$$

Из (2.77) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial y^*}(\theta, 0) = 0. \quad (2.82)$$

Таким образом матрица  $\tilde{\mathbf{D}}$  при  $y^* \sqrt{k_0/a} \ll 1$  дается следующим выражением:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*) = \tilde{\mathbf{D}}(\theta, 0) + O \left( \left( y^* \sqrt{k_0/a} \right)^2 \right), \quad (2.83)$$

где

$$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, 0) = \begin{pmatrix} 0 & D_{0,1}(\theta, 0) \\ -D_{0,1}(\theta, 0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

## 2.10. Асимптотическая оценка коэффициента $R_0$

Введем следующее обозначение:

$$\varsigma = y^* \sqrt{k_0/a}. \quad (2.85)$$

Вернемся к рассмотрению эволюционного уравнения 1 типа (2.55). Будем искать решение в виде разложения по малому параметру  $\varsigma$ :

$$V_m(\theta, y^*) = V^{(0)}(\theta) + \varsigma V_m^{(1)}(\theta) + \varsigma^2 V_m^{(2)}(\theta) + \dots, \quad m = 0, 1, \quad (2.86)$$

где  $V^{(0)}$  — решение классической задачи Вайнштейна (случай  $y^* = 0$ ), которое вычисляется явно и имеет следующий вид [7]:

$$V^0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\theta \sqrt{-in/2k_0 a})}{n} \right\}, \quad (2.87)$$

где  $\operatorname{erfc}(z)$  — дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (2.88)$$

Подставляя (2.83) и (2.86) в (2.55) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varsigma$ , получим в первом приближении:

$$V_m = V^0 - (-1)^m D_{0,1}(\theta, 0) V^0(\theta) \varsigma + \dots \quad (2.89)$$

Подставляя (2.89) в формулу расщепления (2.14), легко видеть, что линейный член по  $\varsigma$  не дает вклада в коэффициент отражения  $R_0$ . Такой результат представляется очевидным с точки зрения симметрии задачи, так как при замене  $y^*$  на  $-y^*$  геометрия задачи не меняется.

Чтобы определить квадратичную поправку по  $\varsigma$  к диаграммам направленности, необходимо воспользоваться соотношением (2.82), полученным с помощью эволюционного уравнения второго типа. А именно, в силу (2.55),

$$\frac{\partial^2}{\partial (y^*)^2} (V_0, V_1) = (V_0, V_1) \mathbf{\Pi} \left( \tilde{\mathbf{D}}^2 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial y^*} + ik_0 \theta [\tilde{\mathbf{D}}, \mathbf{\Xi}] \right) \mathbf{\Pi}^{-1}. \quad (2.90)$$

Заметим, что интерес представляет значение второй производной при  $y^* = 0$ , что дает  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}$ , где

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

— единичная матрица. Кроме того,

$$\tilde{\mathbf{D}} = [\mathbf{D}, \mathbf{\Xi}].$$

Учитывая (2.90) и (2.82), во втором приближении имеем

$$V_m = V^0 - (-1)^m D_{0,1}(\theta, 0) V^0(\theta) \varsigma - \frac{a}{k_0} \frac{\varsigma^2}{2} \left( (D_{0,1}(\theta, 0))^2 - ik_0 \theta D_{0,1}(\theta, 0) \right) V^0(\theta) + \dots \quad (2.92)$$

Подставляя выражение для диаграмм направленности в формулу расщепления, получим следующее выражение для коэффициента отражения  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{(V^0(\theta))^2 (1 + ia\theta D_{0,1}(\theta, 0) \varsigma^2)}{2ik_0 a \theta^2} + o(\varsigma^2). \quad (2.93)$$

При малых  $\theta$  формула (2.93) принимает следующий вид:

$$R_0 = -1 - \zeta \left( \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{k_0 a}{\pi}} (1 - i) \theta - \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{k_0 a}{\pi}} (1 + i) 2^{-5/2} (2\sqrt{2} - 1) \theta \varsigma^2 + o(\varsigma^2), \quad (2.94)$$

где

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

– дзета-функция Римана.

Аналогично результату Л. А. Вайнштейна, из (2.94) следует, что высокочастотные моды, близкие к частоте отсечки, в волноводе со смещенными стенками при  $y^* \sqrt{k_0/a} \ll 1$  имеют коэффициент отражения от торца волновода близкий к  $-1$ . Это следует из того, что поправка, содержащая  $\zeta^2$ , пропорциональна  $\theta$ .

В Главе 3 с помощью метода Винера—Хопфа—Фока показывается, что коэффициент  $R_0(\theta, y^*)$  стремится к  $-1$  при произвольных  $y^*$  в пределе  $\theta \rightarrow 0$ .

## 2.11. Оценка добротности резонаторов Фабри—Перо с помощью (2.94)

В качестве примера использования формулы (2.94) рассчитаем добротность резонаторов Фабри—Перо, изображенных на Рис. 2.1 б), в). Будем рассматривать дифракцию на открытых концах резонаторов независимо, т. е. будем считать, что резонатор представляет собой кусок плоского волновода, открытый с обоих концов. Очевидно, что после нескольких отражений от концов волновода выживут только моды, близкие к частоте отсечки (из формулы (2.94) следует, что такие моды почти полностью отражаются с коэффициентом отражения, близким к  $-1$ ). Эти моды образуют стоячие волны вида [8, 24]

$$\tilde{u}^{fp} = \sin(k_y^n y) \cos(k_x^m x), \quad (2.95)$$

где  $k_y^n$  и  $k_x^m$  – продольный и поперечный волновые вектора, определяемые из соотношений

$$\exp\{2ik_x^m a\} = 1, \quad (2.96)$$

$$R^1 R^2 \exp\{2ik_y^n H\} = 1, \quad (2.97)$$

где  $R^1$  и  $R^2$  – коэффициенты отражения от открытых концов резонатора, а  $H$  – размер резонатора по оси  $y$ . Угол  $\theta$ , под которым распространяется парциальная волна, связан с  $k_y^n$  и  $k_x^m$  очевидным образом:

$$\theta = \frac{k_y^n}{k_x^m}.$$

Из условия  $\theta \ll 1$  следует, что  $k_x^m \gg k_y^n$ . Тогда, из (2.94) имеем следующие выражения для коэффициентов отражения  $R^{1,2}$ :

$$R^{1,2} \approx -1 + \varepsilon(y_{1,2}^*), \quad (2.98)$$

где

$$\varepsilon(y^*) = -\zeta \left( \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{a}{\pi k_x^m}} (1-i) k_y^n - \zeta \left( \frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{k_x^m a}{\pi}} (1+i) 2^{-5/2} (2\sqrt{2} - 1) \left( y^* \sqrt{k_y^n/a} \right)^2,$$

а  $y_1^*$  и  $y_2^*$  введены на Рис. 2.1.

Из (2.96) и (2.97) следует, что

$$k_y^n = \frac{\pi n}{H} - \frac{\ln(-R^1) + \ln(-R^2)}{2iH}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.99)$$

$$k_x^m = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (2.100)$$

Собственные частоты резонатора вычисляются по формуле:

$$\omega_{mn}^2 = (k_x^m)^2 c^2 + (k_y^n)^2 c^2, \quad (2.101)$$

где  $c$  - скорость звука. Представим  $\omega_{mn}$  в виде суммы мнимой и действительной части:

$$\omega_{mn} = \omega'_{mn} - i\omega''_{mn}.$$

Интерес представляет мнимая часть  $\omega''_{mn}$ , отвечающая за дифракционные потери в резонаторе. Учитывая (2.101), имеем

$$\omega''_m = -\frac{\pi n c^2}{2H^2 \omega'} \operatorname{Re}[\ln(-R^1) + \ln(-R^2)], \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.102)$$

Пользуясь тем, что  $k_x^m \gg k_y^n$  получим

$$\omega' \approx \frac{\pi m c}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Отметим, что  $m$  предполагается большим, так как должно выполняться условие  $\theta \ll 1$ . С учетом того, что запасенная резонатором энергия  $E$  пропорциональна квадрату поля, имеем:

$$E \sim e^{-2\omega'' t},$$

где  $t$  - время. Наконец, добротность вычисляется по формуле

$$Q = -\omega' \frac{E}{dE/dt} = \frac{\omega'}{2\omega''} = -\frac{2H^2 \pi m^2}{a^2 n} (\operatorname{Re}[\ln(-R^1) + \ln(-R^2)])^{-1}. \quad (2.103)$$

На Рис. 2.3 представлен график зависимости добротности  $Q$  от  $y_1^* \sqrt{k_x^m/a}$  при  $n = 1$ ,  $m = 10$ ,  $k_x^m a = 31.4$ ,  $k_x^m H = 157.1$ ,  $y_2^* = 0$ .

## 2.12. Численное решение ОЕ—уравнения

Ниже вычисляется матрица коэффициентов  $\mathbf{C}$  ( $\sqrt{\theta^2 + 2p}$ ) путем численного решения ОЕ—уравнения (2.48), и определяется коэффициент генерации главного дифракционного максимума  $R_0$  с помощью спектрального уравнения (2.18) и формулы расщепления (2.14).

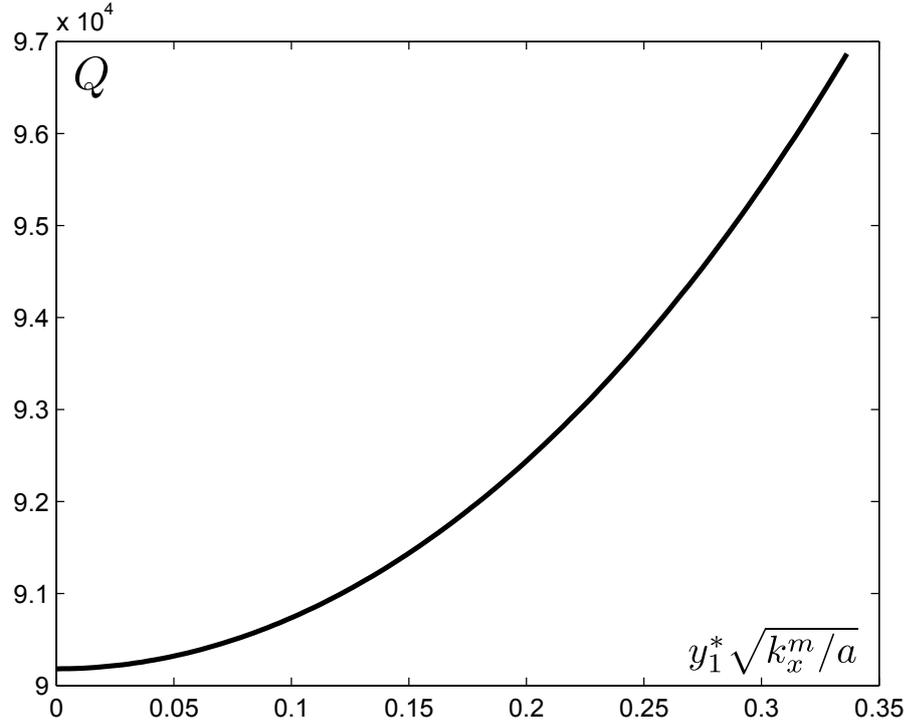


Рис. 2.3. График зависимости добротности  $Q$  от  $y_1^* \sqrt{k_x^m / a}$  при  $n = 1$ ,  $m = 10$ ,  $k_x^m a = 31.4$ ,  $k_x^m H = 157.1$ ,  $y_2^* = 0$

Введем новые переменные

$$\tau = k_0 a \theta^2 + \beta, \quad \beta = 2k_0 a p.$$

ОЕ—уравнение принимает следующий вид:

$$\text{OE}_{\gamma'(\beta)}^R \left[ \frac{\mathbf{B}(\tau, \beta) d\tau}{2\sqrt{k_0 a (\tau - \beta)}} \right] = \mathbf{T}'(\beta), \quad \text{Im}[\beta] \geq 0, \quad (2.104)$$

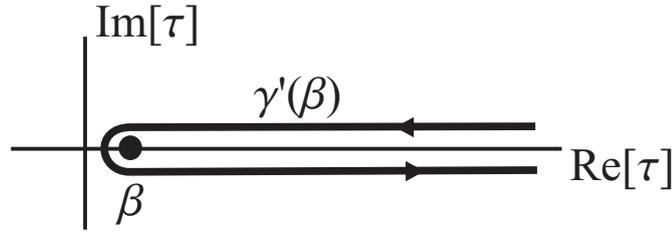
где

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\tau, \beta) &= \mathbf{\Pi} \left( \sqrt{\frac{\tau - \beta}{k_0 a}} \right) \mathbf{C}'(\tau) \mathbf{\Pi}^{-1} \left( \sqrt{\frac{\tau - \beta}{k_0 a}} \right), \\ \mathbf{T}'(\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{i\beta/2\} \\ -\exp\{i\beta/2\} & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}'(\tau) &= \mathbf{C} \left( \sqrt{\tau / (k_0 a)} \right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

а  $\tau$  изменяется вдоль контура  $\gamma$ , изображенного на Рис. 2.4.

Для расчета коэффициентов генерации  $R_m$  необходимо определить  $\mathbf{C}'(\tau)$  на положительном участке действительной оси. Однако матрица  $\mathbf{C}'(\tau)$  является периодической на отрезке  $(0, 2\pi)$ :

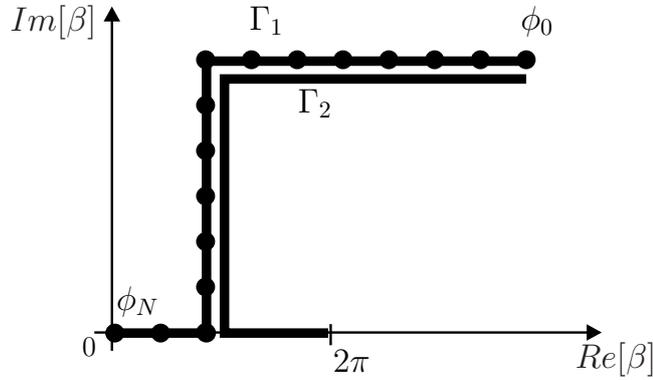
$$\mathbf{C}'(\tau + 2\pi n) = \mathbf{\Pi}_n \mathbf{C}'(\tau) \mathbf{\Pi}_n^{-1}, \quad (2.106)$$

Рис. 2.4. Контур  $\gamma'(\beta)$ .

где

$$\mathbf{\Pi}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-i\pi n\} \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

поэтому достаточно решить ОЕ—уравнение лишь на этом отрезке. На Рис. 2.5 изображены контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  вдоль которых решается ОЕ—уравнение. Будем решать ОЕ—уравнение

Рис. 2.5. Контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

градиентным методом. Начальная точка  $\phi_0$  имеет достаточно большую мнимую часть, такую, что можно положить

$$C'(\phi_0) = 0.$$

Разобьем контур  $\Gamma_1$  на маленькие отрезки с помощью достаточного количества узлов  $\phi_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Пусть  $\phi_N = \epsilon$ , где  $\epsilon$  — малое положительное число. Такой выбор узлов обусловлен тем, что ОЕ—уравнение имеет особенности в точках  $\beta = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Определим шаг за шагом  $\mathbf{C}$  в точках  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_N$ . Для этого на  $n$ -ом шаге решим ОЕ—уравнение (2.104) на отрезке  $(\phi_n, \phi_0)$  с параметром  $\beta = \phi_n$ . В процессе решения будем полагать, что коэффициент  $\mathbf{C}'(\tau)$  известен в узлах  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{n-1}$ . Коэффициент в точке  $\phi_n$  находится градиентным подбором так, чтобы на выбранном контуре выполнялось ОЕ—уравнение. В качестве начального значения выбирается значение в предыдущей точке:

$$C'(\tau)(\phi_0) = C'(\tau)(\phi_{n-1}). \quad (2.108)$$

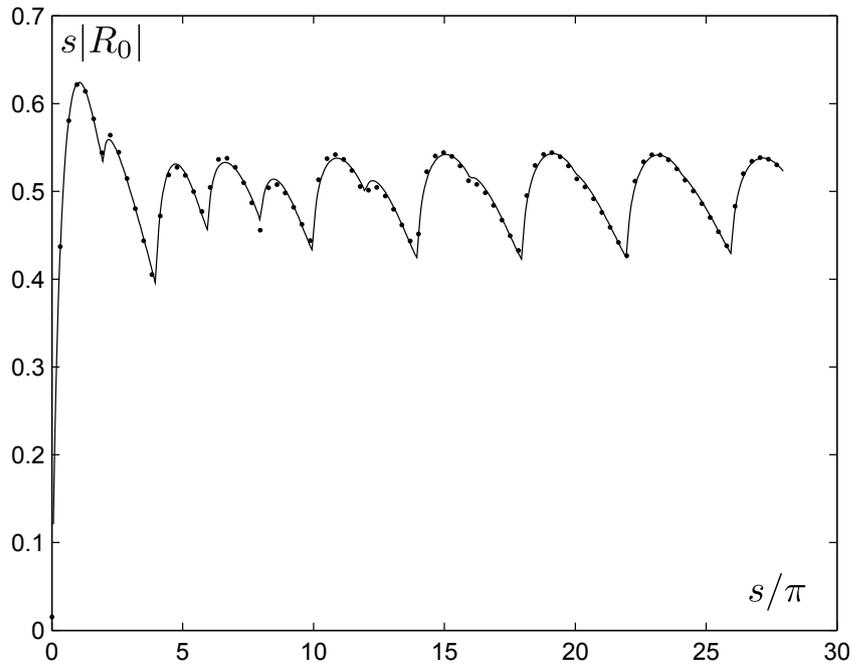


Рис. 2.6. Значения  $s|R_0(s)|$ , при  $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/4$ . Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету

Далее вычисляется невязка:

$$\text{OE}_\gamma^R \left[ \frac{\mathbf{B}(\tau, \phi_n)}{2\sqrt{k_0 a(\tau - \phi_n)}} \right] - \Gamma(\phi_n). \quad (2.109)$$

Если невязка не равна нулю, будем уменьшать невязку до тех пор, пока не достигнем нужной точности. После этого переходим к шагу  $n + 1$  и так далее.

Аналогичная процедура повторяется с контуром  $\Gamma_2$ . После этого все коэффициенты  $\mathbf{C}(\tau)$  становятся известными. Далее решается спектральное уравнение (2.18) вдоль контуров  $\Gamma_{1,2}$ ,  $\Gamma_{1,2} + 2\pi$ ,  $\Gamma_{1,2} + 4\pi$  и так далее. Таким образом становятся известными диаграммы направленности  $V_0, V_1$ . Наконец, применяя формулу расщепления (2.14), получаем коэффициенты генерации дифракционных порядков  $R_m$ . Для проверки корректности вычисления коэффициентов генерации использовался прямой счет на основе интегральных формул вида (2.11). На Рис. 2.6 и Рис. 2.7 изображены графики зависимости  $s|R_0(s)|$ , где  $s = k_0 a(\theta^{\text{in}})^2$  при следующих значениях параметров:

$$\varsigma = 1/4, \quad \text{и} \quad \varsigma = 1/3.$$

Следует отметить, что численно вычислялись лишь диаграммы направленности крайних функций Грина. Формула расщепления не проверялась, так как метод формулы расщепления хорошо изучен (см. например [26]).

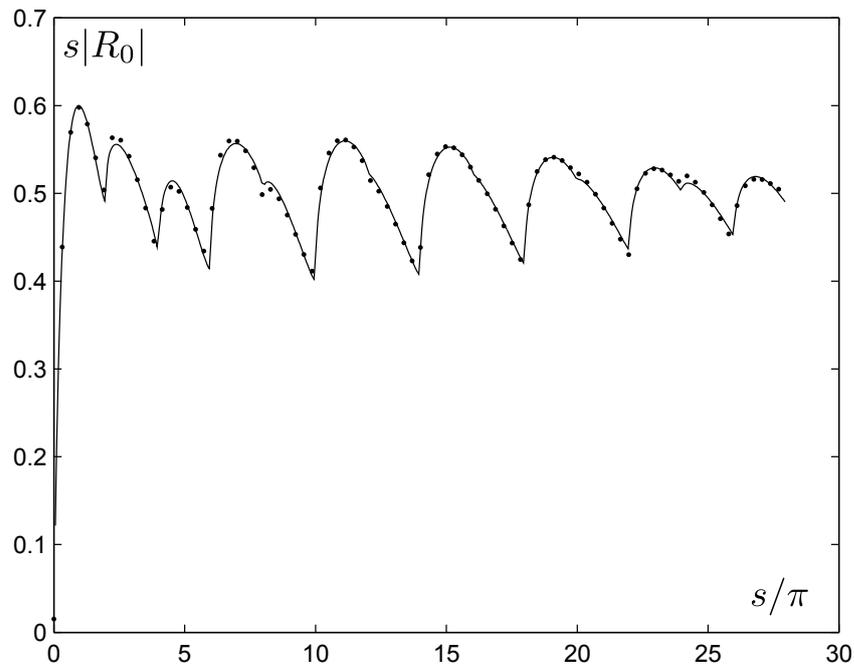


Рис. 2.7. Значения  $s|R_0(s)|$ , при  $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/3$ . Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету

### 2.13. Основные результаты главы

1. Для задачи дифракции на решетке, состоящей из экранов разной высоты, было получено спектральное уравнение, эволюционное уравнение 1 типа и эволюционное уравнение 2 типа.
2. Эволюционные уравнения 1 и 2 типа были решены в рамках методов теории возмущений. С помощью полученного решения была построена асимптотическая оценка коэффициента генерации главного дифракционного максимума  $R_0$  и получена формула для оценки добротности резонаторов Фабри-Перо, состоящих из параллельных несимметричных зеркал.
3. С помощью спектрального уравнения было сформулировано ОЕ—уравнение.
4. Был построен численный алгоритм решения ОЕ—уравнения на основе метода градиентного подбора .

## Описание вайнштейновских задач в рамках метода Винера—Хопфа—Фока

В данной главе вайнштейновские задачи рассматриваются в рамках метода Винера—Хопфа—Фока. А именно, рассматривается задача дифракции плоской волны на двухпериодической решетке, состоящей из поглощающих экранов разной высоты, изображенной на Рис. 3.1. Данная задача является чуть более общей по сравнению с задачей, рассмотренной в Главе 2, и переходит в нее при  $a = b$ . В терминах работы [8] к данной решетке приводит резонатор и бильярдная мода, изображенные на Рис. 3.2. Это квадратный резонатор со стороной  $d$  и угловым окном. Стороны, подходящие к окну, имеют длины  $h_1$  и  $h_2$ . Рассматривается мода, идущая вдоль диагонали. Применяя метод отражений к каждой из стенок резонатора, получим, что пучок соответствующий этой моде распространяется вдоль системы поглощающих экранов, изображенной на Рис. 3.3. При независимом рассмотрении актов дифракции на верхней и нижней решетке, исходная задача сводится к задаче дифракции на системе поглощающих экранов, изображенных на Рис. 3.1 с параметрами  $a = d\sqrt{2} + (h_1 + h_2)/\sqrt{2}$ ,  $b = d\sqrt{2} - (h_1 + h_2)/\sqrt{2}$ ,  $y^* = (h_1 - h_2)/\sqrt{2}$ .

В рамках техники Винера—Хопфа—Фока строится формальное решение матричной функциональной задачи. С помощью этого решения доказывается, что коэффициент отражения от рассматриваемой решетки стремится к  $-1$  при угле падения падающей плоской волны  $\theta^{\text{in}} \rightarrow 0$ , т. е. строится обобщение результата Л. А. Вайнштейна.

Стоит отметить, что рассмотрение производится в параболическом приближении, применимость которого была обоснована в Главе 1.

### 3.1. Постановка задачи

Рассматривается задача о рассеянии акустической волны на периодической решетке, состоящей из поглощающих экранов, показанной на Рис. 3.1. Период решетки равен  $a + b$ . Экраны занимают полупрямые  $\{x = (a + b)n, y < 0\}$  и  $\{x = a + (a + b)n, y < y^*\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

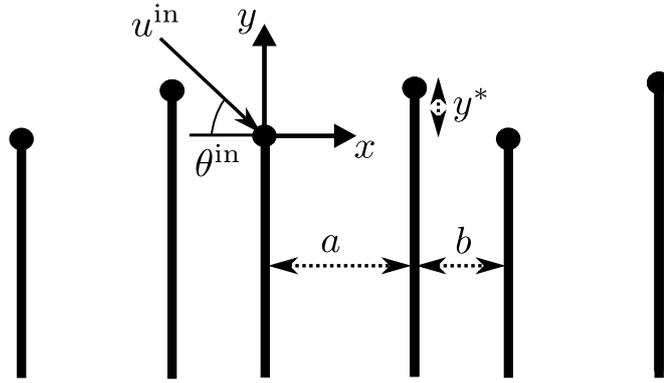


Рис. 3.1. Геометрия задачи

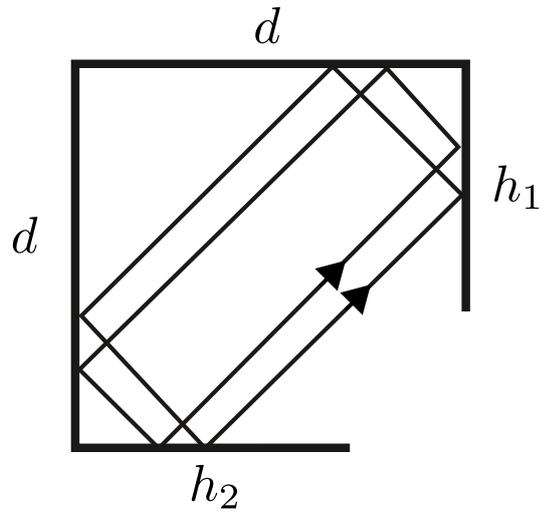


Рис. 3.2. Открытый резонатор и бильярдная мода

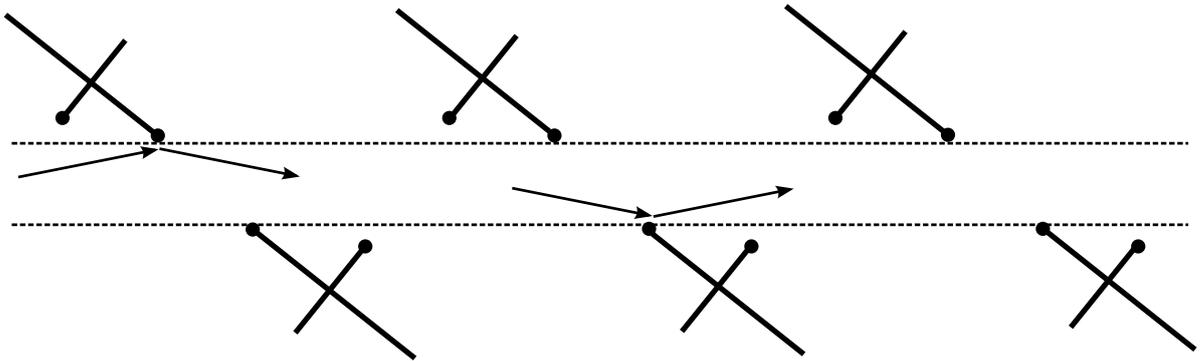


Рис. 3.3. Результат применения метода отражений к открытому резонатору. Сплошными линиями обозначены поглощающие экраны

Полное поле  $u$  в параболическом приближении удовлетворяет параболическому уравнению (0.2) и представляется суммой

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}},$$

где  $u^{\text{in}}$  – падающая плоская волна (см. (0.14)), а  $u^{\text{sc}}$  – рассеянное поле.

Вследствие периодичности, рассеянное поле  $u^{\text{sc}}$  может быть представлено в виде (1.13),

с

$$\theta_n = \sqrt{(\theta^{\text{in}})^2 + \frac{4\pi n}{ik_0(a+b)}}. \quad (3.1)$$

Ниже с помощью метода Винера—Хопфа—Фока будет показано, что

$$R_0 = -1 + \alpha\theta^{\text{in}} + o(\theta^{\text{in}}), \quad (3.2)$$

где  $\alpha$  – параметр, не зависящий от  $\theta^{\text{in}}$ . Иными словами, будет показано, что исследуемая решетка из поглощающих экранов ведет себя практически как идеальная граница, при скользких углах падения.

### 3.2. Вывод уравнений Винера—Хопфа—Фока

Введем функции

$$u_0(y) = \begin{cases} u^{\text{sc}}(0, y), & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

$$u_1(y) = \begin{cases} u^{\text{sc}}(a, y), & y > y^* \\ 0, & y < y^* \end{cases}, \quad (3.4)$$

$$\phi_0(y) = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ u^{\text{sc}}(-0, y), & y < 0 \end{cases}, \quad (3.5)$$

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 0, & y > y^* \\ u^{\text{sc}}(a-0, y), & y < y^* \end{cases}. \quad (3.6)$$

Аргументы  $x = -0$  и  $x = a - 0$  в формулах (3.5) и (3.6) означают, что значения берутся слева от экранов.

Заметим, что поскольку полное поле  $u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}$  справа от экранов равно нулю (экраны поглощающие), выполняются тождества

$$u^{\text{sc}}(+0, y) = -u^{\text{in}}(0, y), \quad y < 0, \quad (3.7)$$

$$u^{\text{sc}}(a+0, y) = -u^{\text{in}}(0, y), \quad y < y^*. \quad (3.8)$$

Далее воспользуемся интегральной формулой для параболического уравнения (0.3). Применяя (0.3) к полосе  $0 < x < a$ , получим:

$$u_1(y) + \phi_1(y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y') u_0(y') dy' - \int_{-\infty}^0 g(a, y - y') u^{\text{in}}(0, y') dy'. \quad (3.9)$$

Формула (0.3) может быть также применена к полосе  $a < x < a + b$ . Значения рассеянного поля на границе  $x = a + b - 0$  в силу принципа Флоке могут быть представлены как значения рассеянного поля при  $x = -0$ , домноженные на  $\exp\{-ik_0(a + b)(\theta^{\text{in}})^2/2\}$ :

$$\begin{aligned} & \exp\{-ik_0(a + b)(\theta^{\text{in}})^2/2\} (u_0(y) + \psi_0(y)) = \\ & \int_{y^*}^{\infty} g(a, y - y') u_1(y') dy' - \int_{-\infty}^{y^*} g(a, y - y') u^{\text{in}}(a, y') dy'. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Система (3.9), (3.10) может быть преобразована в систему интегральных уравнений, замкнутую относительно функций  $u_0$ ,  $u_1$ . Для этого достаточно рассматривать первое уравнение при  $y > y^*$ , а второе при  $y > 0$ . Для вывода уравнений Винера—Хопфа—Фока, однако, имеет смысл оставить уравнения (3.9), (3.10) в их настоящей форме с избыточным набором неизвестных, но действующих на всей оси  $y$ .

Введем односторонние преобразования Фурье:

$$U_0(k) = \int_0^{\infty} u_0(y) e^{iky} dy, \quad (3.11)$$

$$U_1(k) = \exp\{-iy^*k + ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2\} \int_{y^*}^{\infty} u_1(y) e^{iky} dy, \quad (3.12)$$

$$\Psi_0(k) = \int_{-\infty}^0 \psi_0(y) e^{iky} dy, \quad (3.13)$$

$$\Psi_1(k) = \exp\{-iy^*k + ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2\} \int_{-\infty}^{y^*} \psi_1(y) e^{iky} dy. \quad (3.14)$$

Заметим, что интегральные операторы в (3.9), (3.10) имеют сверточный характер (разностное ядро). Это позволяет применить теорему о свертке и выписать уравнения (3.9), (3.10) в матричной форме:

$$\Psi(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{U}(k) = \frac{1}{k - k^{\text{in}}}\mathbf{D}(k), \quad (3.15)$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\left\{-\frac{ib}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2) + iy^*k\right\} \\ -\exp\left\{-\frac{ia}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2) - iy^*k\right\} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{D}(k) = i \begin{pmatrix} \exp\left\{-\frac{ib}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2) + iy^*(k - k^{\text{in}})\right\} \\ \exp\left\{-\frac{ia}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2) - iy^*k\right\} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$k^{\text{in}} = k_0\theta^{\text{in}}.$$

Уравнение (3.15) должно быть дополнено ограничениями на неизвестные векторные функции  $\Psi(k)$ ,  $\mathbf{U}(k)$ , выполняемыми априори. Эти ограничения следуют из общих свойств одностороннего Фурье-преобразования. А именно, функция  $\Psi(k)$  должна быть аналитична в нижней полуплоскости аргумента, а функция  $\mathbf{U}(k)$  должна быть аналитична в верхней полуплоскости. Более того, элементарный анализ показывает, что функции  $u_0, \psi_0$  имеют разрыв при  $y = 0$ , а функции  $u_1$  и  $\psi_1$  имеют разрыв при  $y = y^*$ . По лемме Ватсона следует, что вектор  $\Psi(k)$  убывает как  $k^{-1}$  при больших  $|k|$  в нижней полуплоскости, а функция  $\mathbf{U}(k)$  убывает как  $k^{-1}$  в верхней полуплоскости. Данные ограничения и уравнение (3.15) образуют функциональную задачу Винера—Хопфа—Фока [9, 99].

Правую часть уравнения (3.15) удобно записать в эквивалентной форме:

$$\Psi(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{U}(k) = \frac{1}{k - k^{\text{in}}} (\mathbf{K}(k) - \mathbf{I}) \mathbf{r}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{r} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ -\exp\{-iy^*k^{\text{in}}\} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Для дальнейшего важно, что вектор  $\mathbf{r}$  не зависит от  $k$ . Как и раньше,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица  $2 \times 2$ .

Определитель матрицы  $\mathbf{K}$  равен

$$\det(\mathbf{K}(k)) = 1 - \exp\left\{-i\frac{(a+b)}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2)\right\}. \quad (3.21)$$

Нули определителя есть  $k = \pm k_0\theta_n$ . В соответствии с принципом предельного поглощения считаем, что точки  $k_0\theta_n$  принадлежат верхней полуплоскости (т.е. действительная ось обходит их снизу). Соответственно, точки  $-k_0\theta_n$  принадлежат нижней полуплоскости. В частности, точка  $k^{\text{in}} = \pm k_0\theta^{\text{in}}$  принадлежит верхней полуплоскости.

### 3.3. Формальное решение функциональной задачи

#### Винера—Хопфа—Фока

Отметим, что общее решение матричной задачи Винера—Хопфа—Фока неизвестно, и в данной работе оно не строится. Вместо этого с помощью метода, предложенного в [9], анализируется коэффициент зеркального отражения  $R_0$  при  $\theta^{\text{in}} \rightarrow 0$ .

Выпишем формальное решение функциональной задачи Винера—Хопфа—Фока [99]. Пусть известно разложение на множители (факторизация)

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_-(k)\mathbf{K}_+(k), \quad (3.22)$$

где  $\mathbf{K}_-$  и  $\mathbf{K}_+$  — матрицы, неособые и регулярные, соответственно, в нижней и верхней полуплоскости. Более того, мы предполагаем, что  $\mathbf{K}_- \rightarrow \mathbf{I}$  при  $|k| \rightarrow \infty$  в нижней полуплоскости,  $\mathbf{K}_+ \rightarrow \mathbf{I}$  при  $|k| \rightarrow \infty$  в верхней полуплоскости. Построение такого разложения составляет основную проблему решения матричной задачи Винера—Хопфа—Фока.

Домножим (3.19) на  $\mathbf{K}_-^{-1}$ :

$$\mathbf{K}_-^{-1}(k)\Psi(k) + \mathbf{K}_+(k)\mathbf{U}(k) = \frac{1}{k - k^{\text{in}}} (\mathbf{K}_+(k) - \mathbf{K}_-^{-1}(k)) \mathbf{r}. \quad (3.23)$$

Разложим правую часть на векторные функции  $\mathbf{F}_+(k)$  и  $\mathbf{F}_-(k)$ , регулярные и убывающие, соответственно в верхней и нижней полуплоскости:

$$\frac{1}{k - k^{\text{in}}} (\mathbf{K}_+(k) - \mathbf{K}_-^{-1}(k)) \mathbf{r} = \mathbf{F}_+(k) + \mathbf{F}_-(k). \quad (3.24)$$

В данном случае такое разложение может быть представлено явно:

$$\mathbf{F}_+(k) = \frac{1}{k - k^{\text{in}}} (\mathbf{K}_+(k) - \mathbf{K}_+(k^{\text{in}})) \mathbf{r} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{F}_-(k) = \frac{1}{k - k^{\text{in}}} (\mathbf{K}_+(k^{\text{in}}) - \mathbf{K}_-^{-1}(k)) \mathbf{r} \quad (3.26)$$

Перепишем уравнение (3.23) в виде

$$\mathbf{K}_-^{-1}(k)\Psi(k) - \mathbf{F}_-(k) = \mathbf{F}_+(k) - \mathbf{K}_+(k)\mathbf{U}(k) \quad (3.27)$$

В соответствии с логикой метода Винера—Хопфа—Фока замечаем, что левая часть регулярна и убывает в нижней полуплоскости, а правая часть регулярна и убывает в нижней полуплоскости. Поскольку левая и правая части представляют собой одну и ту же функцию, применяя теорему Лиувилля, заключаем, что эта функция тождественно равна нулю. Вследствии этого

$$\mathbf{K}_+(k)\mathbf{U} = \mathbf{F}_+(k) \quad (3.28)$$

и

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_+^{-1}(k)\mathbf{F}_+(k). \quad (3.29)$$

Обратим преобразование Фурье и построим  $u_0$ :

$$u_0(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1, 0)\mathbf{K}_+^{-1}(k)\mathbf{F}_+(k)e^{-iky}dk. \quad (3.30)$$

Здесь  $(1, 0)$  — вектор-строка из двух элементов.

Матрица  $\mathbf{K}(k)$  имеет нули определителя, в частности при  $k = -k\theta_n$  для всех целых  $n$ . Эти нули лежат в нижней полуплоскости, а потому достаются множителю  $\mathbf{K}_+$ . Рассмотрим точку  $k = -k_0 = -k^{\text{in}}$ . В этой точке (матричная) функция  $\mathbf{K}_+^{-1}(k)$  имеет простой полюс. Обозначим вычет подынтегрального выражения в этой точке как

$$\text{res} [(1, 0)\mathbf{K}_+^{-1}(k)\mathbf{F}_+(k), k = -k^{\text{in}}] = h. \quad (3.31)$$

Заметим, что

$$\mathbf{K}_+^{-1}(k)\mathbf{F}_+(k) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{K}_+^{-1}(k)\mathbf{K}_+(k^{\text{in}})\mathbf{r}}{k - k^{\text{in}}}, \quad (3.32)$$

поэтому

$$h = \frac{1}{2k^{\text{in}}}(1, 0)\text{res} [\mathbf{K}_+^{-1}, k = -k^{\text{in}}] \mathbf{K}_+(k^{\text{in}})\mathbf{r}. \quad (3.33)$$

Замкнем контур интегрирования в (3.30) большой дугой в нижней полуплоскости (поскольку экспоненциальный множитель убывает в нижней полуплоскости) и вычислим интеграл с помощью метода Коши (подынтегральная функция имеет только полюса и не имеет точек ветвления). В результате функция  $u_0$  окажется представлена в виде ряда по полюсам интегрального выражения:

$$u_0(y) = -i \sum_n \exp\{ik_0\theta_n y\} \text{res} [(1, 0)\mathbf{K}_+^{-1}(k)\mathbf{F}_+(k), k = -k_0\theta_n]. \quad (3.34)$$

Вклад в интеграл, соответствующий вычету в точке  $k = k^{\text{in}}$ , есть  $-ih \exp\{ik_0\theta_0 y\}$ . Сравнивая (3.34) с (1.13), получаем

$$R_0 = -ih. \quad (3.35)$$

### 3.4. Исследование коэффициента отражения в предельном случае

Применим технику Л. А. Вайнштейна для исследования коэффициента  $R_0$  при  $k^{\text{in}} \rightarrow 0$ . Сложность такого исследования представляют нули определителя матрицы  $\mathbf{K}(k)$ , расположенные в  $k = \pm k^{\text{in}}$ . Представим матрицу  $\mathbf{K}$  в виде

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{L}_-(k)\bar{\mathbf{K}}(k)\mathbf{L}_+(k), \quad (3.36)$$

где матрица  $\bar{\mathbf{K}}(k)$  регулярна как функция двух переменных при малых  $k$  и  $k^{\text{in}}$ , в частности, не имеет полюсов при  $k = \pm k^{\text{in}}$ . При этом пусть матрица  $\mathbf{L}_-(k)$  регулярна вместе со своей обратной матрицей в нижней полуплоскости и стремится там к  $\mathbf{I}$  при больших  $|k|$ . Соответственно, пусть матрица  $\mathbf{L}_+(k)$  регулярна вместе со своей обратной в верхней полуплоскости и стремится там к  $\mathbf{I}$  при больших  $|k|$ . Такие матрицы нетрудно подобрать, и ниже это будет сделано.

Пусть матрицы  $\bar{\mathbf{K}}_-$  и  $\bar{\mathbf{K}}_+$  осуществляют факторизацию матрицы  $\bar{\mathbf{K}}$ , т.е.

$$\bar{\mathbf{K}}(k) = \bar{\mathbf{K}}_-(k)\bar{\mathbf{K}}_+(k) \quad (3.37)$$

со всеми ограничениями. Тогда, очевидно

$$\mathbf{K}_-(k) = \mathbf{L}_-(k)\bar{\mathbf{K}}_-(k), \quad \mathbf{K}_+(k) = \bar{\mathbf{K}}_+(k)\mathbf{L}_+(k) \quad (3.38)$$

Матрицы  $\mathbf{L}_-$  и  $\mathbf{L}_+$  легко конструируются:

$$\mathbf{L}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-iy^*k^{\text{in}}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i/(k - k^{\text{in}} - i) \\ i/(k - k^{\text{in}} - i) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{iy^*k^{\text{in}}\} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{L}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{iy^*k^{\text{in}}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i/(k + k^{\text{in}} - i) \\ i/(k + k^{\text{in}} - i) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-iy^*k^{\text{in}}\} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Поясним структуру матрицы  $\mathbf{L}_-$ . Центральный множитель подобран так, что:

- матрица стремится к  $\mathbf{I}$  при больших  $|k|$ , определитель стремится к 1;
- определитель матрицы имеет нули при  $k = k^{\text{in}}$  и  $k = 2i + k^{\text{in}}$  (оба нуля лежат в верхней полуплоскости);

В результате умножения матрицы  $\mathbf{K}$  слева на  $\mathbf{L}_-^{-1}$  не просто приводит к уничтожению нуля определителя при  $k = k^{\text{in}}$ , но и гарантирует регулярность всех элементов произведения при этих значениях. Правый множитель нужен для того, чтобы всё произведение стремилось к  $\mathbf{I}$  при больших  $|k|$ .

Нетрудно явно проверить что матрица  $\bar{\mathbf{K}}(k) = \mathbf{L}_-^{-1}(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{L}_+^{-1}(k)$  не имеет особенностей в области малых (по сравнению с  $(a+b)^{-1}$ ) значений  $k$ . Матрицы  $\bar{\mathbf{K}}_+$  и  $\bar{\mathbf{K}}_-$  при малых значения переменных  $k$  и  $k^{\text{in}}$  неособые, а при малых значениях этих переменных они описываются линейными приращениями, например

$$\bar{\mathbf{K}}_+(k) = \mathbf{K}_0 + k\mathbf{K}_1 + k^{\text{in}}\mathbf{K}_2 + \dots \quad (3.41)$$

Вернемся к оценке  $R_0$ . Подставим (3.38), (3.39), и (3.41) в (3.33). При этом заметим, что вычет  $\text{res}[\mathbf{K}_+^{-1}(k), k = -k^{\text{in}}]$  имеет вид, следующий из (3.38), (3.39), и (3.41):

$$\text{res}[\mathbf{K}_+^{-1}, k = -k^{\text{in}}] = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & \exp\{-iy^*k^{\text{in}}\} \\ \exp\{iy^*k^{\text{in}}\} & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{K}_0 + k^{\text{in}}(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1) + \dots)^{-1},$$

а значение  $\mathbf{K}_+(k^{\text{in}})$  есть

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_+(k^{\text{in}}) &= (\mathbf{K}_0 + k^{\text{in}}(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1) + \dots)^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -1 + k^{\text{in}}(-2i + iy^*) + \dots \\ -1 + k^{\text{in}}(-2i - iy^*) + \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

В первом приближении по  $k^{\text{in}}$  выражение (3.33) дает

$$h = -i + O(k^{\text{in}}), \quad (3.43)$$

что соответствует

$$R_0 = -1 + O(k^{\text{in}}). \quad (3.44)$$

Таким образом, метод Л. А. Вайнштейна дает результат  $R_0 \rightarrow -1$  при  $\theta^{\text{in}} \rightarrow 0$  и в матричном случае.

### 3.5. Связь метода ОЕ—уравнения и метода Винера—Хопфа—Фока

Покажем, что спектральное уравнение (2.28) и ОЕ—уравнение (2.48), полученные в Главе 2, могут быть выведены непосредственно из функциональной задачи Винера—Хопфа—Фока.

Выпишем функциональное уравнение (3.22) в виде:

$$\mathbf{K}(k)\mathbf{K}_+^{-1}(k) = \mathbf{K}_-(k), \quad (3.45)$$

Заметим, что

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Pi}(ky^*/k_0)\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{\Pi}^{-1}(ky^*/k_0), \quad (3.46)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\left\{-\frac{ib(k^2-(k^{\text{in}})^2)}{2k_0}\right\} \\ -\exp\left\{-\frac{ia(k^2-(k^{\text{in}})^2)}{2k_0}\right\} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

а  $\mathbf{\Pi}$  дается формулой (2.20).

Все матрицы, участвующие в (3.45), зависят от двух переменных  $k$  и  $k^{\text{in}}$ . Функциональные ограничения на регулярность и рост формулируются только относительно переменной  $k$ . Переменная  $k^{\text{in}}$  выполняет роль фиксированного параметра.

При формулировке задачи Винера—Хопфа—Фока (глава 3, раздел 3.2) требовалось чтобы матрицы  $\mathbf{K}_-$  и  $\mathbf{K}_+$  были регуляры и стремились к  $\mathbf{I}$  в нижней и верхних полуплоскостях соответственно. Более тонкий анализ показывает, что матрица  $\mathbf{K}_-$  при  $|k| \rightarrow \infty$  в нижней полуплоскости и на отрицательной действительной полуоси ведет себя как

$$\mathbf{K}_- = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} k^{-n} \mathbf{C}_n(k^{\text{in}}) \quad (3.48)$$

с некоторыми неизвестными  $\mathbf{C}_n$ . Аналогичное представление справедливо для  $\mathbf{K}_+^{-1}$  в верхней полуплоскости и на положительной действительной полуоси. Более того, коэффициент  $\mathbf{C}_1$  быстро убывает с ростом  $k^{\text{in}}$  при  $0 < \text{Arg}[k^{\text{in}}] < \pi/2$  и  $\pi < \text{Arg}[k^{\text{in}}] < 3\pi/2$ .

Введем дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial k} + \frac{k}{k^{\text{in}}} \frac{\partial}{\partial k^{\text{in}}}. \quad (3.49)$$

Заметим, что

$$D[\mathbf{K}(k)] = iy^*(\mathbf{K}(k)\mathbf{\Xi} - \mathbf{\Xi}\mathbf{K}(k)) \equiv iy^*[\mathbf{K}(k), \mathbf{\Xi}], \quad (3.50)$$

где  $\mathbf{\Xi}$  дается формулой (2.72). Из (3.45) и (3.50) следует, что

$$\mathbf{K}_+ D[\mathbf{K}_+^{-1}] + iy^* \mathbf{K}_+ \mathbf{\Xi} \mathbf{K}_+^{-1} = \mathbf{K}_-^{-1} D[\mathbf{K}_-] + iy^* \mathbf{K}_-^{-1} \mathbf{\Xi} \mathbf{K}_-. \quad (3.51)$$

Из свойств матриц  $\mathbf{K}_+^{-1}$  и  $\mathbf{K}_-$  следует, что в правой и левой частях (3.51) стоят регулярные по переменной  $k$  матричные функции, растущие на бесконечности не быстрее константы. По теореме Лиувилля эти матричные функции равны константе на всей комплексной плоскости  $k$ . Из (3.48) следует, что эта константа равна

$$\mathbf{P}(k^{\text{in}}) \equiv \frac{1}{k^{\text{in}}} \frac{d\mathbf{C}_1}{dk^{\text{in}}} + iy^* \mathbf{\Xi}. \quad (3.52)$$

Отсюда матрицы  $\mathbf{K}_+^{-1}$  и  $\mathbf{K}_-$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial k} + \frac{k}{k^{\text{in}}} \frac{\partial}{\partial k^{\text{in}}} \right) \mathbf{A}(k, k^{\text{in}}) = \mathbf{A}(k, k^{\text{in}}) \frac{1}{k^{\text{in}}} \frac{d\mathbf{C}_1}{dk^{\text{in}}} + iy^* [\mathbf{A}(k, k^{\text{in}}), \mathbf{\Xi}]. \quad (3.53)$$

Вместо  $\mathbf{A}$  подставляется  $\mathbf{K}_+^{-1}$  или  $\mathbf{K}_-$ .

Перейдем от переменных  $(k, k^{\text{in}})$  к переменным  $(k_0\theta = -k, 2k_0p = (k^{\text{in}})^2 - k^2)$ . Введем матрицу

$$\tilde{\mathbf{V}}(\theta, p) \equiv \mathbf{\Pi}(\theta y^*) \mathbf{A}(k_0\theta, \sqrt{k^2 + 2p}) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*). \quad (3.54)$$

Для этой матрицы перепишем уравнение (3.53) как

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\mathbf{V}}(\theta, p) = \tilde{\mathbf{V}}(\theta, p) \mathbf{\Pi}(\theta y^*) \tilde{\mathbf{C}}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*), \quad (3.55)$$

где

$$\tilde{\mathbf{C}}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) = -\frac{d\mathbf{C}_1}{dp}(\sqrt{k\theta^2 + 2kp}).$$

Уравнение (3.55) является спектральным уравнением.

Выведем ОЕ—уравнение. С учетом областей аналитичности матриц  $\mathbf{K}_+^{-1}$  и  $\mathbf{K}_-$ , а также учитывая (3.54) запишем эти функции как

$$\mathbf{K}_-(k, k^{\text{in}}) = \text{OE}_{\gamma_1}^{\text{R}}[\mathbf{\Pi}(\theta y^*)\tilde{\mathbf{C}}(\sqrt{\theta^2 + ((k^{\text{in}})^2 - k^2)/k_0})\mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*)d\theta] \quad (3.56)$$

$$\mathbf{K}_+^{-1}(k, k^{\text{in}}) = \text{OE}_{\gamma_2}^{\text{R}}[\mathbf{\Pi}(\theta y^*)\tilde{\mathbf{C}}(\sqrt{\theta^2 + ((k^{\text{in}})^2 - k^2)/k_0})\mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*)d\theta] \quad (3.57)$$

Контур  $\gamma_1$  идет из бесконечности в точку  $k$  вдоль положительной действительной полуоси, контур  $\gamma_2$  также идет в точку  $k$ , но вдоль отрицательной действительной полуоси. Учитывая (3.54), (2.39) и (2.41), а также принимая во внимание функциональное уравнение  $\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_-(k)\mathbf{K}_+(k)$  получаем

$$\text{OE}_{\gamma}^{\text{R}}[\mathbf{\Pi}(\theta y^*)\tilde{\mathbf{C}}(\sqrt{\theta^2 + 2p})\mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*)d\theta] = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{-ibp\} \\ -\exp\{-iap\} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Здесь контур  $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$  представляет собой действительную ось, проходимую в отрицательном направлении как и в (2.48). ОЕ—уравнение (3.58) переходит в ОЕ—уравнение (2.48) при  $a = b$ .

### 3.6. Основные результаты главы

1. Для задачи дифракции на решетке, состоящей из поглощающих экранов разной высоты, была сформулирована функциональная задача Винера—Хопфа—Фока в параболическом приближении. Было построено формальное решение функциональной задачи.
2. Путем анализа формального решения задачи было показано, что коэффициент генерации главного дифракционного максимума  $R_0$  стремится к  $-1$  при угле падения стремящемся к  $0$ .
3. Спектральное уравнение и ОЕ—уравнение были получены непосредственно из функциональной задачи Винера—Хопфа—Фока.

## Глава 4

## Дифракция на импедансной полосе

## 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную плоскость  $(x, y)$ . Полоса занимает отрезок  $y = 0, -a < x < a$  (Рис. 0.1). На всей плоскости вне полосы выполняется уравнение Гельмгольца (1.1). Как и раньше, будем предполагать, что  $k_0$  обладает маленькой положительной мнимой частью в соответствии с принципом предельного поглощения. Зависимость от времени выбрана таким образом, что волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$ , имеет вид  $e^{ik_0x}$ . Полное поле представляется в виде суммы падающей плоской волны  $\tilde{u}^{\text{in}}$  и рассеяного поля  $\tilde{u}^{\text{sc}}$ :

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{\text{in}} + \tilde{u}^{\text{sc}}, \quad (4.1)$$

где

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{ik_0x \cos \theta^{\text{in}} - ik_0y \sin \theta^{\text{in}}\}. \quad (4.2)$$

Здесь  $\theta^{\text{in}}$  - угол падения, принимающий значения  $0 < \theta^{\text{in}} < \pi/2$ .

Полное поле должно быть непрерывным и удовлетворять на полосе граничным условиям

$$\pm \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, \pm 0) = \eta \tilde{u}(x, \pm 0), \quad -a < x < a. \quad (4.3)$$

Здесь  $\eta$  - импеданс полосы. Закон сохранения или диссипации энергии требует выполнения следующего условия:

$$\text{Im}[\eta] \leq 0. \quad (4.4)$$

Полное поле должно удовлетворять условиям Мейкснера около вершин  $(\pm a, 0)$ . А именно, “энергия” (интеграл от линейной комбинации величин  $|\nabla \tilde{u}|^2$  и  $|\tilde{u}|^2$ ) должна быть конечна в любой ограниченной области вблизи вершин.

Рассеянное поле также должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда:

$$\left( \frac{\partial \tilde{u}^{\text{sc}}}{\partial r} - ik_0 \tilde{u}^{\text{sc}} \right) = o(e^{ik_0r} (k_0r)^{-1/2}), \quad (4.5)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Таким образом, рассеянное поле может быть записано в виде:

$$\tilde{u}^{\text{sc}}(r, \theta) = \tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) \sqrt{\frac{k_0}{2\pi i r}} e^{ik_0r} + o(e^{ik_0r} (k_0r)^{-1/2}). \quad (4.6)$$

Здесь  $\tilde{\theta} = \arctan(y/x)$ ,  $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$  - диаграмма направленности рассеяного поля.

Требуется найти диаграмму направленности  $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$ .

## 4.2. Переход к параболическому приближению

Перейдем к рассмотрению дифракции высокочастотной волны при скользющем падении, то есть будем считать, что выполняются следующие условия:

$$k_0 a \gg 1, \quad \theta^{\text{in}} \ll 1. \quad (4.7)$$

Рассматривается волновой процесс, при котором волна распространяется почти параллельно оси  $x$ , а ее угловой спектр достаточно узок. При этом справедливо параболическое приближение [100]. Переход к параболическому приближению осуществляется следующим образом. Полное поле представляется в виде (1.10), а уравнение Гельмгольца заменяется параболическим уравнением (0.2).

Падающая волна в параболическом приближении дается формулой (0.14). Построим параболический аналог выражения (4.6). При фиксированных  $a$  и  $k_0$  на большом расстоянии от полосы рассеянное поле представимо в виде (0.16). Будем называть  $S(\theta, \theta^{\text{in}})$  диаграммой направленности параболической задачи. Сравнивая (0.16) с (4.6), получим связь между диаграммами направленности  $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$  и  $S(\theta, \theta^{\text{in}})$ :

$$S(\theta, \theta^{\text{in}}) \approx \tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) \quad (4.8)$$

Приближенный характер формулы связан с тем, что параболическое приближение справедливо только для узкой области углового спектра. Более того, формула  $\theta \approx \tilde{\theta}$  выполняется лишь для малых углов.

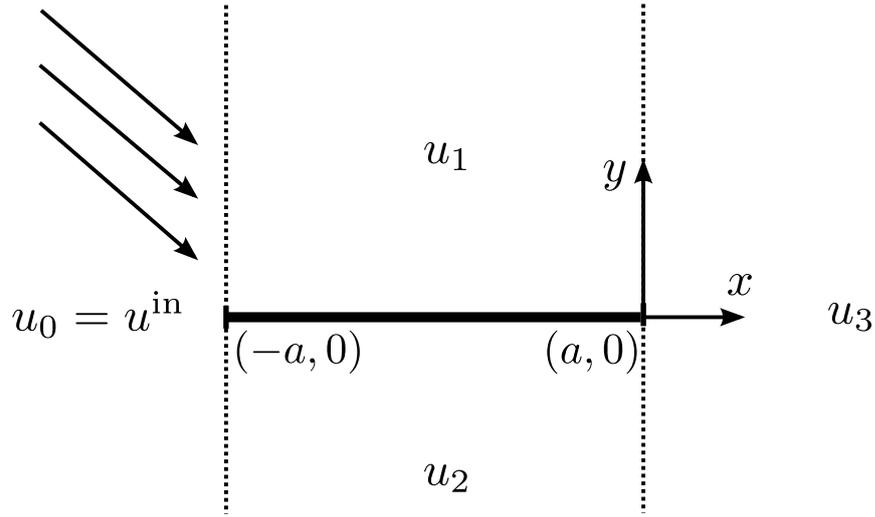
## 4.3. Рассмотрение задачи с импедансными граничными условиями методом Г. Д. Малюжинца

В монографии [101] был разработан метод, позволяющий сводить задачи с импедансными граничными условиями к задачам с условиями Дирихле. В нашем случае метод Г. Д. Малюжинца может быть изложен следующим образом. Вместо поля  $u(x, y)$  рассматривается поле

$$\zeta(x, y) = T_{\pm}[u(x, y)] \equiv \left( \pm \frac{\partial}{\partial y} - \eta \right) u(x, y). \quad (4.9)$$

Верхний знак для поля берется в верхней полуплоскости, а нижний – для поля в нижней. Операторы коммутируют с оператором параболического уравнения, т.е. результат удовлетворяет параболическому уравнению. В силу (4.3)  $\zeta(x, y)$  на границе удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\zeta(x, 0) = 0, \quad -a < x < a.$$

Рис. 4.1. Геометрия областей  $u_0, u_1, u_2, u_3$ 

Таким образом, необходимо найти решение задачи дифракции для полосы с граничными условиями Дирихле, а потом применить к полученному решению обратный оператор. Отметим, что необходимо отдельно искать обратный оператор  $T_+^{-1}$  в полуплоскости  $y > 0$  и обратный оператор  $T_-^{-1}$  в полуплоскости  $y < 0$ .

Вместо непосредственного вычисления обратных операторов, пойдём более простым путем – подберем решение, удовлетворяющее всем необходимым условиям.

#### 4.4. Решение параболического уравнения

Напомним основные свойства параболического уравнения. Во-первых, в силу того, что в (0.2) стоит первая производная по  $x$ , параболическое уравнение описывает только волны, распространяющиеся слева направо. Во-вторых, в любой области  $x' < x < x''$  без препятствий поле описывается интегральной формулой (0.3). Таким образом, если будет определено поле  $u(x, y)$  на прямой  $x = a, \infty > y > -\infty$ , задача будет решена. Естественно разбить плоскость на четыре области. Назовем поле в области  $\infty > y > -\infty, -\infty < x \leq -a$  символом  $u_0$ , поле в области  $y \geq 0, -a \leq x \leq a$  символом  $u_1$ , поле в области  $y \leq 0, -a \leq x \leq a$  символом  $u_2$ , поле в области  $x \geq a$  символом  $u_3$  (см. Рис. 4.1).

Поле  $u_0(x, y)$  представляет собой только падающую плоскую волну (0.14). Поле  $u_1(x, y)$  должно удовлетворять следующим условиям:

$$u_1(-a, y) = \exp\{ik_0a(\theta^{in})^2/2\} \exp\{-ik_0y\theta^{in}\}, \quad y > 0, \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \eta\right) u_1(x, 0) = 0, \quad -a < x < a, \quad (4.11)$$

а поле  $u_2(x, y)$  условиям

$$u_2(-a, y) = \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \exp \{ -ik_0 y \theta^{\text{in}} \}, \quad y < 0, \quad (4.12)$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} - \eta \right) u_2(x, 0) = 0, \quad -a < x < a, \quad (4.13)$$

Покажем, что выражения для полей

$$u_1(x, y) = \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(y') g(x + a, y - y') dy', \quad (4.14)$$

$$u_2(x, y) = \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(y') g(x + a, y - y') dy', \quad (4.15)$$

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \exp \{ -ik_0 \theta^{\text{in}} y \}, & y > 0, \\ -\frac{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 \theta^{\text{in}} y \} + \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ \eta y \}, & y < 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\psi_2(y) = \begin{cases} -\frac{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 \theta^{\text{in}} y \} + \frac{2\eta}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ -\eta y \}, & y > 0, \\ \exp \{ -ik_0 \theta^{\text{in}} y \}, & y < 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

удовлетворяет условиям (4.10-4.13). В качестве примера возьмем  $u_1(x, y)$ . Прежде всего, несмотря на наличие экспоненциально растущих множителей, сходимость интегралов обеспечивается малой положительной мнимой частью  $k$  и, как следствие, сверхэкспоненциальным убыванием функции Грина (0.4). Условие (4.10) гарантируется первой строчкой (4.16) и непрерывностью по  $x$  сверточной формулы (4.14). Перейдем ко второму условию. Применим оператор  $T_+$  к (4.14). Заметим, что оператор  $T_+$  коммутирует с интегральным оператором, т. е.

$$T_+[u_1(x, y)] = \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi_2(y')}{\partial y'} - \eta \psi_2(y') \right) g(x + a, y - y') dy'. \quad (4.18)$$

Далее,

$$\frac{\partial \psi_2(y)}{\partial y} - \eta \psi_2(y) = \begin{cases} -(\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}) \exp \{ -ik_0 \theta^{\text{in}} y \}, & y > 0, \\ (\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}) \exp \{ ik_0 \theta^{\text{in}} y \}, & y < 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Функция  $\psi_1$  непрерывна, поэтому (4.19) не содержит дельта-функции. Функция (4.19) нечетна, поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi_2(y')}{\partial y'} - \eta \psi_2(y') \right) g(x, 0 - y') dy' = 0. \quad (4.20)$$

Следовательно поле  $u_1(x, y)$  удовлетворяет условию (4.11). Формулы (4.14-4.15) дают представления полей  $u_1$  и  $u_2$ . Используя полученные значения на линии  $x' = a$ , можно вычислить поле  $u_3$  по формуле (0.3).

#### 4.5. Вычисление диаграммы направленности в параболическом приближении

Диаграмма направленности может быть вычислена по формуле

$$S(\theta, \theta^{\text{in}}) = \exp \left\{ ik_0 a \theta^2 / 2 \right\} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y) \exp \{ -ik_0 y \theta \} dy. \quad (4.21)$$

Последнее выражение следует из (0.3). Покажем это. Поле  $u^{\text{sc}}(x, y)$  при  $x > a$  записывается как

$$\begin{aligned} u^{\text{sc}}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y') g(x - a, y - y') dy' = \\ &= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi i(x - a)}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y') \exp \left\{ \frac{ik_0(y - y')^2}{2(x - a)} \right\} dy' \approx \\ &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i x}} \exp \left\{ \frac{iky^2}{2x} + ik_0 a \theta^2 / 2 \right\} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y') \exp \left\{ -\frac{ik_0 y y'}{x} + \frac{ik_0(y')^2}{2x} \right\} dy'. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В последнем выражении перейдем к пределу при больших  $x, y$  при постоянном  $\theta = y/x$ . Получим (0.16) с диаграммой (4.21).

Выделим в  $u_1$  и  $u_2$  рассеянные компоненты (вычитая  $u^{\text{in}}$ ). Воспользуемся тем, что для  $x_2 > x_1$

$$u^{\text{in}}(x_2, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{in}}(x_1, y') g(x_2 - x_1, y - y') dy', \quad (4.23)$$

так как  $u^{\text{in}}$  удовлетворяет параболическому уравнению. Тогда

$$u_1^{\text{sc}}(x, y) = \exp \left\{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \right\} \int_{-\infty}^0 \psi_1^{\text{sc}}(y') g(x + a, y - y') dy', \quad (4.24)$$

$$u_2^{\text{sc}}(x, y) = \exp \left\{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \right\} \int_0^{\infty} \psi_2^{\text{sc}}(y') g(x + a, y - y') dy', \quad (4.25)$$

$$\psi_1^{\text{sc}}(y) = -\frac{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 \theta^{\text{in}} y \} - \exp \{ -ik_0 \theta^{\text{in}} y \} + \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ \eta y \}, \quad (4.26)$$

$$\psi_2^{\text{sc}}(y) = -\frac{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 \theta^{\text{in}} y \} - \exp \{ -ik_0 \theta^{\text{in}} y \} + \frac{2\eta}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ -\eta y \}. \quad (4.27)$$

Теперь, используя (4.24)-(4.27) и (4.21), можно выписать диаграмму направленности:

$$\begin{aligned} S(\theta, \theta^{\text{in}}) &= \exp \left\{ ik_0 a \frac{(\theta^{\text{in}})^2 + \theta^2}{2} \right\} \left( -Y(-\theta, \theta^{\text{in}}) - \frac{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(-\theta, -\theta^{\text{in}}) \right. \\ &\left. - Y(\theta, -\theta^{\text{in}}) - \frac{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(\theta, \theta^{\text{in}}) + \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(i\eta/k_0, -\theta) + \frac{2\eta}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(-i\eta/k_0, \theta) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$Y(\theta_1, \theta_2) = \sqrt{\frac{k_0}{4\pi ia}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left\{ ik_0 \left( \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 + \frac{(y_1 + y_2)^2}{4a} \right) \right\} dy_1 dy_2. \quad (4.29)$$

Вычислим интеграл (4.29). Для этого запишем его в следующем виде:

$$Y(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp \{ ik_0(\theta_1 - \theta_2)y_1 \} \operatorname{erfc} \left( \left( \theta_2 + \frac{y_1}{2a} \right) \sqrt{\frac{k_0 a}{i}} \right) dy_1, \quad (4.30)$$

где  $\operatorname{erfc}(z)$  – дополнительная функция ошибок (см. определение (2.88)). Интегрируя (4.30) по частям, получим

$$Y(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2ik_0(\theta_1 - \theta_2)} \left( \exp\{-ik_0 a \theta_1^2\} \operatorname{erfc} \left( \theta_1 \sqrt{\frac{k_0 a}{i}} \right) - \exp\{-ik_0 a \theta_2^2\} \operatorname{erfc} \left( \theta_2 \sqrt{\frac{k_0 a}{i}} \right) \right). \quad (4.31)$$

Формулы (4.28) и (4.31) дают выражение диаграммы направленности в однократных квадратурах. Это и есть приближенное решение задачи дифракции на импедансном отрезке при падении под малым углом в параболическом приближении. Отметим, что это решение имеет расщепленный вид, то есть все функции, кроме элементарных, зависят только от  $\theta$  или от  $\theta^{\text{in}}$ .

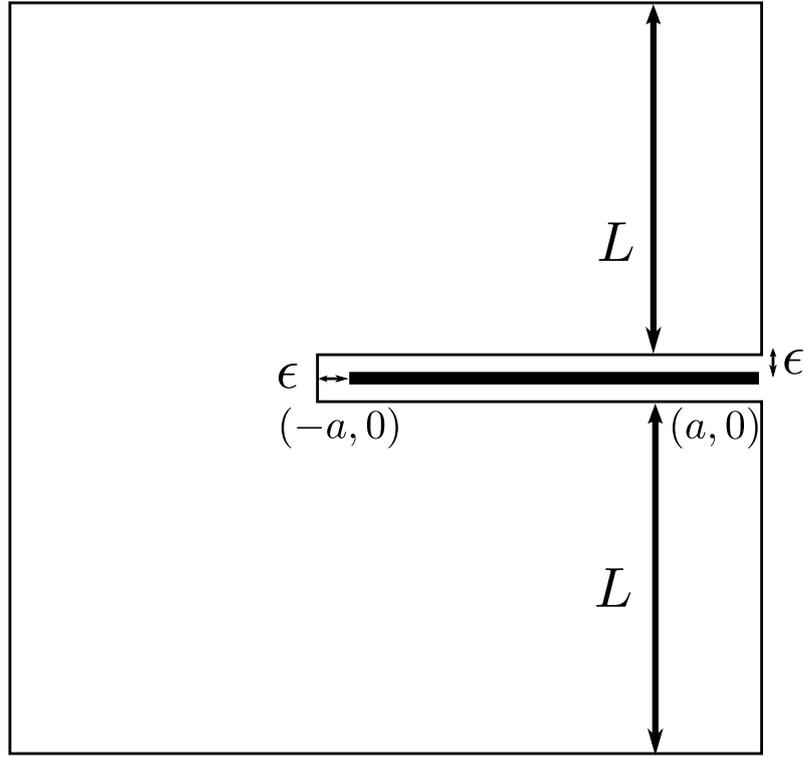
## 4.6. Оптическая теорема для параболической задачи

Важным инструментом проверки решения дифракционной задачи служит оптическая теорема, связывающая полное сечение рассеяния и амплитуду рассеяния вперед. Появление отрицательных величин в полном сечении рассеяния должно свидетельствовать о неправильности решения. Кроме того, полное сечение рассеяния является важной характеристикой дифракционного процесса. Ниже будет введено понятие полного сечения рассеяния и выведена оптическая теорема для параболического уравнения.

Будем называть полным сечением рассеяния величину

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |u^{\text{sc}}(x, y)|^2 dy, \quad (4.32)$$

вычисленную для некоторого  $x$  справа от рассеивателя. Пользуясь формулой (0.3), легко показать, что результат вычисления данного интеграла не зависит от  $x$ , при  $\operatorname{Im}[k] \rightarrow 0$ . Это следует из равенства Парсеваля и того факта, что модуль Фурье-образа функции  $g(x, y)$  тождественно равен 1. С помощью (4.21), принимая во внимание равенство Парсеваля, сечение

Рис. 4.2. Область интегрирования  $\Omega$  для вывода 4.35

рассеяние может быть выражено через диаграмму направленности:

$$\Sigma = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\theta, \theta^{\text{in}})|^2 d\theta. \quad (4.33)$$

Приступим к выводу оптической теоремы. Выразим коэффициент рассеяния вперед  $S(-\theta^{\text{in}}, \theta^{\text{in}})$  через поле на сторонах отрезка. Применим теорему Грина параболического уравнения (см. Главу 1, раздел 1.2.7, утверждение 1.1) с функциями  $\nu = u^{\text{sc}}, w = \bar{u}^{\text{in}}$  по области  $\Omega$ , изображенной на Рис. 4.2. Здесь  $\bar{u}^{\text{in}}$  – комплексно сопряженная плоская волна:

$$\bar{u}^{\text{in}} = \exp \left\{ ik_0 x \frac{(\theta^{\text{in}})^2}{2} + ik_0 y \theta^{\text{in}} \right\}. \quad (4.34)$$

После несложных алгебраических преобразований получим:

$$2ik_0 S(-\theta^{\text{in}}, \theta^{\text{in}}) = \eta \int_{-a}^a [u(x, +0) + u(x, -0)] \bar{u}^{\text{in}} dx - ik_0 \theta^{\text{in}} \int_{-a}^a [u^{\text{sc}}(x, +0) - u^{\text{sc}}(x, -0)] \bar{u}^{\text{in}} dx. \quad (4.35)$$

Здесь были учтены условия излучения, граничные условия (4.3), формула (0.3), и были взяты пределы  $\epsilon \rightarrow 0$  и  $L \rightarrow \infty$ .

Аналогичным образом можно получить комплексно сопряженное выражение:

$$2ik_0 \bar{S}(-\theta^{\text{in}}, \theta^{\text{in}}) =$$

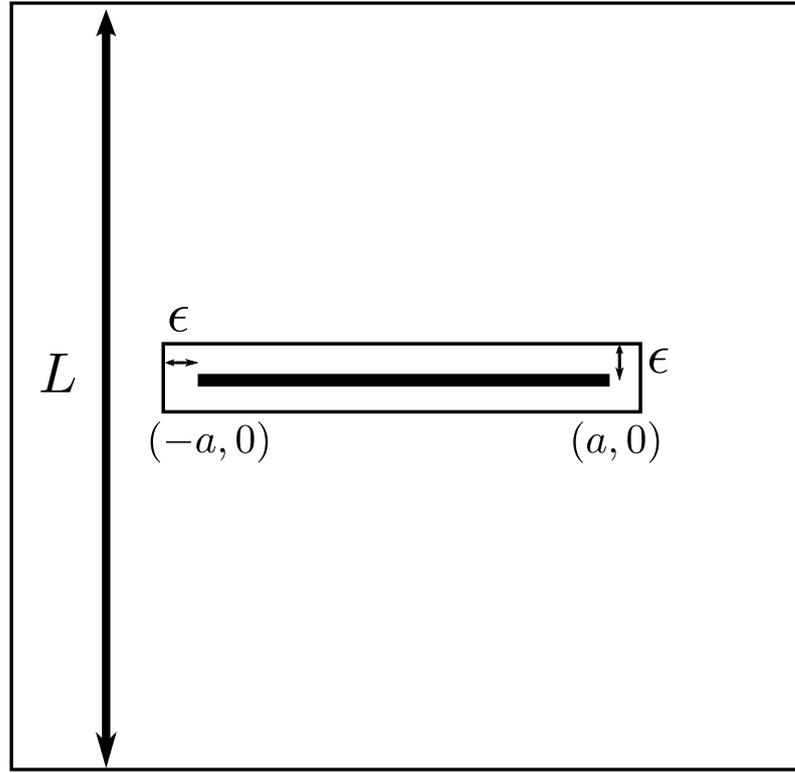


Рис. 4.3. Область интегрирования  $\Omega$  для вывода оптической теоремы

$$-\bar{\eta} \int_{-a}^a [\bar{u}(x, +0) + \bar{u}(x, -0)] u^{\text{in}} dx - ik_0 \theta^{\text{in}} \int_{-a}^a [\bar{u}^{\text{sc}}(x, +0) - \bar{u}^{\text{sc}}(x, -0)] u^{\text{in}} dx. \quad (4.36)$$

Далее, применим теорему Грина с функциями  $\nu = u^{\text{sc}}, w = \bar{u}^{\text{in}}$  по области  $\Omega$ , изображенной на Рис. 4.3. Устремляя  $\epsilon \rightarrow 0$  и  $L \rightarrow \infty$ , принимая во внимание условия излучения и тот факт, что рассеянное поле слева от полосы равно нулю, а также учитывая формулы (4.35) и (4.36), получим:

$$\Sigma = -2\text{Re}[S(-\theta^{\text{in}}, \theta^{\text{in}})] + 2\text{Im}[\eta] \int_{-a}^a (|u(x, +0)|^2 + |u(x, -0)|^2) dx \quad (4.37)$$

Таким образом, оптическая теорема доказана. Второй член в формуле (4.37), взятый со знаком минус, называется сечением поглощения и представляет собой энергию, поглощенную полосой. Сумма сечения поглощения и полного сечения рассеяния называется сечением экстинкции (см. [102, 103]).

#### 4.7. Поверхностная волна, бегущая вдоль отрезка

Вернемся к форме решения (4.24) и (4.26). Член

$$u_1^{\text{sp}}(x, y) = \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \int_{-\infty}^0 \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ -\eta y' \} g(x + a, y - y') dy'$$

отвечает за поверхностную волну и поверхностную полутень (т. е. зону формирования поверхностной волны) в области  $-a < x < a, y > 0$ . Перепишем его в виде

$$u_1^{\text{sp}}(x, y) = \frac{\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{\eta^2 (a + x)}{2k_0} + \eta y \right\} \operatorname{erfc} \left[ -\sqrt{\frac{i}{2k_0 (a + x)}} (ik_0 y - \eta (a + x)) \right] \quad (4.38)$$

Для простоты будем считать, что  $\operatorname{Im}[\eta] = 0$ . Рассмотрим случай  $\operatorname{Re}[\eta] < 0$ . Таким образом, рассматривается не поглощающая энергию граница, представляющая собой сосредоточенную массу. Также будем считать, что  $|k_0 y| \ll |\eta (a + x)|$ , т. е. будем анализировать поле вблизи отрезка. Для функции  $\operatorname{erfc}(z)$  справедлива асимптотическая формула:

$$\operatorname{erfc}(z) = \begin{cases} 2 + e^{-z^2} / (z\sqrt{\pi}), & \operatorname{Re}[z] \rightarrow -\infty, \\ e^{-z^2} / (z\sqrt{\pi}), & \operatorname{Re}[z] \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.39)$$

Константа в этой формуле связана с вкладом от перевальной точки [104]. При положительных импедансах контур интегрирования в (4.39) проходит через точку перевала и, следовательно,

$$u_1^{\text{sp}}(x, y) \approx \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} \exp \left\{ i \frac{\eta^2 (a + x)}{2k} + \eta y \right\} + \\ + \frac{2}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2 \} g(x + a, y). \quad (4.40)$$

Первый член в (4.40) представляет собой поверхностную волну, а второй – краевую волну, убывающую как  $(x + a)^{-1/2}$  вдоль полосы. При  $\operatorname{Re}[\eta] > 0$  (сосредоточенная упругость) следует пользоваться второй асимптотикой из (4.39), т. е. в выражении для поля присутствует только краевая волна, а поверхностная волна не возбуждается. При  $(x + a) \sim k_0 / \eta^2$  имеем переходную область между асимптотиками – зону полутени. Длина полутени вдоль оси  $x$  имеет порядок  $k_0 / \eta^2$ .

#### 4.8. Случай идеальных граничных условий

В случае идеальных граничных условий формула (4.28) сильно упрощается. Будем обозначать символом  $S^N$  диаграмму направленности в случае граничных условий Неймана, а в

случае граничных условий Дирихле – символом  $S^D$ . Тогда решение может быть записано в следующем виде:

$$S^{N,D} = \hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}}) \mp \hat{S}(-\theta, \theta^{\text{in}}) \quad (4.41)$$

$$\hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}}) = -\exp\{ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2 + ik_0a\theta^2/2\} (Y(-\theta, \theta^{\text{in}}) + Y(\theta, -\theta^{\text{in}})) \quad (4.42)$$

Верхний знак в (4.41) соответствует граничному условию Неймана, нижний – Дирихле. Симметричность формулы (4.41) связана с тем, что в случае идеальных граничных задача дифракции может быть сведена с помощью метода отражений к задаче дифракции на разветвленной поверхности, с диаграммой направленности  $\hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}})$ . Решение данной задачи строится в Приложении А с помощью метода формулы расщепления. Метод формулы расщепления также приводит к формулам (4.41, 4.42).

Необходимо отметить, что построенное решение (4.41, 4.42) совпадает с решением, полученным в [42], с точностью до замены  $\sin \theta \rightarrow \theta$ ,  $\cos \theta \rightarrow 1$ , справедливой для малых углов падения и рассеяния. Это достаточно удивительный факт, поскольку автор [42] пользовался совершенной другой техникой (комбинацией геометрической и физической теорий дифракции), а также прибегал к весьма искусственному приему для получения формулы, удовлетворяющей теореме взаимности. Метод, использованный в [42], существенно «тоньше» метода, использованного в настоящей работе, поскольку ГТД и ФТД позволяют правильно находить диаграммы направленности краевых волн, рассеянных под любыми углами. В то же время, явным достоинством метода параболического уравнения является простота описания полутеневых зон. Кроме того, формулы (0.3,4.14-4.17) позволяют при необходимости без труда выписать равномерную асимптотику поля. Методы ГТД и ФТД позволяют строить приближенные решения точно поставленной задачи дифракции, в то время как метод параболического уравнения позволяет получить точное решение приближенно поставленной задачи.

Посчитаем полное сечение рассеяния в идеальном случае. Вычисляя (4.41) в точке  $(-\theta^{\text{in}}, \theta^{\text{in}})$  и устраняя неопределенности, получим:

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{a} S^{N,D}(-\theta^{\text{in}}, \theta^{\text{in}}) &= -\frac{4i}{\pi} \exp\{ik_0a(\theta^{\text{in}})^2\} - \frac{1}{2}(\sqrt{2k_0a}\theta^{\text{in}} \mp \frac{i}{\sqrt{2k_0a}\theta^{\text{in}}}) \times \\ &\times \left( \operatorname{erfc}\left(-\theta^{\text{in}}\sqrt{\frac{k_0a}{i}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\theta^{\text{in}}\sqrt{\frac{k_0a}{i}}\right) \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Как и раньше, верхний знак соответствует граничным условиям Дирихле, нижний – граничным условиям Неймана. Подставляя (4.43) в (4.37) и вычисля действительную часть, легко получить выражения для сечений рассеяния. При малых значениях  $\sqrt{ka}\theta^{\text{in}}$  сечение

рассеяния в случае условий Неймана стремится к нулю. В случае условий Дирихле, при нулевом угле падения, имеем  $\Sigma = 4\sqrt{2a/\pi k_0}$ . Данный результат совпадает с первым членом из разложения, полученного в [105].

#### 4.9. Численная проверка формулы (4.28)

Для проверки корректности результатов, полученных выше, было произведено численное моделирование. Сравнение производилось с решением, полученным с помощью метода граничных интегральных уравнения (см. Приложение Г).

Известно, что параболическое приближение хорошо работает при  $\sqrt[4]{k_0 a} \theta^{\text{in}} \ll 1$  и  $k_0 a \gg 1$  [100]. Первое условие следует из того факта, что при переходе к параболическому приближению  $\cos \tilde{\theta}$  заменяется на  $1 - (\tilde{\theta})^2/2$ . Таким образом, реальный набег фаз волн, дифрагированных на полосе, отличается на величину порядка  $k_0 a \tilde{\theta}^4$ . В случае импедансных граничных условий также важным параметром является число  $|\eta| \sqrt{a/k_0}$ . В параболическом приближении учитываются только волны, бегущие слева направо, то есть не учитывается поверхностная волна, отраженная от вершины  $(a, 0)$ . При  $|\eta| \sqrt{a/k_0} \ll 1$  поверхностная волна не успевает развиться, и вкладом от отраженной волны можно пренебречь.

Было проведено множество численных экспериментов в диапазоне параметров, удовлетворяющих этим ограничениям, и везде формула (4.28) давала хорошее совпадение с точным решением. Более того, параболическое приближение дает результаты, близкие к точным, и на границе его области применимости. На Рис. 4.4 представлены результаты численного моделирования при  $k_0 a = 200, \eta a = -10, \theta^{\text{in}} = 0.3$ , т.е. из трех условий хорошо выполнено только условие  $ka \gg 1$ , а  $\sqrt[4]{k_0 a} \theta^{\text{in}} \sim 1$  и  $|\eta| \sqrt{a/k_0} \sim 1$ . Несмотря на это, формула (4.28) дает хорошее совпадение с точным решением. На Рис. 4.5 представлены результаты моделирования при  $k_0 a = 200, \eta a = -30, \theta^{\text{in}} = 0.3$ . Как и следовало ожидать, с увеличением значения импеданса точность параболического решения падает.

#### 4.10. Рассмотрение задачи в точной постановке. Симметризация

Вернемся к задаче для уравнения Гельмгольца (см. раздел 4.1).

Вследствие того, что импедансы обеих сторон полосы равны, задача может быть разделена на симметричную и антисимметричную:

$$\tilde{u}^{\text{sc}}(x, y) = u^{\text{a}}(x, y) + u^{\text{s}}(x, y), \quad (4.44)$$

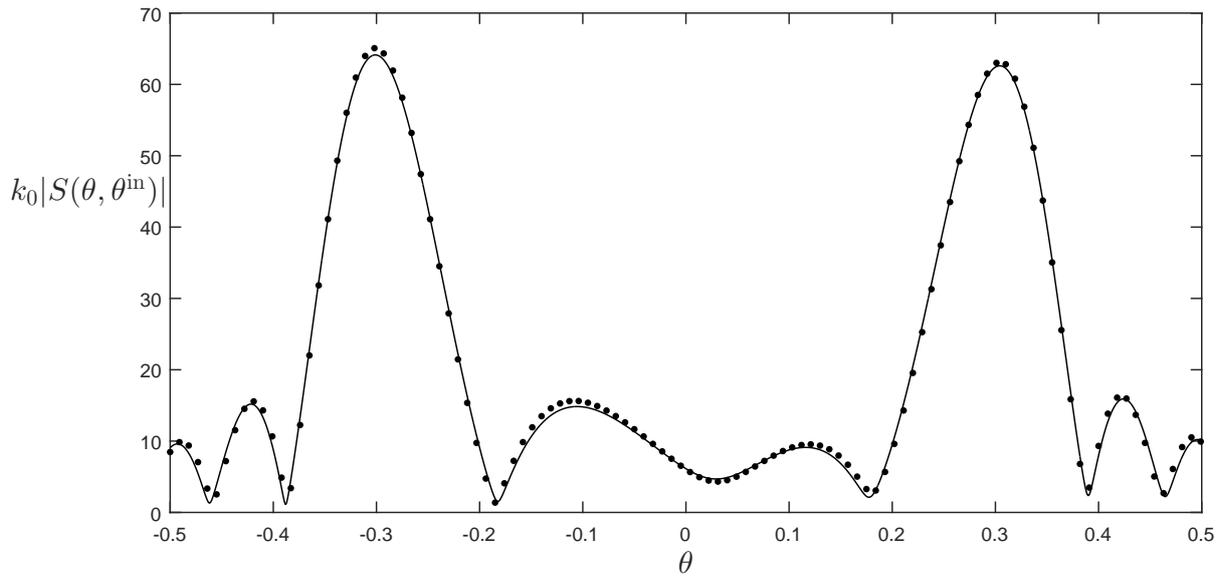


Рис. 4.4. Модуль диаграммы направленности при  $k_0a = 200, \eta a = -10, \theta^{\text{in}} = 0.3$ . Сплошная линия соответствует результатам точного счета, прерывистая — результатам вычисления с помощью формулы (4.28)

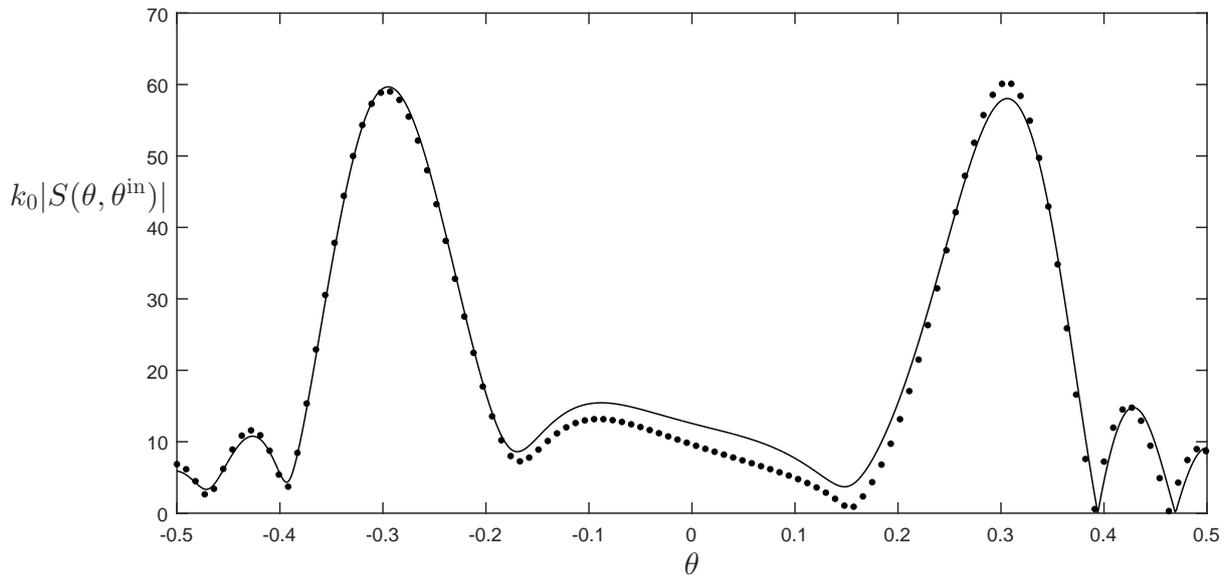


Рис. 4.5. Модуль диаграммы направленности при  $k_0a = 200, \eta a = -30, \theta^{\text{in}} = 0.3$ . Сплошная линия соответствует результатам точного счета, прерывистая — результатам вычисления с помощью формулы (4.28)

где

$$u^a(x, y) = -u^a(x, -y), \quad u^s(x, y) = u^s(x, -y)$$

– симметричная и антисимметричная составляющая поля.

Падающая волна также симметризуется:

$$u^{\text{in},s} = \frac{1}{2} [\exp\{ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} - y \sin \theta^{\text{in}})\} + \exp\{ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} + y \sin \theta^{\text{in}})\}],$$

$$u^{\text{in},a} = \frac{1}{2} [\exp\{ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} - y \sin \theta^{\text{in}})\} - \exp\{ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} + y \sin \theta^{\text{in}})\}].$$

Задачи для  $u^a$  и  $u^s$  могут быть сформулированы как задачи со смешанными граничными условиями в полуплоскости  $y > 0$ . Граничные условия для  $u^a$  следующие:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} - \eta \right] u^a(x, +0) = ik_0 \sin \theta^{\text{in}} \exp\{ik_0 x \cos \theta^{\text{in}}\} \quad |x| < a, \quad (4.45)$$

$$u^a(x, 0) = 0, \quad |x| > a. \quad (4.46)$$

Для  $u^s$  имеем следующие граничные условия:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} - \eta \right] u^s(x, +0) = \eta \exp\{ik_0 x \cos \theta^{\text{in}}\} \quad |x| < a, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u^s(x, +0) = 0, \quad |x| > a. \quad (4.48)$$

Ниже симметричная и антисимметричная задачи исследуются по отдельности (параллельно). В обоих случаях исследуется поле только в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ).

Диаграмма направленности рассеянного поля является суммой симметричной и антисимметричной частей:

$$\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) = S^s(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) + S^a(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}), \quad (4.49)$$

где последние две величины определены аналогично с (4.6).

#### 4.11. Локальное поведение поля вблизи вершин

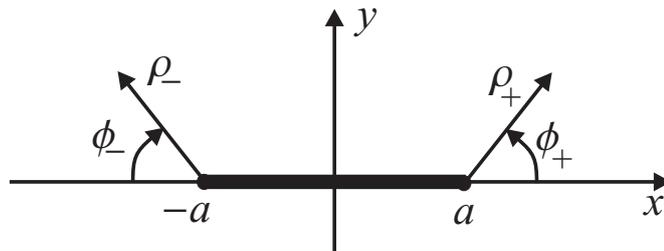


Рис. 4.6. Локальные координаты

Пользуясь условиями Мейкснера (условиями конечности энергии), выпишем локальное представление поля вблизи вершин (ряд Мейкснера). Введем локальные цилиндрические координаты  $(\rho_{\pm}, \phi_{\pm})$  (см. Рис. 4.6). Рассмотрим полное поле в **антисимметричном случае**, т.е. рассмотрим функцию  $u = u^a + u^{\text{in},a}$ . Ряд Мейкснера для антисимметричной части поля имеет вид [106]

$$u(\rho, \phi) = \sum_m \sum_n (k_0 \rho)^{\nu_m} \log^n(k_0 \rho) f_{m,n}(\phi), \quad (4.50)$$

где  $\rho = \rho_{\pm}$ ,  $\phi = \phi_{\pm}$ ,  $f_{m,n}(\phi) = f_{m,n}^{\pm}(\phi_{\pm})$ . Данный ряд подставляется в уравнение Гельмгольца и в граничные условия. Кроме того, некоторые члены данного ряда являются запрещенными в соответствии с условием Мейкснера, сформулированным выше. В результате имеем следующее асимптотическое разложение поля

$$u = c(k_0 \rho)^{1/2} \sin(\phi/2) - \frac{2c\eta}{3\pi k_0} (k_0 \rho)^{3/2} \phi \cos(3\phi/2) - \frac{2c\eta}{3\pi k_0} (k_0 \rho)^{3/2} \log(k_0 \rho) \sin(3\phi/2) + O(\log^2(k_0 \rho) (k_0 \rho)^{5/2}). \quad (4.51)$$

Теперь рассмотрим **симметричный случай**, т.е. функцию  $u = u^s + u^{\text{in},s}$ . Имеем следующую асимптотику:

$$u = d - \frac{\eta d}{\pi} \rho \log(k_0 \rho) \cos(\phi) + \frac{\eta d}{k_0 \pi} \rho \phi \sin(\phi) + O((k_0 \rho)^2 \log^2(k_0 \rho)). \quad (4.52)$$

Отметим, что константы  $c$  и  $d$  в (4.51) и (4.52) остаются неопределенными. Кроме того, обе константы принимают разные значения на разных вершинах, т.е. всего имеется четыре независимых константы  $c_{\pm}$  и  $d_{\pm}$ .

## 4.12. Вывод функциональной задачи Винера—Хопфа—Фока

### 4.12.1. Антисимметричный случай

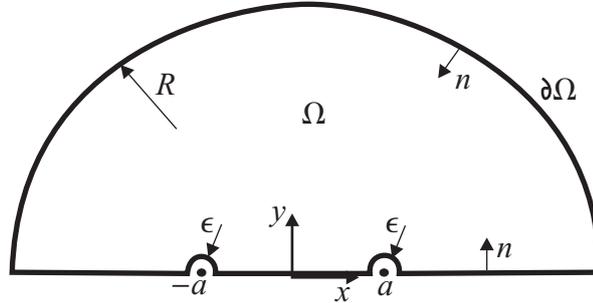
Рассмотрим область  $\Omega$ , изображенную на Рис. 4.7. Область  $\Omega$  ограничена осью  $x$ , двумя малыми дугами (радиуса  $\epsilon \rightarrow 0$ ), опоясывающими вершины, и большим полукругом радиуса  $R \rightarrow \infty$ . Рассмотрим пару решений уравнения Гельмгольца (1.1) в  $\Omega$ . Первое решение –  $u^a$  (антисимметричная часть рассеяного поля), второе – уходящая плоская волна  $w$ :

$$w = w(k, x, y) = \exp \{i(kx + \xi(k)y)\}, \quad (4.53)$$

$$\xi(k) \equiv \sqrt{k_0^2 - k^2}, \quad (4.54)$$

где  $k$  – действительное число. Ветвь квадратного корня  $\xi$  выбирается так, что при  $|k| < \text{Re}[k_0]$  значения квадратного корня близки к положительным действительным. По непрерывности,

значения квадратного корня при  $|k| > \text{Re}[k_0]$  близки к положительным мнимым (действительная ось проходит под точкой  $k_0$  в соответствии с принципом предельного поглощения). Отметим, что  $w$  является решением уравнения Гельмгольца при любом значении параметра  $k$ . Применим теорему Грина к этой паре функций в области  $\Omega$ :

Рис. 4.7. Контур  $\Omega$ 

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial u^a}{\partial n} w - \frac{\partial w}{\partial n} u^a \right] dl = 0. \quad (4.55)$$

Так как рассеяное поле  $u^a$  удовлетворяет условиям излучения, интеграл по большой дуге стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Интегралы по малым дугам стремятся к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$  в соответствии с локальными асимптотиками поля вблизи вершин. Остается интеграл вдоль  $x$ .

Введем величины:

$$\check{U}_-(k) = \int_{-\infty}^{-a} \left[ \frac{\partial u^a}{\partial n} w - \frac{\partial w}{\partial n} u^a \right] dx = \int_{-\infty}^{-a} \frac{\partial u^a(x, +0)}{\partial y} e^{ikx} dx, \quad (4.56)$$

$$\check{U}_0(k) = \int_{-a}^a \left[ \frac{\partial u^a(x, +0)}{\partial n} w(x, +0) - \frac{\partial w(x, +0)}{\partial n} u^a(x, +0) \right] dx, \quad (4.57)$$

$$\check{U}_+(k) = \int_a^{\infty} \left[ \frac{\partial u^a}{\partial n} w - \frac{\partial w}{\partial n} u^a \right] dx = \int_a^{\infty} \frac{\partial u^a(x, +0)}{\partial y} e^{ikx} dx. \quad (4.58)$$

В соответствии с (4.55) выполняется следующее функциональное уравнение для всех действительных  $k$ :

$$\check{U}_-(k) + \check{U}_0(k) + \check{U}_+(k) = 0. \quad (4.59)$$

Выражение (4.57) может быть преобразовано с помощью (4.45):

$$\check{U}_0(k) = (\eta - i\xi(k)) \int_{-a}^a u^a(x, +0) e^{ikx} dx +$$

$$\frac{k_0 \sin \theta^{\text{in}}}{k - k_*} (\exp\{i(k - k_*)a\} - \exp\{-i(k - k_*)a\}), \quad (4.60)$$

где

$$k_* = -k_0 \cos \theta^{\text{in}}.$$

Определим величины

$$U_-(k) \equiv \check{U}_-(k) - \frac{k_0 \sin \theta^{\text{in}}}{k - k_*} \exp\{-i(k - k_*)a\} \quad (4.61)$$

$$U_0(k) \equiv (\eta - i\xi(k)) \int_{-a}^a u^a(x, +0) e^{ikx} dx \quad (4.62)$$

$$U_+(k) \equiv \check{U}_+(k) + \frac{k_0 \sin \theta^{\text{in}}}{k - k_*} \exp\{i(k - k_*)a\}. \quad (4.63)$$

В соответствии с (4.59) новые функции удовлетворяют уравнению

$$U_-(k) + U_0(k) + U_+(k) = 0. \quad (4.64)$$

Функции  $\check{U}_j$ ,  $j = -, 0, +$  являются Фурье-образами, взятыми по некоторой части действительной оси. Таким образом, могут быть использованы стандартные теоремы для анализа функций  $\check{U}_j$  и, следовательно, функций  $U_j$ :

**Свойство 1.** Функция  $U_-(k)$ , определенная с помощью (4.61) и (4.56), может быть аналитически продолжена с действительной оси в нижнюю полуплоскость, включающую точку  $k = -k_0$ , и является регулярной во всех точках нижней полуплоскости, кроме точки  $k = k_*$ , где она имеет полюс. В этом полюсе функция  $U_-$  имеет вычет, равный  $-k_0 \sin \theta^{\text{in}}$ .

**Свойство 2.** Аналогично, функция  $U_+(k)$ , определенная с помощью (4.63) и (4.58), может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость, включающую точку  $k = k_0$ , и является регулярной во всех точках верхней полуплоскости.

**Свойство 3.** Функция

$$\dot{U}_0(k) = (\eta - i\xi(k))^{-1} U_0(k) \quad (4.65)$$

является регулярной на всей комплексной плоскости  $k$ .

**Свойство 4.** Применяя лемму Ватсона [104] к интегральным формулам (4.56), (4.57), (4.58) получим следующие оценки роста при  $|k| \rightarrow \infty$  в области априорной регулярности неизвестных функций:

$$U_+(k) = O(k^{-1/2} e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.66)$$

$$U_-(k) = O(k^{-1/2} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.67)$$

$$U_0(k) = O(k^{-1/2} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.68)$$

$$U_0(k) = O(k^{-1/2}e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.69)$$

Введем разрезы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ , идущие от  $-k_0$  и  $k_0$  к бесконечности (см. Рис. 4.8). Разрезы идут вдоль линий, соответствующих значениям квадратного корня  $\pm\sqrt{k_0^2 - k^2}$  при действительных  $k$ . Легко видеть, что функция  $U_0$  может быть продолжена на всю плоскость с разрезами

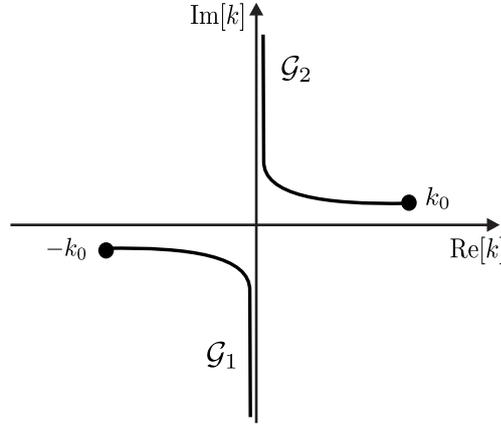


Рис. 4.8. Разрезы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$

$\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ . Кроме того, с помощью выражений

$$U_-(k) = -U_0(k) - U_+(k), \quad U_+(k) = -U_0(k) - U_-(k)$$

функция  $U_-$  может быть продолжена на всю комплексную плоскость с разрезом  $\mathcal{G}_2$ , а функция  $U_+$  может быть продолжена на всю комплексную плоскость с разрезом  $\mathcal{G}_1$ . Более того, можно построить риманову поверхность функций  $(U_-, U_+, U_0)$  и показать, что все точки ветвления имеют второй порядок и координату  $\pm k_0$ .

С помощью описанных выше свойств можно сформулировать функциональную задачу для функций  $U_{\pm}$ :

**Задача 1.** Найти функции  $U_+(k)$ ,  $U_-(k)$ , регулярные на комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ , такие что

- функция  $U_-$  регулярна в нижней полуплоскости за исключением полюса  $k = k_*$ , в котором она имеет вычет, равный  $-k_0 \sin \theta^{\text{in}}$ ;
- функция  $U_+$  регулярна в верхней полуплоскости;
- Функция  $\acute{U}_0(k) \equiv (\eta - i\xi(k))^{-1}U_0(k)$  регулярна на всей комплексной плоскости (здесь функция  $U_0$  определена как  $U_0 \equiv -(U_+ + U_-)$ );
- функции  $U_+$ ,  $U_-$ ,  $\acute{U}_0$  удовлетворяют условиям роста (4.66), (4.67), (4.68), (4.69).

После того, как функциональная задача сформулирована, можно забыть о первоначальной природе неизвестных функций и исследовать функции  $U_+(k)$ ,  $U_-(k)$ , являющиеся решением Задачи 1.

Допустим, что решение функциональной задачи найдено. Опишем процедуру, устанавливающую связь между решением функциональной задачи и антисимметричной частью диаграммы направленности  $S^a(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$ . Применим теорему Грина (4.55) к области  $\Omega$  с функциями  $u^a$  и  $u^{\text{in},a}(x, y)$ . Интеграл по большой полуокружности стремится к константе, связанной с диаграммой направленности, и может быть вычислен с помощью метода перевала. В результате получается следующее выражение:

$$S^a(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) = \sin \tilde{\theta} \dot{U}_0(-k_0 \cos(\tilde{\theta})). \quad (4.70)$$

Отметим, что  $\dot{U}_0$  неявным образом зависит от  $\theta^{\text{in}}$ .

#### 4.12.2. Функциональная задача в симметричном случае

В симметричном случае, аналогично с (4.61), (4.62), (4.63) введем функции  $V_-(k)$ ,  $V_+(k)$ ,  $V_0(k)$ :

$$V_-(k) = \int_{-\infty}^{-a} \exp\{ikx\} u^s(x, +0) dx - \frac{i}{k - k_*} \exp\{-i(k - k_*)a\}, \quad (4.71)$$

$$V_0(k) = \frac{i(\eta - i\xi(k))}{\eta\xi(k)} \int_{-a}^a \exp\{ikx\} \frac{\partial u^s(x, +0)}{\partial y} dx, \quad (4.72)$$

$$V_+(k) = \int_a^{\infty} \exp\{ikx\} u^s(x, +0) dx + \frac{i}{k - k_*} \exp\{i(k - k_*)a\}. \quad (4.73)$$

Выполняется следующее функциональное уравнение:

$$V_-(k) + V_0(k) + V_+(k) = 0. \quad (4.74)$$

Условия роста имеют вид:

$$V_+(k) = O(k^{-1} e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.75)$$

$$V_-(k) = O(k^{-1} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.76)$$

$$V_0(k) = O(k^{-1} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.77)$$

$$V_0(k) = O(k^{-1} e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2} k] \leq \pi/2. \quad (4.78)$$

Функциональная задача для функций  $V_{\pm}$  может быть сформулирована следующим образом:

**Задача 2.** Найдите функции  $V_+(k)$ ,  $V_-(k)$ , регулярные на комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ , такие что

- функция  $V_-(k)$  регулярна в нижней полуплоскости за исключением полюса  $k = k_*$ , в котором она имеет вычет, равный  $-i$ ;
- функция  $V_+(k)$  регулярна в верхней полуплоскости;
- функция

$$\dot{V}_0 \equiv \frac{\eta\xi(k)}{i(\eta - i\xi(k))} V_0(k) \quad (4.79)$$

регулярна на всей комплексной плоскости (здесь  $V_0$  определено как  $V_0 \equiv -(V_+ + V_-)$ );

- функции  $V_+$ ,  $V_-$ ,  $\dot{V}_0$  удовлетворяют условиям роста (4.75), (4.76), (4.77), (4.78).

Симметричная часть диаграммы направленности может быть получена с помощью следующей формулы:

$$S^s(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) = (ik_0)^{-1} \dot{V}_0(-k_0 \cos(\tilde{\theta})). \quad (4.80)$$

## 4.13. Вспомогательные функциональные задачи

### Винера—Хопфа—Фока и формула расщепления

#### 4.13.1. Вспомогательные функции. Антисимметричная задача

В данном разделе формулируются вспомогательные функциональные задачи путем модификации Задачи 1. А именно, производятся следующие изменения. Во-первых, вводятся две пары вспомогательных функций  $(U_-^1, U_+^1)$ ,  $(U_-^2, U_+^2)$ . С помощью вспомогательных решений строится базис для семейства исходных задач по параметру  $\theta^{\text{in}}$ . Во-вторых, на функции  $U_+^{1,2}$  накладываются дополнительные требования аналитичности, запрещающие им иметь полюса (т. е. условия аналитичности становятся проще). В-третьих, допускается более быстрый рост на бесконечности (т. е. условия роста ослабляются). Наконец, строится формула расщепления, связывающая вспомогательные решения с решением исходной задачи.

Здесь стоит провести параллель с Главой 2, где в качестве базисных функций выбирались краевые функции Грина. На первый взгляд может показаться, что и для данной задачи в качестве вспомогательных функций следует выбрать соответствующие Фурье-образы краевых функций Грина с источниками, помещенными в вершины  $(\pm a, 0)$ . Действительно, в антисимметричном случае такой подход приводит к функциональной задаче, изложенной

ниже. К сожалению, в симметричном случае данная техника не приводит к формуле расщепления. Поэтому ниже используется более формальный подход, и краевые функции Грина не вводятся. Однако, по крайней мере в симметричном случае, представление о краевой функции Грина делает приведенные ниже формулировки более наглядными.

**Задача 3.** Найти функции  $U_+^{1,2}(k)$ ,  $U_-^{1,2}(k)$ , регулярные на комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ , такие что

- функции  $U_-^{1,2}$  регулярны в нижней полуплоскости;
- функции  $U_+^{1,2}$  регулярны в верхней полуплоскости;
- функции

$$\dot{U}_0^{1,2} = (\eta - i\xi(k))^{-1}U_0^{1,2}(k) \quad (4.81)$$

регулярны на всей плоскости (здесь функции  $U_0^{1,2}$  определены как  $U_0^{1,2} \equiv -(U_+^{1,2} + U_-^{1,2})$ );

- функции  $U_+^{1,2}$ ,  $U_-$ ,  $\dot{U}_0^{1,2}$  удовлетворяют сформулированным ниже условиям роста (4.82), (4.83), (4.84), (4.85).

Условия роста для данной функциональной задачи имеют следующую форму:

$$U_+^j(k) = \delta_{j,2}(e^{-i\pi/2}k)^{1/2}e^{ika} + O(k^{-1/2}e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.82)$$

$$U_-^j(k) = \delta_{j,1}(e^{i\pi/2}k)^{1/2}e^{-ika} + O(k^{-1/2}e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.83)$$

$$\dot{U}_0^j(k) = -\delta_{j,1}(e^{-i\pi/2}k)^{-1/2}e^{-ika} + O(k^{-3/2}e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.84)$$

$$\dot{U}_0^j(k) = -\delta_{j,2}(e^{i\pi/2}k)^{-1/2}e^{ika} + O(k^{-3/2}e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.85)$$

где  $j = 1, 2$ ,  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера.

Запишем решение вспомогательной функциональной задачи в виде матрицы

$$\mathbf{U}(k) = \begin{pmatrix} U_-^1(k) & U_+^1(k) \\ U_-^2(k) & U_+^2(k) \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Покажем, что решение Задачи 3 единственно. А именно, пусть существуют два решения  $\mathbf{U}$  и  $\bar{\mathbf{U}}$ . Рассмотрим выражение  $\mathbf{J} = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}$ , которое может быть переписано в виде

$$\mathbf{J} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

где

$$D = |\mathbf{U}|,$$

$$\begin{aligned}
D_{1,1} &= \begin{vmatrix} \bar{U}_-^1(k) & \bar{U}_+^1(k) \\ U_-^2(k) & U_+^2(k) \end{vmatrix}, \\
D_{1,2} &= \begin{vmatrix} U_-^1(k) & U_+^1(k) \\ \bar{U}_-^1(k) & \bar{U}_+^1(k) \end{vmatrix}, \\
D_{2,1} &= \begin{vmatrix} \bar{U}_-^2(k) & \bar{U}_+^2(k) \\ U_-^2(k) & U_+^2(k) \end{vmatrix}, \\
D_{2,2} &= \begin{vmatrix} U_-^1(k) & U_+^1(k) \\ \bar{U}_-^2(k) & \bar{U}_+^2(k) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

где  $|\cdot|$  обозначает определитель матрицы.

Все пять определителей могут быть проанализированы следующим образом. Рассмотрим  $D$  в качестве примера. Пользуясь линейной зависимостью  $U_-^j$ ,  $U_+^j$ , и  $\dot{U}_0^j$  запишем этот определитель в двух эквивалентных представлениях:

$$D = -(\eta - i\xi(k)) \begin{vmatrix} U_-^1 & \dot{U}_0^1 \\ U_-^2 & \dot{U}_0^2 \end{vmatrix} = -(\eta - i\xi(k)) \begin{vmatrix} \dot{U}_0^1 & U_+^1 \\ \dot{U}_0^2 & U_+^2 \end{vmatrix}. \quad (4.88)$$

Первое представление может быть использовано для анализа

$$\dot{D}(k) \equiv -(\eta - i\xi(k))^{-1} D(k)$$

в нижней полуплоскости, а второе – для анализа той же самой функции в верхней полуплоскости. Легко видеть, что величина  $\dot{D}$  аналитична в обеих полуплоскостях и растет как  $-1$  на всей комплексной плоскости. Таким образом, в соответствии с теоремой Лиувилля,

$$\dot{D} \equiv -1.$$

Аналогичному анализу может быть подвергнут каждый из четырех оставшихся определителей. В результате имеем

$$\mathbf{J}(k) \equiv \mathbf{I},$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, т. е. решение функциональной задачи единственно. Заметим, что нули определителя  $D(k)$  совпадают с нулями функции  $\eta - i\xi(k)$ , и никаких других нулей  $D(k)$  не имеет.

#### 4.13.2. Вспомогательные функции. Симметричная задача

В полной аналогии с антисимметричным случаем введем вспомогательные функциональные задачи для симметричного случая

**Задача 4.** Найти функции  $V_+^1(k)$ ,  $V_+^2(k)$ ,  $V_-^1(k)$ ,  $V_-^2(k)$ , регулярные на всей комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ , такие что

- функция  $V_-^j$  регулярна в нижней полуплоскости;
- функция  $V_+^j$  регулярна в верхней полуплоскости;
- функции

$$\hat{V}_0^j \equiv -\frac{\xi(k)}{i(\eta - i\xi(k))}(V_-^j + V_+^j) \quad (4.89)$$

на всей комплексной плоскости;

- функции  $V_+^j$ ,  $V_-^j$ ,  $\hat{V}_0^j$  удовлетворяют сформулированным ниже условиям роста (4.90), (4.91), (4.92), (4.93).

Условия роста для данной функциональной задачи имеют следующий вид:

$$V_+^j(k) = \delta_{j,2}e^{ika} + O(k^{-1}e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.90)$$

$$V_-^j(k) = \delta_{j,1}e^{-ika} + O(k^{-1}e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.91)$$

$$\hat{V}_0^j(k) = -\delta_{j,1}e^{-ika} + O(k^{-1}e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.92)$$

$$\hat{V}_0^j(k) = -\delta_{j,2}e^{ika} + O(k^{-1}e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2. \quad (4.93)$$

Запишем решение функциональной задачи в виде матрицы

$$\mathbf{V}(k) = \begin{pmatrix} V_-^1(k) & V_+^1(k) \\ V_-^2(k) & V_+^2(k) \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Используя представления схожие с (4.87), можно показать, что Задача 4 имеет единственное решение.

### 4.13.3. Формула расщепления

Рассмотрим **антисимметричный** случай. Пусть столбец  $(U_-, U_+)$  является решением Задачи 1 и  $\mathbf{U}(k)$  является решением Задачи 3 в матричной форме (4.86). Подберем функции  $r_1(k)$  и  $r_2(k)$ , такие что

$$(U_-(k), U_+(k)) = (r_1(k), r_2(k)) \begin{pmatrix} U_-^1(k) & U_+^1(k) \\ U_-^2(k) & U_+^2(k) \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

Используя правило Крамера имеем

$$r_1 = \frac{D_1}{D}, \quad r_2 = \frac{D_2}{D}, \quad (4.96)$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} U_-(k) & U_+(k) \\ U_-^2(k) & U_+^2(k) \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} U_-^1(k) & U_+^1(k) \\ U_-(k) & U_+(k) \end{vmatrix}. \quad (4.97)$$

Определитель  $D$  был вычислен в разделе 4.13.1 (см. формулу 4.88). Определители  $D_1$ ,  $D_2$  могут быть исследованы по аналогии с  $D$ , а именно существует два представления для каждого определителя, позволяющие проанализировать их поведение в нижней и верхней полуплоскости:

$$D_1 = -(\eta - i\xi(k)) \begin{pmatrix} U_- & \dot{U}_0 \\ U_-^2 & \dot{U}_0^2 \end{pmatrix} = -(\eta - i\xi(k)) \begin{pmatrix} \dot{U}_0 & U_+ \\ \dot{U}_0^2 & U_+^2 \end{pmatrix}, \quad (4.98)$$

$$D_2 = -(\eta - i\xi(k)) \begin{pmatrix} U_-^1 & \dot{U}_0^1 \\ U_- & \dot{U}_0 \end{pmatrix} = -(\eta - i\xi(k)) \begin{pmatrix} \dot{U}_0^1 & U_+^1 \\ \dot{U}_0 & U_+ \end{pmatrix}. \quad (4.99)$$

С помощью данных представлений и теоремы Лиувилля легко видеть, что

$$D_1 = \frac{(\eta - i\sqrt{k_0^2 - k^2})}{k - k_*} R_1, \quad (4.100)$$

$$D_2 = \frac{(\eta - i\sqrt{k_0^2 - k^2})}{k - k_*} R_2, \quad (4.101)$$

где  $R_1, R_2$  – некоторые константы.  $R_1, R_2$  могут быть получены путем вычисления полюсов определителей  $D_1, D_2$  в точке  $k = k_*$ . Вычеты в полюсах могут быть вычислены с помощью (4.98), (4.99) или с помощью (4.100), (4.101). Сравнивая эти представления, получим

$$R_1 = \sqrt{k_0^2 - k_*^2} \dot{U}_0^2(k_*), \quad R_2 = -\sqrt{k_0^2 - k_*^2} \dot{U}_0^1(k_*). \quad (4.102)$$

Подставляя  $r_1$  и  $r_2$  в (4.97) получим формулу расщепления:

$$\dot{U}_0(k, k_*) = \frac{\xi(k_*)}{k - k_*} \left( \dot{U}_0^1(k) \dot{U}_0^2(k_*) - \dot{U}_0^2(k) \dot{U}_0^1(k_*) \right). \quad (4.103)$$

В соответствии с формулой расщепления можно сконцентрировать усилия на поиске решения Задачи 3, а именно на поиске функций  $U_0^j(k)$ ,  $j = 1, 2$ .

Аналогичным образом выводится формула расщепления для **симметричного случая**:

$$\dot{V}_0(k, k_*) = \frac{i\eta}{(k - k_*)} \left( \dot{V}_0^2(k_*) \dot{V}_0^1(k) - \dot{V}_0^1(k) \dot{V}_0^2(k_*) \right). \quad (4.104)$$

#### 4.14. Формулировка матричной задачи Римана—Гильберта для вспомогательных функциональных задач

Сформулируем матричную задачу Римана—Гильберта для антисимметричного случая.

Сделаем несколько предварительных шагов. Рассмотрим разрезы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  (см. Рис. 1.2, левый). Значения на левых берегах разреза (от  $\pm k_0$  до  $\infty$ ) будем обозначать величинами с нижним индексом  $L$ ; значения на правых берегах – величинами с нижним индексом  $R$ .

Рассмотрим обходы вокруг  $\pm k_0$ , идущие от точек левого берега к точкам правого берега, т. е. обходы в положительном направлении. Текущая задача заключается в описании преобразований матрицы  $\mathbf{U}$  в результате таких обходов. А именно, докажем что

$$\mathbf{U}_R(k) = \mathbf{U}_L(k) \mathbf{M}_1(k), \quad k \in \mathcal{G}_1, \quad (4.105)$$

$$\mathbf{U}_R(k) = \mathbf{U}_L(k) \mathbf{M}_2(k), \quad k \in \mathcal{G}_2, \quad (4.106)$$

где

$$\mathbf{M}_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2i\xi/(\eta - i\xi) \\ 0 & (\eta + i\xi)/(\eta - i\xi) \end{pmatrix}, \quad (4.107)$$

$$\mathbf{M}_2(k) = \begin{pmatrix} (\eta + i\xi)/(\eta - i\xi) & 0 \\ 2i\xi/(\eta - i\xi) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.108)$$

Аналитическое продолжения квадратного корня  $\xi(k) \equiv \sqrt{k_0^2 - k^2}$  на разрезах  $\mathcal{G}_{1,2}$  определяется следующим образом. Положим в точке  $k = 0$  квадратный корень равным  $k_0$ . Теперь, продолжим корень аналитически по траекториям, изображенным на Рис. 4.9 (правый). Эти траектории идут от нуля до левых берегов разрезов  $\mathcal{G}_{1,2}$ . Значения квадратного корня на  $\mathcal{G}_{1,2}$  определяются в результате данного аналитического продолжения. Значения, полученные на левых берегах разрезов, подставляются в  $\mathbf{M}_{1,2}$ .

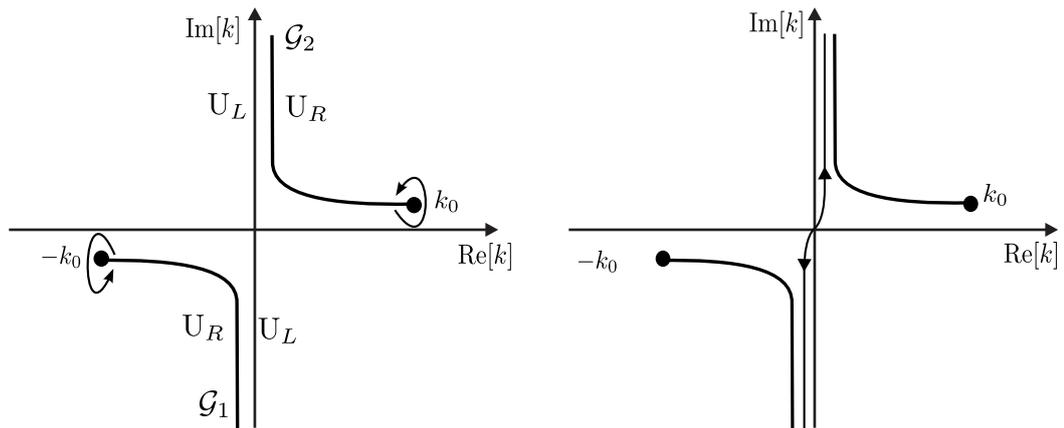


Рис. 4.9. (левый) Обходы вокруг  $k_0$  и  $-k_0$ . (правый) Аналитическое продолжение квадратного корня

Докажем (4.106). Рассмотрим контур  $\mathcal{G}_2$ , связанный с матрицей  $\mathbf{M}_2$ . Продолжим функциональное уравнение (4.59) следующим образом:

$$(U_-^j(k))_L = -U_+^j(k) - (\eta - i\xi(k)) \dot{U}_0^j(k), \quad (4.109)$$

$$(U_-^j(k))_R = -U_+^j(k) - (\eta + i\xi(k)) \dot{U}_0^j(k). \quad (4.110)$$

Далее имеем

$$(U_-^j(k))_R = \frac{\eta + i\xi(k)}{\eta - i\xi(k)} (U_-^j(k))_L + \frac{2i\xi(k)}{\eta - i\xi(k)} U_+^j(k).$$

Отметим, что функции  $U_+^j$  and  $\dot{U}_0^j$  не имеют ни индекса  $R$ , ни  $L$ , так как они не меняют своего значения в результате рассматриваемого обхода. Таким образом, доказана справедливость выражений (4.106) и (4.108). Аналогичным образом доказываются (4.105) и (4.107).

Переформулируем условия роста (4.84) и (4.85) с помощью (4.59):

$$U_-^j = i \delta_{j,1} (e^{-i\pi/2} k)^{1/2} e^{-ika} + O(k^{-1/2} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.111)$$

$$U_+^j = i \delta_{j,2} (e^{i\pi/2} k)^{1/2} e^{ika} + O(k^{-1/2} e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2} k] \leq \pi/2. \quad (4.112)$$

Оба выражения непосредственно связаны с аналитическим продолжением вдоль траекторий, изображенных на Рис. 4.9.

Наконец, матричная задача Римана—Гильберта для  $\mathbf{U}$  может быть сформулирована:

**Задача 5.** Найти матричную функцию  $\mathbf{U}(k)$ , элементы которой даются выражением (4.86), такую что

- она регулярна на комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}_{1,2}$ ;
- она удовлетворяет функциональным уравнениям (4.105), (4.106) с коэффициентами (4.107), (4.108) на разрезах;
- она удовлетворяет условиям (4.82), (4.83), (4.111), (4.112);
- функции  $U_+^j(k) + U_-^j(k)$ ,  $j = 1, 2$  имеют нули при  $k = k' \equiv \sqrt{k_0^2 + \eta^2}$ ;
- функции  $U_\pm^j$  растут не быстрее константы вблизи точек  $\pm k_0$ .

Четвертое условие (затрагивающее нули в  $\pm k'$ ) трудно учесть, поэтому ниже оно будет исключено. Рассмотрим риманову поверхность функции  $\sqrt{k_0^2 - k^2}$ , разрезанную вдоль линий  $\mathcal{G}_{1,2}$ . Поверхность состоит из двух листов. Будем называть физическим листом тот, которому принадлежит точка  $\sqrt{k_0^2 - 0^2} = k_0$ . Рассмотрим функцию  $\eta - i\sqrt{k_0^2 - k^2}$  на этой поверхности. Отметим, что эта функция имеет нули только на одном листе. Если нули принадлежат физическому листу, деформируем контуры  $\mathcal{G}_{1,2}$  так, что:

- концевые точки остаются неизменными;
- контур  $\mathcal{G}_2$  остается симметричным относительно нуля контуру  $\mathcal{G}_1$  ;

- нули  $\eta - i\sqrt{k_0^2 - k^2}$  перестают принадлежать физическому листу.

Пример такой деформации представлен на Рис. 4.10. Если нули не принадлежат физическому листу с самого начала, то никакой деформации не требуется. Область значений  $\eta$  для которой нули  $\eta - i\sqrt{k_0^2 - k^2}$  принадлежат физической плоскости дается неравенствами

$$\operatorname{Im}[\eta] < 0, \quad \operatorname{Re}[\eta] < 0. \quad (4.113)$$

Иными словами, значения, требующие деформации контуров  $\mathcal{G}_{1,2}$ , находятся в третьем квадранте комплексной плоскости.

Обозначим контура, получившиеся в итоге, как  $\mathcal{G}'_{1,2}$  вне зависимости от того были ли они деформированы или нет, т. е.  $\mathcal{G}'_{1,2}$  совпадает с  $\mathcal{G}_{1,2}$  при  $\operatorname{Im}[\eta] \geq 0$  или  $\operatorname{Re}[\eta] \geq 0$  и представляет собой деформирование контура при  $\operatorname{Im}[\eta] < 0, \quad \operatorname{Re}[\eta] < 0$ .

### Замечание

Положение точек  $k'$  на Римановой поверхности функции  $\sqrt{k_0^2 - k^2}$  может быть определено из условия (4.4). А именно, граница между допустимыми и запрещенными значениями  $\eta$  представляет собой действительную ось. Рассмотрим функцию  $k' = k'(\eta)$ . Эта функция переводит действительную ось  $\eta$  в два отрезка  $\mathcal{G}''_1 = (-\infty, -k_0)$ ,  $\mathcal{G}''_2 = (k_0, \infty)$  на действительной оси. Рассмотрим Риманову поверхность  $\sqrt{k_0^2 - k^2}$ , разрезанную вдоль  $\mathcal{G}''_{1,2}$ . Назовем лист, содержащий точку  $\sqrt{k_0^2 - 0^2} = k_0$ , физическим. Граница  $\operatorname{Im}[\eta] = 0$  соответствует разрезам  $\mathcal{G}''_{1,2}$ . Область  $\operatorname{Im}[\eta] < 0$  соответствует нефизическому листу.

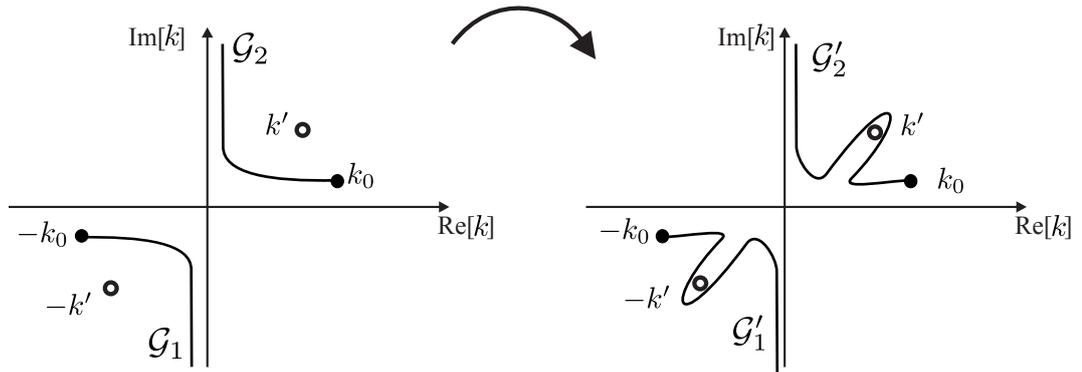


Рис. 4.10. Пример деформации контуров  $\mathcal{G}_{1,2}$

Сформулируем функциональную задачу для контуров  $\mathcal{G}'_{1,2}$ . В соответствии с принципом аналитического продолжения соотношения (4.105), (4.106) остаются справедливыми для тех же матриц (4.108), (4.107). Таким образом, задача формулируется почти идентично:

**Задача 6.** Найти матричную функцию  $\mathbf{U}(k)$ , элементы которой заданы выражением (4.86), такую что

- она регулярна на комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}'_{1,2}$ ;
- она удовлетворяет функциональным уравнениям (4.105), (4.106) с коэффициентами (4.107), (4.108) на разрезах;
- она удовлетворяет условиям роста (4.82), (4.83), (4.111), (4.112);
- функции  $U_{\pm}^j$  растут не быстрее константы вблизи точек  $\pm k_0$ .

#### 4.14.1. Симметричный случай

Аналогично антисимметричному случаю в симметричном случае преобразования неизвестных функций на разрезах описываются парой уравнений:

$$\mathbf{V}_R(k) = \mathbf{V}_L \mathbf{N}_1(k), \quad k \in \mathcal{G}_1, \quad (4.114)$$

$$\mathbf{V}_R(k) = \mathbf{V}_L \mathbf{N}_2(k), \quad k \in \mathcal{G}_2, \quad (4.115)$$

$$\mathbf{N}_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & -2\eta/(\eta - i\zeta) \\ 0 & (\eta + i\zeta)/(i\zeta - \eta) \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

$$\mathbf{N}_2(k) = \begin{pmatrix} (\eta + i\zeta)/(i\zeta - \eta) & 0 \\ -2\eta/(\eta - i\zeta) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.117)$$

Переформулируем условия роста (4.92), (4.93) с помощью (4.89):

$$V_-^j = \delta_{j,1} e^{-ika} + O(k^{-1} \log(k) e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2} k] \leq \pi/2, \quad (4.118)$$

$$V_+^j = \delta_{j,2} e^{ika} + O(k^{-1} \log(k) e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2} k] \leq \pi/2. \quad (4.119)$$

Теперь можно сформулировать функциональную задачу для  $\mathbf{V}$ .

**Задача 7.** Найти матричную функцию  $\mathbf{V}(k)$ , элементы которой заданы выражением (4.94), такую что

- она регулярна на комплексной плоскости с разрезами  $\mathcal{G}'_{1,2}$ ;
- она удовлетворяет функциональным уравнениям (4.114), (4.115) с коэффициентами (4.116), (4.117) на разрезах;
- она удовлетворяет условиям роста (4.90), (4.91), (4.118), (4.119);
- функции  $V_{\pm}^j$  растут не быстрее чем  $(\sqrt{k_0 \mp k})^{-1/2}$  вблизи точек  $\pm k_0$ .

## 4.15. Семейство задач Римана—Гильберта

### 4.15.1. Предварительный шаг для антисимметричного случая

Далее следует ключевой этап данной главы. Ниже будет введено семейство задач Римана—Гильберта, к которому будут принадлежать в качестве элементов Задачи 6 и 7. Однако перед тем как это будет сделано, необходимо переформулировать Задачи 6 и 7 так, чтобы матрицы  $\mathbf{M}_{1,2}(k)$  и  $\mathbf{N}_{1,2}(k)$  имели собственные значения стремящиеся к 1 при  $|k| \rightarrow \infty$ . Легко видеть, что матрицы  $\mathbf{N}_{1,2}$  уже удовлетворяют этому условию (т.е. в симметричном случае переформулировка не требуется), а матрицы  $\mathbf{M}_{1,2}(k)$  имеют одно собственное значение стремящееся к 1 и одно стремящееся к  $-1$ . Для того, чтобы переформулировать антисимметричную задачу сделаем замену переменных:

$$\hat{\mathbf{U}} \equiv \begin{pmatrix} \hat{U}_-^1 & \hat{U}_+^1 \\ \hat{U}_-^2 & \hat{U}_+^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_-^1 & U_+^1 \\ U_-^2 & U_+^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\pi/4}(k_0 - k)^{-1/2} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4}(k_0 + k)^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.120)$$

Условия роста для новых функций принимают вид:

$$\hat{U}_+^j(k) = \delta_{j,2} e^{ika} + O(k^{-1} e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.121)$$

$$\hat{U}_-^j(k) = \delta_{j,1} e^{-ika} + O(k^{-1} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.122)$$

$$\hat{U}_-^j(k) = -\delta_{j,1} e^{-ika} + O(k^{-1} e^{-ika}), \quad \text{Arg}[e^{-i\pi/2}k] \leq \pi/2, \quad (4.123)$$

$$\hat{U}_+^j(k) = -\delta_{j,2} e^{ika} + O(k^{-1} e^{ika}), \quad \text{Arg}[e^{i\pi/2}k] \leq \pi/2. \quad (4.124)$$

Формулы, связывающие значения  $\hat{\mathbf{U}}$  на левых и правых берегах разрезов  $\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}'_2$ , принимают вид:

$$\hat{\mathbf{U}}_R(k) = \hat{\mathbf{U}}_L \mathbf{M}_1(k), \quad k \in \mathcal{G}'_1, \quad (4.125)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_R(k) = \hat{\mathbf{U}}_L \mathbf{M}_2(k), \quad k \in \mathcal{G}'_2, \quad (4.126)$$

где

$$\mathbf{M}_2(k) = \begin{pmatrix} (i\xi + \eta)/(i\xi - \eta) & 0 \\ 2i(k_0 + k)/(i\xi - \eta) & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.127)$$

$$\mathbf{M}_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2i(k_0 - k)/(i\xi - \eta) \\ 0 & (i\xi + \eta)/(i\xi - \eta) \end{pmatrix}. \quad (4.128)$$

Теперь функциональная задача для  $\hat{\mathbf{U}}$  может быть сформулирована:

**Задача 8.** Найти матричную функцию  $\hat{\mathbf{U}}(k)$ , элементы которой заданы выражением (4.120), такую что

- она регулярна и не имеет нулей определителя на плоскости с разрезами  $\mathcal{G}'_{1,2}$ ;
- она удовлетворяет функциональным уравнениям (4.125), (4.126) с коэффициентами (4.127), (4.128) на разрезах;
- она удовлетворяет условиям роста (4.121), (4.122), (4.123), (4.124);
- элементы  $\hat{\mathbf{U}}$  растут не быстрее чем  $(k_0 \mp k)^{-1/2}$  вблизи точек  $\pm k_0$ .

#### 4.15.2. Семейство задач Римана—Гильберта в антисимметричном случае

Рассмотрим антисимметричный случай, т. е. Задачу 8.

Представим контура  $\mathcal{G}'_{1,2}$  как  $\mathcal{G}'_2 = \gamma + k_0$ ,  $\mathcal{G}'_1 = -\gamma - k_0$ , где  $\gamma$  – контур, идущий от  $i\infty$  к 0. Здесь  $+k_0$  и  $-k_0$  обозначают величину на которую сдвигается контур. Пусть  $\gamma(b)$ ,  $b \in \gamma$  – контур, идущий от  $i\infty$  к  $b$  вдоль  $\gamma$ , т. е.  $\gamma(b)$  является частью  $\gamma$ . Пусть

$$\mathcal{G}'_1(b) = -\gamma(b) - k_0, \quad \mathcal{G}'_2(b) = \gamma(b) + k_0.$$

Построим семейство задач Римана—Гильберта для Задачи 8. Ключевым шагом является замена контуров  $\mathcal{G}'_{1,2}$  контурами  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ . Условия роста на бесконечности и матрицы связи (4.127), (4.128) остаются такими же, как и в Задаче 8, меняются лишь условия роста в конечных точках контура (вследствие того, что конечные точки перемещаются из  $\pm k_0$  в  $\pm(k_0 + b)$ ). Чтобы сформулировать эти условия необходимо изучить поведение решения задачи Римана—Гильберта вблизи одной из конечных точек. Рассмотрим в качестве примера контур  $\mathcal{G}'_1(b)$ . Пусть на берегах  $\mathcal{G}'_1(b)$  выполняется уравнение (4.126) с коэффициентами (4.128). Тогда, очевидно, вблизи конечной точки  $b + k_0$  решение имеет вид

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}(b, k) \mathbf{H}(k) \exp \left\{ \frac{\log(k - (k_0 + b))}{2\pi i} \begin{pmatrix} \log(m_1(k)) & 0 \\ 0 & \log(m_2(k)) \end{pmatrix} \right\} \mathbf{H}^{-1}, \quad (4.129)$$

где  $\mathbf{T}(k)$  – произвольная аналитическая матрица вблизи  $k_0 + b$ ,

$$m_1(k) = \frac{i\sqrt{k_0^2 - k^2} + \eta}{i\sqrt{k_0^2 - k^2} - \eta}, \quad (4.130)$$

и

$$m_2(k) = 1$$

– собственные значения матрицы  $\hat{\mathbf{M}}_2(k)$ ,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{i(k_0 + k)}{\eta} \quad (4.131)$$

– матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $\hat{M}_2(k_0 + b)$ . Ветвь квадратного корня в точке  $k = b + k_0$  выбирается с помощью процедуры, описанной в разделе 4.14 (см. Рис. 4.9).

Подходящий выбор логарифмов в (4.129) определяет условия роста вблизи  $k_0 + b$ . Выберем  $\log(m_2(k)) = 0$  (такой выбор дает регулярную часть решения). Далее рассмотрим функцию  $m_1(k)$ . Очевидно, что  $m_1(0) = -1$ ,  $m_1(i\infty) = 1$ .

Введем величину

$$\text{Idx} = \log(m_1(b))|_0^{i\infty}, \quad (4.132)$$

которую будем называть *индексом* задачи Римана—Гильберта. Под введенным обозначением понимается непрерывное изменение логарифма при проходе от 0 до  $i\infty$  вдоль контура  $\mathcal{G}'_2$ .

Очевидно, что  $\text{Idx} = \pi i + 2\pi i\mu$  для некоторого целого  $\mu$ . Легко показать (см. Приложение E), что при ограничении  $\text{Im}[\eta] < 0$

$$\text{Idx} = \pi i. \quad (4.133)$$

Введем величину

$$\lambda(b) = \frac{\log(m_1(b))}{2\pi i}. \quad (4.134)$$

Данная функция должна быть непрерывна на  $\mathcal{G}'_2$ , а также

$$\lambda(i\infty) = 0. \quad (4.135)$$

В соответствии с (4.133), имеем  $\lambda(0) = -1/2$ .

Введем семейство матричных функций  $\hat{U}(b, k)$  размерности  $2 \times 2$ , таких что для каждого фиксированного  $b$  функция  $\hat{U}(b, k)$ , рассматриваемая как функция переменной  $k$ , является решением следующей функциональной задачи:

**Задача 9.** Найти матричную функцию  $\hat{U}(b, k)$ , элементы которой заданы выражением (4.120), такую что

- она регулярна и не имеет нулей определителя на плоскости с разрезами  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ ;
- она удовлетворяет функциональным уравнениям (4.125), (4.126) с коэффициентами (4.127), (4.128) на разрезах  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ ;
- она удовлетворяет условиям роста (4.121), (4.122), (4.123), (4.124) на бесконечности;
- вблизи точки  $-k_0 - b$  элементы  $\hat{U}^-_j$  ведут себя как регулярные функции, а элементы  $\hat{U}^+_j$  ведут себя как  $(k - (k_0 + b))^{\lambda(b)}\Psi_1(k + (k_0 + b)) + \Psi_2(k + (k_0 + b))$ , где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – некоторые функции, регулярные вблизи нуля;

- вблизи точки  $k_0 + b$  элементы  $\hat{U}_+^j$  ведут себя как регулярные функции, а элементы  $\hat{U}_-^j$  ведут себя как  $(k + (k_0 + b))^{\lambda(b)} \Psi_3(k - (k_0 + b)) + \Psi_4(k - (k_0 + b))$ , где  $\Psi_3$  и  $\Psi_4$  – некоторые функции, регулярные вблизи нуля.

Семейство  $\hat{U}(b, k)$  введено математически корректно, так как единственность решения  $\hat{U}(b, k)$  может быть доказана для любого  $b$  с помощью техники, использованной в разделе 4.13.1.

Задача 8 и Задача 9 связаны соотношением

$$\hat{U}(k) = \hat{U}(0, k). \quad (4.136)$$

### 4.15.3. Семейство задач Римана—Гильберта в симметричном случае

Введем семейство матричных функций  $\mathbf{V}(b, k)$ , таких что для каждого фиксированного  $b$  функция  $\mathbf{V}(b, k)$ , рассматриваемая как функция переменной  $k$ , является решением следующей функциональной задачи:

**Задача 10.** Найти матричную функцию  $\mathbf{V}(b, k)$ , такую что

- она регулярна и не имеет нулей определителя на плоскости с разрезами  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ ;
- она удовлетворяет функциональным уравнениям (4.114), (4.115) с коэффициентами (4.116), (4.117) на разрезах  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ ;
- она удовлетворяет условиям роста (4.90), (4.91), (4.118), (4.119) на бесконечности;
- вблизи точки  $-k_0 - b$  элементы  $V_-^j$  ведут себя как регулярные функции, а элементы  $V_+^j$  ведут себя как  $(k + (k_0 + b))^{\lambda(b)} \check{\Psi}_1(k + (k_0 + b)) + \check{\Psi}_2(k + (k_0 + b))$ , где  $\check{\Psi}_1$  и  $\check{\Psi}_2$  – некоторые функции, регулярные вблизи нуля;
- вблизи точки  $k_0 + b$  элементы  $V_+^j$  ведут себя как регулярные функции, а элементы  $V_-^j$  ведут себя как  $(k - (k_0 + b))^{\lambda(b)} \check{\Psi}_3(k - (k_0 + b)) + \check{\Psi}_4(k - (k_0 + b))$ , где  $\check{\Psi}_3$  и  $\check{\Psi}_4$  – некоторые функции, регулярные вблизи нуля.

Задача 7 и Задача 10 связаны соотношением

$$\mathbf{V}(k) = \mathbf{V}(0, k). \quad (4.137)$$

## 4.16. Вывод ODE1

### 4.16.1. ODE1 в антисимметричном случае

После того, как исходные задачи были погружены в семейство задач Римана—Гильберта, перейдем к исследованию характера зависимости семейства от параметра.

Докажем, что  $\hat{\mathbf{U}}(b, k)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ODE1) по параметру  $b$ :

$$\frac{\partial}{\partial b} \hat{\mathbf{U}}(b, k) = \mathbf{R}(b, k) \hat{\mathbf{U}}(b, k), \quad b \in \gamma, \quad (4.138)$$

где  $\mathbf{R}(b, k)$  – коэффициент уравнения. Структура коэффициента дается следующим утверждением.

**Утверждение 4.1.** *Функция  $\hat{\mathbf{U}}(b, k)$ , являющаяся решением семейства функциональных задач, поставленных в Задаче 9, удовлетворяет уравнению (4.138) с коэффициентом*

$$\mathbf{R}(b, k) = \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)}, \quad (4.139)$$

где  $\mathbf{r}(b)$ ,  $b \in \gamma$  – не зависящая от  $k$  матричная функция размерности  $2 \times 2$ ;  $\mathbf{r}^*$  связана с  $\mathbf{r}$  с помощью следующего соотношения:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^* = \begin{pmatrix} r_{2,2} & r_{2,1} \\ r_{1,2} & r_{1,1} \end{pmatrix},$$

т. е. чтобы получить  $\mathbf{r}^*$  необходимо переставить сначала строки, а потом столбцы матрицы  $\mathbf{r}$ .

**Доказательство** Построим коэффициент ODE1 следующим образом:

$$\mathbf{R}(b, k) \equiv \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}(b, k)}{\partial b} \hat{\mathbf{U}}^{-1}(b, k). \quad (4.140)$$

Рассмотрим эту комбинацию для фиксированного  $b$  как функцию  $k$ . Из постановки Задачи 9 следует, что  $\mathbf{R}(b, k)$  не имеет особенностей на всей комплексной плоскости  $k$ , разрезанной вдоль контуров  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ . Более того, так как функции  $\mathbf{M}_{1,2}$  не зависят от  $b$ , значения  $\mathbf{R}$  на левых и правых берегах разрезов  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$  равны:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}(b, k)}{\partial b} \hat{\mathbf{U}}^{-1}(b, k) \right)_R &= \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}(b, k)}{\partial b} \right)_R \left( \hat{\mathbf{U}}^{-1}(b, k) \right)_R = \\ \frac{\partial (\hat{\mathbf{U}}(b, k))_L \mathbf{M}_j(k)}{\partial b} \mathbf{M}_j(k)^{-1} (\hat{\mathbf{U}}^{-1}(b, k))_L &= \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}(b, k)}{\partial b} \right)_L (\hat{\mathbf{U}}^{-1}(b, k))_L. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\mathbf{R}$  является однозначной на комплексной плоскости  $k$ , и может иметь особенности только в концевых точках контуров  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$ , т. е. в точках  $k = \pm(k_0 + b)$ . Рассмотрим малую область вблизи  $k = k_0 + b$ . Для того, чтобы изучить поведение  $\mathbf{R}$  в этой точке, воспользуемся представлением (4.129), и подставим его в (4.140). Получим:

$$\mathbf{R}(b, k) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial b} \mathbf{T}^{-1} - \frac{\log(m_1(k))}{2\pi i(k - (b + k_0))} \mathbf{T} \mathbf{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}^{-1}. \quad (4.141)$$

Первый член не содержит особенностей по переменной  $k$ , т. е. коэффициент  $\mathbf{R}$  может иметь только простой полюс в точке  $k = k_0 + b$ . Обозначим вычет функции  $\mathbf{R}(b, k)$  в точке  $k = k_0 + b$  как  $\mathbf{r}(b)$ .

Аналогично можно провести рассмотрение вблизи точки  $k = -k_0 - b$ . Учтем геометрическую симметрию задачи, а именно симметрию  $x \rightarrow -x$ . Данное преобразование изменяет матрицу решений следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_-(k) & \hat{U}_+(k) \\ \hat{U}_-(k) & \hat{U}_+(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_+(-k) & \hat{U}_-(-k) \\ \hat{U}_+(-k) & \hat{U}_-(-k) \end{pmatrix}. \quad (4.142)$$

Отсюда следует, что коэффициент  $\mathbf{R}(b, k)$  имеет форму (4.139).  $\square$

#### 4.16.2. ODE1 для симметричного случая

По аналогии с антисимметричным случаем можно доказать следующее утверждение.

**Утверждение 4.2.** *Функция  $\mathbf{V}(b, k)$ , являющаяся решением семейства функциональных задач, поставленных в Задаче 10, удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial b} \mathbf{V}(b, k) = \mathbf{L}(b, k) \mathbf{V}(b, k), \quad b \in \gamma, \quad (4.143)$$

с коэффициентом

$$\mathbf{L}(b, k) = \frac{\mathbf{I}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{I}^*(b)}{k + (k_0 + b)}, \quad (4.144)$$

где  $\mathbf{I}(b)$ ,  $b \in \gamma$  – не зависящая от  $k$  матричная функция размерности  $2 \times 2$ ;

#### 4.16.3. Начальное условие для ODE1

**Утверждение 4.3.** *Начальные условия для ODE1 (4.138) и (4.143) имеют следующий вид:*

$$\lim_{b \rightarrow i\infty} \hat{\mathbf{U}}(b, k) = \lim_{b \rightarrow i\infty} \mathbf{V}(b, k) = \mathbf{\Pi}(k), \quad (4.145)$$

$$\mathbf{\Pi}(k) = \begin{pmatrix} \exp\{-iak\} & 0 \\ 0 & \exp\{iak\} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство** Рассмотрим антисимметричный случай, т. е. рассмотрим Задачу 9 при некотором большом положительном мнимом  $b$ . Сведем Функциональную задачу к системе интегральных уравнений [107]. Введем матрицу

$$\begin{pmatrix} v_-^1 & v_+^1 \\ v_-^2 & v_+^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}_-^1 & \hat{U}_+^1 \\ \hat{U}_-^2 & \hat{U}_+^2 \end{pmatrix} \Pi^{-1}(k) \quad (4.146)$$

Далее введем функции  $\psi_+^j(k)$   $k \in \mathcal{G}'_1(b)$  и  $\psi_-^j(k)$   $k \in \mathcal{G}'_2(b)$ , такие что

$$v_-^j(k) = \delta_{j,1} + \int_{\mathcal{G}'_2(b)} \frac{\psi_-^j(\tau)}{k - \tau} d\tau, \quad (4.147)$$

$$v_+^j(k) = \delta_{j,2} + \int_{\mathcal{G}'_1(b)} \frac{\psi_+^j(\tau)}{k - \tau} d\tau. \quad (4.148)$$

Предполагается, что контура  $\mathcal{G}'_{1,2}(b)$  идут от  $\mp i\infty$  to  $\mp(k_0 + b)$ . Заметим, что при  $k \in \mathcal{G}'_2(b)$

$$(v_-^j(k))_{L,R} = \delta_{j,1} \pm \pi i \psi_-^j(k) + \int_{\mathcal{G}'_2(b)} \frac{\psi_-^j(\tau)}{k - \tau} d\tau, \quad (4.149)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

В соответствии с функциональным уравнением (4.106), справедливо следующее уравнение:

$$-2\pi i \psi_-^j(k) = e^{2iak} \acute{m}_{2,1}(k) v_+^j(k) + (\acute{m}_{1,1}(k) - 1) \left( \int_{\mathcal{G}'_2(b)} \frac{\psi_-^j(\tau) d\tau}{k - \tau} + \pi i \psi_-^j(k) + \delta_{1,j} \right), \quad k \in \mathcal{G}'_2(b) \quad (4.150)$$

Пользуясь геометрической симметрией, имеем

$$v_+^j(k) = \delta_{j,2} + \int_{\mathcal{G}'_2(b)} \frac{\psi_-^{3-j}(\tau) d\tau}{k + \tau}, \quad k \in \mathcal{G}'_2. \quad (4.151)$$

Здесь  $\acute{m}_{1,1}$  и  $\acute{m}_{2,1}$  – соответствующие элементы матрицы  $\acute{\mathbf{M}}_2$ . Легко видеть, что для больших  $\text{Im}[k]$ ,  $k \in \mathcal{G}'_2(b)$ , значения  $(\acute{m}_{1,1}(k) - 1)$  близки к 0 (по этой причине была сделана замена  $\mathbf{U}$  на  $\hat{\mathbf{U}}$ ). Кроме того, при тех же самых условиях  $e^{2iak} \acute{m}_{2,1}(k)$  близко к нулю.

Если  $\text{Im}[b]$  достаточно велико, система (4.150) может быть решена с помощью метода итераций. При больших  $\text{Im}[b]$  следует сохранять только нулевое приближение, т.е.  $\psi_{\pm}^j$  может быть положено равным нулю. Отсюда следует (4.145).

В симметричном случае доказательство строится аналогичным образом.  $\square$

#### 4.16.4. Вывод ОЕ—уравнения в антисимметричном случае

Ниже формулируется левое ОЕ—уравнение для задачи дифракции на импедансной полосе (понятие упорядоченной экспоненты вводится в Главе 2, разделе 2.6). В соответствии с Утверждениями 4.1 и 4.3, решение Задачи 8 может быть записано как

$$\hat{\mathbf{U}}(k) = \text{OE}_{\gamma}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \mathbf{\Pi}(k), \quad (4.152)$$

Напомним, что контур  $\gamma$  идет от  $i\infty$  до 0.

Детальное исследование, основанное на аналитическом продолжении матриц  $\mathbf{M}_{1,2}$  (см. [108]), показывает, что коэффициент  $\mathbf{R}$  аналитичен по переменной  $b$  в некоторой малой полосе вблизи контура  $\gamma$ . Таким образом, контур может быть немного деформирован без изменения результата, что обеспечивается неподвижностью концевых точек контура.

Построим контура  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  как показано на Рис. 4.11. Эти контура нужны для вычисления значений  $\hat{\mathbf{U}}_R(k)$  и  $\hat{\mathbf{U}}_L(k)$ ,  $k \in \mathcal{G}'_2$ . А именно,

$$\hat{\mathbf{U}}_R(k) = \text{OE}_{\gamma_+}^L [db \mathbf{R}(b, k)] \mathbf{\Pi}(k), \quad (4.153)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_L(k) = (\text{OE}_{\gamma_-}^L [db \mathbf{R}(b, k)])^{-1} \mathbf{\Pi}(k). \quad (4.154)$$

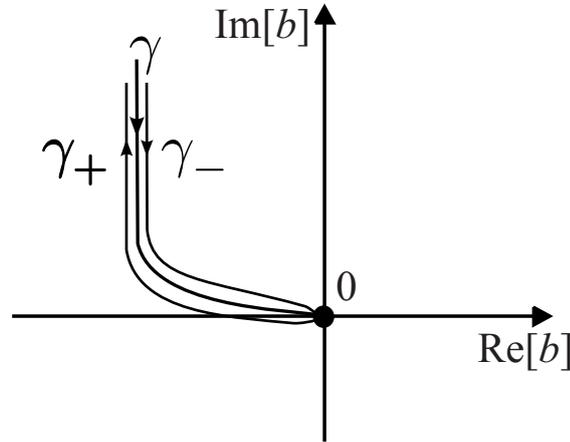


Рис. 4.11. Контура  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$ . Для простоты изображен случай  $\text{Re}[\eta] > 0$ , т. е. разрезы  $\mathcal{G}_{1,2}$  остаются недеформированными

Введем контур  $\gamma_+ + \gamma_-$  как объединение контуров  $\gamma_+$  и  $\gamma_-$  ( $\gamma_+$  в начале). Из функционального уравнения (4.126) следует следующее соотношение:

$$\mathbf{\Pi}^{-1}(k) \text{OE}_{\gamma_+ + \gamma_-}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \mathbf{\Pi}(k) = \mathbf{M}_2(k). \quad (4.155)$$

Уравнение (4.155) есть ОЕ—уравнение рассматриваемой задачи. По симметрии будет также выполняться уравнение (4.125).

Сформулируем задачу для ОЕ—уравнения, к которому свелась антисимметричная задача дифракции на полосе.

**Задача 11.** Найти функцию  $\mathbf{r}(b)$  при  $b \in \gamma$ , аналитичную в узкой полосе вблизи  $\gamma$ , такую что уравнение (4.155) выполняется для всех  $k \in \mathcal{G}'_2$ .

#### 4.16.5. ОЕ—уравнение в симметричном случае

В симметричном случае следует решать следующую задачу.

**Задача 12.** Найти функцию  $\mathbf{l}(b)$ , аналитичную в узкой полосе вблизи  $\gamma$ , такую что

$$\mathbf{\Pi}^{-1}(k) \text{OE}_{\gamma_+ + \gamma_-}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{l}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{l}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \mathbf{\Pi}(k) = \mathbf{N}_2(k) \quad (4.156)$$

выполняется для всех  $k \in \mathcal{G}'_2$ .

### 4.17. Численное решение ОЕ—уравнений

Для решения исходной задачи дифракции с помощью метода ОЕ—уравнения необходимо проделать следующие шаги:

- Контур  $\gamma$  (см. Рис. 4.11) дискретизируется. Задача 11 решается численно (процедура решения описана ниже). В результате коэффициент  $\mathbf{r}(b)$  становится известен в наборе точек  $b_n$ , плотно покрывающих контур  $\gamma$ .
- Выбираются точки в плоскости переменной  $k$ . Хорошим выбором является набор точек  $\kappa_m$ , плотно покрывающий область  $(-k_0, k_0)$ , так как такой набор позволяет построить диаграмму направленности. В этих точках вычисляются значения матрицы  $\hat{\mathbf{U}}(\kappa_m)$  посредством формулы (4.152), т. е. путем решения линейного ОДУ с известными коэффициентами и начальными условиями.
- С помощью формулы (4.120) вычисляется матрица  $\mathbf{U}(k)$  в точках  $k = \kappa_m$ .
- С помощью формул (4.64) и (4.65) вычисляются функции  $\hat{U}_0^j(k)$  в точках  $k = \kappa_m$ .
- Для того чтобы вычислить функцию  $\hat{U}_0(k, k_*)$ , функции  $\hat{U}_0^j(k)$  подставляются в формулу расщепления (4.103).
- Диаграмма направленности вычисляется с помощью формулы (4.70) в точках  $\theta_m = \arccos(-\kappa_m/k)$ .

Легко видеть, что все шаги описанной процедуры просты за исключением самого первого. Для численного решения Задачи 11 используется техника, развитая в [1].

Из линейной алгебры известно, что матрица  $\mathbf{M}_2(k)$  может быть представлена в следующей форме:

$$\mathbf{M}_2(k) = \mathbf{H}(k) \begin{pmatrix} m_1(k - k_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{H}^{-1}(k), \quad (4.157)$$

где  $m_1(b)$ ,  $\mathbf{H}(k)$  были введены соответственно в (4.130) и (4.131).

Левая часть (4.155) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} & \text{OE}_{\gamma_+ \circ \gamma_-}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \\ &= \mathbf{F}(k) \text{OE}_{\sigma}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \mathbf{F}^{-1}(k), \end{aligned} \quad (4.158)$$

где  $\sigma$  – петля малого радиуса  $\epsilon$ , обходящая точку  $k - k_0$  в положительном направлении, и

$$\mathbf{F}(k) = \text{OE}_{\gamma_+^\epsilon} \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right]. \quad (4.159)$$

Здесь  $\gamma_+^\epsilon$  – контур, идущий от  $i\infty$  до начала петли  $\sigma$ , вдоль контура  $\gamma_+$  (см. Рис. 4.12).

Представим  $\mathbf{r}(b)$  в следующей форме

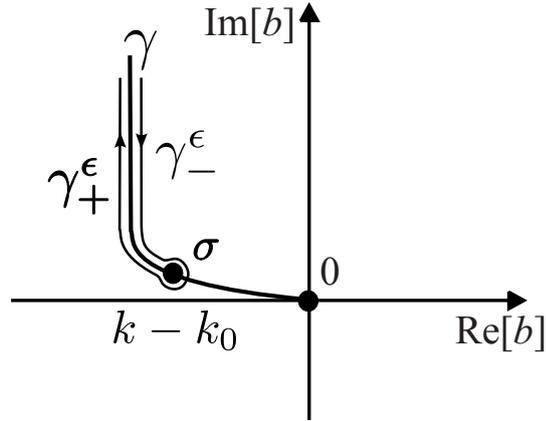


Рис. 4.12. Контур  $\gamma_+^\epsilon, \sigma, \gamma_-^\epsilon$

$$\mathbf{r}(b) = \mathbf{P}(b) \begin{pmatrix} \xi_1(b) & 0 \\ 0 & \xi_2(b) \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}(b). \quad (4.160)$$

Столбцы матрицы  $\mathbf{P}(b)$  суть собственные векторы матрицы  $\mathbf{r}$ . Почти везде (за исключением особых точек матрицы  $\mathbf{r}$ ) матрица  $\mathbf{P}(b)$  может быть параметризована следующим образом:

$$\mathbf{P}(b) = \begin{pmatrix} 1 & p_2(b) \\ p_1(b) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.161)$$

Очевидно, что при  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\text{OE}_{\sigma}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \rightarrow$$

$$\mathbf{P}(k - k_0) \exp \left\{ -2\pi i \begin{pmatrix} \xi_1(k - k_0) & 0 \\ 0 & \xi_2(k - k_0) \end{pmatrix} \right\} \mathbf{P}^{-1}(k - k_0). \quad (4.162)$$

Из уравнения (4.162) следует, что собственные значения матрицы  $\mathbf{r}(b)$  связаны с собственными значениями матрицы  $\dot{\mathbf{M}}_2(k)$ :

$$\xi_1(k - k_0) = \frac{i}{2\pi} \log(m_1(k - k_0)), \quad \xi_2(k) = 0. \quad (4.163)$$

Таким образом, чтобы найти  $\mathbf{r}$  достаточно определить  $p_1(b), p_2(b)$ .

Введем функцию, определенную в области  $k, \beta \in \gamma, |\beta| > |k - k_0|$ :

$$\mathbf{K}(\beta, k) = \text{OE}_{\gamma_{k,\beta}}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right], \quad (4.164)$$

где контур  $\gamma_{k,\beta}$  изображен на Рис. 4.13. Функция  $\mathbf{K}(\beta, k)$  удовлетворяет уравнению

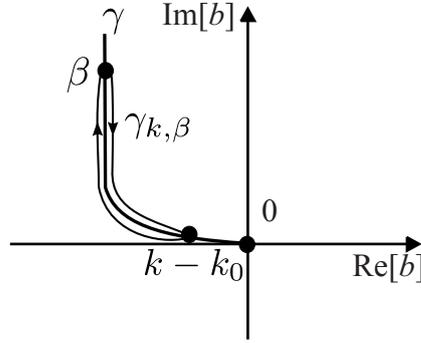


Рис. 4.13. Контур  $\gamma_{k,\beta}$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{K}(\beta, k) = \frac{1}{k - (k_0 + \beta)} [\mathbf{r}(\beta), \mathbf{K}(\beta, k)] - \frac{1}{k + (k_0 + \beta)} [\mathbf{r}^*(\beta), \mathbf{K}(\beta, k)], \quad (4.165)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  – коммутатор. Так как  $\mathbf{K}$  сопряжено с

$$\text{OE}_{\sigma}^L \left[ db \left( \frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right], \quad (4.166)$$

их собственные значения совпадают, и  $\mathbf{K}$  может быть записано в виде

$$\mathbf{K}(\beta, k) = \mathbf{Q}(\beta, k) \begin{pmatrix} m_1(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}(\beta, k), \quad (4.167)$$

где

$$\mathbf{Q}(\beta, k) = \begin{pmatrix} 1 & q_2(\beta, k) \\ q_1(\beta, k) & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.168)$$

Устремляя  $\beta \rightarrow k - k_0$  получим соотношение  $\mathbf{Q}(k - k_0, k) = \mathbf{P}(k - k_0)$ . Отсюда

$$q_{1,2}(k - k_0, k) = p_{1,2}(k - k_0). \quad (4.169)$$

Устремляя  $\beta \rightarrow i\infty$  получим соотношение  $\mathbf{Q}(i\infty, k) = \mathbf{H}(k)$ , т.е

$$q_1(i\infty, k) = \alpha(k), \quad q_2(i\infty, k) = 0, \quad (4.170)$$

где  $\alpha$  дается формулой (4.131).

С помощью элементарных вычислений можно показать, что (4.165) эквивалентно системе двух независимых уравнений типа Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{1,2}(\beta, k)}{\partial \beta} = & \frac{\xi_1(\beta)(p_{1,2}(\beta) - q_{1,2}(\beta, k))(1 - p_{2,1}(\beta)q_{1,2}(\beta, k))}{(p_1(\beta)p_2(\beta) - 1)(k - (k_0 + \beta))} + \\ & \frac{\xi_1(\beta)(p_{2,1}(\beta) - q_{1,2}(\beta, k))(1 - p_{1,2}(\beta)q_{1,2}(\beta, k))}{(p_1(\beta)p_2(\beta) - 1)(k + (k_0 + \beta))}. \end{aligned} \quad (4.171)$$

Таким образом, надо найти пару функций  $p_1(\beta), p_2(\beta)$  таких, что существует решение  $q_{1,2}(\beta, k)$  системы (4.171) для значений  $\beta \in \gamma$ , находящихся между точкой  $k - k_0$  и точкой  $i\infty$ . Кроме того, решение  $q_{1,2}(\beta, k)$  должно удовлетворять граничным условиям (4.169), (4.170). Это может быть достигнуто с помощью следующей численной процедуры. Во-первых, контур должен  $\gamma$  быть подвергнут дискретизации, т. е. его следует заменить набором точек  $b_j, j = 1 \dots N$ . Начальная точка  $b_1$  должна обладать достаточно большой мнимой частью. Конечная точка  $b_N$  равна нулю. В каждой точке  $b_j$  матрица  $\mathbf{M}_2(b + k_0)$  представляется в виде (4.157), т. е. вычисляются значения  $m_1(b)$  и  $\alpha(b + k_0)$ . Значение  $\xi_1(b + k_0)$  вычисляется с помощью формулы (4.163).

В точке  $b_1$ , которая берется в качестве «бесконечно удаленной» точки, постулируются следующие значения

$$p_1(b_1) = 0, \quad p_2(b_1) = 0. \quad (4.172)$$

Такой выбор асимптотики коэффициента вполне естественен, так как  $\mathbf{M}_2(k)$  стремится к единичной матрице при  $k \rightarrow i\infty$ . Данная процедура повторяется при  $j = 2 \dots N$ . На  $j$ -м шаге производится вычисление величин  $p_{1,2}(b_j)$ , т.е. величины  $p_{1,2}(b_1) \dots p_{1,2}(b_{j-1})$  уже известны. С помощью метода Рунге—Кутты четвертого порядка решаются уравнения (4.171) на контуре  $b \in (b_1, b_{j-1})$  с  $q_{1,2}(b, b_j)$  со следующими начальными условиями:

$$q_1(b_1) = \alpha(b_1), \quad q_2(b_1) = 0, \quad (4.173)$$

которые следуют из (4.170). Значения  $q_{1,2}(b_1) \dots q_{1,2}(b_{j-1})$  становятся известными. Далее, уравнения (4.171) решаются на отрезке  $(b_{j-1}, b_j)$  (делается ровно один шаг) с помощью схемы Эйлера. Метод Эйлера хорош тем, что не требует знания последнего значения (значения в конце контура), т.е. с его помощью вычисляется значение  $q_{1,2}(b_j)$ . В соответствии с (4.169) имеем:

$$p_{1,2}(b_j) = q_{1,2}(b_j) \quad (4.174)$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{r}(b)$  становится известной. Остается решить ODE1 (4.138) и вычислить антисимметричную часть диаграммы направленности, с помощью процедуры, изложенной выше.

Результаты численного счета представлены на Рис. 4.14, а именно представлена зависимость  $k_0|S^a(\theta, \pi/6)|$  от  $\theta$  для  $k_0a = 8$  и  $\eta = 1 - 0.25i$ . Кроме того, численные результаты сравнивались с решением задачи, полученным методом граничных интегральных уравнений (с.м. Приложение Г). На Рис. 4.14 сплошная линия соответствует методу граничных интегральных уравнений, прерывистая – методу ОЕ–уравнения.

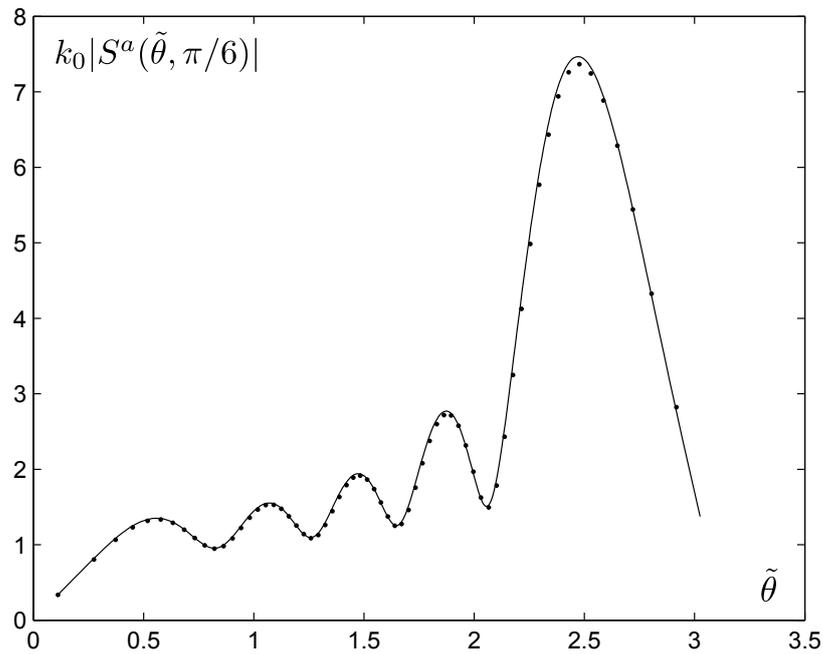


Рис. 4.14. Зависимость  $k_0|S^a(\theta, \pi/6)|$  от  $\theta$  для  $k_0a = 8$  и  $\eta = 1 - 0.25i$ . Сплошная линия соответствует методу граничных интегральных уравнений, прерывистая – методу ОЕ–уравнения.

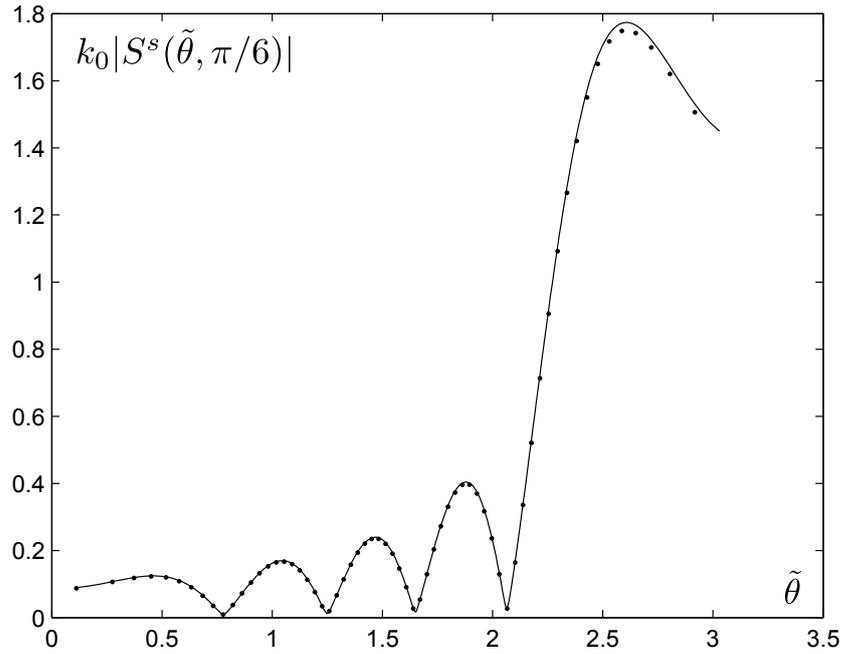


Рис. 4.15. Зависимость  $k_0 |S^s(\theta, \pi/6)|$  от  $\theta$  при  $k_0 a = 8$  и  $\eta = 1 - 0.25i$ . Сплошная линия соответствует методу граничных интегральных уравнений, прерывистая – методу ОЕ—уравнения.

#### 4.17.1. Симметричный случай

Для того, чтобы получить решение в симметричном случае необходимо проделать аналогичные вычисления. Поэтому здесь приводятся лишь конечные результаты. На Рис. 4.15. изображена зависимость  $k_0 |S^s(\theta, \pi/6)|$  от  $\theta$  при  $k_0 a = 8$  и  $\eta = 1 - 0.25i$ . Сплошная линия соответствует методу граничных интегральных уравнений, прерывистая – методу ОЕ—уравнения.

### 4.18. Основные результаты главы

1. Получено выражение в одиночных квадратурах для диаграммы направленности рассеянного поля для задачи дифракции высокочастотной плоской волны на импедансном отрезке при скользющем падении в параболическом приближении.
2. Доказана оптическая теорема для задачи дифракции на импедансном отрезке в параболическом приближении.
3. Для задачи дифракции на импедансном отрезке была сформулирована функциональная задача Винера—Хопфа—Фока, зависящая от двух параметров.

4. Была получена формула расщепления, сводящая исходную функциональную задачу к двум вспомогательным функциональным задачам, зависящим от одного параметра.
5. Вспомогательные функциональные задачи были заменены матричной задачей Римана—Гильберта, которая была погружена в однопараметрическое семейство.
6. Было показано, что семейство задач удовлетворяет обыкновенному дифференциальному матричному уравнению с неизвестным коэффициентом. Для неизвестного коэффициента было сформулировано ОЕ—уравнение.
7. Был построен численный метод решения ОЕ—уравнения. Было произведено сравнение численных результатов с методом граничных интегральных уравнений.

## Заключение

Кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Получено аналитическое выражение в одиночных квадратурах для диаграммы направленности рассеяного поля в задаче дифракции плоской высокочастотной волны на импедансном отрезке при скользящем падении. Выражение было получено с помощью метода параболического уравнения. Численные проверки показали, что параболическое приближение дает хорошие результаты и на границе его применимости.
2. Предложен новый подход к задаче дифракции на импедансной полосе в точной постановке (для уравнения Гельмгольца). Основу подхода составляет метод формулы расщепления и ОЕ-уравнения. В рамках данного подхода был предложен новый численный алгоритм решения задачи.
3. В рамках метода формулы расщепления, спектрального и эволюционного уравнений были исследованы периодические решетки, состоящие из полностью поглощающих экранов. Было получено асимптотическое значение коэффициента генерации основного дифракционного максимума, отвечающее за добротность плоских открытых резонаторов типа Фабри–Перо. Кроме того, была установлена связь с матричной задачей Винера–Хопфа–Фока. В рамках метода ОЕ-уравнения был построен численный алгоритм для расчета всех коэффициентов генерации дифракционных максимумов.

## Список сокращений и условных обозначений

- ГТД – геометрическая теория дифракции, сокращение введено на странице 6
- ФТД – физическая теория дифракции, сокращение введено на странице 6
- $\theta^{\text{in}}$  – угол падения, введен на странице 6, на Рис. 0.1
- $\tilde{\theta}$  – угол рассеяния,  $\tan \tilde{\theta} = \frac{y}{x}$ , введен на странице 6, на Рис. 0.1
- $\tilde{u}$  – волновое поле в случае уравнения Гельмгольца, введено на странице 12
- $u$  – волновое поле в случае параболического уравнения, введено на странице 15
- $i$  – мнимая единица, впервые используется на странице 15
- $k_0$  – волновое число, впервые используется на странице 15
- $v(x, y)$  – краевая функции Грина (КФГ), введена на странице 18
- $V(\theta)$  – диаграмма направленности КФГ, введена на странице 18
- $g(x, y)$  – функция Грина параболического уравнения на плоскости, введена на странице 15
- $\theta$  – угол рассеяния в параболическом приближении,  $\theta = \frac{y}{x}$ , введен на странице 18
- $H$  – оператор расщепления, введен на странице 19
- $u^{\text{in}}$  – падающее поле в случае параболического уравнения, введено на странице 19
- $u^{\text{sc}}$  – рассеяное поле в случае параболического уравнения, введено на странице 19
- $S(\theta, \theta^{\text{in}})$  – диаграмма направленности рассеяного поля в параболическом приближении, введена на странице 19
- $\tilde{u}^{\text{in}}$  – падающее поле в случае уравнения Гельмгольца, введено на странице 25
- $\tilde{u}^{\text{sc}}$  – рассеяное поле в случае уравнения Гельмгольца, введено на странице 26
- $\tilde{R}_n$  – коэффициенты генерации дифракционных максимумов (коэффициенты рассеяния в волноводные моды) в случае уравнения Гельмгольца, введены на странице 26
- $\tilde{\theta}_m$  – углы, соответствующие дифракционным максимумам в случае уравнения Гельмгольца, введены на странице 26
- $R_n$  – коэффициенты генерации дифракционных максимумов (коэффициенты рассеяния в волноводные моды) в случае параболического уравнения, введены на странице 29
- $R_0$  – коэффициент генерации основного дифракционного максимума (коэффициент зеркального отражения) в случае параболического уравнения, введен на странице 29
- $\theta_m$  – углы, соответствующие дифракционным максимумам в параболическом приближении, введены на странице 29
- $\chi$  – константа Флоке, введена на странице 30
- $G(x, y)$  – функция Грина уравнения Гельмгольца на плоскости, введена на странице 31

$\Pi_{++}, \Pi_{+-}, \Pi_{-+}, \Pi_{--}$  – операторы распространения для параболического уравнения, введены на странице 32

$\Theta(y)$  – тета-функция Хевисайда, введена на странице 38

$\delta(x)$  – дельта-функция Дирака, впервые используется на странице 40

$\delta_{i,j}$  – символ Кронекера, впервые используется на странице 42

$(x_m, y_m)$  – координаты вершин экранов, впервые введены на странице 49

$v_m(x, y)$  – КФГ в задачах дифракции на периодических экранах разной высоты, введены на странице 50

$V_m(\theta)$  – диаграммы направленности КФГ в задачах дифракции на периодических экранах разной высоты, введены на странице 51

$z_{m,n}$  – краевые значения КФГ, введены на странице 52

$\mathbf{C}(\theta, y^*)$  – матрица коэффициентов спектрального уравнения, введена на странице 54

$K_m$  – оператор параболического поворота, введен на странице 55

$\text{OE}_h^R$  – правый ОЕ–символ по контуру  $h$ , введен на странице 57

$\text{OE}_h^L$  – левый ОЕ–символ по контуру  $h$ , введен на странице 57

$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*)$  – матрица коэффициентов эволюционного уравнения 1 типа, введена на странице 58

$\Xi$  – постоянная матрица, равная  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , введена на странице 61

$[\cdot, \cdot]$  – коммутатор,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ , введен на странице 61

$\text{erfc}(z)$  – дополнительная функция ошибок,  $\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\tau^2} d\tau$ , введена на странице 63

$\mathbf{I}$  – единичная матрица, введена на странице 63

$k$  – переменная Фурье-преобразования, впервые используется на странице 73

$\text{res}[f(z), z = z_0]$  – вычет комплексной функции  $f(z)$  в точке  $z = z_0$ , введен на странице 76

$\eta$  – импеданс, введен на странице 81

$\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$  – диаграмма направленности рассеяного поля в случае уравнения Гельмгольца, введена на странице 81

$\cdot^*$  – оператор, переставляющий сначала строки, а затем столбцы матрицы, введен на странице 112

## Приложение А

### Формула расщепления для задачи дифракции на идеальной полосе

Формула (4.42) была выведена с помощью прямого решения параболического уравнения и упрощения результата интегрированием по частям. Между тем, (4.42) является частным случаем т.н. «формул расщепления», справедливых для широкого класса задач с кусочно-прямолинейными границами [67]. Смысл формул расщепления состоит в том, что вместо падающей плоской волны рассматривается точечный источник, расположенный вблизи одной из угловых точек рассеивателя. Поля таких источников называются краевыми функциями Грина. Формула расщепления выражает решение задачи с падающей плоской волной через краевые функции Грина. Поскольку в данном случае краевые функции Грина вычисляются явно, формула расщепления дает решение исходной задачи. Формула расщепления имеет самый простой вид и легче всего выводится, если рассмотрение проводится на разветвленной (двулистной) поверхности. Следуя идеям Зоммерфельда, рассмотрим двухлистную поверхность, изображенную на Рис. А.1. Поверхность разрезана вдоль полосы, а индексы 1 и 2 указывают правило склейки берегов разрезов (склеиваются одноименные берега). Падающая волна (4.2) падает только по первому листу. Введем диаграммы направленности для первого и второго листа  $S_I(\theta, \theta^{\text{in}}) = \hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}})$  и  $S_{II}(\theta, \theta^{\text{in}})$ . Из соображений симметрии следует, что

$$S_{II}(\theta, \theta^{\text{in}}) = -\hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}}). \quad (\text{A.1})$$

Для доказательства (A.1) достаточно в дополнение к исходной задаче рассмотреть симметричную задачу с падающей волной на втором листе и учесть тот факт, что их сумма тривиальна. Очевидно, что

$$S^{N,D} = S_I(\theta, \theta^{\text{in}}) \pm S_{II}(-\theta, \theta^{\text{in}}) = \hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}}) \mp \hat{S}(-\theta, \theta^{\text{in}}). \quad (\text{A.2})$$

Верхний знак соответствует полосе с граничными условиями Неймана, а нижний – Дирихле. Таким образом, нужно определить  $\hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}})$ .

Отметим, что формула симметризации (A.2) совпадает с (4.41), поэтому функция  $\hat{S}$ , введенная как  $\hat{S} = S_I$ , должна совпадать с функцией  $S$ , введенной в (4.42). В приложении везде используется определение  $\hat{S} = S_I$ , и новый символ для той же функции не вводится.

Кроме представления для двулистной поверхности, изображенного на Рис. А.1, нам понадобится еще одно представление. Деформируем разрезы так, как показано на Рис. А.2.

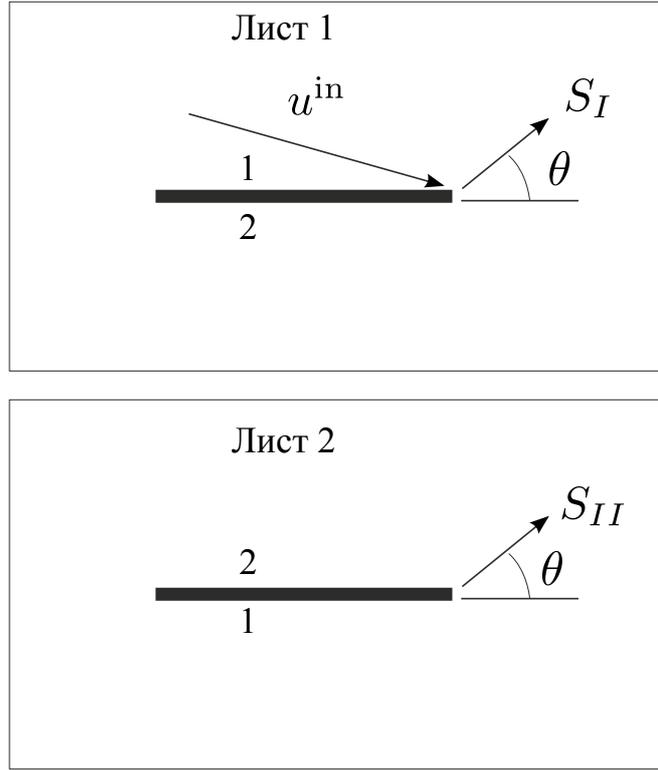


Рис. А.1. Структура двухлистной поверхности

Продолжая такую деформацию, получим представление, изображенное на Рис. А.3. Введем краевую функцию Грина дипольного типа. Для этого на двулистной поверхности разместим источники силой  $+1$  и  $-1$ , как показано на Рис. А.4. Источники размещаются справа от точки  $(-a, 0)$ . Краевую функцию Грина (КФГ) на поверхности обозначим как  $v(x, y)$ . Таким образом, краевая функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = \delta(x - (a + 0))\delta(y) \quad (\text{А.3})$$

на листе 1 и уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = -\delta(x - (a + 0))\delta(y) \quad (\text{А.4})$$

на листе 2. Специальные обозначения для поля на первом и втором листе не вводятся, так как всегда ищется поле и диаграммы направленности на листе 1. Как было отмечено выше, поле на листе 2 может быть получено с помощью симметрии. В соответствии с формулой (0.3) КФГ может быть представлена в виде (0.11). Отметим, что диаграмма направленности  $V(\theta)$  зависит только от одной переменной, в то время как диаграмма направленности исходной задачи  $\hat{S}(\theta, \theta^{in})$  зависит от двух переменных. Вычислим  $V(\theta)$ . Из формулы (0.3) следует, что

$$v(a, y) = g(2a, y), \quad y > 0, \quad (\text{А.5})$$

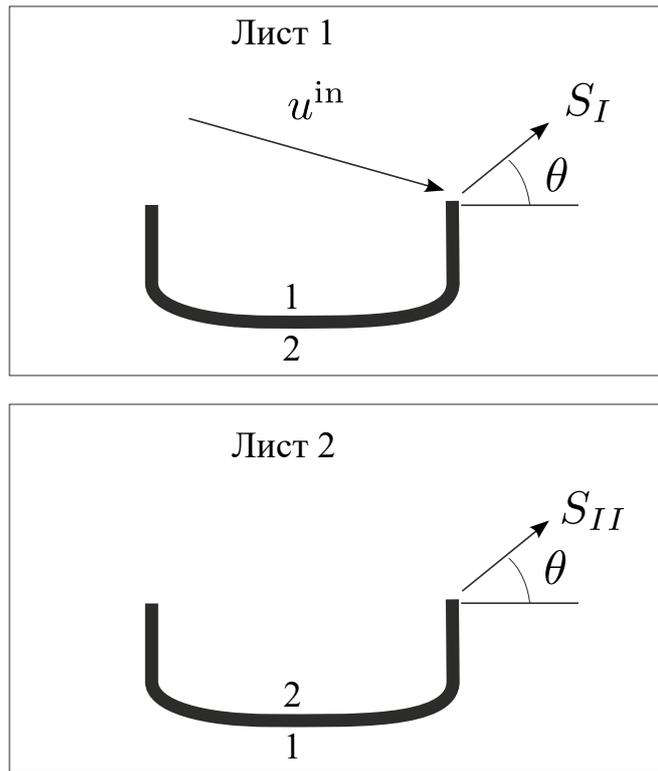


Рис. А.2. Схема деформации разрезов двулистной поверхности

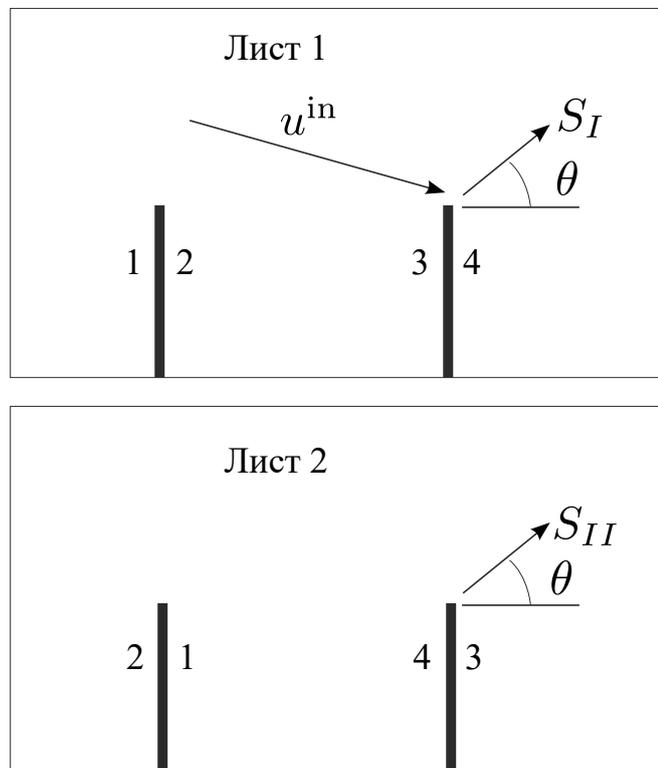


Рис. А.3. Альтернативное представление двулистной поверхности

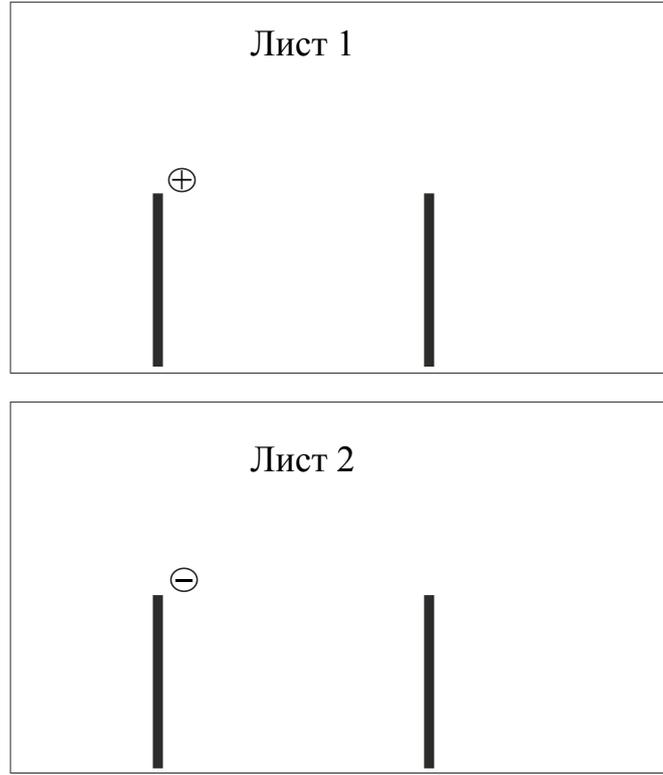


Рис. А.4. К определению краевых функций Грина

$$v(a, y) = -g(2a, y), \quad y < 0, \quad (\text{A.6})$$

Подставляя (A.5) и (A.6) в (4.21), получим:

$$V(\theta) = \sqrt{\frac{k_0}{4\pi ia}} \exp(ik_0 a \theta^2 / 2) \int_0^\infty \exp\left\{\frac{ik_0 y^2}{2a}\right\} (e^{-ik_0 y \theta} - e^{ik_0 y \theta}) dy =$$

$$\frac{1}{2} \exp(-ik_0 a \theta^2 / 2) \left( \operatorname{erfc}\left(-\theta \sqrt{\frac{ak_0}{i}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\theta \sqrt{\frac{ak_0}{i}}\right) \right) \quad (\text{A.7})$$

Приступим к выводу формулы расщепления. Рассмотрим поле на двулистной поверхности с разрезами, показанными на Рис. А.3. Применим к полному полю  $u(x, y)$  исходной задачи оператор расщепления (0.12). Проанализируем свойства поля

$$w(x, y) \equiv H[u](x, y). \quad (\text{A.8})$$

Во-первых, поле  $w(x, y)$  везде, кроме окрестности разрезов, удовлетворяет параболическому уравнению. Это следует из того, что оператор  $H$  коммутирует с оператором уравнения. Во-вторых, поле  $w(x, y)$  не содержит падающей волны. Это следует из того, что

$$H[u^{\text{in}}](x, y) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Наконец, производная по  $y$  в (0.12) приводит к появлению монопольных источников в конечных точках разрезов. Покажем это на примере вершины  $(-a, 0)$ . Рассмотрим узкую полосу в

окрестности разреза  $-a < x < -a + \epsilon$ ,  $-\infty < y < \infty$ . В соответствии с формулой (0.3), поле в данной полосе может быть представлено в виде:

$$u(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} u(-a, y') g(x + a, y - y') dy'. \quad (\text{A.10})$$

Интегрирование проводится по положительной оси, так как поле на отрицательной полуоси равно нулю. Применим оператор  $H$  и выполним интегрирование по частям.

$$w(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} w(-a, y') g(x + a, y - y') dy' + u(-a, \epsilon) g(x + a, y - \epsilon). \quad (\text{A.11})$$

Переходя к пределу в последнем выражении, получим

$$w(x, y) = \int_{\epsilon}^{\infty} w(-a - 0, y') g(x + a, y - y') dy' + u(-a - 0, \epsilon) g(x + a, y). \quad (\text{A.12})$$

Первый член в правой части соответствует полю без источников, а второй – полю точечного монополюсного источника с амплитудой  $u(-a, 0)$ , расположенного в точке  $(-a + 0, 0)$ . Аналогичная процедура может быть проделана и со второй вершиной.

Вследствие единственности решения дифракционной задачи, поле  $w(x, y)$  есть линейная комбинация полей точечных источников:

$$w(x, y) = u(-a - 0, 0) v(x, y) + u(a - 0, 0) g(x - a, y) \quad (\text{A.13})$$

Переходя к диаграммам направленности в последнем выражении, получим:

$$\hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}}) = \frac{\exp\{ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2\} V(\theta) + \exp\{ik_0 a \theta^2 / 2\} u(a - 0, 0)}{ik_0 (\theta + \theta^{\text{in}})} \quad (\text{A.14})$$

Здесь мы учли, что

$$u(-a - 0, 0) = u^{\text{in}}(-a, 0). \quad (\text{A.15})$$

Формула (A.14) есть формула расщепления в слабой формулировке. В ней фигурирует неизвестная величина  $u(a - 0, 0)$ . Для того, чтобы выразить это поле через диаграмму направленности КФГ, воспользуемся теоремой взаимности. Рассмотрим задачу с точечным источником единичной силы, расположенным на 1 листе в точке  $(x', \theta^{\text{in}} x')$  ( $x'$  – большое положительное число). Поле, создаваемое таким источником, асимптотически близко к полю падающей волны, умноженному на  $g(x', \theta^{\text{in}} x')$ . Устремляя  $x' \rightarrow \infty$  и применяя теорему взаимности (см. Приложение В, Утверждение 1.2.2), получаем, что

$$u(a - 0, 0) = V(\theta^{\text{in}}) \quad (\text{A.16})$$

Подставляя (A.16) в (A.14), получим формулу расщепления в сильной формулировке:

$$\hat{S}(\theta, \theta^{\text{in}}) = \frac{\exp\{ik_0 a(\theta^{\text{in}})^2/2\}V(\theta) + \exp\{ik_0 a\theta^2/2\}V(\theta^{\text{in}})}{ik_0(\theta + \theta^{\text{in}})}. \quad (\text{A.17})$$

Заметим, что в силу очевидной симметрии

$$V(-\theta) = -V(\theta) \quad (\text{A.18})$$

диаграмма (A.17) не имеет особенностей при  $\theta = -\theta^{\text{in}}$ , однако вычисление предельного значения в этом случае требует применения правила Лопиталья. Формулы (A.17) и (A.7) дают ответ в однократных квадратурах. Легко видеть, что формула (A.17) совпадает с (4.42).

## Приложение Б

### Об эквивалентности многолистных поверхностей

Будем обозначать поверхность, изображенную на Рис. 0.10, как  $M_1$ , а поверхность, изображенную на Рис. 0.11, как  $M_2$ . Проиндексируем листы поверхности  $M_1$  целыми числами  $n \in \mathbb{Z}$ . Пусть физический лист соответствует индексу  $n = 0$ . Листу, имеющему точки ветвления при  $x = an, a(n + 1)$  присвоим индекс  $n$ .

Проиндексируем также листы поверхности  $M_2$ . Пусть основной лист будет иметь индекс  $i$  (букву). Нижние листы проиндексируем целыми числами так, чтобы лист, подклеенный по линии  $x = an, y < 0$ , имел числовой индекс  $n$ . Теперь точка на каждой из поверхностей характеризуется координатами  $(x, y)$  и индексом листа.

Пусть  $\sigma$  — непрерывный путь на плоскости  $(x, y)$  с выколотыми точками  $(am, 0), m \in \mathbb{Z}$ . Пусть этот путь идет из точки  $(x_1, y_1)$  в точку  $(x_2, y_2)$ . Определим преобразование индексов поверхности  $M_1$  как подстановку

$$\alpha_2 = \Phi_\sigma^1(\alpha_1),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  принадлежат множеству индексов поверхности  $M_1$  (т. е.  $\mathbb{Z}$ ). Выписанное выше равенство верно, если после переноса точки  $(x_1, y_1, \alpha_1)$  по пути  $\sigma$  попадаешь в точку  $(x_2, y_2, \alpha_2)$ . Аналогично определим преобразование индексов поверхности  $M_2$ , обозначив его как  $\Phi_\sigma^2$ .

Разумеется, вместо путей  $\sigma$  достаточно рассматривать гомотопические классы путей на плоскости с выколотыми точками  $(am, 0)$ . Для рассмотрения всех классов  $\sigma$  достаточно рассмотреть только классы базовых путей  $\sigma_n^\pm$ , показанных на Рис. Б.1. Для путей  $\sigma_n^\pm$  легко

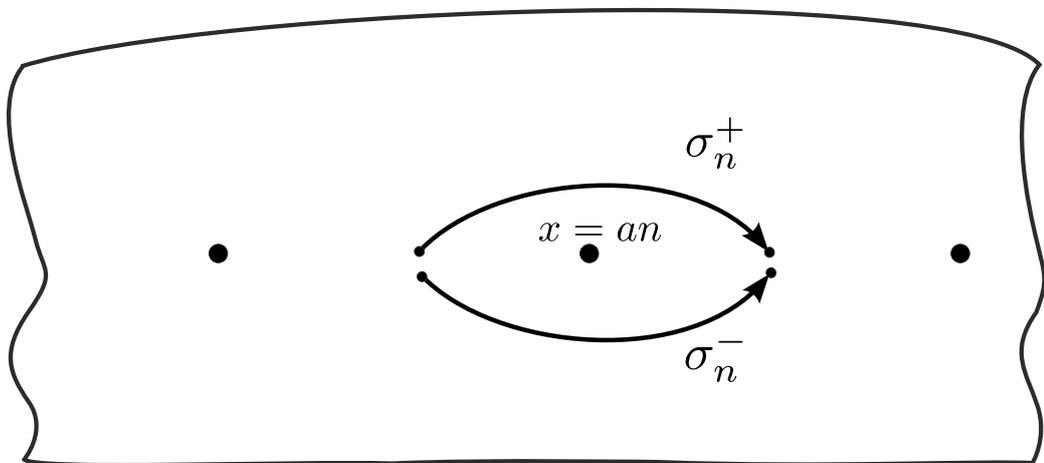


Рис. Б.1. Пути  $\sigma_n^+$  и  $\sigma_n^-$

построить явный вид подстановок  $\Phi_{\sigma_n^\pm}^{1,2}$ . Имеем

$$\Phi_{\sigma_n^-}^1(\alpha) = \alpha, \quad \Phi_{\sigma_n^+}^1(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \neq n-1 \text{ и } \alpha \neq n, \\ n, & \text{если } \alpha = n-1, \\ n-1, & \text{если } \alpha = n. \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

$$\Phi_{\sigma_n^+}^2(\alpha) = \alpha, \quad \Phi_{\sigma_n^-}^2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \neq i \text{ и } \alpha \neq n, \\ n, & \text{если } \alpha = i, \\ i, & \text{если } \alpha = n. \end{cases} \quad (\text{Б.2})$$

Назовем поверхности с заданным набором положений точек ветвления над плоскостью  $(x, y)$  эквивалентными, если существует обратимое непрерывное отображение  $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ , оставляющее координаты точек неизменными. На языке индексов листов это означает, что для любого  $\sigma$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \xrightarrow{\Phi_\sigma^1} & \alpha_2 \\ \downarrow \Psi & & \uparrow \Psi^{-1} \\ \beta_1 & \xrightarrow{\Phi_\sigma^2} & \beta_2 \end{array}$$

коммутативна.

Определим преобразование  $\Psi$  в полосе  $an < x < a(n+1)$  следующим образом

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{если } \alpha < n, \\ i, & \text{если } \alpha = n, \\ \alpha, & \text{если } \alpha > n. \end{cases} \quad (\text{Б.3})$$

Непосредственной проверкой, проводимой для путей  $\sigma_n^\pm$ , убеждаемся, что это преобразование непрерывно, то есть выполняется тождество

$$\Phi_\sigma^2(\Psi(\alpha)) = \Psi(\Phi_\sigma^1(\alpha)), \quad (\text{Б.4})$$

где  $\alpha$  произвольный индекс поверхности  $M_1$ .

## Приложение В

### Вывод интегральных формул и теоремы взаимности для диаграмм направленности краевых функций Грина

Целью данного приложения является доказательство формул (1.68), (1.69), (1.70) и (2.35) с помощью теоремы Грина для параболического уравнения, сформулированной в Главе 1, раздел 1.2.7, Утверждение 1.1. Все формулы будут доказаны для наиболее общего случая, рассматриваемого в Главе 3 (см. Рис. 3.1). Докажем следующее вспомогательное утверждение:

**Лемма.** Для больших положительных  $X, Y$

$$v_m(X, Y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi X}} \exp\left\{i\frac{k_0 Y^2}{2X} - i\frac{\pi}{4}\right\} \times \frac{Y}{X} \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y') \exp\left\{ik_0\left(\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x - \frac{Y}{X}y'\right)\right\} dx + o(X^{-1/2}) \quad (\text{B.1})$$

для произвольного фиксированного  $y' > y^*$ . Здесь  $v_m$  – краевая функция Грина с источником в  $m$ -ой вершине.

**Доказательство.** Применим формулу (1.47), подставив в качестве  $\nu$  функцию  $v_m$ , а в качестве  $w$  функцию

$$w(x, y) = g(X - x, Y - y).$$

Область  $\Omega$  есть область точек  $y > y'$ .

При больших  $X, Y$  и небольших  $x, y'$  можно построить приближение

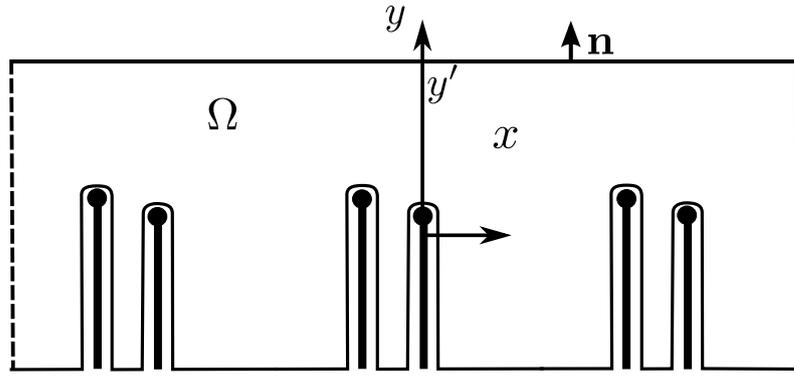
$$w(x, y') \approx \sqrt{\frac{k_0}{2\pi X}} \exp\left\{i\frac{k_0 Y^2}{2X} - i\frac{\pi}{4}\right\} \exp\left\{ik_0\left(\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x - \frac{Y}{X}y'\right)\right\}. \quad (\text{B.2})$$

Для получения окончательного ответа осталось преобразовать выражение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y v_m(x, y^*) \exp\left\{ik_0\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x\right\} dx.$$

Для этого воспользуемся условием излучения, т.е. заметим, что в верхней полуплоскости поле представляется линейной комбинацией только уходящих или убывающих волн. Преобразование Фурье выделяет в  $v_m$  единственную плоскую волну, и появляется возможность вычислить ее вертикальную производную. Таким образом, получаем формулу (1.70):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y v_m(x, y^*) \exp\left\{ik_0\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x\right\} dx = ik_0\frac{Y}{X} \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y^*) \exp\left\{ik_0\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x\right\} dx \quad (\text{B.3})$$

Рис. В.1. Область  $\Omega$  для вывода формулы (В.5)

Подстановка полученных представлений в (1.47) дает (В.1).

**Утверждение В.1.** Диаграммы направленности  $V_m(\theta)$  вычисляются по формуле

$$V_m(\theta) = \exp \left\{ -i \frac{k_0 \theta^2}{2} x_m + ik_0 y_m \theta \right\} \theta \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y') \exp \left\{ ik_0 \left( \frac{\theta^2}{2} x - \theta y' \right) \right\} dx \quad (\text{В.4})$$

для произвольного  $y' > y^*$ .

Выражение (В.4) следует из (В.1) при учете того, что

$$g(X, Y) \approx \exp \left\{ -ik_0 \frac{1}{2} \frac{Y^2}{X^2} x_m + ik_0 y_m \frac{Y}{X} \right\} g(X - x_m, Y - y_m)$$

и

$$\theta = \frac{Y - y_m}{X - x_m} \approx \frac{Y}{X}.$$

Формула (1.69) следует из (В.4) при  $a = b$  и  $y^* = 0$ .

**Утверждение В.2.** Для величин  $V_m(\theta)$  верны представления

$$V_m(\theta) = 1 - \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp \left\{ ik_0 \frac{\theta^2}{2} (x_n - x_m) \right\} \int_{-\infty}^{y^n} v_n(x_n - 0, y) \exp \{ ik_0 \theta (y_m - y_n) \} dy. \quad (\text{В.5})$$

Доказательство этого утверждения можно получить, применяя (1.47) к функциям  $v_m$  и

$$w = \exp \{ ik_0 (\theta^2 x / 2 - \theta y) \} \quad (\text{В.6})$$

при  $\theta > 0$  в области, показанной на Рис. В.1. Нижние горизонтальные участки соответствуют  $y = -L$  при достаточно больших  $L$ . Условия излучения гарантируют, что интеграл по этим участкам обращается в ноль в пределе  $L \rightarrow \infty$ .

Отметим, что формулы (1.68) и (2.35) являются частными случаями формулы (В.5).

**Утверждение В.3.** Значения полного поля на краях экранов  $u(x_m - 0, y_m)$  связаны с диаграммами направленности  $V_m(\theta)$  следующим соотношением:

$$u(x_m - 0, y_m) = \exp \left\{ -ik_0 x_m (\theta^{\text{in}})^2 / 2 + ik_0 y_m \theta^{\text{in}} \right\} V_m(\theta^{\text{in}}). \quad (\text{B.7})$$

Введем функцию  $v(x, y; x', y')$  как функцию Грина на плоскости с экранами  $x = x_m, y < y_m$ , удовлетворяющую параболическому уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y; x', y') = \delta(x - x') \delta(y - y'). \quad (\text{B.8})$$

На экранах функция удовлетворяет граничным условиям (2.3), условиям излучения и условиям в конечных точках.

Очевидно, краевые функции Грина являются частным случаем  $v$ :

$$v_m(x, y) = v(x, y; x_m + 0, y_m).$$

Диаграммы направленности  $V_m$  могут быть определены как

$$V_m(\theta) = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{v_m(x' + x_m, x'\theta + y_m)}{g(x', x'\theta)}. \quad (\text{B.9})$$

Полное поле для падающей плоской волны может (по крайней мере в некоторой области, содержащей начало координат) быть представлено как предельный случай функции Грина с удаленным источником:

$$u(x, y) = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{v(x, y; -x', x'\theta^{\text{in}})}{g(x', -x'\theta^{\text{in}})}. \quad (\text{B.10})$$

Таким образом,

$$u(x_m - 0, y_m) = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{v(x_m, y_m; -x', x'\theta^{\text{in}})}{g(x', -x'\theta^{\text{in}})}. \quad (\text{B.11})$$

Заметим, что функция

$$w(x, y) = v(-x, y; -x'', y''), \quad (\text{B.12})$$

рассматриваемая как функция переменных  $x, y$ , удовлетворяет второму уравнению (1.46) с правой частью

$$h(x, y) = \delta(x - x'') \delta(y - y'') \quad (\text{B.13})$$

и удовлетворяет граничным условиям  $w = 0$ , заданным на левых сторонах экранов  $x = x_m, y < y_m$ . Применим теорему 1.1 (Грина) к функциям  $v(x, y; x', y')$  и  $v(-x, y; -x'', y'')$ . В качестве  $\Omega$  возьмем область, изображенную на Рис. В.1. Интеграл вдоль экранов обращается в нуль в силу граничных условий. Интегралы по удаленным участкам обращаются в нуль в силу условий излучения. Таким образом,

$$v(x'', y''; x', y') = v(-x', y'; -x'', y''). \quad (\text{B.14})$$

Последнее равенство есть теорема взаимности. Из (B.14) следует, что

$$v(x_m, y_m; -x', y') = v_m(x', y'). \quad (\text{B.15})$$

Подставляя данное равенство в (B.9) и (B.11) и рассматривая предел  $x' \rightarrow \infty$ , получим (B.7).

## Приложение Г

### Метод граничных интегральных уравнений

**Антисимметричный случай.** Для проверки результатов решения задачи о дифракции на импедансном отрезке, полученных в Главе 4, использовалось решение, полученное методом граничных интегральных уравнений.

Представим рассеяное поле в виде суммы симметричной и антисимметричной части (см. (4.44)). Стандартным способом, описанным, например, в [109, 110], с помощью метода двойного потенциала, в симметричном случае можно получить следующее интегральное уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2\right) \int_{-a}^a G(x-x', 0)\nu(x')dx' + \frac{1}{2}\eta\nu(x) = ik_0 \sin \theta^{in} \exp\{ik_0x \cos \theta^{in}\}, \quad (\Gamma.1)$$

где

$$G(x, y) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k_0\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$H_0^{(1)}(z)$  – функция Ханкеля первого рода,  $\nu$  – потенциал двойного слоя:

$$u^a(x, y) = -\int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial y} G(x-x', y)\nu(x')dx', \quad (\Gamma.2)$$

$u^a$  – антисимметричная часть рассеяного поля  $u^{sc}$ . На полосе  $\nu$  связано с  $u^a(x, y)$  следующим выражением:

$$u^a(x, +0) = -\frac{1}{2}\nu(x), \quad -a < x < a.$$

Антисимметричная часть диаграммы направленности вычисляется с помощью

$$S^a(\tilde{\theta}, \theta^{in}) = \sin \tilde{\theta} \int_{-a}^a u^a(x, +0)e^{-ik_0x \cos \tilde{\theta}} dx. \quad (\Gamma.3)$$

Интегральное уравнение (Г.1) дискретизируется и решается с помощью стандартных численных схем, например, с помощью метода граничных элементов.

**Симметричный случай.** В симметричном случае с помощью метода простого потенциала можно получить следующее уравнение:

$$\frac{1}{2}\mu(x) - \eta \int_{-a}^a G(x-x', 0)\mu(x')dx' = \eta \exp\{ik_0x \cos \theta^{in}\}, \quad (\Gamma.4)$$

где  $\mu$  – потенциал простого слоя:

$$u^s(x, y) = \int_{-a}^a G(x-x', y)\mu(x')dx'. \quad (\Gamma.5)$$

Здесь  $u^s$  – симметричная часть рассеянного поля  $u^{sc}$ . Нормальная производная симметричной части рассеянного поля связана с  $\mu(x)$  следующим выражением:

$$\frac{\partial u^s}{\partial y}(x, +0) = \frac{1}{2}\mu(x), \quad -a < x < a.$$

Симметричная часть диаграммы направленности рассеянного поля вычисляется с помощью

$$S^s(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) = (ik_0)^{-1} \int_{-a}^a \frac{\partial u^s}{\partial y}(x, +0) e^{-ik_0 x \cos \tilde{\theta}} dx. \quad (\Gamma.6)$$

## Приложение Д

### Условия излучения для параболического уравнения

Сформулируем условия излучения в виде принципа предельного поглощения. Сделаем три допущения:

- Величина  $k_0$  имеет малую положительную мнимую часть:  $k_0 = k'_0 + ik''_0$ .
- Величина  $\chi$  (константа Флоке) по модулю равна единице, т. е.  $\theta^{\text{in}}$  имеет малую отрицательную мнимую часть:  $\theta^{\text{in}} = \theta' - i\theta''$ , причем  $\text{Im}[k_0(\theta^{\text{in}})^2] = 0$ .
- Соотношение (1.12) выполняется для действительных частей  $k_0$  и  $\theta^{\text{in}}$ .

При этих условиях продолжение падающей волны в нижнюю полуплоскость экспоненциально убывает. В качестве условий излучения потребуем, чтобы рассеянное поле также экспоненциально убывало при удалении от линии  $y = 0$ . Для действительного  $k_0$  решение определяется как предел семейства решений при  $k''_0 \rightarrow 0$ . Третье допущение означает, что условие (1.12) не выполняется в течение всей предельной процедуры, а выполняется только в пределе.

## Приложение Е

## Индекс задачи Римана—Гильберта

Докажем формулу (4.133). Очевидно, что

$$\text{Idx} = i\text{Arg}[m(b)]|_0^{i\infty}, \quad (\text{E.1})$$

где  $\text{Arg}[\cdot]$  возвращает значение аргумента. Введем

$$f_1(b) = i\sqrt{k_0^2 - (k_0 + b)^2} + \eta, \quad (\text{E.2})$$

$$f_2(b) = i\sqrt{k_0^2 - (k_0 + b)^2} - \eta. \quad (\text{E.3})$$

Предыдущее выражение переписывается в виде

$$\text{Idx} = i\text{Arg}[f_1(b)]|_0^{i\infty} - i\text{Arg}[f_2(b)]|_0^{i\infty}. \quad (\text{E.4})$$

Рассмотрим только случай  $\text{Re}[\eta] > 0$  для которого не требуется деформация контура  $\gamma$ . Однако, в соответствии с правилами аналитического продолжения, результат будет справедливен для всех значений параметра  $\eta$ .

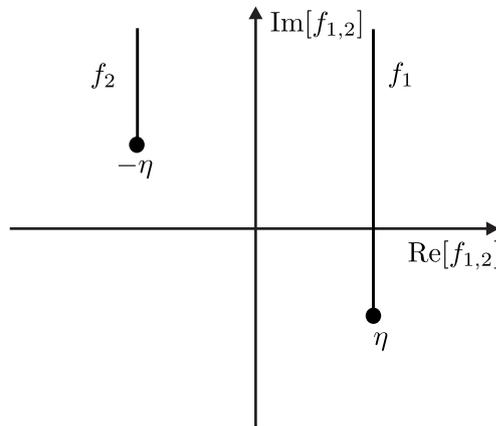


Рис. Е.1. Контур  $f_{1,2}(b)$  при  $b \in \gamma$

Легко заметить (см. Рис. Е.1), что аргумент  $f_{1,2}(b)$  изменяется от  $\text{Arg}[\pm\eta]$  до  $\pi/2$  при  $b$  изменяющимся от 0 до  $i\infty$  вдоль  $\gamma$ . Поэтому

$$\text{Idx} = i(\pi/2 - \text{Arg}[\eta]) - i(\pi/2 - \text{Arg}[-\eta]) = i(\text{Arg}[-\eta] - \text{Arg}[\eta]) = i\pi. \quad (\text{E.5})$$

## Список литературы

1. Shanin A. V. An ODE-based approach to some Riemann–Hilbert problems motivated by wave diffraction // arXiv:1210.1964. 2012.
2. Шанин А. В. Дифракция высокочастотной волны на решетке со сложным периодом при скользящем падении // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2012. Т. 409. С. 212–239.
3. Keller J. The geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Am. 1962. Vol. 52. P. 116–130.
4. Уфимцев П. Я. Метод Краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. Радио, 1962. С. 244.
5. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. С. 456.
6. Williams M. H. Diffraction by a finite strip // Q. J. Mech. Appl. Math. 1982. Vol. 35. P. 103–124.
7. Shanin A. V. Weinstein’s diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math. 2009. Vol. 70. P. 1201–1218.
8. Shabalina E. D., Shirgina N. V., Shanin A. V. High frequency modes in a two dimensional rectangular room with windows // Acoust. Phys. 2010. Vol. 56. P. 525 – 536.
9. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. С. 488.
10. Ищенко Е. Ф. Открытые оптические резонаторы. М.: Сов. радио, 1980.
11. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990. С. 264.
12. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Ин. лит., 1953.
13. Luneburg E. The Sommerfeld problem: methods, generalizations and frustrations. Proceedings of the Sommerfeld’96 Workshop Freudenstadt 30 September – 4 october 1996, 1997.
14. Малюжинец Г. Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с произвольными поверхностными импедансами // ДАН СССР. 1958. Т. 3. С. 752–755.
15. Бабич В. М., Лялинов М. А., Грикуров В. Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в задачах дифракции. С.Пб.: ВВМ, 2004. С. 103.
16. Osipov A. V., Norris A. N. The Malushinets theory for scattering from wedge boundaries: a review // Wave Motion. 1999. Vol. 29. P. 313–340.
17. Norris A. N., Osipov A. V. Far-field analysis of the Malyushinets solution for plane and surface wave diffraction by an impedance wedge // Wave Motion. 1999. Vol. 30. P. 69–89.
18. Hannay J. H., Thain A. Exact scattering theory for any straight reflectors in two dimensions // J. Phys. A. 2003. Vol. 36. P. 4063–4080.

19. Леонтович М. А. Об одном методе решения задач распространения радиоволн по поверхности земли. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1944. Т. 8, № 1. С. 16–22.
20. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности // ЖЭТФ. 1945. Т. 15, № 9. С. 479–495.
21. Леонтович М. А., Фок В. А. Исследования по распространению радиоволн // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, № 7. С. 557–573.
22. Фок В. А. Поле от вертикального и горизонтального диполя, приподнятого над поверхностью земли // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. С. 916–924.
23. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространение электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970. С. 519.
24. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966.
25. Shanin A. V. Diffraction of a plane wave by two ideal strips // Q. J. Mech. Appl. Math. 2003. Vol. 56. P. 187–215.
26. Linton C. M., Mciver P. Handbook of mathematical techniques for wave/Structure interactions. Chapman & Hall/CRC, 2001.
27. Sieger B. Die Beugung einer elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischem Querschnitt // Ann. Phys. 1908. Vol. 27. P. 626–664.
28. Morse P. M., Rubenstein P. J. The diffraction of waves by ribbons and by slits // Phys. Rev. 1938. Vol. 54. P. 895–898.
29. Felsen L. B. Alternative field representations in regions bounded by spheres, cones, and planes // IEEE Trans. Antennas. Propag. 1957. Vol. 5. P. 109–121.
30. Felsen L. B. Plane-wave scattering by small-angle cones // IEEE Trans. Antennas. Propag. 1957. Vol. 5. P. 121–129.
31. Попов А. В. Метод поперечной диффузии в задаче о дифракции звука на ленте // Акуст. журн. 1973. Т. 19. С. 594–600.
32. Schwarzschild. Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. I // Math. Ann. 1902. Vol. 55. P. 177–247.
33. Karp S. N., Russek A. Diffraction by a wide slit // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27. P. 886–894.
34. Clemmow P. C. Edge currents in diffraction theory // IEEE Trans. Antennas. Propag. 1956. Vol. 4. P. 282–287.
35. Millar R. F. Diffraction by a wide slit and complementary strip. I // Proc. Camb. Philos. Soc. 1958. Vol. 54. P. 479–496.
36. Millar R. F. Diffraction by a wide slit and complementary strip. II // Proc. Camb. Philos. Soc. 1958. Vol. 54. P. 497–511.

37. Braubek W. Neue Näherungsmethode für die Beugung am ebenen Schirm // *Zeit. Phys.* 1950. Bd. 127. S. 381–390.
38. Хаскинд М. Д., Вайнштейн Л. А. Дифракция плоской волны на щели и ленте // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 11. С. 178–186.
39. Karp S. N., Keller J. Multiple diffraction by an aperture in a hard screen // *Optica Acta.* 1961. Vol. 8. P. 61–72.
40. Keller J. Rays, waves and asymptotics // *Bull. of Am. Math. Soc.* 1978. Vol. 84. P. 727–750.
41. Tiberio R., Kouyoumjian R. G. A uniform GTD solution for the diffraction by strips illuminated at grazing incidence // *Radio Sci.* 1979. Vol. 14. P. 933–941.
42. Michaeli A. A closed form physical theory of diffraction solution for electromagnetic scattering by strips and 90 dihedrals // *Radio Sci.* 1984. Vol. 19. P. 609–616.
43. Уфимцев П. Я. Вторичная дифракция электромагнитных волн на ленте // *ЖТФ.* 1958. Т. 28. С. 569–582.
44. Уфимцев П. Я. Асимптотическое решение задачи дифракции на ленте // *Радиотехника и электроника.* 1968. Т. 13. С. 1867–1869.
45. Уфимцев П. Я. Асимптотическое исследование задачи о дифракции на ленте // *Радиотехника и электроника.* 1969. Т. 14. С. 1173–1185.
46. Уфимцев П. Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте в случае граничных условий Дирихле // *Радиотехника и электроника.* 1970. Т. 15. С. 914–923.
47. Боровиков В. А. Дифракция плоской волны на отрезке // *ДАН СССР.* 1964. Т. 159. С. 711–714.
48. Latta G. M. The solution of a class of integral equations // *J. Rat. Mech.* 1956. Vol. 5. P. 821–834.
49. Gorenflo N., Werner M. Solution of a finite convolution equation with Hankel kernel by matrix factorization // *SIAM J. Math. Anal.* 1997. Vol. 28. P. 434–451.
50. Shanin A. V. Three theorems concerning diffraction by a strip or a slit // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2001. Vol. 54. P. 107–137.
51. Shanin A. V. A generalization of the separation of variables method for some 2D diffraction problems // *Wave Motion.* 2003. Vol. 37. P. 241–256.
52. Senior T. B. A. Backscattstrip from resistive // *IEEE Trans. Antennas. Propag.* 1979. Vol. 27. P. 808–813.
53. Volakis J. L., Bindiganavale S. S. Scattering by a narrow groove in an impedance plane // *Radio Sci.* 1996. Vol. 31. P. 401–408.
54. Bowman J. J. High-frequency backscattering from an absorbing infinite strip with arbitrary

- face impedances // *Can. J. Phys.* 1967. Vol. 45. P. 2409–2429.
55. Herman M. I., Volakis J. L. High frequency scattering by a resistive strip and extensions to conductive and impedance strip // *Radio Sci.* 1987. Vol. 22. P. 335–349.
56. Burnside W. D., Yu C. L., Marhefka R. J. A technique to combine the geometrical theory of diffraction and the moment method // *IEEE Trans. Antennas. Propag.* 1975. Vol. 23. P. 551–558.
57. Sahalos J. N., Thiele G. A. On the application of the GTD-MM technique and its limitations // *IEEE Trans. Antennas. Propag.* 1981. Vol. 29. P. 780–786.
58. Ikiz T., Koshikawa S., Kobayashi K. et al. Solution of the plane wave diffraction problem by an impedance strip using numerical–analytical method: E–polarized case // *J. Electromag. Waves & Appl.* 2001. Vol. 15. P. 315–340.
59. Faulkner T. R. Diffraction by an electromagnetic plane-wave by a metallic strip // *J. Inst. Maths Applics.* 1965. Vol. 1. P. 149–163.
60. Serbest A. H., Büyükaksoy A. Some approximate methods related to the diffraction by strips and slits // Ed. by M. Hashimoto, M. Idemen, O. A. Tretyakov. *Sci. House. Tokyo*, 1993.
61. Umul Y. Z. Physical optics theory for scattering of waves by an impedance strip // *Opt. Commun.* 2011. Vol. 284. P. 1760–1765.
62. Biggs N. R. T., Porter D., Stirling D. S. G. Wave diffraction through a perforated breakwater // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2000. Vol. 53. P. 375–391.
63. Biggs N. R. T., Porter D. Wave diffraction through a perforated barrier of non-zero thickness // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2001. Vol. 54. P. 523–547.
64. Biggs N. R. T., Porter D. Wave scattering by a perforated duct // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2002. Vol. 55. P. 523–547.
65. Шанин А. В. К задаче дифракции на щели. Некоторые свойства ряда Шварцшильда // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* 2001. Т. 275. С. 258–285.
66. Шанин А. В. О связи метода Винера-Хопфа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений // *Электромагнитные волны и электронные системы.* 2002. Т. 7. С. 10–16.
67. Craster R. V., Shanin A. V., Doubravsky E. M. Embedding formulae in diffraction theory // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2003. Vol. 459. P. 2475–2496.
68. Craster R. V., Shanin A. V. Embedding formula for diffraction by wedge and angular geometries // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2005. Vol. 461. P. 2227–2242.
69. Шанин А. В. Формула расщепления для электромагнитной задачи дифракции // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* 2005. Т. 324. С. 247–261.

70. Shanin A. V., Doubravsky E. M. Acoustical scattering at a gap between two orthogonal, semi-infinite barriers: coordinate and spectral equations // *J. Eng. Math.* 2007. Vol. 59. P. 437–449.
71. Шанин А. В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Асимптотики решений координатных и спектральных уравнений // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* 2007. Т. 342. С. 233–256.
72. Skelton E. A., Craster R. V., Shanin A. V. Embedding formulae for diffraction by non-parallel slits // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2008. Vol. 61. P. 93–116.
73. Шанин А. В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Постановка задачи определения неизвестных констант // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* 2008. Т. 354. С. 220–244.
74. Shanin A. V., Craster R. V. Pseudo-differential operators for embedding formulae // *J. Comput. Appl. Math.* 2010. Vol. 234. P. 1637–1646.
75. Шанин А. В. Новые дифференциальные уравнения в канонических задачах дифракции: Докторская диссертация / МГУ им. М.В. Ломоносова. 2010.
76. Shanin A. V. Coordinate equations for the Laplace–Beltrami problem on a sphere with a cut // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2005. Vol. 58. P. 1–20.
77. Assier R. C., Peake N. On the diffraction of acoustic waves by a quarter-plane // *Wave Motion.* 2012. Vol. 49. P. 64–82.
78. Skelton E. A., Craster R. V., Shanin A. V., Valyaev V. Embedding formulae for scattering by three-dimensional structures // *Wave Motion.* 2010. Vol. 47. P. 299–317.
79. Вайнштейн Л. А. Строгое решение задачи о плоском волноводе с открытым концом // *Изв. АН СССР, сер. физ.* 1948. Т. 12. С. 144–165.
80. Вайнштейн Л. А. О теории дифракции на двух параллельных полуплоскостях // *Изв. АН СССР, сер. физ.* 1948. Т. 12. С. 166–180.
81. Вайнштейн Л. А. Теория симметричных волн в круглом волноводе с открытым концом // *ЖТФ.* 1948. Т. 18. С. 1543–1564.
82. Вайнштейн Л. А. Излучение несимметричных волн из открытого конца круглого волновода, диаметр которого значительно больше длины волны // *ДАН СССР.* 1950. Т. 74. С. 485–488.
83. Вайнштейн Л. А. О диффракции волн на открытом конце круглого волновода, диаметр которого значительно больше длины волны // *ДАН СССР.* 1950. Т. 74. С. 909–912.
84. Fox A. G., Li T. Resonant modes in a Maser interferometer // *Bell Syst. Tech. J.* 1961. Vol. 40. P. 453–458.

85. Yee H. Y., Felsen L. B., J.B. K. Ray theory of reflection from open end of waveguide // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16(2). P. 268–300.
86. Boersma J. Ray - optical analysis of reflection in an open - ended parallel-plane waveguide: II - TE case // Proc. IEEE. 1974. Vol. 62, no. 11. P. 1475 – 1481.
87. Boersma J. Ray - optical analysis of reflection in an open - ended parallel-plane waveguide: I - TM case // SIAM J. Appl. Math. 1975. Vol. 29(1). P. 164–195.
88. Залипаев В. В., Попов М. М. Коротковолновое рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. I. Дифракция полутеневого поля на гладком выпуклом контуре // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1987. Т. 165. С. 59–90.
89. Залипаев В. В., Попов М. М. Коротковолновое рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. II. Дифракция на бесконечной периодической границе // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1988. Т. 173. С. 60–86.
90. Zalipaev V. V. Short-wave grazing scattering by periodic inclined half-planes // J. Math. Sci. 1991. Vol. 57. P. 3101–3106.
91. Залипаев В. В. Рассеяние коротких волн на периодической структуре - эшелет // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1998. Т. 250. С. 109–136.
92. Боровиков В. А. Дифракция на открытом конце волновода с фланцем // ДАН СССР. 1974. Т. 217(2). С. 788–791.
93. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. P. 248.
94. Назаров С. А. Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // Матем. сб. 2015. Т. 206. С. 15–48.
95. Abrahams I. D., Wickham G. R. On the scattering by two semi-infinite parallel staggered plates I. Explicit matrix Wiener – Hopf factorization // Proc. R. Soc. Lond. A. 1988. Vol. 420. P. 131–156.
96. Abrahams I. D., Wickham G. R. On the scattering by two semi-infinite parallel staggered plates II. Evaluation of the velocity potential for an aincident plane wave and an incident duct mode // Proc. R. Soc. Lond. A. 1990. Vol. 427. P. 139–171.
97. Rahmat-Samii Y., Mittra R. On the investigation of diffracted field at the shadow boundaries of staggered parallel plates – A spectral domain approach // Radio Sci. 1977. Vol. 12, no. 5. P. 659–670.
98. Boersma J. On certain multiple iintegral occuring in a waveguide scattering problem // SIAM J. Math. Anal. 1978. Vol. 9. P. 377–393.
99. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравне-

- ний в частных производных. М.: Ин. лит., 1962.
100. Виноградова М., Руденко О., Сухоруков А. Теория волн. М.: Наука, 1979. С. 474.
  101. Малюжинец Г. Д. Обобщение метода отражений в теории дифракции. Л.: ЦНИИ РУМБ, 1981. С. 68.
  102. Ström S. The scattered field/Field representation and introduction to scattering // Ed. by V. Varadan, A. Lakhtakia, V. Varadan. Elsevier Science Publisher, 1991. P. 143–149.
  103. Mishchenko M. I. The electromagnetic optical theorem revisited // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2006. Vol. 101. P. 404–410.
  104. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. С. 528.
  105. Sheshardi S. R., Wu T. T. High-frequency diffraction of plane waves by an infinite slit for grazing incidence // IEEE Trans. Antennas. Propag. 1960. Vol. AP-8. P. 37–42.
  106. Макаров Г. И., Осипов А. В. К вопросу о структуре рядов Мейкснера // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 714–720.
  107. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. С. 640.
  108. Shanin A. V. Solution of Riemann-Hilbert problem related to Wiener-Hopf factorization problem using ordinary differential equations in the commutative case // Q. J. Mech. Appl. Math. 2012. Vol. 66. P. 533 – 555.
  109. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. С. 428.
  110. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.