

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,  
физический факультет

На правах рукописи  
УДК 534.26; 517.958

Валяев Валерий Юрьевич

**Экспериментальное и теоретическое  
исследование дифракции акустических волн на  
конусах специального вида и препятствиях  
типа полосы**

Специальность: 01.04.06 – акустика

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., доцент  
Шанин Андрей Владимирович

МОСКВА – 2011

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	11
<b>Глава 1. Экспериментальное исследование дифракционных задач методом М-последовательностей</b> . . . . .	17
§1.1. Описание методики . . . . .	17
§1.2. Проверка методики . . . . .	24
§1.3. Экспериментальное изучение дифракции на угле куба . . . . .	28
§1.4. Основные результаты главы . . . . .	33
<b>Глава 2. Численная реализация метода спектрального уравнения для двумерных задач дифракции</b> . . . . .	35
§2.1. Введение . . . . .	35
§2.2. Постановка задачи . . . . .	37
§2.3. Метод спектрального уравнения . . . . .	39
§2.4. Свойства спектрального уравнения . . . . .	48
§2.5. Численный алгоритм . . . . .	53
§2.6. Результаты моделирования. Анализ точности и эффективности . . . . .	58
§2.7. Реализация алгоритма для задачи дифракции на двух полосах . . . . .	60
§2.8. Реализация алгоритма для задачи дифракции на полубесконечном экране со щелью . . . . .	67
§2.9. Основные результаты главы . . . . .	69
<b>Глава 3. Аналитический расчет дифракционных коэффициентов четверти плоскости и угла куба</b> . . . . .	70
§3.1. Введение . . . . .	70
§3.2. Основные соотношения . . . . .	74
§3.3. Трехмерные формулы расщепления . . . . .	82
§3.4. Модифицированное представление Конторовича–Лебедева . . . . .	88
§3.5. Формулы расщепления на сфере с разрезом . . . . .	95
§3.6. Пример численных расчетов . . . . .	105
§3.7. Задача дифракции на трехгранном конусе . . . . .	107
§3.8. Основные результаты главы . . . . .	120
<b>Заключение</b> . . . . .	122

<b>Приложение А. Вывод соотношений, используемых при решении задач дифракции на конусах</b> . . . . .	123
§А.1. Собственные значения сферических задач . . . . .	123
§А.2. Представления полей в виде рядов и их асимптотики . . . . .	124
§А.3. Представление полей в виде контурных интегралов . . . . .	129
§А.4. Вывод модифицированных формул Смышляева . . . . .	133
<b>Литература</b> . . . . .	146

# Введение

**Цели и задачи работы.** В данной работе рассмотрены некоторые скалярные (акустические) задачи дифракции, а именно двумерные задачи о дифракции плоской волны на одной полосе, на двух полосах и на полубесконечном экране со щелью, а также трехмерные задачи дифракции на плоском и на трехгранном конусах.

Общим свойством рассматриваемых задач является то, что они относятся к классу зоммерфельдовых задач, то есть допускают сведение с помощью метода отражений [1, 2] к задачам распространения на многолистных поверхностях. В работах [3–19], собранных в [20], были получены новые аналитические соотношения для полей в таких задачах. Эти результаты, помимо фундаментальной ценности, представляют интерес тем, что потенциально могут быть положены в основу эффективных численных методов. Однако связь между новыми соотношениями и численными методами оказывается нетривиальной. Данная работа ставит одной из своих целей отчасти заполнить этот пробел.

Основным результатом работы [20] для двумерных зоммерфельдовых задач дифракции является метод спектрального уравнения. Этот метод заключается в том, что после ряда упрощений исходная дифракционная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Процедуры численного решения таких уравнений, как правило, весьма эффективны. Сложность состоит в том, что коэффициенты спектрального уравнения зависят от нескольких параметров, значения которых неизвестны. Однако известны оценки роста решений, соответствующих физической постановке задачи, в особых точках этого уравнения. Целью данной работы является разработка численных алгоритмов поиска коэффициентов с помощью указанных оценок роста.

Задачи дифракции на конусах в настоящее время являются развивающейся областью теории дифракции. Основная цель при решении конической задачи — отыскание дифракционного коэффициента, т.е. зависимости амплитуды сферической волны, рассеянной вершиной конуса, от направлений падения и рассеяния. Современный общий подход к решению конических задач был развит в работах [21–24]. Этот подход основан на отделении радиальной переменной и численном решении возникающих при этом задач для оператора Лапласа–Бельтрами на части единичной сферы. В результате дифракционный коэффициент выражается через контурный интеграл по параметру разделения переменных. Подынтегральное выражение включает в себя функцию Грина оператора Лапласа–Бельтрами на части единичной сферы, которая может быть вычислена как решение интегрального уравнения Фред-

гольма на сечении поверхности конуса единичной сферой.

В работе [20] было предложено улучшение этого метода для задачи о дифракции на плоском конусе. Дифракционный коэффициент был выражен через диаграммы направленности источников специального вида, расположенных на ребрах рассеивателя. Эти выражения были названы трехмерными формулами расщепления. С их помощью были обоснованы новые выражения для дифракционного коэффициента в виде контурных интегралов по параметру разделения переменных, подынтегральные выражения которых конструируются из сферических краевых функций Грина — предельных значений сферической функции Грина при стремлении положения источника к краю рассеивателя, сопровождающемся ростом силы источника. Было показано, что интегралы в новых формулах удобнее для вычислений, чем интеграл в общей формуле для конических задач.

Однако тщательный анализ показывает, что одна из трехмерных формул расщепления содержит расходящиеся интегралы, что ставит под сомнение ее справедливость и справедливость соответствующего ей выражения дифракционного коэффициента в виде контурного интеграла. Кроме того, не было предложено конструктивного способа вывода новых выражений в виде контурных интегралов: они были «угаданы», а затем обоснованы с помощью трудоемкой процедуры. Необходимость угадывания формул осложняет применение развитых методов к более сложным задачам, в частности, к задаче дифракции на трехгранном конусе. Кроме того, осталась невыявленной связь между новым и общим методами. Данная работа ставит своей целью заполнить указанные пробелы и применить новые методы к задаче дифракции на трехгранном конусе.

При решении сложных задач достоверность теоретического исследования часто подтверждается экспериментальными измерениями. Экспериментальные исследования задач дифракции на конусах в акустическом случае сопряжены с рядом трудностей. Величина дифракционного коэффициента, как правило, невелика, поэтому для его измерения необходима методика, обеспечивающая хорошее отношение сигнал/шум. Для этого можно использовать метод M-последовательностей (MLS). Он давно и успешно применяется к изучению акустики помещений, однако его использование для исследования дифракционных задач представлено в литературе крайне слабо. Этот метод позволяет измерять импульсные отклики линейных стационарных систем. В случае акустических измерений система включает в себя неидеальные излучающий и приемный тракты, влияние которых требуется учитывать. Целью данной работы является усовершенствование метода M-последовательностей, позволяющее выделять часть импульсного отклика, связанного только с дифракционным процессом, а также измерение дифракционного коэффициента трехгранного конуса.

Кратко сформулируем основные цели работы:

1. Разработать численные алгоритмы решения двумерных зоммерфельдовых задач методом спектрального уравнения. Проанализировать их точность и эффективность.
2. Построить физически обоснованную процедуру регуляризации расходящихся интегралов, входящих в трехмерные формулы расщепления.
3. Построить технику конструктивного преобразования трехмерных формул расщепления в однократные контурные интегралы по параметру разделения переменных.
4. Найти связь между новыми выражениями дифракционного коэффициента четверти плоскости в виде контурных интегралов и общей формулой для конических задач.
5. Применить построенные методы к задаче дифракции на трехгранном конусе.
6. Провести эксперимент по измерению дифракционного коэффициента трехгранного конуса.

**Актуальность работы.** Задачи о полосе и двух полосах хорошо поддаются численному решению традиционными методами, например, методом граничных интегральных уравнений. Однако применение этих методов к задаче дифракции на полубесконечном экране со щелью затруднительно в связи с тем, что рассеиватель не является компактным. С точки зрения метода спектрального уравнения указанное обстоятельство не является трудностью. Возможность использовать для задач с компактными рассеивателями традиционные методы позволяет проверять правильность получаемых результатов.

Задача о четверти плоскости может быть решена аналитически. Для этого четверть плоскости представляется как вырожденный конус эллиптического сечения и применяется разделение переменных в соответствующих координатах. Однако такое решение мало что дает в плане практических вычислений, поскольку поле представляется в виде ряда по собственным функциям сферической задачи, а этот ряд медленно сходится. Поэтому, несмотря на наличие точного решения, попытки построить более удобное решение этой задачи являются актуальными.

Применение к задачам о четверти плоскости и о трехгранном конусе общего метода сопряжено с рядом трудностей, обусловленных наличием у рассеивателей острых ребер. Кроме того, в ряде случаев общий метод становится крайне неэффективным с вычислительной точки зрения.

Представленные в литературе экспериментальные исследования дифракции на конусах немногочисленны и, как правило, относятся к электромагнитному случаю. Использование М-последовательностей для исследования акустических дифракционных задач также крайне слабо представлено в литературе. Кроме того, авторы имеющихся работ, как правило, используют

коммерческие MLS-системы, работающие по принципу «черного ящика», и не описывают методику проведения эксперимента.

Таким образом, в работе рассматриваются задачи, применение к которым существующих методов затруднительно или неэффективно, что позволяет считать ее актуальной.

**На защиту выносятся следующие основные положения:**

1. Применение теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода для модификации методики дифракционного акустического эксперимента, использующей в качестве входного сигнала M-последовательность и включающей в себя процедуру восстановления дифракционной части импульсного отклика методом двух микрофонов, позволяет измерить дифракционный коэффициент конического препятствия с точностью 10%.
2. Построенные алгоритмы численного решения двумерных задач дифракции на препятствиях типа полосы методом спектрального уравнения позволяют достичь любой наперед заданной точности решения. Для задачи о полосе эффективность алгоритма превосходит эффективность метода граничных интегральных уравнений, если требуемая относительная точность вычисления дифракционного коэффициента превышает  $10^{-4}$  или если произведение волнового числа на полуширину полосы больше единицы.
3. Для задач дифракции на четверти плоскости и на трехгранном конусе справедливы регуляризованные трехмерные формулы расщепления, выражающие дифракционный коэффициент через диаграммы направленности источников специального вида, помещенных вблизи ребер рассеивателей.
4. Для модифицированного преобразования Конторовича–Лебедева, выражающего поля в трехмерном пространстве через контурные интегралы по параметру разделения переменных, справедливы интегральные соотношения, представляющие собой аналоги формул Планшереля и свертки для преобразования Фурье.
5. Для дифракционного коэффициента трехгранного конуса справедливо выражение в виде контурного интеграла по параметру разделения переменных от комбинации сферических краевых функций Грина.
6. Справедливы сферические формулы расщепления, выражающие нетривиальные связи между собственными функциями, сферической функцией Грина и сферическими краевыми функциями Грина оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере с разрезом.

**Научная новизна.** Новым является проведенный эксперимент по измерению дифракционного коэффициента трехгранного конуса в акустическом

случае. Также новым в контексте MLS-эксперимента является использование теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода для обработки экспериментальных данных.

Соотношения метода спектрального уравнения (формула расщепления, спектральное уравнение, задача об отыскании коэффициентов) для задачи о двух полосах были получены в работе [20]. В данной работе эти соотношения были переформулированы для задач дифракции на одной полосе и на полубесконечном экране со щелью. Новым является численный алгоритм отыскания коэффициентов спектрального уравнения по известным оценкам роста решений.

Трехмерные формулы расщепления для задачи дифракции на четверти плоскости были получены в работе [20]. Однако одна из этих формул содержала расходящиеся интегралы. В данной работе получен регуляризованный вид этой формулы.

Выражения для дифракционного коэффициента четверти плоскости, в виде контурных интегралов от сферических краевых функций Грина были получены в работе [20]. Однако одно из них было обосновано с помощью трехмерной формулы расщепления, содержащей расходящиеся интегралы. Кроме того все эти выражения были сначала угаданы, а затем обоснованы. В данной работе они получаются конструктивным образом с помощью модифицированного преобразования Конторовича–Лебедева.

Указанное преобразование является новым и отличается от классического выбором цилиндрической функции в ядре и контуром интегрирования. В результате удается избежать проблем со сходимостью интегралов, однако функции, участвующие в преобразовании, перестают быть ортогональными. Тем не менее, для введенного преобразования удастся доказать справедливость формул Планшереля и свертки без использования ортогональности.

Сферические формулы расщепления являются новыми и позволяют установить связь между общим выражением для дифракционных коэффициентов конических препятствий и новыми выражениями для дифракционного коэффициента четверти плоскости.

Все вышесказанное о задаче дифракции на четверти плоскости отражено на рис. 1. Пунктирными стрелками показаны предыдущие результаты, сплошными — новые.

Трехмерная формула расщепления и выражение дифракционного коэффициента трехгранного конуса в виде контурного интеграла от комбинации сферических краевых функций Грина являются новыми.

**Достоверность** Достоверность экспериментальных результатов обеспечивается тестированием методики на простых случаях (распространение в пустом полупространстве, дифракция на торце цилиндра), при котором полученные результаты сравнивались с точным решением и результатами чис-



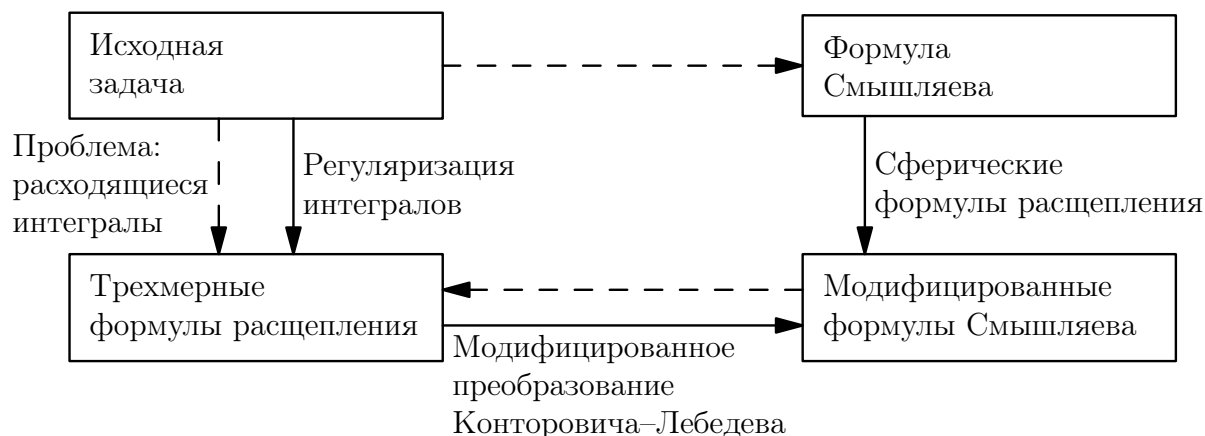


Рис. 1. Различные подходы к решению задачи о четверти плоскости. Пунктирными стрелками показаны предыдущие результаты, сплошными — новые.

ленного моделирования. Кроме того, измеренные значения дифракционного коэффициента сравниваются с вычисленными по общей формуле для дифракционного коэффициента конических препятствий.

Достоверность результатов, относящихся к плоским задачам дифракции обеспечивается сравнением с решениями соответствующих интегральных уравнений для задач об одной и о двух полосах и проверкой выполнения граничных условий для восстановленного поля в случае полубесконечного экрана со щелью.

Достоверность аналитических результатов, относящихся к коническим задачам, обеспечивается корректным использованием математического аппарата при их обосновании.

**Практическая значимость.** Описанная в работе методика эксперимента может быть использована для исследования дифракции на препятствиях сложной формы. Такие измерения могут быть полезны, например, для контроля результатов численного моделирования. Кроме того, данная методика позволяет измерять дифракционные коэффициенты конических препятствий.

Построенные алгоритмы численного решения плоских задач дифракции могут быть использованы для эффективного вычисления полей, рассеянных протяженными препятствиями типа полосы.

Решения задач дифракции на плоском и на треугольном конусах представляют большой интерес для практически важных задач радио- и гидролокации и для моделирования распространения волн в городских условиях (дифракция на углах зданий). Новые выражения для дифракционных коэффициентов конических препятствий могут быть использованы для их эффективного вычисления. Результаты вычислений можно применить для приближенного решения задач дифракции на препятствиях сложной формы, имеющих особенности в виде плоских или трехгранных углов, с помощью геометриче-

ской теории дифракции Келлера [25, 26] или физической теории дифракции Уфимцева [27].

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Дни дифракции'09, 26–29 мая 2009, Санкт-Петербург;
2. XII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах» («Волны 2010»), 24–29 мая 2010, Звенигород, Московская область, пансионат «Университетский»;
3. Дни дифракции'10, 8–11 июня 2010, Санкт-Петербург;
4. XXII Сессия Российского акустического общества, 15–17 июня 2010, Москва;
5. Дни дифракции'11, 30 мая–3 июня 2011, Санкт-Петербург,

а также на семинарах Санкт-Петербургского отделения математического института им. Стеклова РАН (руководитель В.М. Бабич) и Восточно-Европейской ассоциации акустиков (институт проблем машиноведения РАН, руководитель Д.П. Коузов).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, 3 статьи в сборниках трудов конференций и 2 в тезисах докладов.

**Личный вклад автора** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

**Структура и объем диссертации** Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения, приложения и библиографии. Общий объем диссертации 160 страниц, включающих 61 рисунок. Библиография включает 195 наименований на 15 страницах.

## Обзор литературы

Задача о дифракции на полосе (или на щели) привлекает внимание исследователей с начала прошлого века [38] и до наших дней [39] и поэтому хорошо изучена. Данная задача часто используется для проверки работоспособности более общих методов. Разработано большое количество методов ее решения. Рассмотрим некоторые из них.

Задача может быть точно решена методом разделения переменных в эллиптических координатах. Решение представляет собой ряд по функциям Матье [40, 41]. Следует отметить, что вычисление функций Матье само по себе является сложной задачей. В работе [42] данное решение было проанализировано, и были выделены выражения, соответствующие краевым волнам. Интересное обобщение этого метода предложено в работе [43]. В ней получены уравнения типа Матье для задачи дифракции на наборе полос.

Прозрачные с физической точки зрения результаты для коротковолнового случая могут быть получены из рассмотрения ряда последовательных актов дифракции на краях рассеивателя. Такой ряд для задачи о дифракции на щели изучался Шварцшильдом [38] и другими исследователями [44–48]. Приближенные результаты могут быть получены при использовании подхода, основанного на геометрической теории дифракции Келлера (ГТД) [49]. Были разработаны многочисленные итерационные и приближенные алгоритмы для решения соответствующего данной задаче интегрального уравнения [44, 50, 51].

К задаче о полосе может быть применен метод Винера–Хопфа [52]. В этом случае функциональное уравнение Винера–Хопфа в явном виде не решается, но сводится к интегральному уравнению, для которого строятся приближенные решения. В этом же ряду стоят результаты работ П.Я. Уфимцева [53–57], собранные в монографии [58], а также работы [59–61].

В работе [62] ряд Шварцшильда строится для поверхностных токов. Члены ряда получаются итерированием выражающегося в элементарных функциях ядра интегрального уравнения, которому удовлетворяет сумма ряда. Неизвестные теневые токи быстро спадают при удалении от ребер рассеивателя, что позволяет приближенно просуммировать ряд. Дифракционный коэффициент затем выражается в квадратурах. Работа [63] обобщает данный метод на другие задачи. В работе [51] строится асимптотическое решение уравнения для тока для случая большого волнового размера рассеивателя. Интегральное уравнение, полученное в [62], исследуется также в работах [64, 65].

Одной из важнейших работ, посвященных задаче о дифракции на полосе, является работа [50]. В ней с помощью метода Винера–Хопфа строится интегральное уравнение для суммы ряда Шварцшильда и утверждается су-

ществование псевдодифференциального оператора, переводящего его в интегральное уравнение с разностным ядром. Показывается, что при скользящих углах падения последовательные члены ряда Шварцшильда для дифракционного коэффициента имеют одинаковый порядок величины. Таким образом, этот ряд не является асимптотическим по волновому размеру рассеивателя. Также утверждается, что в задаче о щели не могут проявляться резонансные свойства. Строится простая приближенная формула для дифракционного коэффициента, удовлетворяющая принципу взаимности и анализируется формула, полученная в [53]. Развитые в [50] методы, использовались также в [66, 67].

В работах [68, 69] рассмотрена нестационарная задача о дифракции на полосе волны, имеющей профиль ступеньки. Этот подход позволяет получить в замкнутом виде решение для любого дифракционного порядка, однако переход к стационарному случаю требует суммирования бесконечного числа членов. Произведенное асимптотическое исследование позволило найти рассеянное поле в дальней зоне с точностью до любой заданной отрицательной степени волнового размера полосы. Схожий метод использовался в [70]. Прохождение импульса через щель рассматривалось также в работах [71, 72].

Ряд математических вопросов (существование, единственность, допустимые классы правых частей) для задачи о полосе подробно рассмотрены в [73]. Также в этой работе строятся длинно- и коротковолновые асимптотики для поверхностных токов. Длинноволновое приближение для задачи о щели также построено в более ранней работе [74]. Математические аспекты электромагнитной задачи рассмотрены в [75].

Существует несколько работ, посвященных сравнению различных подходов к задаче о дифракции на полосе. В работе [76] сравниваются точное решение в виде ряда по функциям Матье, приближение Кирхгофа и приближение геометрической теории дифракции. В работе [77] сравнивались подходы П.Я. Уфимцева и Дж. Келлера. В работе [78] точное решение численно сравнивается с приближением Кирхгофа. В работе [79] строится приближение Кирхгофа для случая скользящего падения волны и производится сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

В работах [80–82] решение задачи о полосе строится с помощью разложения падающего поля в ряд по системе функций, для которых известно решение граничного интегрального уравнения. Этот метод во многом схож с традиционным преобразованием Фурье.

Большое количество работ посвящено попыткам обобщить метод Зоммерфельда [1] на случай задачи о полосе, однако ни в одной из них успех не был достигнут. Критическому обзору таких попыток посвящена работа [83]. Основными работами в этой области данный обзор называет [84] и [85, 86].

Все сказанное выше относилось к задаче с идеальными граничными усло-

виями (Дирихле или Неймана). Существует множество работ, в которых похожие приближенные методы применяются к задаче о дифракции на полосе с импедансными граничными условиями, например, [87–93] или с различными граничными условиями на двух сторонах поверхности [94].

Для дифракции на системах полос существует значительно меньше аналитических результатов, чем для задачи о полосе.

В ряде работ построено решение задачи дифракции на бесконечной решетке, составленной из идеальных компланарных полос, в случае, когда ширина проемов между полосами равна ширине самих полос. К данной задаче применялся матричный метод Винера–Хопфа [95–99], в частности, задача сводилась к скалярной факторизации или к матричной факторизации по Храпкову [100]. В работе [101] данная задача сводится к точно решаемой задаче Римана–Гильберта. В общем случае, когда проемы и полосы имеют разную ширину задача оказывается гораздо сложнее. В работах [102–104] к задачам о дифракции на периодических решетках применялись полуаналитические методы. Обзор работ по периодическим дифракционным решеткам содержится в монографии [105]. В работе [106] анализировалось граничное интегральное уравнение, соответствующее задаче дифракции на периодической решетке. Путем выделения части ядра, отвечающей дифракции на одном элементе, была построена равномерная коротковолновая асимптотика решения.

Математические аспекты задач дифракции на конечных решетках рассмотрены в работах [107, 108]. Задача рассматривалась в весьма общем виде, а именно не делалось предположений о прямолинейности рассеивателей. Доказаны теоремы существования и единственности, а также построены интегральные уравнения для потенциалов.

Существенное развитие теории двумерных задач с кусочно-плоскими рассеивателями было достигнуто в работах [3–5, 7–11, 14–18], собранных в [20]. Для этих задач в ней были построены формулы расщепления, выражающие решение через набор «эталонных» функций. Эти функции называются краевыми функциями Грина и представляют собой поля источников специального вида, расположенных на краях рассеивателей. Было доказано, что Фурье-образы этих полей удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению, называемому спектральным уравнением, в котором независимой переменной выступает спектральный параметр. К сожалению, коэффициенты этого уравнения оказываются зависящими от набора неизвестных параметров.

В случае задачи о полосе спектральное уравнение представляет собой уравнение Гойна. С точки зрения общей теории дифференциальных уравнений уравнение Гойна рассматривалось, например, в работах [109, 110].

Наиболее близкие к работе [20] результаты были получены в работах [111, 112] и особенно [113]. В них изучалось интегральное уравнение, соответ-

ствующее дифракционной задаче, и было найдено, что вследствие некоторых свойств ядра интегральное уравнение может быть сведено к дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом. Независимой переменной в этом уравнении является пространственная координата задачи.

Формулы расщепления для задачи о дифракции на полосе были впервые предложены в работе [113]. Позднее эта идея изучалась в работах [114–117].

Перейдем к рассмотрению работ, посвященных задачам дифракции на конусах.

Заметим, что с точки зрения математической физики даже корректная постановка таких задач является непростым делом. Существует ряд работ, посвященных этим вопросам. Например, в работе [118] была доказана теорема существования для электромагнитной задачи дифракции на идеально проводящем конусе. В работах [119, 120] изучались теоремы единственности для электромагнитной и акустических задач соответственно.

В работах [121] и [122] задача дифракции на конусе рассматривалась в наиболее общей постановке, а именно как задача для оператора Гельмгольца на многообразии с конической особенностью (декартовом произведении риманова многообразия на полупрямую).

Рассматриваемая в данной работе задача дифракции на четверти плоскости представляет собой частный случай задачи дифракции на эллиптическом конусе. Эта задача может быть решена методом разделения переменных в сферо-конических координатах. Решение представляется в виде ряда по функциям Ламэ.

Решение скалярной (акустической) задачи об эллиптическом конусе, полученное с помощью разделения переменных, содержится в работах [123, 124]. Решение векторной (электромагнитной) задачи может быть получено из решения скалярной задачи при помощи метода дебаевских потенциалов [69, 125, 126]. Задача о дифракции на четверти плоскости рассмотрена с помощью разделения переменных в работах [127, 128].

В работах [129–131] предложено преобразование ряда, ускоряющее его сходимости. Преобразованный ряд использован для вычислений. В работе [132] использован схожий подход, отличающийся видом преобразования ряда.

Значительный выигрыш при численном анализе дает переход с помощью преобразования Ватсона [133] от ряда по собственным функциям к контурному интегралу по параметру разделения переменных. Применение этой процедуры к коническим задачам дифракции описано в работах [134–137].

Итак, задача о дифракции на плоском конусе с идеальными граничными условиями имеет точное решение. Однако это не уменьшает интерес к данной задаче, так как точным решением неудобно пользоваться с практической точки зрения. Структура решения не отражает структуры рассеянного поля: из него затруднительно выделить выражения для геометрически отраженных и

рассеянных ребрами волн. Контурный интеграл, к которому ряд приводится с помощью преобразования Ватсона, также не слишком удобен для вычислений. Поэтому предпринималось большое число попыток построить более удобное решение.

В большом числе работ для этой цели использовался метод Винера–Хопфа [52], однако успех не был достигнут. Причина этого заключается, в первую очередь, в том, что теория функций двух комплексных переменных сложнее теории функций одной переменной. Существует несколько, по-видимому, неверных работ на эту тему, например [138]. Указание на то, что работа [138] неверна, содержится в [139] и [140]. Некоторый прогресс был достигнут с помощью операторных методов в работах [139, 141–144], однако явного решения в компактной форме построено не было. Приближенные формулы для дифракции на четверти плоскости построены в [128, 145, 146].

Интересный подход к решению задачи о дифракции на плоском секторе предлагается в работе [147]. В ней решение дифракционной задачи сводится к отысканию математического ожидания некоторого функционала на траекториях случайных блужданий.

В работе [69] была рассмотрена нестационарная задача дифракции плоской волны на произвольном конусе. Рассматривая плоские волны специального вида, автору удалось свести исходную задачу к краевой задаче для уравнения Лапласа в части единичного шара. В работе [148], являющейся изложением неопубликованного доклада авторов на 6-м Всесоюзном симпозиуме по вопросам дифракции и распространения волн (1973), на основании этого подхода были получены равномерные дальние асимптотики решения. Было показано, что в полутеневых областях поле описывается с помощью функций параболического цилиндра. В работе [149] асимптотики такого вида были получены с помощью альтернативного подхода, развитого Смышляевым и соавторами (см. ниже). В работе [150] дальние асимптотики полей были построены с помощью дифракционного ряда на части единичной сферы.

В работах [21–24, 151–155] В.П. Смышляевым и соавторами были развиты методы численного решения задач дифракции на произвольных конусах. Эти методы основаны на отделении радиальной переменной и использовании преобразования Ватсона. Основным результатом является выражение дифракционного коэффициента в виде контурного интеграла по параметру разделения переменных. В подынтегральное выражение входит функция Грина соответствующей сферической задачи. Эта функция ищется как решение интегрального уравнения на сечении конуса единичной сферой. В работах [154, 155], в частности, обсуждаются особенности решения такого уравнения, связанные с наличием у сечения угловых точек (случай многогранного конуса).

В работе [12] к задаче о дифракции на четверти плоскости был приме-

нен метод формул расщепления. В результате удалось получить выражения для дифракционного коэффициента в виде контурных интегралов с лучшими свойствами сходимости, чем у интеграла Смышляева. Другим преимуществом полученного результата является то, что подынтегральное выражение конструируется из функций, являющихся решениями системы дифференциальных уравнений с многомерным временем (координатных уравнений), допускающей эффективное численное решение [13]. Работа [156] посвящена использованию результатов [12, 13] для вычислений.

В ряде работ рассматривались задачи дифракции на конусах со щелями [157, 158], в частности, на системе компланарных плоских конусов с общей вершиной [159]. Задачи решались с помощью преобразования Конторовича–Лебедева и интегральных уравнений.

Все вышесказанное относилось к задачам дифракции на конусах с идеальными граничными условиями. Задачи дифракции на конусах с импедансными граничными условиями долгое время оставались малоизученными, однако в последнее время было опубликовано значительное число посвященных им работ [160–171].

Кратко рассмотрим некоторые работы по использованию корреляционных методов в акустическом эксперименте. Эти методы применяются для повышения разрешающей способности и отношения сигнал/шум. В них используются различные виды сигналов, например, частотно модулированные [172]. Используемый в данной работе метод последовательностей максимальной длины (MLS) также относится к корреляционным методам. Этот метод давно и успешно используется для решения разнообразных экспериментальных задач [173–175]. Из приложений этого метода, близких к тематике данной работы, выделяются приложения к изучению акустики помещений [176–178]. Однако результаты применения MLS к экспериментальному изучению дифракции представлены в литературе относительно слабо. Например, в работе [179] MLS-метод применяется для исследования дифракции акустической волны на боковой поверхности цилиндра, расположенного над импедансной поверхностью. В работе [180] описывается экспериментальное исследование распространения акустических волн над вогнутыми поверхностями. В этих работах использовались коммерческие MLS-системы, и в них отсутствует подробное описание методики проведения эксперимента. Экспериментальные исследования дифракции на конусах немногочисленны и, как правило, относятся к электромагнитному случаю [181, 182].



## Экспериментальное исследование дифракционных задач методом М-последовательностей

В данной главе подробно описывается применение М-последовательностей к акустическому дифракционному эксперименту. В ней, кроме того, предлагается метод восстановления импульсного отклика, относящегося к дифракционному процессу и не связанного со структурой источника. Метод использует измерение объемной скорости источника с помощью двух микрофонов. Построенная методика применяется для измерения дифракционного коэффициента трехгранного конуса (угла куба).

### §1.1. Описание методики

#### 1.1.1. Последовательности максимальной длины

Последовательность максимальной длины (Maximum Length Sequence, MLS) представляет собой псевдослучайную периодическую двоичную последовательность, автокорреляционная функция которой очень близка к периодически повторяющемуся единичному импульсу [183]. Говоря точнее, последовательность  $\{S_k = \pm 1\}$  порядка  $M$  имеет период  $L = 2^M - 1$ , а ее автокорреляционная функция  $\{A_k\}$  имеет вид

$$A_k = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L S_n S_{n+k-1} = \begin{cases} 1, & k = 1; \\ -1/L, & k = 2 \dots L. \end{cases} \quad (1.1)$$

Это свойство MLS позволяет использовать ее для измерения импульсного отклика линейных стационарных систем. Если подать на вход системы сигнал в виде М-последовательности и вычислить взаимокорреляционную функцию выходного и входного сигналов, получится сигнал, представляющий собой отклик системы на автокорреляционную функцию М-последовательности. То есть сигнал, близкий к импульсному отклику системы.

Действительно, пусть  $\{R_k\}$  — отклик системы на М-последовательность  $\{S_k\}$ , а  $\{G_k\}$  — импульсный отклик системы. Тогда  $\{R_k\}$  есть свертка  $\{S_k\}$  и  $\{G_k\}$ :

$$R_k = \sum_{n=1}^L S_{k-n} G_n, \quad (1.2)$$

а взаимная корреляция  $\{H_k\}$  последовательностей  $\{R_k\}$  и  $\{S_k\}$  есть отклик системы на  $\{A_k\}$ :

$$H_k = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S_m R_{k+m} = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S_m \sum_{n=1}^L S_{k+m-n} G_n = \sum_{n=1}^L A_{k-n} G_n \approx G_k. \quad (1.3)$$

### 1.1.2. Схема эксперимента

Общая схема эксперимента представлена на рис. 1.1. На вход системы подается M-последовательность  $\{S_k^{in}\}$ . Этот сигнал через ЦАП и усилитель подается на источник акустических волн. Микрофон располагается вблизи рассеивателя или на его поверхности. Сигнал с микрофона усиливается и преобразуется в цифровой вид. После этого вычисляется взаимнокорреляционная функция  $\{H_k\}$  выходного и входного сигналов:

$$H_k = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L S_n^{in} S_{k+n}^{out}. \quad (1.4)$$

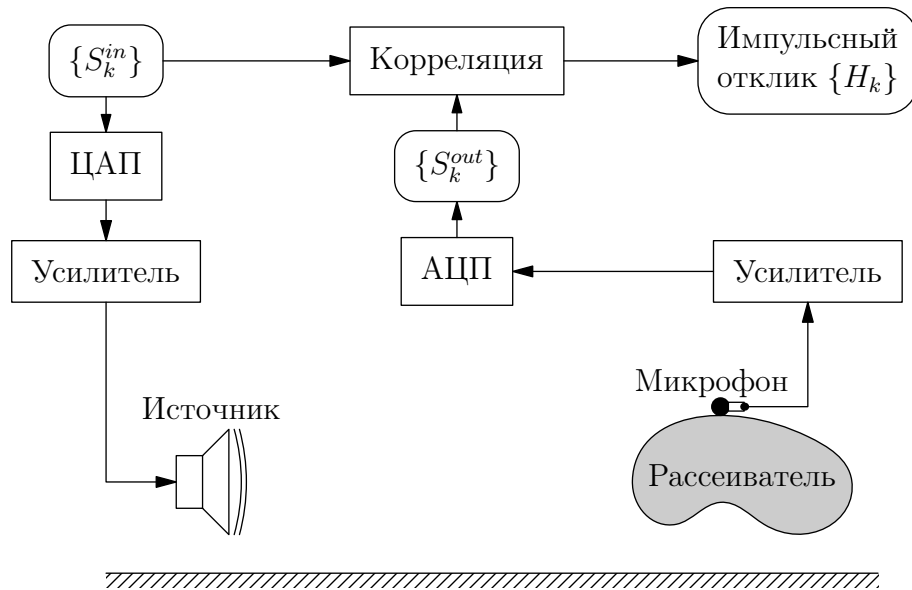


Рис. 1.1. Схема эксперимента.

Следует отметить, что для такой постановки эксперимента не требуется использовать безэховые помещения, поскольку полезный сигнал от рассеивателя появляется в импульсном отклике системы раньше помех, приходящих от акустического окружения. Для надежного разделения полезного и паразитного сигналов следует располагать рассеиватель на достаточном удалении от пола и прочих предметов, а затем применять окно во временной области, отсекая паразитные сигналы. Сигнал  $\{H_k\}$  — отклик системы на  $\{A_k\}$ . Он

близок к импульсному отклику всей системы и включает в себя, помимо чисто волновой части, еще и отклики источника и электрических трактов. Вопрос выделения из него полезной части рассматривается ниже.

### 1.1.3. Оборудование и параметры эксперимента

В данной работе в качестве входного сигнала использовалась  $M$ -последовательность порядка  $M = 17$ . Частота дискретизации ЦАП и АЦП составляла  $F_s = 32768$  Гц. Такие параметры дают длительность входного сигнала  $T = (2^M - 1)/F_s \approx 4$  с. Источником служил Bruel&Kjaer 4295 OmniSource с адаптером, позволяющим измерять объемную скорость источника (4299 Volume Velocity Adaptor). Схема источника с адаптером приведена на рис. 1.2.

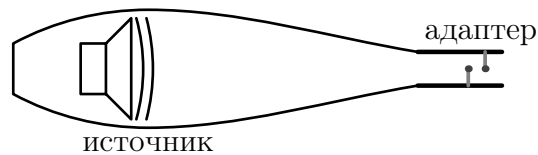


Рис. 1.2. Схема источника с адаптером для измерения объемной скорости.

Источник представляет собой электродинамическую головку, помещенную в продолговатый пластиковый корпус с узким отверстием ( $\varnothing 3,75$  см). Такая конструкция позволяет создавать акустическое поле, близкое к полю точечного монопольного источника. Адаптер представляет собой пластиковую трубку кругового сечения, плотно пригнанную к выходному отверстию источника. Внутри трубки помещены два микрофона, сигналы с которых используются для восстановления объемной скорости источника. Для регистрации рассеянного сигнала использовался Bruel&Kjaer 4957 1/4 inch Array Microphone, характеристики которого близки к характеристикам микрофонов в адаптере.

### 1.1.4. Выделение импульсного отклика, связанного только с дифракционным процессом

Как уже было сказано, сигнал  $\{H_k\}$  необходимо очистить, выделив импульсный отклик дифракционного процесса. Заметим, что основные помехи вносятся источником звука OmniSource, в котором происходят многочисленные переотражения.

Для простоты будем рассматривать дискретные сигналы  $\{A_k\}$  и  $\{H_k\}$  как непрерывные сигналы  $A(t)$  и  $H(t)$ . При этом будем помнить, что Фурье-образы таких сигналов определены для дискретного набора частот. Введем следующие функции:

- $W(t)$  — производная объемной скорости источника по времени при подаче на вход системы сигнала  $A(t)$ .
- $H^{prop}(t)$  — импульсный отклик, описывающий распространение волны от источника до микрофона (именно он нас и интересует), определяемый соотношением

$$p(t) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) H^{prop}(t - \tau) d\tau, \quad (1.5)$$

где  $p(t)$  — давление в точке наблюдения при подаче на вход системы сигнала  $A(t)$ ,  $\rho_0$  — плотность воздуха.

- $H^{recv}(t)$  — импульсный отклик приемной части (микрофона, усилителя и АЦП), определяемый соотношением

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) H^{recv}(t - \tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Нормировочный множитель  $\rho_0/4\pi$  в формуле, определяющей  $H^{prop}$ , введен из следующих соображений. Хорошо известно [184], что в свободном пространстве точечный монополярный источник создает давление, пропорциональное производной его объемной скорости по времени:

$$p = \frac{\rho_0}{4\pi R} W(t - R/c), \quad (1.7)$$

где  $R$  — расстояние от источника до точки наблюдения. Таким образом, в этом случае импульсный отклик  $H^{prop}$  представляет собой дельта-функцию (в дискретном случае — одиночный импульс):

$$H^{prop} = \frac{\delta(t - R/c)}{R}. \quad (1.8)$$

Амплитуда дельта-функции обратно пропорциональна расстоянию до источника  $R$  и обращается в единицу при  $R = 1$  м, что удобно.

Будем обозначать Фурье-образ сигнала  $\zeta(t)$  как  $\zeta_\omega$ . Тогда для наших сигналов будем иметь:

$$p_\omega = W_\omega H_\omega^{prop}, \quad (1.9)$$

$$H_\omega = p_\omega H_\omega^{recv}. \quad (1.10)$$

Если удастся измерить производную по времени объемной скорости источника  $W(t)$ , то можно будет восстановить дифракционную часть импульсного отклика:

$$H_{\omega}^{prop} = \frac{H_{\omega}}{W_{\omega} H_{\omega}^{recv}}. \quad (1.11)$$

Заметим, что предложенная процедура выделения части импульсного отклика, связанной только с дифракционным процессом никак не использует преимуществ метода М-последовательностей. Действительно, и  $W_{\omega}$  и  $H_{\omega}$  пропорциональны спектру входного сигнала, а значит, при любом достаточно широкополосном входном сигнале формула (1.11) дает возможность восстановить функцию  $H^{prop}(t)$ . Тем не менее, использование М-последовательностей позволяет повысить качество восстановления.

Длительность используемого в эксперименте сигнала (4 с) соответствует более чем 1 км пути, проходимого волной. При этом нас интересуют только первые несколько метров импульсного отклика, а вся остальная его часть является помехой. Чтобы ослабить влияние этой помехи, используем для вычисления Фурье-образов только начальную часть сигналов  $H(t)$  и  $W(t)$ . Длительность этой части следует взять такой, чтобы в нее попала вся существенно ненулевая часть сигнала  $W(t)$ . В описываемых ниже экспериментах использовались первые 50 м сигналов  $H(t)$  и  $W(t)$ , что соответствует примерно 100 переотражениям в корпусе источника.

### 1.1.5. Измерение производной объемной скорости источника

Как было сказано ранее, для измерения объемной скорости источника может быть применен адаптер с двумя микрофонами. Схема используемого адаптера приведена на рис. 1.3.

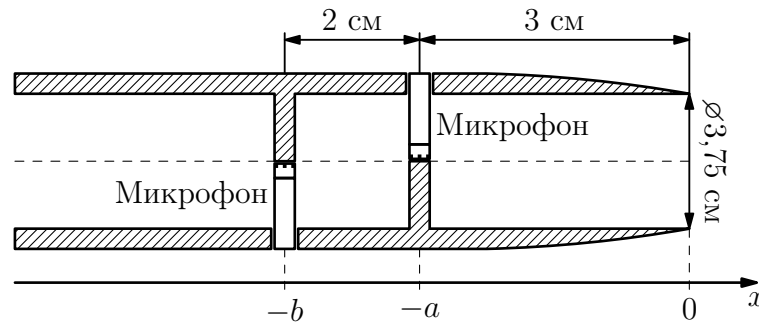


Рис. 1.3. Схема адаптера для измерения объемной скорости источника.

Пусть при подаче на вход системы М-последовательности  $\{S_k^{in}\}$  с микрофонов адаптера после усиления и ЦАП приходят сигналы  $\{S_k^{out,1}\}$  и  $\{S_k^{out,2}\}$ . Пусть  $\{H_k^{1,2}\}$  — взаимные корреляции этих сигналов с входным сигналом  $\{S_k^{in}\}$ . Обозначим через  $p_{1,2}$  начальные части (первые 50 м) сигналов  $H^{1,2}$ .

Для вычисления объемной скорости предположим, что внутри адаптера распространяются только поршневые моды. Обоснованность этого предположения обсуждается ниже. При таком предположении для каждой частоты  $\omega$  давление в трубке может быть представлено в следующем виде:

$$p_\omega(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad (1.12)$$

где  $A$  и  $B$  — амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлении оси  $x$  соответственно. Здесь предполагается гармоническая зависимость от времени вида  $e^{i\omega t}$ . Измеряются давления  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$  в точках  $x = -b$  и  $x = -a$  соответственно. Для их Фурье-образов можно записать:

$$\begin{aligned} p_{1\omega} &= Ae^{ikb} + Be^{-ikb}, \\ p_{2\omega} &= Ae^{ika} + Be^{-ika}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

откуда:

$$A = \frac{-p_{1\omega}e^{ikb} + p_{2\omega}e^{ika}}{e^{2ika} - e^{2ikb}}, \quad B = \frac{p_{1\omega}e^{ik(2a+b)} - p_{2\omega}e^{ik(a+2b)}}{e^{2ika} - e^{2ikb}}. \quad (1.14)$$

Пользуясь уравнением Эйлера, для производной колебательной скорости  $v$  получим:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\omega = \frac{ik}{\rho_0} (Ae^{-ikx} - Be^{ikx}). \quad (1.15)$$

Для производной по времени объемной скорости источника имеем:

$$W_\omega = i\omega \frac{\pi r^2}{\rho_0 c} (A - B), \quad (1.16)$$

где  $r$  — радиус трубки адаптера. Полученная формула дает относительно неплохие результаты, однако вносит заметные фазовые искажения. Причиной этих искажений служит то, что трубка не является достаточно тонкой, а значит, ее конец нельзя считать точечным источником. Используя теорию Вайнштейна об излучении волн из открытого конца волновода [96], можно получить формулу, подходящую для данного случая. Для этого в (1.16) надо заменить  $B$  на  $-A$ , то есть

$$W_\omega = i\omega \frac{2\pi r^2 A}{\rho_0 c}. \quad (1.17)$$

Вычисленная таким образом объемная скорость будет содержать в себе также АЧХ приемных трактов адаптера. В действительности микрофоны в адаптере близки по своим характеристикам к микрофону, используемому для регистрации поля вблизи рассеивателя, а АЧХ усилителей в приемных

трактах близки к идеальным в интересующем нас диапазоне частот (можно считать, что  $H_\omega^{recv} = 1$ ). Формула (1.11) может быть переписана следующим образом:

$$H_\omega = W_\omega H_\omega^{prop}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим ограничения предлагаемого метода. Очевидной трудностью является то, что формулы (1.14) имеют смысл только для частот  $f < f_c$ , где граничная частота  $f_c$  определяется расстоянием между микрофонами:  $f_c = c_0/(2(b-a))$ . Это частота, при которой знаменатель в (1.14) обращается в нуль. В нашем случае  $f_c = 8,57$  кГц. Таким образом, все сигналы при обработке должны быть пропущены через ФНЧ.

Другие трудности связаны с модами высших порядков, распространяющимися в трубке адаптера. Эти моды могут влиять на результат двумя способами. Во-первых, они могут излучать звук вовне. Во-вторых, они могут создавать сигнал на микрофонах адаптера, внося ошибки в измерение объемной скорости. Моды высших порядков имеют следующую структуру:

$$p(x, \xi, \varphi) = \exp\{\pm i\gamma x\} \left\{ \begin{array}{l} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{array} \right\} J_n(k_{m,n}\xi), \quad (1.19)$$

где  $(x, \xi, \varphi)$  — цилиндрические координаты с осью, совпадающей с осью трубки адаптера,  $J_n$  — функции Бесселя,  $k_{m,n}$  — корни уравнения  $J'_n(k_{m,n}r) = 0$ , а  $\gamma = \sqrt{\omega^2/c_0^2 - k_{m,n}^2}$ . Если точка наблюдения расположена вблизи оси системы, что соответствует нашему случаю, то, в силу ортогональности, моды высших порядков не будут давать вклада в излучаемое поле. Все моды, кроме поршневой, имеют свои частоты отсечки, что позволяет оценить их постоянные затухания. Моды с номером  $n \neq 0$  не будут влиять на сигналы микрофонов адаптера, поскольку микрофоны расположены на оси трубки, а  $J_n(0) = 0$  при  $n \neq 0$ . Поэтому наиболее «опасной» модой будет мода с  $J_0(k_{1,0}\xi)$ . Простой анализ показывает, что частота отсечки этой моды близка к 11.1 кГц. Для частоты сигнала 5 кГц это соответствует чисто мнимому значению  $\gamma = 180i \text{ м}^{-1}$ . При такой постоянной распространения волна быстро затухает. Таким образом, для частот ниже 5 кГц моды высших порядков можно не рассматривать.

### 1.1.6. Фильтрация

Все представленные ниже дифракционные импульсные отклики подвергались фильтрации. Использовалась комбинация фильтров высоких и низких частот со следующими частотными характеристиками. Для ФНЧ:

$$K_{LPF}(f) = \frac{K_0}{2} \left[ 1 - \text{th} \left( \frac{|f| - f_0}{\Delta f} \right) \right]; \quad (1.20)$$

для ФВЧ:

$$K_{HPF}(f) = K_0 - K_{LPF}(f). \quad (1.21)$$

При этом для фильтра низких частот параметры  $f_0$  и  $\Delta f$  имели значения

$$f_0 = 4000 \text{ Гц}, \quad \Delta f = 1000 \text{ Гц}, \quad (1.22)$$

а для фильтра высоких частот

$$f_0 = 50 \text{ Гц}, \quad \Delta f = 10 \text{ Гц}. \quad (1.23)$$

Нормировочный коэффициент  $K_0$  выбирался таким образом, чтобы значение импульсной характеристики результирующего фильтра в нуле было единицей. Импульсная характеристика представлена на рис. 1.4.

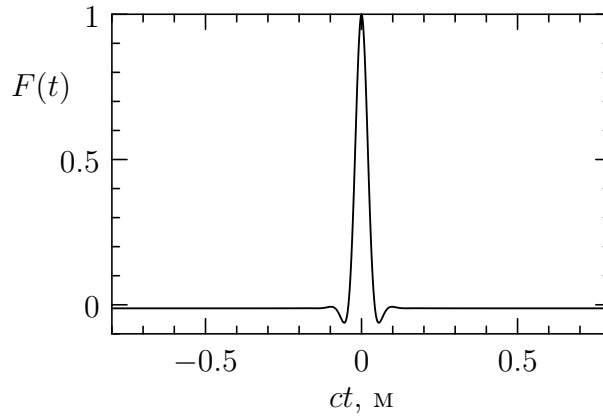


Рис. 1.4. Импульсная характеристика используемого фильтра.

## §1.2. Проверка методики

### 1.2.1. Измерения в пустом полупространстве

Простейшим акустическим окружением, легко реализуемым в эксперименте, является пустое полупространство с жесткой границей. Давление в точке наблюдения в этом случае создается прямой полной и волной, отраженной от границы полупространства. Импульсный отклик  $H^{prop}$  имеет вид

$$H^{prop} = \frac{\delta(t - R/c)}{R} + \frac{\delta(t - \bar{R}/c)}{\bar{R}}, \quad (1.24)$$

где  $R$  и  $\bar{R}$  — расстояния от точки наблюдения до источника и до отражения источника в границе полупространства соответственно.

Для проверки работоспособности методики был проведен эксперимент, схема которого показана на рис. 1.5.



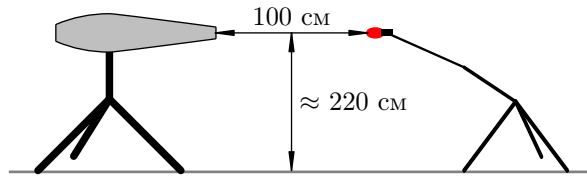


Рис. 1.5. Схема измерений в пустом полупространстве.

Все окружающие предметы были удалены на такое расстояние, чтобы отраженные от них волны приходили на микрофон позже прямой и отраженной от пола волн. Указанное на рис. 1.5 расположение источника и микрофона соответствует значениям  $R = 1$  м и  $\bar{R} \approx 4,5$  м.

В соответствии с (1.24) в импульсном отклике мы должны увидеть две копии импульсной характеристики использованного фильтра (см. рис. 1.4), сдвинутые в положения  $ct = 1$  м и  $ct = 4,5$  м. При этом амплитуда первого пика должна быть равна единице, а второго  $1/4,5 \approx 0,22$ . На рис. 1.6 показан наблюдаемый в эксперименте импульсный отклик пустого полупространства.

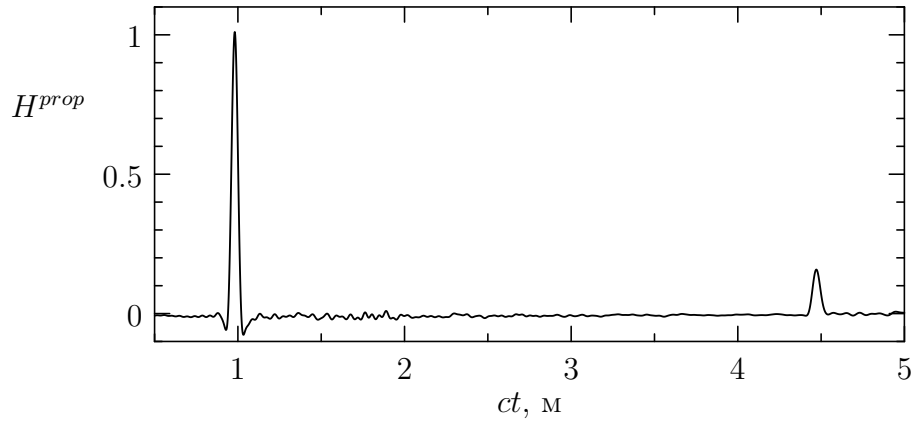


Рис. 1.6. Измеренный импульсный отклик пустого полупространства.

Хорошо видно, что пики имеют правильные положения и что высота первого пика также верна. Высота второго пика несколько ниже предсказанной теоретически, что, по видимому, объясняется неравномерностью диаграммы направленности использованного источника.

Для иллюстрации роли всех этапов обработки сигнала рассмотрим показанный на рис. 1.7 импульсный отклик  $H^{prop}$ , восстановленный без использования вайнштейновской поправки (1.17) и импульсный отклик всей системы  $H$  (рис. 1.8).

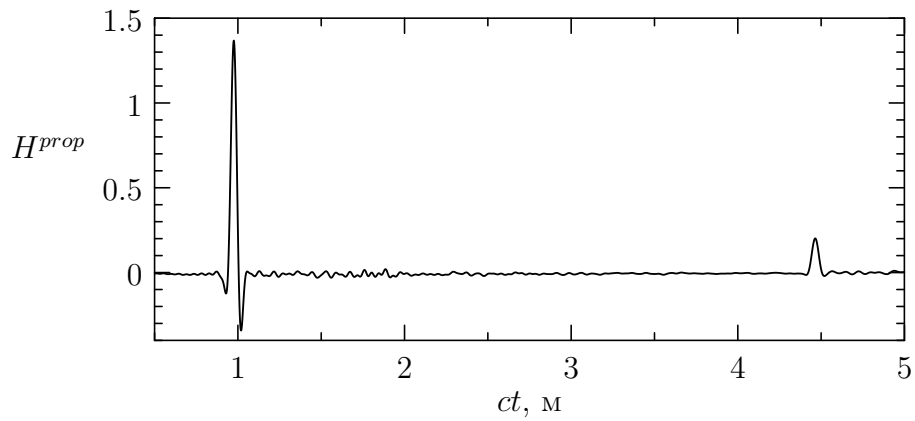


Рис. 1.7. Отклик, восстановленный без использования вайнштейновской поправки.

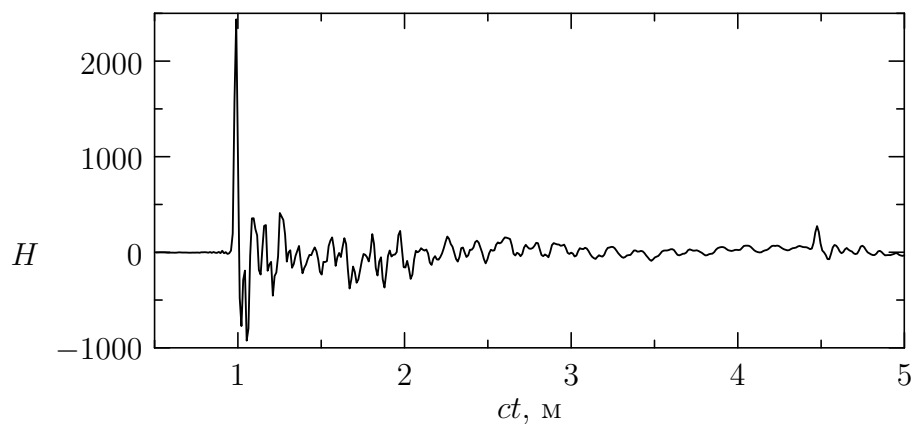


Рис. 1.8. Импульсный отклик всей системы при измерении в пустом пространстве.

Хорошо видно, что без использования вайнштейновской поправки в восстанавливаемый импульсный отклик вносятся заметные амплитудные и фазовые искажения. В полном импульсном отклике  $H$  видны многократные переотражения внутри источника, делающие сигнал непригодным для анализа.

### 1.2.2. Дифракция на торце цилиндра

Для проверки методики в более сложной ситуации был проведен эксперимент, схема которого приведена на рис. 1.9. Изучалась дифракция волны на торце цилиндра. В качестве цилиндра использовалась пластиковая бочка с плотно пригнанной крышкой. Диаметр бочки составлял 65 см. Бочка была подвешена в корсете из тонкой проволоки. Микрофон был расположен на поверхности торца в центре.

В описанных условиях на начальном участке времени поле на торце цилиндра формируется прямой волной, волной отраженной от пола и краевой волной, рассеянной на краях цилиндра (рис. 1.10).

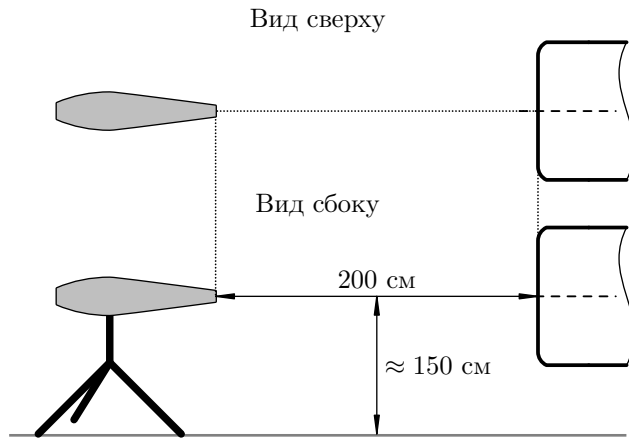


Рис. 1.9. Схема эксперимента по изучению дифракции на торце цилиндра.

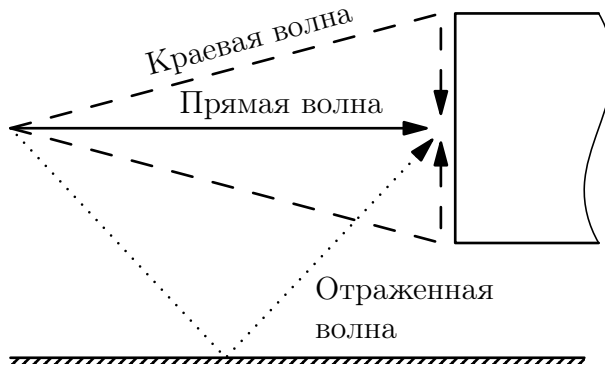


Рис. 1.10. Волновая картина на торце цилиндра.

На рис. 1.11 показан импульсный отклик  $H^{prop}$ . Также на этом рисунке приведен сигнал, полученный в результате численного моделирования методом конечных элементов. Видно хорошее согласие результатов моделирования и эксперимента. В сигнале четко различимы показанные на рис. 1.10 волны. Таким образом, предлагаемая методика дифракционного акустического эксперимента демонстрирует свою работоспособность.

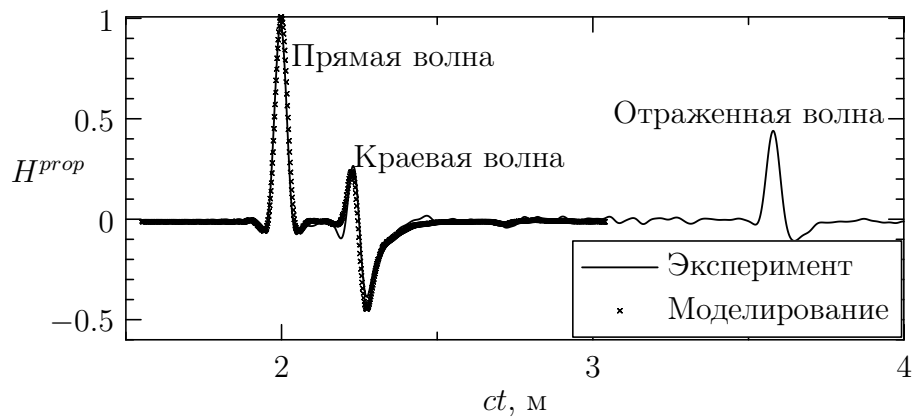


Рис. 1.11. Измеренная импульсная функция  $H^{prop}(t)$  в сравнении с результатами численного моделирования.

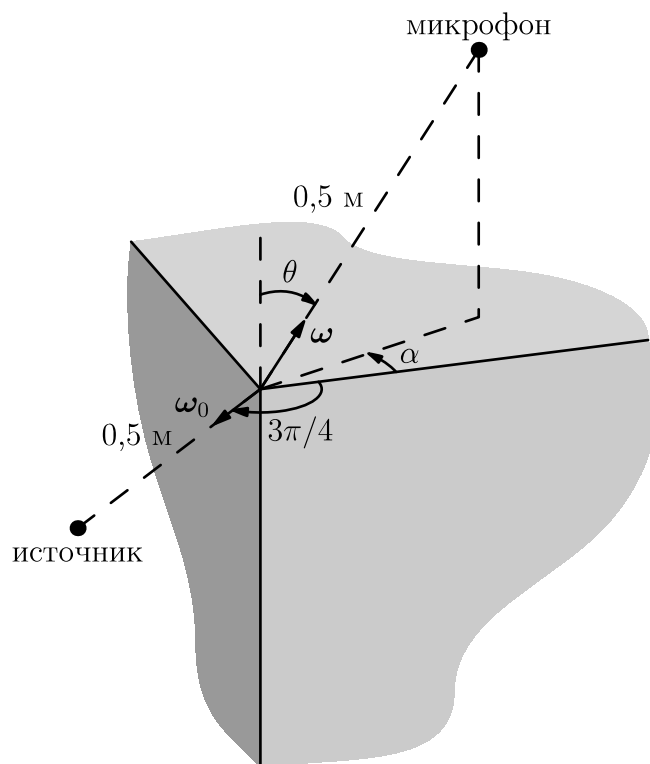


Рис. 1.12. Схема эксперимента по изучению дифракции на угле куба.

## §1.3. Экспериментальное изучение дифракции на угле куба

### 1.3.1. Схема эксперимента

Построенная методика была использована для измерения дифракционного коэффициента жесткого трехгранного конуса (угла куба). Схема измерений показана на рис. 1.12. Куб со стороной 1 м был собран из фанеры толщиной 10 мм. Источник помещался в фиксированную точку, лежащую на биссектрисе верхней грани куба. Микрофон помещался в различные положения, задаваемые углами  $\alpha$  и  $\theta$ .

Из-за того, что сигнал, рассеянный вершиной куба, оказывается очень слабым, приходится применять следующий подход. В первом измерении записывается импульсный отклик при наличии куба, а затем куб убирается и производится второе измерение. При этом положения источника и микрофона остаются неизменными. Разность двух сигналов позволяет наблюдать сигнал, рассеянный на вершине куба.

Типичный вид получаемых сигналов показан на рис. 1.13. Вопрос о теоретическом виде наблюдаемого сигнала рассматривается ниже.

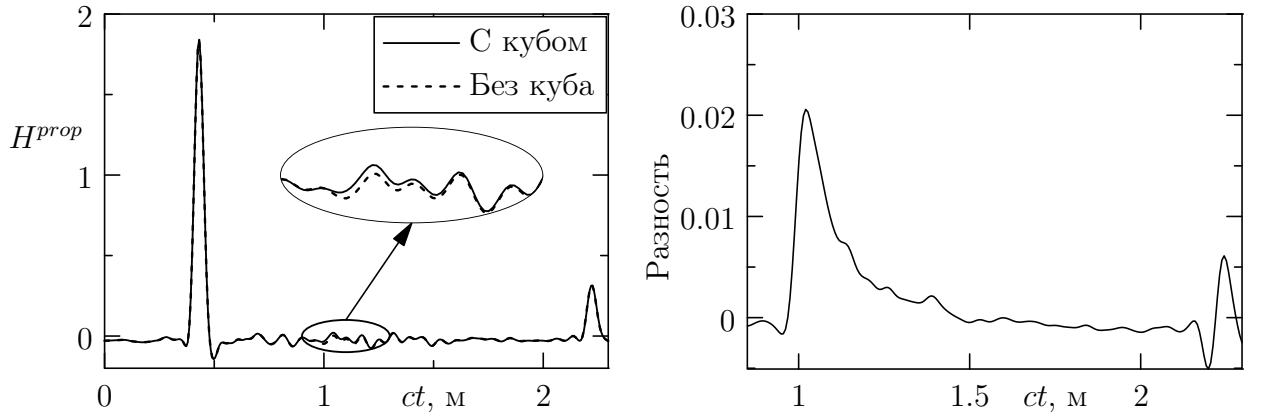


Рис. 1.13. Типичные наблюдаемые сигналы. Слева показаны импульсные отклики при наличии и в отсутствии куба. Справа — их разность, то есть сигнал, рассеянный вершиной куба.

### 1.3.2. Теоретический вид импульсного отклика

Пусть на бесконечный трехгранный конус падает с направления  $\boldsymbol{\omega}_0$  гармоническая плоская волна частоты  $\Omega$  с единичной амплитудой:

$$u^{in} = e^{-i\Omega t - ik_0 \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r}}. \quad (1.25)$$

Рассеянное поле формируется плоскими волнами, отраженными от граней, цилиндрическими волнами, рассеянными ребрами, и сферической волной, рассеянной вершиной. Также, при некоторых направлениях падения, цилиндрические волны от одного ребра могут рассеиваться на других ребрах, формируя вторичные, третичные и т.д. дифрагированные волны. В области направлений, в которую попадает только сферическая волна, рассеянное поле вдали от вершины имеет вид

$$u^{sc} = 2\pi \frac{e^{-i\Omega t + ik_0 r}}{k_0 r} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) + O[(k_0 r)^{-2}]. \quad (1.26)$$

Зависящую от направлений падения и рассеяния амплитуду сферической волны  $f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)$  называют дифракционным коэффициентом. Рассматриваемая область направлений представляет особый интерес, поскольку в ней дифракционный коэффициент может быть достаточно эффективно вычислен. Этот вопрос подробно обсуждается в главе 3.

При падении на конус плоской волны в виде дельта-функции

$$u^{in} = \delta(t + \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r}/c) \quad (1.27)$$

сигнал в рассеянной сферической волне находится с помощью преобразования Фурье:

$$u^{sc} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(\Omega) 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) e^{-i\Omega t} d\Omega. \quad (1.28)$$

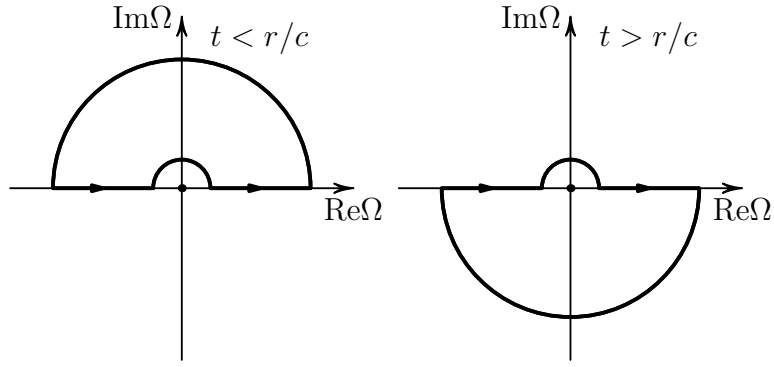


Рис. 1.14. Замыкание контура интегрирования при вычислении интеграла (1.29).

Здесь  $\hat{\delta}(\Omega) = 1$  — Фурье-образ дельта-функции. Пользуясь соотношением  $k_0 = \Omega/c$ , приведем это выражение к виду

$$u^{sc} = \frac{c}{r} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Omega(t-r/c)}}{\Omega} d\Omega. \quad (1.29)$$

Будем считать, что в среде имеется бесконечно слабое поглощение, то есть  $k_0 = \Omega/c + i \cdot 0$ . Тогда полюс  $\Omega = 0$  подынтегрального выражения следует обходить сверху. При  $t - r/c < 0$  экспоненциальный множитель убывает в верхней полуплоскости, что позволяет замкнуть контур (см. рис. 1.14). Внутри полученного контура подынтегральное выражение регулярно, поэтому интеграл равен нулю. При  $t - r/c > 0$  контур следует замыкать в нижней полуплоскости. При этом внутри контура подынтегральное выражение будет иметь единственный полюс  $\Omega = 0$ . Вычисляя интеграл с помощью теоремы о вычетах, окончательно получаем

$$u^{sc} = 2\pi \frac{-ic}{r} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) H(t - r/c), \quad (1.30)$$

где  $H$  — функция Хевисайда. Заметим, что из полученного выражения следует, что дифракционный коэффициент должен быть чисто мнимым, так как падающая волна чисто действительная, а значит, и рассеянная волна должна быть чисто действительной. С учетом этого выражение для рассеянного поля принимает вид

$$u^{sc} = \frac{2\pi c}{r} \text{Im} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) H(t - r/c), \quad (1.31)$$

Ясно, что при падении на конус плоской волны с произвольной зависимостью от времени,

$$u^{in} = F(t + \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r}/c), \quad (1.32)$$

рассеянный сигнал будет сверткой сигнала падающей волны с откликом (1.31):

$$u^{sc} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \frac{2\pi c}{r} \operatorname{Im} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) H(t - r/c - \tau) d\tau =$$

$$= \frac{2\pi c}{r} \operatorname{Im} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) \int_{-\infty}^{t-r/c} F(\tau) d\tau. \quad (1.33)$$

Пусть теперь на конус падает из точки  $\mathbf{r}_0 = r_0 \boldsymbol{\omega}_0$  гармоническая сферическая волна

$$u^{in} = \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} e^{-i\Omega t}. \quad (1.34)$$

Если источник достаточно удален от вершины, т.е. при  $r_0 \rightarrow \infty$ , падающую волну можно приближенно считать плоской:

$$u^{in} \approx \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{-i\Omega t - ik_0 \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r}}. \quad (1.35)$$

Повторяя вышеизложенные рассуждения, находим, что отклик на падающую сферическую волну с произвольной зависимостью от времени,

$$u^{in} = \frac{F(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (1.36)$$

имеет вид

$$u^{sc} = \frac{2\pi c}{rr_0} \operatorname{Im} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) \int_{-\infty}^{t-(r+r_0)/c} F(\tau) d\tau. \quad (1.37)$$

В нашем случае функция  $F(t)$  представляет собой импульсный отклик используемого фильтра (см. рис. 1.4). Соответствующий ей сигнал, рассеянный вершиной куба показан на рис. 1.15.

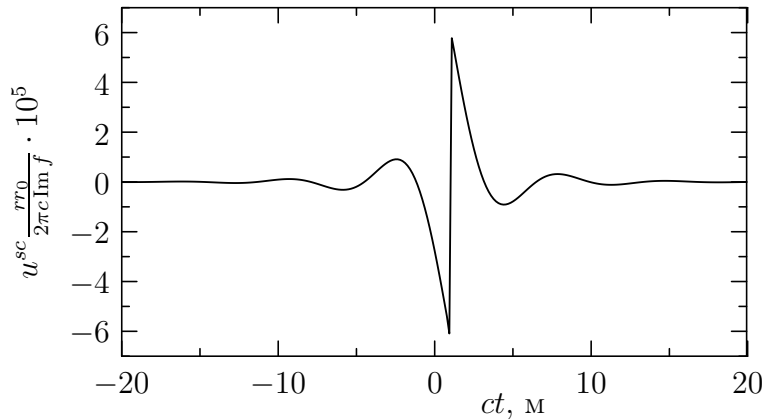


Рис. 1.15. Теоретический вид сигнала, рассеянного вершиной куба, в условиях рассматриваемого эксперимента.

Видно, что форма сигнала сильно отличается от наблюдаемой экспериментально (рис. 1.13).

### 1.3.3. Обработка сигналов и результаты

Причиной значительного отличия форм экспериментального и теоретического сигналов являются сделанные при выводе формулы (1.37) предположения о большой удаленности источника и точки наблюдения от вершины куба, которые, очевидно, не выполняются для низких частот, присутствующих в сигнале. Чтобы сделать построенную теорию применимой, поступим следующим образом. Наложим на экспериментальный сигнал окно, выделяющее часть сигнала, формируемую рассеянием на вершине куба. Затем пропустим полученный и теоретический сигналы через фильтр верхних частот, задаваемый формулой (1.21). Параметры фильтра выберем из следующих соображений. С одной стороны, более высокое значение частоты среза должно давать лучшее согласие между теорией и экспериментом. С другой стороны, при первоначальной обработке сигналы пропускаются через фильтр низких частот (1.20) с частотой среза 4 кГц. Поэтому увеличение частоты среза дополнительного фильтра верхних частот может привести к значительному уменьшению энергии полезного сигнала. Исходя из сказанного, были выбраны следующие параметры фильтра

$$f_0 = 3000 \text{ Гц}, \quad \Delta f = 100 \text{ Гц}. \quad (1.38)$$

На рис. 1.16 показаны экспериментальный и теоретический сигналы после применения к ним описанной процедуры. Для удобства сравнения сигналы нормированы на максимальное значение.

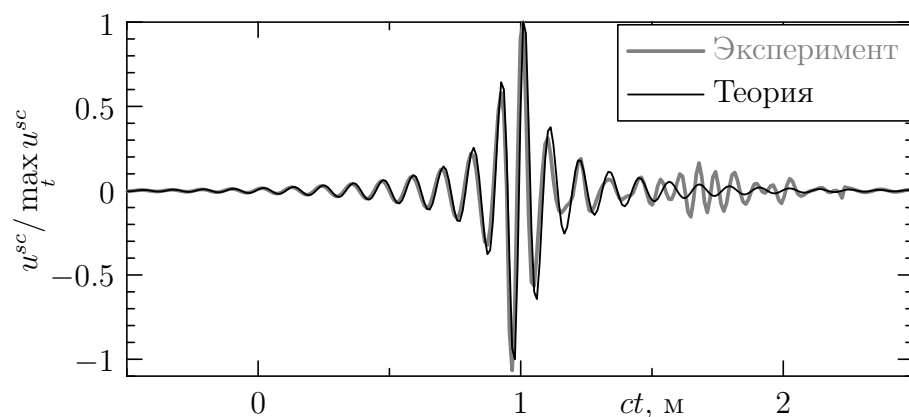


Рис. 1.16. Нормированные экспериментальный и теоретический сигналы после дополнительной обработки.

Видно хорошее совпадение сигналов в области их максимальных значений.



Таким образом, дифракционный коэффициент может быть определен по формуле

$$\text{Im } f(\omega, \omega_0) = \frac{rr_0}{2\pi c} \max_t u_{exp}^{sc}(t) / \max_t \mathcal{F}(t), \quad (1.39)$$

где  $u_{exp}^{sc}(t)$  — экспериментальный сигнал,  $\mathcal{F}(t)$  — результат применения дополнительного фильтра верхних частот к сигналу, показанному на рис. 1.15. Погрешность предлагаемого метода можно оценить снизу следующим образом. Эксперимент проводился в помещении с менявшейся температурой. Величина ее изменения соответствует относительному изменению скорости звука порядка 3%. Расстояния  $r$  и  $r_0$  измерялись с точностью 1 см, что составляет 2% относительной погрешности на каждое из расстояний. Таким образом, нижняя оценка относительной погрешности составляет 7%.

На рис. 1.17 показаны измеренные значения дифракционного коэффициента в сравнении с теоретическими значениями, вычисленными по формуле Смышляева (3.1). Метод расчета описан в работе [154] (см. также раздел 3.6).

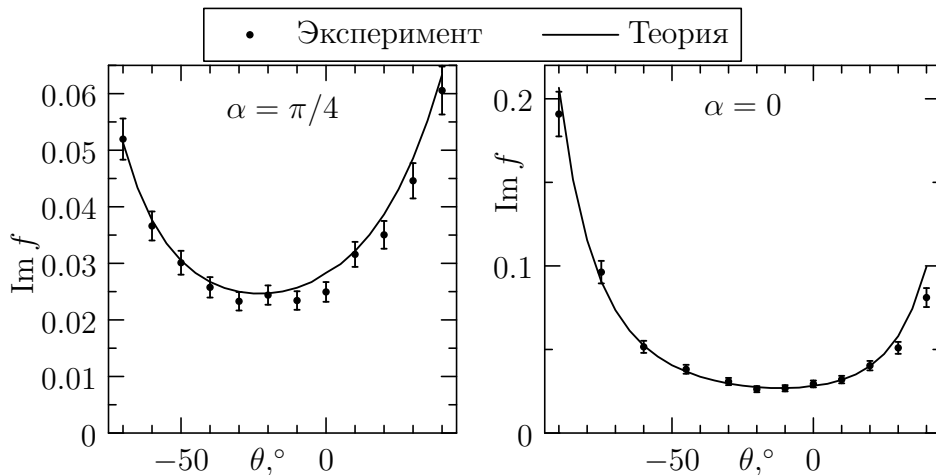


Рис. 1.17. Экспериментальная оценка дифракционного коэффициента в сравнении с теоретическими значениями. Координаты  $\theta$  и  $\alpha$  показаны на рис. 1.12.

Видно хорошее согласие теории с экспериментом.

## §1.4. Основные результаты главы

1. Предложена методика экспериментального исследования акустических дифракционных задач с помощью М-последовательностей. Основу методики составляет процедура восстановления объемной скорости источника акустических волн с помощью метода двух микрофонов и теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода.
2. Предложенная методика была проверена на случаях распространения в «пустом» полупространстве и дифракции на торце цилиндра. Показана

хорошая работоспособность методики.

3. На основании предложенной методики была построена процедура экспериментального измерения дифракционного коэффициента трехгранного конуса (угла куба).
4. Произведено сравнение измеренных значений дифракционного коэффициента с вычисленными по формуле Смышляева. Показано, что результаты измерений и вычислений хорошо согласуются друг с другом.

# Численная реализация метода спектрального уравнения для двумерных задач дифракции

### §2.1. Введение

В данной главе описывается применение метода спектрального уравнения к акустическим задачам дифракции плоской плоской волны на одной и на двух полосах, а также к задаче дифракции на полубесконечном экране со щелью. Все построения подробно описываются на примере простейшей задачи из этого множества — задачи о дифракции на одиночной полосе. В двумерном сечении она представляет собой задачу о дифракции на идеально тонком отрезке. Несмотря на то, что для нее известно точное решение [40], вычисления с помощью него сложны с точки зрения численных методов (особенно в средне- и высокочастотном случаях). Поэтому для проверки полученных результатов используется метод граничного интегрального уравнения [185].

Описываемый ниже метод весьма сложен с теоретической точки зрения. В связи с этим следует с самого начала подчеркнуть его преимущества перед традиционными методами. Главным из них является то, что дифракционная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (в противоположность уравнению в частных производных или интегральному уравнению). Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения может быть осуществлено за  $O(N)$  операций, где  $N$  — число точек на контуре интегрирования. Рассматриваемый алгоритм включает в себя численное определение коэффициентов дифференциального уравнения градиентным методом. Этот метод достаточно эффективен, и его общие затраты составляют порядка 10–20 актов решения обыкновенного дифференциального уравнения. Таким образом, метод имеет высокий потенциал к сокращению машинного времени, требуемого для численного решения определенных задач дифракции. Несмотря на то, что математическая природа метода тесно связана с формулировкой задач на разветвленных поверхностях, в данной работе для большей ясности эта формулировка не применяется.

Рассмотрение дифракционных задач методом спектрального уравнения основано на ряде упрощений. Во-первых, строится формула расщепления, сводящая исходную дифракционную задачу к задачам для так называемых краевых функций Грина. Эти функции являются решениями вспомогательных дифракционных задач, в которых нет падающих волн, но зато есть источники специального вида, лежащие на краях рассеивателя.

Затем для краевых функций Грина формулируются функциональные за-

дачи типа Винера-Хопфа. Для этого вводятся спектральные функции, представляющие собой Фурье-образы полей и их нормальных производных на частях оси  $x$ . Функциональные задачи задают условия регулярности и роста спектральных функций в верхней и нижней плоскостях их комплексного аргумента.

На следующем шаге доказываем, что решение функциональной задачи удовлетворяет так называемому спектральному уравнению, представляющему собой обыкновенное дифференциальное уравнение конфлюэнтного Фуксового типа. К сожалению, коэффициенты этого уравнения известны только с точностью до нескольких параметров  $\xi_j$ ,  $j = 1 \dots N$  ( $N = 2$  для случая одной полосы,  $N = 8$  для двух полос,  $N = 4$  для полубесконечного экрана со щелью), которые требуется как-либо найти. В то же время функциональная задача полностью задает данные монодромии спектрального уравнения. Неизвестные параметры должны иметь такие значения, чтобы все ограничения на данные монодромии были выполнены.

Все предыдущие шаги были аналитическими. Однако с этого момента возможно применение только численных методов. Ограничения на данные монодромии формулируются как система  $N$  уравнений

$$\eta_i(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0, \quad i = 1 \dots N, \quad (2.1)$$

где функции  $\eta_i$  выражаются через решения спектрального уравнения вдоль некоторых контуров. Для решения этой системы используется градиентная процедура, представляющая собой вариант метода Ньютона. Численные эксперименты показывают, что эта процедура быстро сходится для всего диапазона значений параметров. В результате решения системы (2.1) также находятся и начальные данные для спектрального уравнения.

На практике решение дифракционной задачи (т.е. табулирование значений дифракционного коэффициента) происходит в обратном направлении. Сначала численно решается система (2.1). В результате находятся значения неизвестных параметров и начальные данные для спектрального уравнения. Затем спектральное уравнение решается для значений угла рассеяния, принадлежащих интервалу  $(0, \pi)$ , что дает диаграммы направленности краевых функций Грина. В конце концов эти диаграммы подставляются в формулу расщепления, что дает значение дифракционного коэффициента исходной задачи.

Данная глава организована следующим образом. Основное ее содержание посвящено задаче дифракции на одной полосе. В §2.2 описывается постановка задачи с точки зрения математической физики. В §2.3 и §2.4 перечисляются основные аналитические результаты, составляющие метод спектрального уравнения, что, в основном, является переложением результатов работ [20] и [7] на случай одной полосы. В них вводится спектральное уравнение

(обыкновенное дифференциальное уравнение конфлюэнтного Фуксового типа), коэффициенты которого известны с точностью до двух неизвестных параметров. Кроме того, формулируются ограничения на поведение решений в особых точках. Таким образом, задача отыскания неизвестных параметров сводится к решению системы двух достаточно сложных трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных. В §2.5 описывается численный алгоритм решения этой системы. В §2.6 рассматриваются вопросы точности и эффективности. Производится сравнение с результатами, полученными методом граничных интегральных уравнений. В §2.7 кратко излагаются соотношения метода спектрального уравнения для задачи о двух полосах и описывается процедура его численного решения. В §2.8 метод спектрального уравнения применяется к задаче дифракции на полубесконечном экране со щелью.

Новые результаты излагаются в §2.5, §2.6, §2.8 и в части §2.7, посвященной численной реализации алгоритма.

## §2.2. Постановка задачи

Рассматривается двумерная стационарная акустическая задача, то есть ищется решение  $u$  уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0 \quad (2.2)$$

в плоскости  $(x, y)$ . Здесь и далее опускается временная зависимость вида  $e^{-i\Omega t}$  и предполагается, что  $k_0$  имеет малую положительную мнимую часть.

Рассеиватель представляет собой отрезок  $[-a, a]$  оси  $x$ . (см. рис. 2.1). На

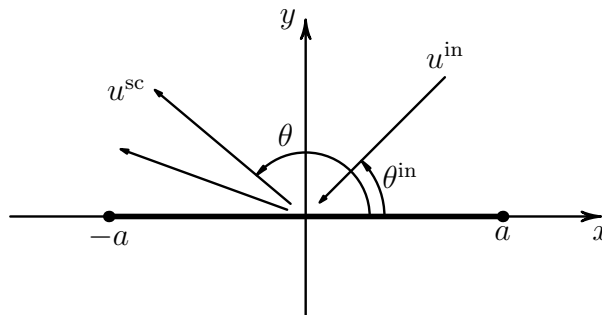


Рис. 2.1. Геометрия задачи.

обеих сторонах отрезка выполняются однородные граничные условия Дирихле

$$u(x, \pm 0) = 0, \quad -a \leq x \leq a. \quad (2.3)$$

На рассеиватель падает с направления  $\theta^{\text{in}}$  плоская волна вида

$$u^{\text{in}} = e^{-ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} + y \sin \theta^{\text{in}})}. \quad (2.4)$$

Полное поле представляется в виде суммы падающей волны и рассеянного поля:

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}. \quad (2.5)$$

Для рассеянного поля справедливы следующие граничные условия:

$$u^{\text{sc}}(x, \pm 0) = -u^{\text{in}}(x, \pm 0) = -e^{-ik_0 x \cos \theta^{\text{in}}}, \quad -a \leq x \leq a. \quad (2.6)$$

Задачу можно симметризовать. Представим полное поле  $u$  в виде суммы четной и нечетной функций  $y$ :

$$u = u_s + u_a, \quad u_s(x, -y) = u_s(x, y), \quad u_a(x, -y) = -u_a(x, y). \quad (2.7)$$

Четная и нечетная части соответствуют падающим волнам вида

$$u_s^{\text{in}} = \frac{1}{2} [u^{\text{in}}(x, y) + u^{\text{in}}(x, -y)] \quad \text{и} \quad u_a^{\text{in}} = \frac{1}{2} [u^{\text{in}}(x, y) - u^{\text{in}}(x, -y)] \quad (2.8)$$

соответственно. Решение нечетной задачи тривиально: падающее поле удовлетворяет однородным условиям Дирихле на всей оси  $x$ , а значит рассеянное поле отсутствует. Таким образом, нас интересует только четная часть поля. В дальнейшем рассматривается только она, а индекс  $s$  опускается. Рассмотренная симметризация не меняет граничного условия (2.6) и позволяет наложить на рассеянное поле условие при  $|x| > a$ :

$$\left. \frac{\partial u^{\text{sc}}}{\partial y} \right|_{(x, \pm 0)} = 0. \quad (2.9)$$

Также рассеянное поле должно удовлетворять условиям излучения Зомерфельда. Для нашей задачи это означает, что соотношение

$$\frac{\partial u^{\text{sc}}}{\partial r} - ik_0 u^{\text{sc}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

должно выполняться равномерно относительно  $\theta$ , где  $r$  и  $\theta$  – стандартные полярные координаты в плоскости  $(x, y)$ .

Вблизи краев рассеивателя (точек  $(\pm a, 0)$ ) должны быть поставлены краевые условия. С физической точки зрения эти условия заключаются в требовании конечности энергии в любой конечной области, содержащей края. Используя ряд Мейкснера [186], можно показать, что условия

$$u = O\left(\rho_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2}\right) \quad (2.11)$$

являются достаточными. Здесь  $(\rho_n, \phi_n)$ ,  $n = 1, 2$  – локальные полярные координаты (см. рис. 2.2).

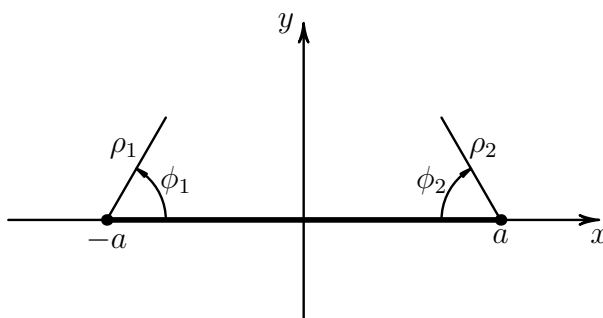


Рис. 2.2. Локальные полярные координаты.

Нашей основной задачей будет являться отыскание дифракционного коэффициента  $S(\theta, \theta^{\text{in}})$ , определяемого следующим образом. Хорошо известно, что в дальней зоне рассеянное поле имеет вид цилиндрической волны [187]. Дифракционный коэффициент — это функция, описывающая зависимость амплитуды этой волны от угла рассеяния  $\theta$ :

$$u^{\text{sc}}(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} S(\theta, \theta^{\text{in}}) + O(r^{-3/2} e^{ik_0r}), \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Он зависит также от угла падения  $\theta^{\text{in}}$  как от параметра.

## §2.3. Метод спектрального уравнения

В этом разделе описываются математические факты, лежащие в основе метода спектрального уравнения. Главным образом, изложение следует работе [7]. Несмотря на то, что она посвящена задаче о дифракции на двух полосах, все результаты могут быть легко переформулированы для случая одиночной полосы.

### 2.3.1. Краевые функции Грина

Краевые функции Грина вводятся как волновые поля источников специального вида, лежащих, грубо говоря, на краях рассеивателя. Поскольку на рассеивателе заданы граничные условия Дирихле, расположить источник на самом краю полосы невозможно. Вместо этого используется следующая предельная процедура. Источник, имеющий силу  $\sqrt{\pi/\varepsilon}$ , помещается на расстоянии  $\varepsilon$  от края. После этого рассматривается предел поля такого источника при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Говоря подробнее, строится пара краевых функций Грина  $u^1$  и  $u^2$ . Первая из них порождается источником, лежащим вблизи точки  $(-a, 0)$ , а вторая — вблизи точки  $(a, 0)$ . Для каждого малого  $\varepsilon$  решаются неоднородные урав-

нения Гельмгольца

$$\Delta \hat{u}^1 + k_0^2 \hat{u}^1 = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \delta(x + a + \varepsilon) \delta(y), \quad (2.13)$$

$$\Delta \hat{u}^2 + k_0^2 \hat{u}^2 = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \delta(x - a - \varepsilon) \delta(y) \quad (2.14)$$

с теми же граничными и краевыми условиями, а также условиями излучения, что и для основного искомого поля  $u$ . Здесь  $\delta$  обозначает дельта-функцию Дирака. Положение источников полей  $\hat{u}^{1,2}$  показано на рис. 2.3.

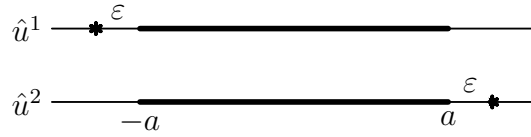


Рис. 2.3. К определению краевых функций Грина.

Затем рассматриваются пределы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$u^{1,2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{u}^{1,2}. \quad (2.15)$$

Заметим, что зависимость силы источников от  $\varepsilon$  выбрана таким образом, что поля  $\hat{u}^m$  имеют конечные ненулевые предельные значения. Поля  $u^m$ ,  $m = 1, 2$ , и есть краевые функции Грина нашей задачи.

Предел (2.15) не является равномерным вблизи краев рассеивателя. Для каждого ненулевого  $\varepsilon$  поле  $\hat{u}^m$  удовлетворяет краевым условиям, но предельное поле  $u^m$  им не удовлетворяет. Детальное рассмотрение показывает, что краевые функции Грина имеют следующие локальные асимптотики вблизи краев рассеивателя:

$$u^m(\rho_n, \phi_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{-1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + O(\rho_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2}). \quad (2.16)$$

Здесь  $\delta_{m,n}$  — символ Кронекера.

Действительно, главный член краевой асимптотики поля  $\hat{u}^m$  определяется решением уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \varepsilon) \delta(\phi - \pi) \quad (2.17)$$

на плоскости, разрезанной по лучу  $\phi = 0$ , с граничными условиями

$$w(\rho, 0) = w(\rho, 2\pi) = 0. \quad (2.18)$$



Это уравнение легко решается методом конформных отображений, что дает

$$w = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\rho + \varepsilon + 2\sqrt{\rho\varepsilon} \cos \left[ \frac{1}{2}(\phi - \pi) \right]}{\rho + \varepsilon + 2\sqrt{\rho\varepsilon} \cos \left[ \frac{1}{2}(\phi + \pi) \right]}. \quad (2.19)$$

Подставляя сюда  $\rho = \rho_m$ ,  $\phi = \phi_m$  и пользуясь (2.15), получаем (2.16).

Первый член в (2.16) условиями Мейкснера запрещен. С физической точки зрения это достаточно ясно. Условия Мейкснера выражают отсутствие источников на краях, а мы поместили источник именно туда.

Определим диаграммы направленности  $S^m$  краевых функций Грина  $u^m$  схожим с (2.12) образом. А именно, в дальней зоне асимптотики краевых функций Грина имеют вид

$$u^m(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0r}} S^m(\theta) + O(r^{-3/2} e^{ik_0r}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Заметим, что диаграммы направленности  $S^m$  зависят только от одной переменной, что упрощает задачу их табуляции.

### 2.3.2. Формула расщепления

Большим преимуществом введения краевых функций Грина является возможность использовать формулу расщепления, т.е. выразить дифракционный коэффициент исходной задачи через диаграммы направленности краевых функций Грина.

**Теорема 2.1.** *Полное поле  $u(x, y)$  связано с краевыми функциями Грина соотношением*

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 \cos \theta^{\text{in}} \right] u(x, y) = i \left[ S^2(\theta^{\text{in}}) u^2(x, y) - S^1(\theta^{\text{in}}) u^1(x, y) \right]. \quad (2.21)$$

*Как следствие этого, дифракционный коэффициент  $S(\theta, \theta^{\text{in}})$  и диаграммы направленности краевых функций Грина  $S^m(\theta)$  связаны соотношением*

$$S(\theta, \theta^{\text{in}}) = \frac{S^2(\theta) S^2(\theta^{\text{in}}) - S^1(\theta) S^1(\theta^{\text{in}})}{k_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})}. \quad (2.22)$$

*Доказательство.* Рассмотрим поле  $H_x[u]$ , где

$$H_x = \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 \cos \theta^{\text{in}}. \quad (2.23)$$

Очевидным образом  $H_x[u]$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца и однородным граничным условиям Дирихле на полосе. Так как  $H_x$  аннулирует падающую волну, оно также удовлетворяет условиям излучения. Однако оно не удовлетворяет краевым условиям.

Действительно, пусть поле  $u$  имеет следующие Мейкснеровские асимптотики у краев полосы:

$$u(\rho_m, \phi_m) = \frac{2C_m}{\sqrt{\pi}} \rho_m^{1/2} \sin \frac{\phi_m}{2} + O[\rho_m^{3/2}] \quad \text{при } \rho_m \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

Действуя на них оператором  $H_x$ , получаем краевые асимптотики поля  $H_x[u]$ :

$$u(\rho_m, \phi_m) = (-1)^m \frac{C_m}{\sqrt{\pi}} \rho_m^{-1/2} \sin \frac{\phi_m}{2} + O[\rho_m^{1/2}] \quad \text{при } \rho_m \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Следовательно, комбинация  $H_x[u] - C_1 u^1 + C_2 u^2$  удовлетворяет краевым условиям. В силу сказанного выше она также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, однородным условиям Дирихле и условиям излучения. По теореме единственности, эта комбинация тождественно равна нулю, или

$$H_x[u] = C_1 u^1 - C_2 u^2. \quad (2.26)$$

Оказывается, что коэффициенты краевых асимптотик поля  $u$  связаны с диаграммами направленности краевых функций Грина. Рассмотрим поле точечного источника единичной силы, расположенного в точке со стандартными полярными координатами  $(r, \theta^{\text{in}})$ . При больших  $r$  вблизи рассеивателя такой источник создает падающее поле в виде плоской волны с амплитудой  $e^{ik_0 r - i3\pi/4} / \sqrt{8\pi k_0 r}$ . Следовательно, в соответствии с (2.24) полное поле в точке с локальными полярными координатами  $\rho_m = \varepsilon$ ,  $\phi_m = \pi$  имеет вид

$$\frac{C_m e^{ik_0 r - i3\pi/4}}{\pi \sqrt{2k_0 r}} \varepsilon^{1/2} + O[\varepsilon^{3/2}] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Рассмотрим теперь поле точечного источника единичной силы, расположенного в точке с локальными полярными координатами  $\rho_m = \varepsilon$ ,  $\phi_m = \pi$ . В соответствии с (2.20) в точке с координатами  $(r, \theta^{\text{in}})$  этот источник создает поле

$$-\frac{\sqrt{\varepsilon} e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\pi \sqrt{2k_0 r}} S^m(\theta^{\text{in}}) + O(r^{-3/2} e^{ik_0 r}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

По теореме взаимности, поля (2.27) и (2.28) должны совпадать. Значит,

$$C_m = -i S^m(\theta^{\text{in}}). \quad (2.29)$$

Подставляя эти равенства в (2.26), получаем (2.21).

Чтобы получить формулу (2.22), заметим, что оператор  $H_x$  действует на дифракционный коэффициент как умножение на  $ik_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})$ .  $\square$

Изложенное доказательство совершенно аналогично доказательству для случая двух полос, приведенному в работе [20].

Формула (2.22) является точной, т.е. при ее выводе не делается никаких предположений о соотношении длины волны и размера рассеивателя. Преимущества, которые дает эта формула очевидны: функция двух переменных простым образом выражается через две функции одной переменной. В дальнейшем основные усилия концентрируются на отыскании  $S^m(\theta)$ . Формула расщепления используется на последнем шаге вычислений.

### 2.3.3. Формулировка функциональных задач

Задача отыскания  $u^{\text{sc}}$  принадлежит к классу задач со смешанными краевыми условиями. Это означает, что ось  $x$  разбивается на три части (отрезок и две полупрямые), на которых заданы различные граничные условия. На полупрямых заданы однородные условия Неймана (2.9), а на отрезке — неоднородные условия Дирихле (2.6). Этим же свойством обладают задачи для краевых функций Грина  $u^m$ , но в этом случае условия Дирихле на отрезке являются однородными, а на краях отрезка присутствуют сингулярности.

Следуя методике Винера–Хопфа, введем спектральные функции  $U_n^m$ ,  $m = 1, 2$ ,  $n = 0, 1, 2$ , следующим образом:

$$U_0^m(k) = \int_{-\infty}^{-a} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, \quad (2.30)$$

$$U_1^m(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{-a}^a \partial_y u^m(x, +0) e^{ikx} dx, \quad (2.31)$$

$$U_2^m(k) = \int_a^{\infty} u^m(x, 0) e^{ikx} dx. \quad (2.32)$$

Спектральные функции представляют собой Фурье-образы полей и их нормальных производных взятых на разных частях оси  $x$ . Из-за сингулярности на краю интегралы (2.31) расходятся, но их можно регуляризовать физически обоснованным образом так, что все обсуждаемые ниже свойства спектральных функций будут выполнены. Регуляризация основана на применении теоремы Грина к контуру, специальным образом обходящему особенности. Процедура подробно описана в работе [20].

Изначально спектральные функции вводятся для действительных  $k$ . Их аналитические продолжения на всю комплексную плоскость изучаются далее.

Введенные спектральные функции обладают рядом важных свойств. Во-

первых, они непосредственно связаны с диаграммами направленности  $S^m$ :

$$S^m(\theta) = \sqrt{k_0^2 - k^2(\theta)} U_1^m(k(\theta)), \quad (2.33)$$

где

$$k(\theta) = -k_0 \cos \theta. \quad (2.34)$$

Для доказательства заметим, что угловой спектр поля (его диаграмма направленности) может быть выражен через преобразование Фурье его нормальной производной на оси  $x$ .

Во-вторых, справедливы следующие уравнения:

$$U_0^m(k) + U_1^m(k) + U_2^m(k) \equiv 0, \quad m = 1, 2. \quad (2.35)$$

Их справедливость усматривается из того, что в силу граничных условий выполняются равенства

$$U_0^m(k) + U_2^m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, \quad (2.36)$$

$$-i\sqrt{k_0^2 - k^2} U_1^m(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y u^m(x, +0) e^{ikx} dx, \quad (2.37)$$

а в силу условий излучения выполняется

$$i\sqrt{k_0^2 - k^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^m(x, 0) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y u^m(x, +0) e^{ikx} dx. \quad (2.38)$$

Подробное доказательство приведено в работах [7, 20]. Уравнение (2.35) сходно с функциональными уравнениями Винера–Хопфа [188].

В-третьих, определения спектральных функций могут быть использованы для изучения их поведения в комплексной плоскости  $k$ . А именно, функции  $\sqrt{k_0^2 - k^2} U_1^m(k)$  являются целыми,  $U_0^m(k)$  голоморфны в нижней полуплоскости, а  $U_2^m(k)$  — в верхней. Напомним, что точка  $k_0$  принадлежит верхней полуплоскости, а  $-k_0$  лежит в нижней.

В-четвертых, из краевых асимптотик (2.16) вытекают следующие асимптотики  $U_n^m$ . В верхней полуплоскости, т.е. при  $\text{Im}[k] > 0$ , справедливы оценки для  $|k| \rightarrow \infty$ :

$$U_1^m(k) = ie^{-iak} (k_0^2 - k^2)^{-1/2} \left[ \delta_{m,1} (-ik)^{1/2} + O(k^{-1/2}) \right], \quad (2.39)$$

$$U_2^m(k) = e^{iak} \left[ -\delta_{m,2} (-ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2}) \right]. \quad (2.40)$$

Подобным же образом, в нижней полуплоскости, т.е. при  $\text{Im}[k] < 0$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ , справедливы оценки:

$$U_0^m(k) = e^{-iak} \left[ -\delta_{m,1}(ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2}) \right], \quad (2.41)$$

$$U_1^m(k) = ie^{iak}(k_0^2 - k^2)^{-1/2} \left[ \delta_{m,2}(ik)^{1/2} + O(k^{-1/2}) \right]. \quad (2.42)$$

Доказательство этих асимптотик основывается на лемме Ватсона [189].

**Теорема 2.2.** Пусть существуют функции  $U_n^m(k)$ ,  $m = 1, 2$ ,  $n = 0, 1, 2$ , удовлетворяющие функциональным уравнениям (2.34), перечисленным выше условиям регулярности и асимптотикам (2.39)–(2.42). Тогда краевые функции Грина  $u^{1,2}$ , введенные в §2.3.1, выражаются через  $U_n^m(k)$  формулой

$$u^m(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^m(k) \exp\{-ikx + i|y|\sqrt{k_0^2 - k^2}\} dk. \quad (2.43)$$

Для доказательства покажем, что выражения (2.43) удовлетворяют уравнению Гельмгольца (2.2) везде, кроме отрезка  $(-a, a)$  оси  $x$ , условиям излучения на бесконечности, однородным условиям Дирихле на отрезке и что они имеют асимптотики (2.16) у краев отрезка. Тогда из теоремы единственности будет следовать, что эти выражения действительно являются краевыми функциями Грина, введенными в §2.3.1.

Соблюдение уравнения Гельмгольца в полуплоскостях  $y > 0$  и  $y < 0$  следует из вида выражений (2.43). По построению, поля являются четными функциями  $y$ , а Фурье-образ  $\partial_y u^m(x, +0)$  равен  $-i\sqrt{k_0^2 - k^2}U_1^m(k)$ . В силу ограничений роста (2.39) и (2.42) и леммы Жордана функция  $\partial_y u^m(x, +0)$  равна нулю вне отрезка  $(-a, a)$ . Следовательно, поля являются гладкими функциями на полупрямых  $y = 0$ ,  $x < -a$  и  $y = 0$ ,  $x > a$ . А значит, уравнение Гельмгольца удовлетворяется на этих полупрямых.

В силу функциональных уравнений (2.34) поля на оси  $x$  выражаются следующим образом:

$$u^m(x, 0) = u_+^m(x) + u_-^m(x), \quad (2.44)$$

где

$$u_+^m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_2^m(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.45)$$

$$u_-^m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_0^m(k) e^{-ikx} dk. \quad (2.46)$$

В силу ограничений роста (2.40) и (2.41) и леммы Жордана  $u_-^m = 0$  при  $x > -a$ , а  $u_+^m = 0$  при  $x < a$ . Следовательно, поля удовлетворяют условиям Дирихле.

Краевые асимптотики полей и их производных на оси  $x$  могут быть получены с помощью леммы Жордана из ограничений роста. Эти асимптотики могут быть продолжены в области вблизи краев рассеивателя при  $y \neq 0$  с помощью ряда Мейкснера, что даст (2.16).  $\square$

Таким образом, если функциональная задача решена, т.е. найдены функции  $U_n^m(k)$ , обладающие всеми нужными свойствами, то краевые функции Грина  $u^m(x, y)$  и их диаграммы направленности  $S^m(\theta)$  могут быть получены из них. Это позволит найти дифракционный коэффициент исходной задачи по формуле расщепления (2.22) и восстановить полное поле  $u$  с помощью формулы (2.21). Действительно, рассмотрим функцию  $U(k)$ , заданную следующим образом:

$$U(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{-a}^a \frac{\partial u^{\text{sc}}}{\partial y} \Big|_{(x,+0)} e^{ikx} dx. \quad (2.47)$$

С помощью формулы (2.21) легко показать, что

$$U(k) = \frac{1}{k + k_0 \cos \theta^{\text{in}}} [S^1(\theta^{\text{in}})U_1^1(k) - S^2(\theta^{\text{in}})U_1^2(k)]. \quad (2.48)$$

Ясно также, что

$$\frac{\partial}{\partial y} u^{\text{sc}}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\sqrt{k_0^2 - k^2} U(k) e^{-ikx + i\sqrt{k_0^2 + k^2}|y|} dk. \quad (2.49)$$

Рассеянное поле может быть восстановлено по формуле

$$u^{\text{sc}}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(k) e^{-ikx + i\sqrt{k_0^2 + k^2}|y|} dk, \quad (2.50)$$

что доказывается так же, как и теорема 2.2.

### 2.3.4. Спектральное уравнение

Займемся теперь решением поставленной функциональной задачи. Ключом к ее решению является следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Для заданных значений  $k_0$  и  $a$  существуют матрицы  $\mathbf{K}_+$  и  $\mathbf{K}_-$  размерности  $2 \times 2$ , не зависящие от  $k$ , такие, что каждый из трех столбцов

$$\mathbf{U}_n(k) = \begin{pmatrix} U_n^1 \\ U_n^2 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \quad (2.51)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dk} \mathbf{U}_n = \left[ ia \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}_+}{k - k_0} + \frac{\mathbf{K}_-}{k + k_0} \right] \mathbf{U}_n. \quad (2.52)$$

*Доказательство.* Рассмотрим равенство

$$\frac{d}{dk} \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{K}(k) \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

как систему линейных уравнений относительно элементов матрицы  $\mathbf{K}(k)$ . Решая ее с помощью формул Крамера, получаем

$$K_{m,n}(k) = D_{m,n}(k)/D(k), \quad (2.54)$$

где

$$D(k) = \begin{vmatrix} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \end{vmatrix}, \quad (2.55)$$

а каждый из определителей  $D_{m,n}$  получается из  $D$  заменой  $n$ -го столбца производной  $m$ -го столбца, например,

$$D_{1,2}(k) = \begin{vmatrix} U_1^1 & (U_1^1)' \\ U_2^1 & (U_2^1)' \end{vmatrix}. \quad (2.56)$$

Рассмотрим определитель  $D$ . Из свойств регулярности и оценок роста (2.39), (2.40) находим, что произведение  $\sqrt{k_0^2 - k^2}D(k)$  регулярно в верхней полуплоскости и имеет асимптотику

$$\sqrt{k_0^2 - k^2}D(k) = -i + O[k^{-1}] \quad \text{при } |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k > 0. \quad (2.57)$$

С помощью функциональных уравнений (2.35) определитель  $D$  можно записать в виде

$$D(k) = - \begin{vmatrix} U_1^1 & U_1^2 \\ U_0^1 & U_0^2 \end{vmatrix}. \quad (2.58)$$

Это представление вместе со свойствами регулярности и оценками (2.42), (2.41) позволяет заключить, что произведение  $\sqrt{k_0^2 - k^2}D(k)$  регулярно в нижней полуплоскости и имеет асимптотику

$$\sqrt{k_0^2 - k^2}D(k) = -i + O[k^{-1}] \quad \text{при } |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k < 0. \quad (2.59)$$

Применяя теорему Лиувилля, находим, что

$$D(k) = \frac{-i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}}. \quad (2.60)$$

Аналогичным образом рассматривая определители  $D_{m,n}$ , получаем (2.52).  $\square$

Изложенное доказательство совершенно аналогично доказательству для случая двух полос, приведенному в работах [20] и [7].

Уравнение (2.52) и есть спектральное уравнение для нашей задачи. С помощью формул (2.33) и (2.34) уравнение для  $\mathbf{U}_1$  может быть преобразовано в уравнение для диаграмм направленности краевых функций Грина:

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} = \left[ \text{ctg } \theta + ik_0 a \sin \theta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{K}_- \text{ctg } \frac{\theta}{2} - \mathbf{K}_+ \text{tg } \frac{\theta}{2} \right] \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Несмотря на то, что вид уравнения (2.61) более «физичен», уравнение (2.52) удобнее для анализа. Важным является то, что коэффициенты спектрального уравнения представляют собой рациональные функции переменной  $k$ , т.е. (2.52) принадлежит к классу конфлюэнтных фуксовых уравнений.

Заметим, что уравнения (2.52) и (2.61) выражают замечательные аналитические свойства, однако ни матрицы  $\mathbf{K}_\pm$ , ни начальные условия не известны. В дальнейшем основные усилия будут направлены на отыскание этих данных. После этого уравнение (2.52) может быть решено численно, и с помощью (2.33) результаты могут быть подставлены в формулу расщепления (2.22), давая значение дифракционного коэффициента.

## §2.4. Свойства спектрального уравнения

### 2.4.1. Локальные свойства

Уравнение (2.52) имеет три особых точки:  $k_0$ ,  $-k_0$  и  $\infty$ . Первые две регулярные, а третья иррегулярная ранга 1. Свойства столбцов  $\mathbf{U}_n$ , перечисленные выше, позволяют сделать некоторые утверждения о коэффициентах спектрального уравнения.

Геометрия задачи инвариантна относительно преобразования  $x \rightarrow -x$ , которому соответствует преобразование спектрального параметра  $k \rightarrow -k$ . Поскольку это преобразование меняет местами края, под его действием верхние индексы у  $U_n^m$  меняются как  $m \rightarrow 3 - m$ . В результате получаются следующие соотношения между элементами матриц  $\mathbf{K}_\pm$ :

$$\begin{aligned} (K_-)_{1,1} &= (K_+)_{2,2}, & (K_-)_{1,2} &= (K_+)_{2,1}, \\ (K_-)_{2,1} &= (K_+)_{1,2}, & (K_-)_{2,2} &= (K_+)_{1,1}. \end{aligned} \quad (2.62)$$



Поэтому достаточно найти только матрицу  $\mathbf{K}_+$ . Кроме того, эта симметрия приводит к соотношению

$$\begin{pmatrix} U_1^1(0) \\ U_1^2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

где  $A$  — неизвестный параметр. Это равенство важно, поскольку точка  $k = 0$  будет использоваться как опорная точка для вычислений, а значения неизвестных столбцов в этой точке играют роль начальных условий.

Напомним, что  $k_0$  имеет малую положительную мнимую часть и, следовательно, принадлежит верхней полуплоскости. Аналитические свойства столбцов  $\mathbf{U}_n(k)$  в точках  $k_0$  и  $-k_0$  позволяют сделать заключения о показателях этих особых точек. Рассмотрим точку  $k_0$ . Столбец  $\mathbf{U}_2$  в этой точке регулярен, а  $\mathbf{U}_1$  представляет собой регулярную функцию, деленную на  $\sqrt{k - k_0}$ . Поэтому столбцы  $\mathbf{U}_{1,2}$  могут рассматриваться как фундаментальные решения в точке  $k = k_0$ , и показатели этой точки равны 0 и  $-1/2$ . Эти показатели, будучи различными, совпадают с собственными значениями матрицы  $\mathbf{K}_+$ . В общем случае матрица с такими собственными значениями имеет вид

$$\mathbf{K}_+ = \mathbf{V} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}, \quad (2.64)$$

где

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \cos \xi_1 & \sin \xi_2 \\ \sin \xi_1 & \cos \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{K}_+$  известна с точностью до двух скалярных комплексных параметров  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Исследуем уравнение (2.52) с коэффициентами, подчиняющимися соотношениям (2.62), (2.64) и (2.65), при произвольных значениях  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Решения такого уравнения локально ведут себя как функции  $\mathbf{U}_n$ . А именно, для каждой особой точки можно среди решений (2.52) найти набор столбцов, ведущих себя как  $\mathbf{U}_{0,1,2}$ . Однако эти наборы могут быть различными в каждой особой точке, т.е. может не существовать набора решений, имеющих нужное поведение одновременно во всех особых точках. Для отыскания глобального решения функциональной задачи необходим правильный выбор значений параметров  $\xi_{1,2}$ .

Пусть параметры  $\xi_1$  и  $\xi_2$  принимают произвольные значения, не обязательно удовлетворяющие сформулированному выше условию. Из вида коэффициентов спектрального уравнения следует, что его фундаментальные решения в точке  $k_0$ , обозначаемые как  $\mathbf{Z}_{1,2}(k)$ , должны иметь вид

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{\sqrt{k - k_0}} \begin{pmatrix} \sin \xi_2 + O(k - k_0) \\ \cos \xi_2 + O(k - k_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} \cos \xi_1 + O(k - k_0) \\ \sin \xi_1 + O(k - k_0) \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Решения  $\mathbf{Z}_{1,2}$  воспроизводят поведение  $\mathbf{U}_{1,2}$  с точностью до неизвестных постоянных множителей.

Заметим, что

$$\operatorname{tr} \mathbf{K}_+ = -1/2. \quad (2.67)$$

Используя это свойство, рассмотрим поведение решений уравнения (2.52) на бесконечности. Детальное рассмотрение показывает, что всегда существуют решения, имеющие асимптотики (2.39), (2.40), (2.41) и (2.42). Говоря точнее, при любом выборе значений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  существуют два столбца  $\mathbf{W}_0$  и  $\mathbf{W}_2$ , компоненты которых  $W_n^m$  ведут себя следующим образом:

$$W_0^m(k) = e^{-iak} \left[ -\delta_{m,1}(ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2}) \right] \text{ при } \operatorname{Im} k < 0, \quad |k| \rightarrow \infty; \quad (2.68)$$

$$W_2^m(k) = e^{iak} \left[ -\delta_{m,2}(-ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2}) \right] \text{ при } \operatorname{Im} k > 0, \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (2.69)$$

Эти столбцы являются кандидатами в решения  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{U}_2$  при правильном выборе  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Отметим, что нижние индексы у столбцов  $\mathbf{Z}_n$  и  $\mathbf{W}_n$  выбраны таким образом, что  $\mathbf{Z}_n$  или  $\mathbf{W}_n$  воспроизводит поведение столбца  $\mathbf{U}_n$  в соответствующей особой точке (возможно, с точностью до постоянного множителя).

#### 2.4.2. Глобальные свойства

Пусть коэффициенты спектрального уравнения удовлетворяют соотношениям (2.62), (2.64) и (2.65) при произвольных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Тогда в окрестности каждой особой точки существует пара фундаментальных решений, обладающих заданными асимптотиками, характерными для соответствующих столбцов  $\mathbf{U}_m$ . Однако в общем случае эти решения не соответствуют друг другу, например, решение, ведущее себя как  $\mathbf{U}_2$  в точке  $k_0$ , при продолжении в бесконечность может иметь асимптотику отличную от (2.40). Параметры  $\xi_1$  и  $\xi_2$  должны быть выбраны таким образом, чтобы существовали глобальные решения с нужными асимптотиками сразу во всех особых точках.

Выберем  $k = 0$  в качестве опорной точки. Зададим базисные решения  $(\mathbf{E}_1(k), \mathbf{E}_2(k))$  с помощью соотношений

$$\mathbf{E}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Построим матрицы  $\mathbf{M}^+$  и  $\mathbf{M}^\infty$ , связывающие базисные решения в опорной точке с базисными решениями в особых точках  $+k_0$  и  $\infty$  соответственно (матрицы связи). Для нахождения элементов этих матриц продолжим решения  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  вдоль путей, показанных на рис. 2.4, и разложим их в окрестностях особых точек по соответствующим базисам, т.е. представим их в виде

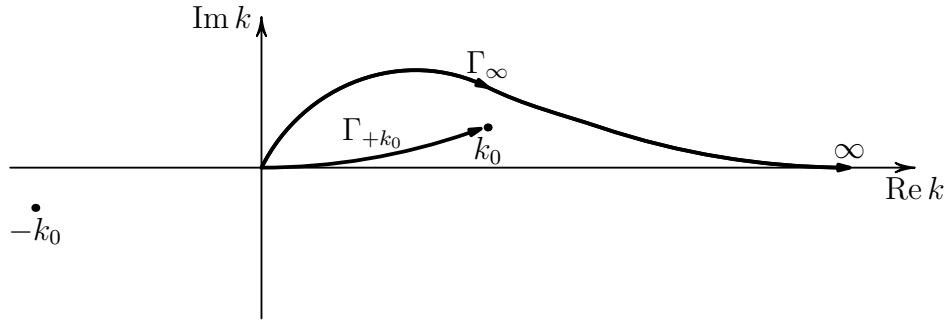


Рис. 2.4. Пути, связывающие опорную точку с особыми точками спектрального уравнения.

линейных комбинаций соответствующих фундаментальных решений. Элементы матриц связи — коэффициенты этих разложений.

$$\text{В точке } k_0 : \quad \mathbf{E}_m = M_{1,m}^+ \mathbf{Z}_1 + M_{2,m}^+ \mathbf{Z}_2; \quad (2.71)$$

$$\text{в точке } \infty : \quad \mathbf{E}_m = M_{1,m}^\infty \mathbf{W}_0 + M_{2,m}^\infty \mathbf{W}_2, \quad m = 1, 2. \quad (2.72)$$

Поскольку фундаментальные решения  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$  определены с точностью до постоянных множителей, матрица  $\mathbf{M}^+$  может быть нормализована следующим образом:

$$(M_{n,1}^+)^2 + (M_{n,2}^+)^2 = 1, \quad n = 1, 2. \quad (2.73)$$

Заметим, что матрица  $\mathbf{M}^\infty$  задана единственным образом, поскольку поведение решений  $\mathbf{W}_0$  и  $\mathbf{W}_2$  на бесконечности задано точно, будучи предписанным условием функциональной задачи. Введем также матрицу

$$\mathbf{M}^{+\infty} = \mathbf{M}^\infty (\mathbf{M}^+)^{-1}, \quad (2.74)$$

имеющую свойство

$$(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = (\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_2) \mathbf{M}^{+\infty}, \quad (2.75)$$

т.е. связывающую особые точки  $\infty$  и  $k_0$ .

Напомним, что матрицы связи определены для произвольных значений параметров  $\xi_{1,2}$  и на самом деле являются функциями этих параметров. Докажем теорему, устанавливающую связь между этими матрицами и условиями сформулированной выше функциональной задачи.

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены равенства

$$M_{1,2}^{+\infty} = 0 \text{ и} \quad (2.76)$$

$$M_{2,1}^+ + M_{2,2}^+ = 0. \quad (2.77)$$

Тогда среди решений уравнения (2.52) существуют столбцы  $\mathbf{U}_n(k)$ , удовлетворяющие функциональной задаче, сформулированной в теореме 2.2.

Доказательство. Выберем  $\mathbf{U}_2$  как фундаментальное решение  $\mathbf{W}_2$ . Как следует из (2.76), эта функция голоморфна в точке  $k_0$  и во всей верхней полуплоскости, так как там нет других особых точек. Обозначим компоненты этого столбца как  $U_2^{1,2}(k)$ . Затем выберем  $\mathbf{U}_0$  следующим образом:

$$\mathbf{U}_0(k) = \begin{pmatrix} U_2^2(-k) \\ U_2^1(-k) \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

В силу симметрии эта функция также удовлетворяет спектральному уравнению. Кроме того, в нижней полуплоскости она голоморфна и имеет асимптотику вида (2.41). Таким образом, она действительно удовлетворяет условиям, налагаемым на  $\mathbf{U}_0$ . Окончательно, возьмем в качестве  $\mathbf{U}_1$  столбец

$$\mathbf{U}_1 = -\mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_2. \quad (2.79)$$

В силу линейности спектрального уравнения  $\mathbf{U}_1$  является его решением. В силу (2.77), функция  $\mathbf{U}_1$  имеет заданное поведение в  $k_0$  и, в силу симметрии, в  $-k_0$ . Асимптотики  $\mathbf{U}_1$  на бесконечности определяются общими свойствами уравнения (2.52), и, следовательно, имеют нужный вид.  $\square$

Из (2.72) следует, что параметр  $A$  в (2.63) выражается следующим образом:

$$A = \frac{M_{1,1}^\infty - M_{1,2}^\infty}{\det \mathbf{M}^\infty}, \quad (2.80)$$

что вместе с (2.63) задает начальные условия для спектрального уравнения.

### 2.4.3. Краткий обзор метода спектрального уравнения

На этом аналитическая часть описания метода заканчивается. Дальнейшая цель — использовать эту теорию на практике. Кратко очертим применение сформулированных выше теорем к решению исходной дифракционной задачи.

- Соотношения (2.76) и (2.77) могут быть записаны в виде (2.1). Функции

$$\eta_1(\xi_1, \xi_2) = M_{1,2}^{+\infty}(\xi_1, \xi_2) \quad (2.81)$$

и

$$\eta_2(\xi_1, \xi_2) = M_{2,1}^+(\xi_1, \xi_2) + M_{2,2}^+(\xi_1, \xi_2) \quad (2.82)$$

представляют собой невязки данных монодромии. Практическую часть начнем с построения процедуры приближенного вычисления этих функций.

- После этого будет описана процедура численного решения системы (2.1) двух уравнений с двумя неизвестными. В результате для фиксированных значений  $a$  и  $k_0$  получим значения  $\xi_{1,2}$ . Вычисленная матрица  $\mathbf{M}^\infty$  и формула (2.80) дадут начальные значения для спектрального уравнения.
- Зная значения  $\xi_{1,2}$  и начальные условия, численно решим спектральное уравнение на отрезке  $(-k_0, k_0)$ . В силу соотношения (2.34), этот отрезок соответствует углам рассеяния  $\theta \in (0, \pi)$ . Используя (2.33), получим диаграммы направленности краевых функций Грина для этих углов.
- Полученные диаграммы направленности подставим в формулу расщепления (2.22) и найдем таким образом искомый дифракционный коэффициент  $S(\theta, \theta^{\text{in}})$ . Рассеянное поле может быть восстановлено по формуле (2.50).

## §2.5. Численный алгоритм

### 2.5.1. «Наивный» подход к вычислению $\mathbf{M}^+$ и $\mathbf{M}^\infty$

Для того, чтобы численно решить систему уравнений (2.1), необходимо найти способ вычисления функций (2.81) и (2.82). Очевидная трудность заключается в том, что решение спектрального уравнения (2.52) в явном виде не известно. Поэтому нельзя явно построить матрицы связи для контуров, соединяющих опорную точку  $k = 0$  с особыми точками ( $\pm k_0$  или  $\infty$ ).

Для преодоления этой трудности можно воспользоваться следующим методом. Обозначим особую точку  $k_s$ , выберем точку  $k_f$  в некотором смысле близкую к  $k_s$ , а именно: для  $k_s = k_0$  должна быть малой величина  $|k_f - k_s|$ , а для  $k_s = \infty$  должна быть малой величина  $|1/k_f|$ . Вместо решения уравнения (2.52) вдоль контура  $(0, k_s)$ , решим его вдоль  $(0, k_f)$ , используя (2.70) как начальные условия. В результате получим матрицу

$$\mathbf{E}(k_f) = (\mathbf{E}_1(k_f), \mathbf{E}_2(k_f)). \quad (2.83)$$

Построим также матрицу  $\mathbf{F}(k)$  фундаментальных решений в окрестности  $k_s$  в виде асимптотического ряда. Для  $k_s = \infty$  это будет матрица  $(\mathbf{W}_0(k), \mathbf{W}_2(k))$ , а для окрестности  $k_0$  это будет матрица  $(\mathbf{Z}_1(k), \mathbf{Z}_2(k))$ . Матрицу  $\mathbf{M}$  (т.е.  $\mathbf{M}^\infty$  или  $\mathbf{M}^+$ ) можно найти по формуле

$$\mathbf{M} = (\mathbf{F}(k_f))^{-1} \mathbf{E}(k_f). \quad (2.84)$$

Описанный подход корректен с аналитической точки зрения, но его применение к численным расчетам связано с рядом трудностей. Выражение для  $\mathbf{F}$

может быть построено в виде асимптотического ряда, как правило, являющегося расходящимся для  $k_s = \infty$ . Следовательно, точность аппроксимации  $\mathbf{F}$  не может быть обеспечена увеличением числа используемых членов ряда. Вместо этого следует выбирать  $k_f$  ближе к  $k_s$ . В то же время, матрица  $\mathbf{F}$  может становиться плохо обусловленной при  $k_f \rightarrow k_s$ , что также представляет трудность с точки зрения вычислений.

Используем следующий подход. Для точки  $k_s = \infty$  применим описанный выше метод, но при этом осмотрительно зададим положение точки  $k_f$ . А именно, выберем  $k_f$  в виде

$$k_f = L + i \cdot 0, \quad (2.85)$$

где  $L$  — некоторое «большое» положительное действительное число. Такой выбор объясняется тем фактом, что положительная и отрицательная действительные полуоси плоскости  $k$  являются стоксовыми линиями спектрального уравнения, т.е. они разделяют секторы доминирования  $\mathbf{W}_0$  и  $\mathbf{W}_2$ . Легко показать, что выбор  $k_f$  на одной из стоксовых линий приводит к хорошо обусловленной матрице  $\mathbf{F}$ . В деталях структура матрицы  $\mathbf{F}$  на бесконечности обсуждается ниже.

Для точки  $k_s = k_0$  нет способа выбрать точку  $k_f$  так, чтобы матрица  $\mathbf{F}$  была хорошо обусловленной, но можно воспользоваться тем, что эта особая точка является регулярной. Ниже описывается метод вычисления матрицы  $\mathbf{M}^+$ , основанный на обходе точки  $k_0$  по контуру, не проходящему вблизи нее.

### 2.5.2. Асимптотический ряд для фундаментальных решений на бесконечности

Пусть  $\mathbf{F} = (\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_2)$ . Перепишем спектральное уравнение (2.52) в виде

$$\frac{d}{dk} \mathbf{F}(k) = \mathbf{K}(k) \mathbf{F}(k) \quad (2.86)$$

и разложим  $\mathbf{K}(k)$  в ряд

$$\mathbf{K}(k) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{K}^{(s)} k^{-s+1}, \quad (2.87)$$

где

$$\mathbf{K}^{(1)} = ia \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}^{(s)} = (\mathbf{K}_+ + (-1)^s \mathbf{K}_-) k_0^{s-2}, \quad s = 2, 3, 4 \dots$$

Будем искать асимптотический ряд для столбцов матрицы  $\mathbf{F}$ , т.е. коэффициенты ряда

$$\mathbf{F}_p(k) = e^{\lambda k} k^\mu \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{f}_p^{(s)} k^{-s+1}, \quad p = 1, 2. \quad (2.88)$$

Подставим (2.88) в уравнение (2.86):

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[ \left( \lambda \mathbf{f}_p^{(s)} - \sum_{q=1}^s \mathbf{K}^{(s-q+1)} \mathbf{f}_p^{(q)} \right) k^{-s+1} + (\mu - s + 1) \mathbf{f}_p^{(s)} k^{-s} \right] = 0.$$

Приравняем коэффициенты степенного ряда к нулю:

$$(\mathbf{K}^{(1)} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{f}_p^{(1)} = 0, \quad (2.89)$$

$$(\mathbf{K}^{(1)} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{f}_p^{(2)} = (\mu \mathbf{I} - \mathbf{K}^{(2)}) \mathbf{f}_p^{(1)}, \quad (2.90)$$

$$(\mathbf{K}^{(1)} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{f}_p^{(s)} = (\mu - s + 2) \mathbf{f}_p^{(s-1)} - \mathbf{d}_p^{(s)}, \quad (2.91)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ , и

$$\mathbf{d}^{(s)} = \sum_{q=1}^{s-1} \mathbf{K}^{(s-q+1)} \mathbf{f}_p^{(q)}.$$

Из уравнения (2.89) находим, что  $\lambda$  и  $\mathbf{f}_p^{(1)}$  есть собственное значение и собственный вектор матрицы  $\mathbf{K}^{(1)}$ , т.е., как и предполагалось,

$$\lambda_1 = -ia, \quad \lambda_2 = ia, \quad \mathbf{f}_1^{(1)} = e^{i3\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^{(1)} = e^{-i3\pi/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

В силу альтернативы Фредгольма, уравнение (2.90) имеет решение, если

$$(\mathbf{f}_p^{(1)})^T (\mu \mathbf{I} - \mathbf{K}^{(2)}) \mathbf{f}_p^{(1)} = 0.$$

Вследствие (2.62) и (2.67) это условие выполняется, если  $\mu = -1/2$ , что, опять же согласуется с нашим *априорным* знанием поведения решений на бесконечности. Из (2.90) можно найти только одну компоненту столбца  $\mathbf{f}_p^{(2)}$ :

$$f_{3-p,p}^{(2)} = (-1)^{p-1} (2ia)^{-1} ((-\mathbf{I}/2 - \mathbf{K}^{(2)}) \mathbf{f}_p^{(1)})_{3-p,p}. \quad (2.93)$$

Оставшуюся компоненту столбца  $\mathbf{f}_p^{(2)}$  можно найти из условия разрешимости следующего уравнения цепочки:

$$f_{p,p}^{(2)} = -\frac{2}{3} d_{p,p}^{(3)}. \quad (2.94)$$

Аналогично, одна компонента каждого из столбцов  $\mathbf{f}^{(s)}$ ,  $s = 3, 4, \dots$ , может быть найдена из уравнения (2.91) с индексом  $s$ :

$$f_{3-p,p}^{(s)} = (3/2 - s) f_{3-p,p}^{(s-1)} - d_{3-p,p}^{(s)}. \quad (2.95)$$

Оставшаяся компонента находится из условия разрешимости уравнения с индексом  $s + 1$ :

$$f_{p,p}^{(s)} = (1/2 - s)^{-1} d_{p,p}^{(s+1)}. \quad (2.96)$$

Таким образом можно последовательно найти коэффициенты  $\mathbf{f}^{(s)}$  ряда (2.88), представляющего фундаментальное решение  $\mathbf{F}^{(p)}$  на бесконечности. Обрывая полученный ряд на  $n$ -м члене, получаем приближенное выражение для  $\mathbf{F}(k)$  при «больших»  $k$ . Как известно, ошибка аппроксимации в данном случае имеет порядок первого отброшенного члена. После вычисления  $\mathbf{F}$  матрица  $\mathbf{M}^\infty$  может быть найдена из (2.84). Заметим, что вследствие (2.95) внедиагональные компоненты ряда (2.88) имеют факториальный рост, поэтому данный ряд расходится. Значит, для достижения высокой точности в вычислениях с ним требуется брать относительно большое значение  $L$  в (2.85).

### 2.5.3. Альтернативный способ вычисления $\mathbf{M}^+$

Рассмотрим обход точки  $k = k_0$  по контуру, показанному на рис. 2.5. После такого обхода решение  $\mathbf{Z}_1$  меняет знак, а решение  $\mathbf{Z}_2$  не меняется. Пусть решения  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$  принимают после обхода значения  $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2)$ .

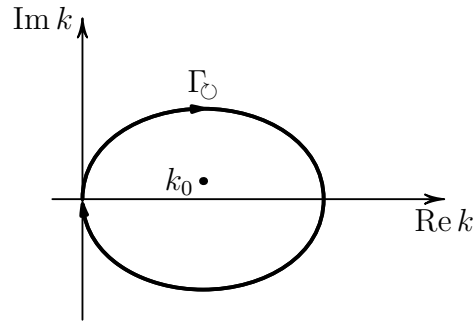


Рис. 2.5. Контур обхода точки  $k_0$ .

В соответствии с (2.71) можно записать

$$\mathbf{I} = (\mathbf{Z}_1(0), \mathbf{Z}_2(0))\mathbf{M}^+ \quad (2.97)$$

и

$$(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2) = (-\mathbf{Z}_1(0), \mathbf{Z}_2(0))\mathbf{M}^+. \quad (2.98)$$

Матрицы  $(\mathbf{Z}_1(0), \mathbf{Z}_2(0))$  и  $\mathbf{M}^+$  не известны, матрицу  $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2)$  можно найти численно, решая уравнение (2.52) вдоль показанного на рис. 2.5 контура. При этом в качестве начальных условий берется матрица  $\mathbf{I}$ . Заметим, что аналитический результат не зависит от формы контура, но для улучшения точности численных расчетов следует выбирать путь обхода, проходящий не очень близко от  $k_0$  и при этом не сильно отходящий от действительной оси. Как следует из (2.97) и (2.98), столбцы матрицы  $(\mathbf{M}^+)^{-1}$  являются собственными



векторами матрицы  $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2)$ . Собственные векторы определены с точностью до постоянного множителя, но эта неопределенность устраняется нормировкой  $\mathbf{M}^+$  в соответствии с (2.73).

Преимуществом описанного подхода перед «наивным» является то, что не приходится обращаться плохо обусловленную матрицу фундаментальных решений  $\mathbf{F}$ , что позволяет ожидать повышения точности вычисления невязок (2.81) и (2.82).

#### 2.5.4. Краткий обзор метода вычисления матриц связи

Выше построены процедуры вычисления матриц  $\mathbf{M}^+$  и  $\mathbf{M}^\infty$  для любых заданных значений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Приведем здесь их краткое описание.

- Численно решим уравнение (2.52) вдоль показанного на рис. 2.4 контура  $\Gamma_\infty$ , взяв вместо бесконечности точку  $k = L + 0 \cdot i$  для некоторого достаточно большого  $L$ . При этом в качестве начальных условий выберем матрицу  $\mathbf{I}$ . В результате получим матрицу  $\mathbf{E}(L)$ .
- Найдем значения фундаментальных решений  $\mathbf{W}_0(L)$  и  $\mathbf{W}_2(L)$  по формулам (2.88) и (2.92)–(2.96).
- Вычислим матрицу  $\mathbf{M}^\infty$  по формуле  $\mathbf{M}^\infty = (\mathbf{W}_0(L), \mathbf{W}_2(L))^{-1} \mathbf{E}(L)$ .
- Численно решим уравнение (2.52) вдоль показанного на рис. 2.5 контура, выбирая в качестве начальных условий матрицу  $\mathbf{I}$ . В результате получим матрицу  $\mathbf{E}'$ .
- Столбцы матрицы  $(\mathbf{M}^+)^{-1}$  являются собственными векторами матрицы  $\mathbf{E}'$ , нормированными в соответствии с (2.73).
- Вычислим матрицу  $\mathbf{M}^{+\infty}$  по формуле (2.74).

#### 2.5.5. Градиентный алгоритм поиска $\xi_1$ и $\xi_2$

Мы построили процедуру вычисления матриц  $\mathbf{M}^+$  и  $\mathbf{M}^{+\infty}$  для любых заданных значений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Поскольку невязки  $\eta_{1,2}(\xi_1, \xi_2)$  выражаются через элементы этих матриц, мы приходим к задаче (2.1) отыскания общего нуля двух функций двух комплексных переменных.

Для решения системы (2.1) используем метод Ньютона, относящийся к итерационным методам. Начальное приближение для неизвестных параметров выбирается в виде  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , что соответствует дифракции на двух невзаимодействующих полуплоскостях. Предполагая, что функции  $\eta_{1,2}(\xi_1, \xi_2)$

являются достаточно гладкими, вычислим разностные аппроксимации частных производных  $D_{ij} := \partial\eta_i/\partial\xi_j$ . Поправки  $\Delta\xi_{1,2}$  находятся из линейной системы

$$\begin{aligned} D_{11}\Delta\xi_1 + D_{12}\Delta\xi_2 &= -\eta_1, \\ D_{21}\Delta\xi_1 + D_{22}\Delta\xi_2 &= -\eta_2. \end{aligned}$$

Величины  $\xi_1 + \alpha\Delta\xi_1$  и  $\xi_2 + \alpha\Delta\xi_2$  выбираются в качестве новых приближений для параметров  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Здесь  $0 < \alpha \leq 1$  некоторый параметр, значение которого подбирается для обеспечения сходимости процедуры. На этом одна итерация завершается. Итерации повторяются до тех пор, пока невязки  $\eta_{1,2}$  не станут достаточно малыми. Численные эксперименты показывают, что для задачи об одной полосе процедура сходится для  $k_0a \lesssim 100$  при  $\alpha = 1$ .

## §2.6. Результаты моделирования. Анализ точности и эффективности

Одним из основных результатов работы нашей процедуры являются значения неизвестных параметров  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . На рис. 2.6 приведены графики зависимостей этих параметров от величины  $k_0a$ . Отметим, что оба параметра имеют значения порядка единицы при  $k_0a \lesssim 1$ . Их значения осциллируют, что объясняется интерференцией волн, рассеянных краями полосы. Также следует отметить, что значения  $\xi_{1,2}$  стремятся к нулю при  $k_0a \rightarrow \infty$ , что объясняется ослаблением взаимного влияния краев с уменьшением длины волны.

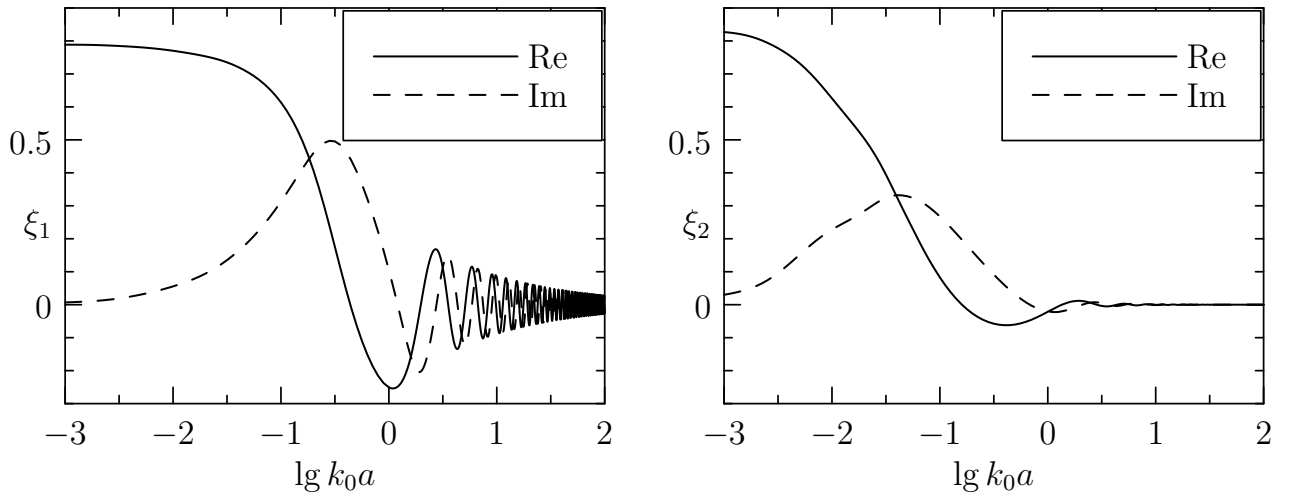


Рис. 2.6. Зависимость параметров  $\xi_1$  и  $\xi_2$  от  $k_0a$ .

Для оценки точности алгоритма было произведено сравнение дифракционных коэффициентов, рассчитанных методом граничных интегральных

уравнений [185] и методом спектрального уравнения. Ошибка метода граничных интегральных уравнений оценивалась последовательным сгущением сетки по правилу Рунге [190]. Ошибка метода спектрального уравнения оценивалась по отклонениям от решения интегрального уравнения. Относительная ошибка  $\varepsilon$ , показанная на нижеследующих графиках, определяется как

$$\varepsilon = \max_{\theta} \left| \frac{S(\theta, \theta_0) - S_0(\theta, \theta_0)}{S_0(\theta, \theta_0)} \right|,$$

где  $S_0(\theta, \theta_0)$  — опорное решение, полученное методом граничных интегральных уравнений, а  $S(\theta, \theta_0)$  — решение, ошибка которого оценивается.

Допустим, что значения параметров  $\xi_{1,2}$  уже найдены. Для вычисления дифракционного коэффициента требуется решить спектральное уравнение на отрезке  $(-k_0, k_0)$ . На этом этапе можно выбрать шаг дискретизации настолько малым, что ошибка в вычислении решения будет вызвана в основном ошибками вычисления  $\xi_{1,2}$ . В описанной процедуре вычисления  $\xi_{1,2}$  присутствуют два главных типа ошибок: ошибка численного решения спектрального уравнения вдоль контуров  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_\infty$  и ошибка, вызванная выбором большого по величине, но конечного значения значения  $k = k_f$  в вычислениях с асимптотическим рядом. Ошибка первого типа зависит от параметра  $h = |\Delta k/k_0|$ , где  $\Delta k$  — шаг дискретизации. Ошибка второго типа зависит от параметра  $R = |k_f/k_0|$ . На рис. 2.7 показана зависимость ошибки от этих двух параметров при различных значениях  $k_0 a$ . Видно, что, как правило, ошибка с ростом  $R$  сначала уменьшается а затем растет. Это объясняется следующим образом. Мы численно решаем спектральное уравнение вдоль контура  $\Gamma_\infty$ , соединяющего точки  $k = 0$  и  $k = k_f = L + i \cdot 0$ . Чем длиннее этот контур, тем больше при фиксированном  $h$  ошибка численного решения. Поскольку на большей части контура решения осциллируют с периодом  $2\pi/a$ , скорость накопления этой ошибки растет с увеличением параметра  $k_0 a$ . С другой стороны, если выбрать  $R$  относительно малым, то доминировать начнет ошибка вычислений с асимптотическим рядом. Эффективность процедуры можно оценить следующим образом. После того, как значения  $\xi_{1,2}$  определены, для вычисления дифракционного коэффициента требуется решить спектральное уравнение на отрезке  $(-k_0, k_0)$ . Это требует всего лишь порядка  $O(N)$  операций, в то время как решение граничного интегрального уравнения после построения матрицы ядра требует  $O(N^3)$  операций. Вычисление значений  $\xi_{1,2}$  требует порядка  $O(N_s R/h)$  операций, где  $N_s$  — число итераций градиентной процедуры. Эксперименты показывают, что для разумных значений требуемой точности достаточно выполнения 3–4 итераций. Таким образом, даже если не использовать заранее вычисленные значения  $\xi_{1,2}$ , можно ожидать, что эффективность нашего метода по меньшей мере не хуже, чем метода граничных интегральных уравнений. Для подтверждения этого было произ-

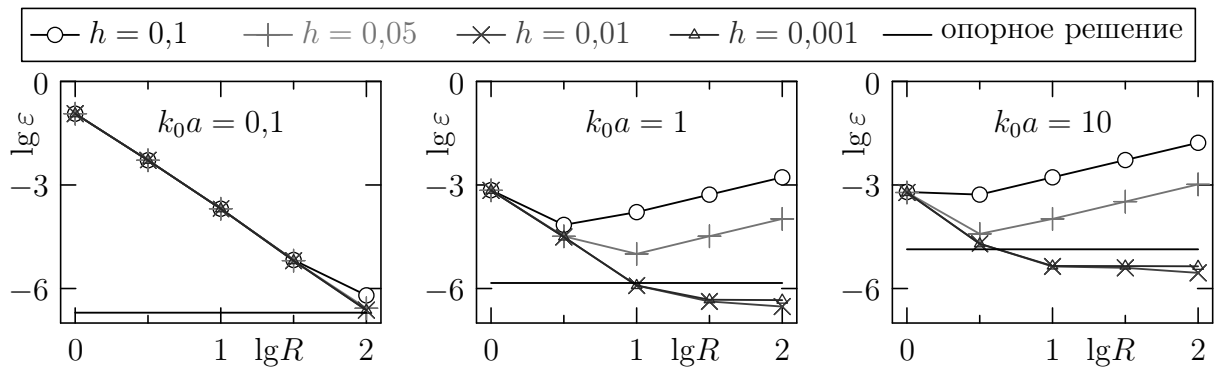


Рис. 2.7. Зависимость относительной ошибки вычисления дифракционного коэффициента от параметров алгоритма.

ведено сравнение машинного времени, требуемого для вычисления дифракционного коэффициента с заданной точностью при различных значениях  $k_0 a$  методом граничных интегральных уравнений ( $T_I$ ) и методом спектрального уравнения ( $T_S$ ). На рисунке рис. 2.8 показана зависимость отношения  $T_S/T_I$  от параметра  $k_0 a$  для различных значений заданной относительной ошибки  $\varepsilon$ . Как видно, численный алгоритм метода спектрального уравнения являет-

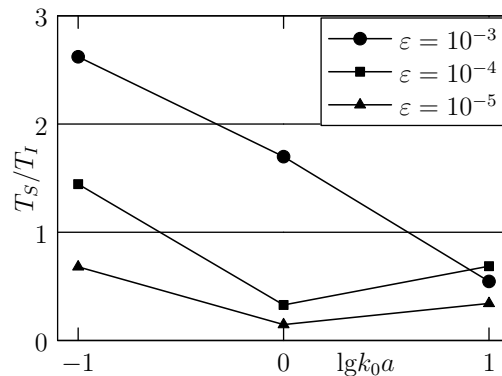


Рис. 2.8. Зависимость отношения  $T_S/T_I$  при заданной относительной ошибке  $\varepsilon$  от параметра  $k_0 a$ .

ся более эффективным, чем метод граничных интегральных уравнений, если требуется достижение высокой точности и/или при больших значениях  $k_0 a$ .

## §2.7. Реализация алгоритма для задачи дифракции на двух полосах

Для задачи дифракции на двух полосах соотношения метода спектрального уравнения строятся аналогично вышеизложенному. Кратко опишем этапы этого построения.

В данной задаче рассеиватель представляет собой пару отрезков  $[a_1, a_2]$  и  $[a_3, a_4]$  оси  $x$  (рис. 2.9). На отрезках заданы граничные условия Дирихле.

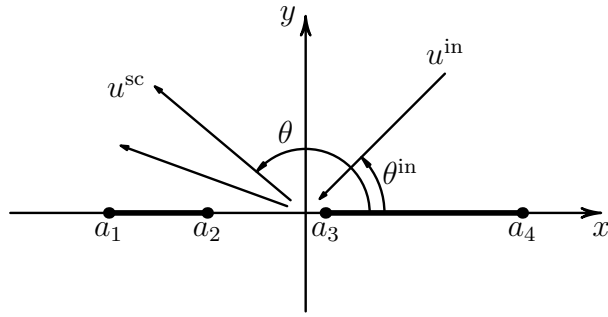


Рис. 2.9. Геометрия задачи.

Вводится набор краевых функций Грина  $u^m$ ,  $m = 1, \dots, 4$ , с помощью предельной процедуры, аналогичной (2.15). Положения источников вспомогательных задач показаны на рис. 2.10.

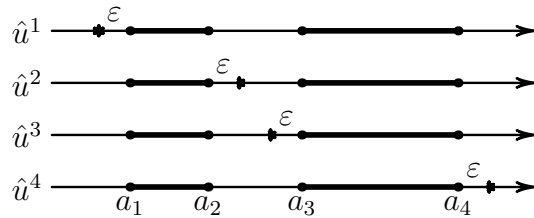


Рис. 2.10. К определению краевых функций Грина.

Для краевых функций Грина вводятся диаграммы направленности с помощью соотношения (2.20). Дифракционный коэффициент исходной задачи вычисляется через диаграммы направленности краевых функций Грина по формуле расщепления

$$S(\theta, \theta^{in}) = \frac{1}{k_0(\cos \theta + \cos \theta^{in})} \sum_{m=1}^4 (-1)^m S^m(\theta) S^m(\theta^{in}). \quad (2.99)$$

Эта формула получается аналогично (2.22). Подробное доказательство приведено в [7, 20].

Неизвестные спектральные функции вводятся по формулам

$$\begin{aligned}
U_0^m(k) &= \int_{-\infty}^{a_1} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, & U_1^m(k) &= \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial u^m(x, 0)}{\partial y} e^{ikx} dx, \\
U_2^m(k) &= \int_{a_2}^{a_3} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, & U_3^m(k) &= \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{a_3}^{a_4} \frac{\partial u^m(x, 0)}{\partial y} e^{ikx} dx, \\
U_4^m(k) &= \int_{a_4}^{+\infty} u^m(x, 0) e^{ikx} dx.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Связь спектральных функций с диаграммами направленности теперь выражается следующим образом:

$$S^m(\theta) = \sqrt{k_0^2 - k^2} [U_1^m(k) + U_3^m(k)] \Big|_{k=-k_0 \cos \theta}. \tag{2.101}$$

Рассеянное поле восстанавливается с помощью формулы (2.50), в которую следует подставить

$$U(k) = \frac{1}{k + k_0 \cos \theta^{\text{in}}} \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} S^m(\theta^{\text{in}}) [U_1^m(k) + U_3^m(k)]. \tag{2.102}$$

Для спектральных функций доказывается, что они единственным образом определяются из функциональной задачи

$$\sum_{n=0}^4 U_n^m(k) = 0 \tag{2.103}$$

и следующих ограничений роста в точках  $\pm k_0$  и на бесконечности:

	$+k_0$	$-k_0$	$\infty, \text{Im } k > 0$	$\infty, \text{Im } k < 0$
$U_0^m$		регулярна		$\sim e^{ia_1 k} k^{-1/2}$
$U_1^m$	$\sim (k - k_0)^{-1/2}$	$\sim (k + k_0)^{-1/2}$	$\sim e^{ia_1 k} k^{-1/2}$	$\sim e^{ia_2 k} k^{-1/2}$
$U_2^m$	регулярна	регулярна	$\sim e^{ia_2 k} k^{-1/2}$	$\sim e^{ia_3 k} k^{-1/2}$
$U_3^m$	$\sim (k - k_0)^{-1/2}$	$\sim (k + k_0)^{-1/2}$	$\sim e^{ia_3 k} k^{-1/2}$	$\sim e^{ia_4 k} k^{-1/2}$
$U_4^m$	регулярна		$\sim e^{ia_4 k} k^{-1/2}$	

Эти оценки получаются аналогично (2.39) – (2.42). Подробное доказательство приведено в [7, 20].

Также, аналогично (2.52), доказываем, что эти функции удовлетворяют спектральному уравнению

$$\frac{d\mathbf{U}}{dk} = \left[ \mathbf{K}_0 + \frac{1}{k - k_0} \mathbf{K}_+ + \frac{1}{k + k_0} \mathbf{K}_- \right] \mathbf{U}, \quad (2.104)$$

где  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{K}_0$  — матрицы, определенные следующим образом:

$$[\mathbf{U}(k)]_{mn} = U_n^m(k), \quad \mathbf{K}_0 = \text{diag}(ia_1, ia_2, ia_3, ia_4), \quad (2.105)$$

а  $\mathbf{K}_+$  и  $\mathbf{K}_-$  — постоянные (не зависящие от  $k$ ) комплексные матрицы  $4 \times 4$ . Подробное доказательство приведено в [7, 20].

Априори эти матрицы не известны, и до решения спектрального уравнения их необходимо найти численно. Заметим, что из самой структуры уравнения (2.104) следует, что у него есть решения с нужными асимптотиками на бесконечности. Для существования решений с нужными асимптотиками в точках  $\pm k_0$  необходимо и достаточно, чтобы матрицы  $\mathbf{K}_+$  и  $\mathbf{K}_-$  имели собственные значения  $(-1/2, -1/2, 0, 0)$  и приводились к диагональному виду. Эти ограничения фиксируют каждую из матриц с точностью до восьми скалярных комплексных параметров. Число неизвестных параметров сокращается вдвое использованием присущей спектральному уравнению нетривиальной симметрии, связанной с теоремой взаимности и приводящей к следующей связи между  $\mathbf{K}_+$  и  $\mathbf{K}_-$ :

$$\Xi(\mathbf{K}_+)^T \Xi + \mathbf{K}_- = -\mathbf{I}/2, \quad (2.106)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $4 \times 4$ , а матрица  $\Xi = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ . Данное равенство получено в [18, 20].

На матрицы  $\mathbf{K}_+$  и  $\mathbf{K}_-$  также налагаются глобальные ограничения, то есть требования правильного соответствия друг другу решений с заданными асимптотиками в особых точках. Удастся доказать, что все глобальные ограничения выполняются тогда и только тогда, когда выполняются ограничения связи между точками  $+k_0$  и бесконечно удаленной точкой. Это требование может быть выражено через матрицы связи.

Введем в рассмотрение следующие базисы пространства решений спектрального уравнения.

1. Базис  $\mathbf{V}(k)$  — решения, имеющие на положительной действительной полуоси асимптотики  $V_n^m = e^{ika_n} k^{-1/2} (\delta_{m,n} + O[k^{-1}])$ .
2. Базис  $\mathbf{W}(k)$  — решения, ведущие себя на положительной действительной полуоси, как  $\mathbf{U}(k)$ .
3. Базис  $\mathbf{Z}(k)$  — решения, имеющие нужные асимптотики в точке  $+k_0$ : первые два столбца — регулярные функции, деленные на  $\sqrt{k - k_0}$ , а последние два — регулярные функции.

4. Базис  $\mathbf{E}(k)$  — решения, имеющие единичные значения в нуле:

$$[\mathbf{E}(0)]_{mn} = \delta_{mn}.$$

Связи между базисами зададим следующим образом:

$$\mathbf{V}(k) = \mathbf{Z}(k)\mathbf{M}^{+\infty}, \quad \mathbf{E}(k) = \mathbf{Z}(k)\mathbf{M}^+, \quad \mathbf{E}(k) = \mathbf{V}(k)\mathbf{M}^\infty.$$

Отсюда, очевидно,  $\mathbf{M}^{+\infty} = \mathbf{M}^+(\mathbf{M}^\infty)^{-1}$ .

Продолжая асимптотики функций  $U_n^m$  на положительную действительную полуось, получим

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}\tilde{\Xi}, \quad \tilde{\Xi} = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}.$$

Глобальное ограничение для точек  $+k_0$  и  $\infty$  гласит, что первый и третий столбцы матрицы  $\mathbf{W}$  должны вести себя в окрестности  $k_0$ , как регулярные функции, деленные на  $\sqrt{k - k_0}$ , а второй и четвертый — как регулярные функции. С точки зрения матриц связи это ограничение выглядит следующим образом:

$$\mathbf{M}^{+\infty}\tilde{\Xi} = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ m_{21} & 0 & m_{23} & 0 \\ 0 & m_{32} & 0 & m_{34} \\ 0 & m_{42} & 0 & m_{44} \end{pmatrix},$$

то есть на 8 параметров, задающих матрицы  $\mathbf{K}_\pm$ , накладывается 8 ограничений в виде равенства нулю соответствующих элементов произведения  $\mathbf{M}^{+\infty}\tilde{\Xi}$ . Элементы  $\mathbf{M}^{+\infty}$  зависят от матриц  $\mathbf{K}_\pm$ , то есть являются функциями 8 параметров, задающих эти матрицы. Таким образом, задача вычисления матриц  $\mathbf{K}_\pm$  сводится к поиску общего нуля 8 функций 8 комплексных переменных.

Вычисление матриц связи при произвольно выбранных матрицах  $\mathbf{K}_\pm$ , удовлетворяющих локальным ограничениям и соотношению (2.106), осуществляется с помощью процедуры, аналогичной описанной в §2.5.4. К сожалению, для матрицы  $\mathbf{K}_+$ , удовлетворяющей локальным ограничениям, не удастся найти такой же удобной параметризации, как (2.64).

Вместо этого используем следующий подход. Рассмотрим  $\mathbf{K}_+$  как матрицу оператора, действующего из  $\mathbb{C}^4$  в  $\mathbb{C}^4$ . Локальные ограничения означают, что этот оператор имеет два инвариантных подпространства  $\mathbb{L}_{-1/2}$  и  $\mathbb{L}_0$ , размерности два каждое. В первом из них он действует как умножение на  $-1/2$ , а второе аннулирует. Введем в этих подпространствах ортонормированные базисы  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  и  $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$  соответственно. Очевидно, что

$$\mathbf{K}_+ = \mathbf{B}^{-1} \text{diag}(-1/2, -1/2, 0, 0)\mathbf{B}, \quad (2.107)$$



где  $\mathbf{B}$  — матрица, составленная из столбцов  $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_4$ . Построим ортогональные дополнения к собственным подпространствам оператора  $\mathbf{K}_+$  и зададим базисы  $(\mathbf{b}_1^\perp, \mathbf{b}_2^\perp)$  и  $(\mathbf{b}_3^\perp, \mathbf{b}_4^\perp)$  в дополнениях к  $\mathbb{L}_{-1/2}$  и  $\mathbb{L}_0$  соответственно. Зададим теперь следующую локальную параметризацию столбцов  $\tilde{\mathbf{b}}_1 \dots \tilde{\mathbf{b}}_4$ :

$$\tilde{\mathbf{b}}_1(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{b}_1 + \xi_1 \mathbf{b}_1^\perp + \xi_2 \mathbf{b}_2^\perp, \quad (2.108)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_2(\xi_3, \xi_4) = \mathbf{b}_2 + \xi_3 \mathbf{b}_1^\perp + \xi_4 \mathbf{b}_2^\perp, \quad (2.109)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_3(\xi_5, \xi_6) = \mathbf{b}_3 + \xi_5 \mathbf{b}_3^\perp + \xi_6 \mathbf{b}_4^\perp, \quad (2.110)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_4(\xi_7, \xi_8) = \mathbf{b}_4 + \xi_7 \mathbf{b}_3^\perp + \xi_8 \mathbf{b}_4^\perp. \quad (2.111)$$

Составим из них матрицу  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}(\xi_1 \dots \xi_8)$  и построим локальную параметризацию матрицы  $\mathbf{K}_+$ :

$$\mathbf{K}_+(\xi_1 \dots \xi_8) = \tilde{\mathbf{B}}^{-1} \text{diag}(-1/2, -1/2, 0, 0) \tilde{\mathbf{B}}. \quad (2.112)$$

Алгоритм градиентной процедуры теперь выглядит следующим образом:

1. Имеем некоторое приближение к  $\mathbf{K}_+$ . Вычисляем  $\mathbf{K}_-$  по формуле (2.106). Выбор начального приближения обсуждается ниже.
2. Вычисляем матрицу  $\mathbf{M}^{+\infty}$  и получаем из нее невязки  $\eta_1 \dots \eta_8$ :

$$\eta_1 = m_{12}, \quad \eta_2 = m_{14}, \quad \eta_3 = m_{21}, \quad \eta_4 = m_{23} \quad (2.113)$$

$$\eta_5 = m_{32}, \quad \eta_6 = m_{34}, \quad \eta_7 = m_{41}, \quad \eta_8 = m_{43}. \quad (2.114)$$

Если значения невязок достаточно малы, то заканчиваем работу. Иначе переходим к следующему шагу.

3. По заданной матрице  $\mathbf{K}_+$  строим столбцы  $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_4$  и  $\mathbf{b}_1^\perp \dots \mathbf{b}_4^\perp$ . Вводим локальную параметризацию по формулам (2.108) – (2.112).
4. С помощью метода конечных разностей строим производные  $D_{i,j}$  невязок по локальным параметрам:  $D_{i,j} = \partial \eta_j / \partial \xi_j$ .
5. Находим поправки  $\Delta \xi_j$  к параметрам из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^8 D_{i,j} \Delta \xi_j = -\eta_i, \quad i = 1 \dots 8.$$

6. Строим новые векторы  $\tilde{\mathbf{b}}_1 \dots \tilde{\mathbf{b}}_4$  по формулам (2.108), полагая в них

$$\xi_j = \alpha \Delta \xi_j. \quad (2.115)$$

7. Применяем к парам векторов  $(\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2)$  и  $(\tilde{\mathbf{b}}_3, \tilde{\mathbf{b}}_4)$  процедуры ортогонализации и нормировки, получая новые значения векторов  $\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_4$ .
8. Собираем из них матрицу  $\mathbf{B}$  и находим новое значение  $\mathbf{K}_+$  по формуле (2.107). Переходим к шагу 1.

Как известно, алгоритмы решения задач оптимизации становятся более чувствительными к выбору начального приближения с ростом размерности задачи. Если в случае одной полосы мы имели двухпараметрическую задачу и могли пользоваться весьма простым начальным приближением, то в случае двух полос задача становится восьмипараметрической, и к выбору начального приближения приходится подходить с большей аккуратностью. В работе [7] показано, что коэффициенты спектрального уравнения можно искать с помощью дифракционного ряда. Численные эксперименты показывают, что описанная выше градиентная процедура сходится, если в качестве начального приближения выбирается сумма первых двух членов этого ряда. При этом для  $k_0$  с достаточно большой мнимой частью можно брать в (2.115)  $\alpha = 1$ , а в случае малой или нулевой мнимой части приходится уменьшать значение  $\alpha$ . Во всех рассмотренных при моделировании случаях оказалось достаточным взять  $\alpha = 1/2$ .

Приведем здесь формулы для вычисления начального приближения с помощью дифракционного ряда из [7, 20]. Матрица  $\mathbf{K}_+$  находится по формуле

$$\mathbf{K}_+ = -\frac{1}{2}[\mathbf{I} - \mathbf{f}] \text{diag}(1, 0, 1, 0)[\mathbf{I} - \mathbf{f}]^{-1}, \quad (2.116)$$

где ненулевые элементы матрицы  $\mathbf{f}$  задаются соотношениями

$$f_{n,n+1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_-} \frac{\beta_n(k)}{\beta_{n+1}(k)(k - k_0)} dk, \quad (2.117)$$

$$f_{n+1,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_+} \frac{\beta_{n+1}(k)}{\beta_n(k)(k - k_0)} dk. \quad (2.118)$$

Здесь функции  $\beta_n(k)$  определены как

$$\beta_n(k) = (-1)^{n+1} e^{ia_n k} \sqrt{\frac{i}{k_0 + (-1)^n k}}, \quad (2.119)$$

а контуры интегрирования  $\mathcal{C}_\pm$  показаны на рис. 2.11. Заметим, что в силу экспоненциального убывания подынтегральных функций, обрезание контуров на конечном расстоянии не приводит к проблемам при вычислении интегралов.

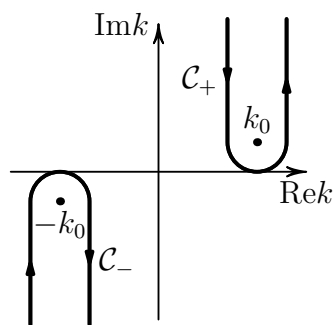


Рис. 2.11. Контуры интегрирования в (2.117) и (2.118).

Численные эксперименты показывают, что описанная процедура быстро сходится и вычисляемые по ней дифракционные коэффициенты хорошо согласуются с вычисляемыми методом граничных интегральных уравнений. Для примера на рис. 2.12 показана зависимость дифракционного коэффициента от угла рассеяния, вычисленная при  $k_0 = 1 + 0.2i$ ,  $a_1 = -12$ ,  $a_2 = -4$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 12$ ,  $\theta^{in} = \pi/3$ .

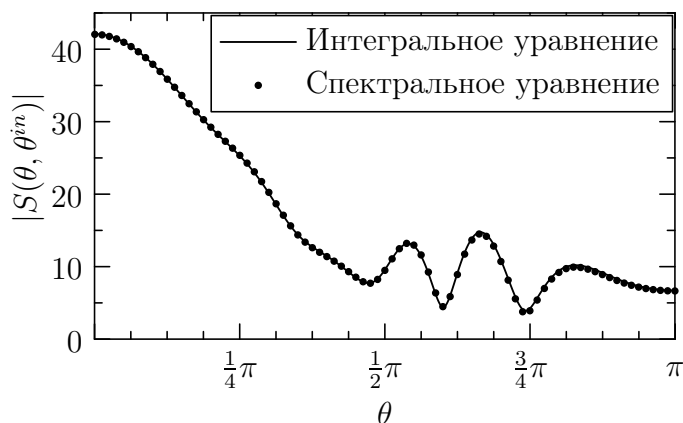


Рис. 2.12. Пример расчета дифракционного коэффициента методом спектрального уравнения.

На рис. 2.13 показаны полное поле и нормальная производная рассеянного поля на оси  $x$ , восстановленные с помощью формул (2.102) и (2.50) при тех же значениях параметров. Видно, что восстановленное поле с хорошей точностью удовлетворяет граничным условиям.

## §2.8. Реализация алгоритма для задачи дифракции на полубесконечном экране со щелью

Рассмотрим случай, когда рассеиватель представляет собой полубесконечный экран со щелью  $\{(x, y) | y = 0, x \in (a_1, a_2) \cup (a_3, +\infty)\}$  (рис. 2.14). Рассеиватель не является компактным, поэтому в рассеянном поле будет при-

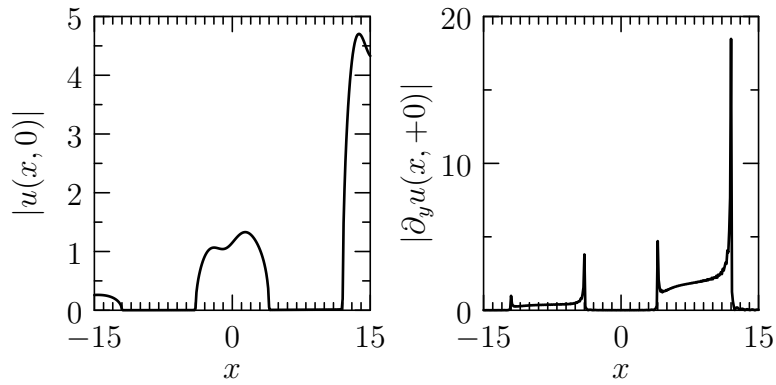


Рис. 2.13. Поля на оси  $x$ , восстановленные с помощью формулы расщепления.

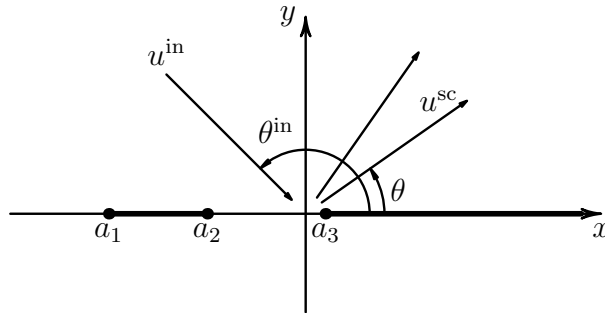


Рис. 2.14. Геометрия задачи.

существовать геометрически отраженная волна. Следовательно, для корректной постановки задачи следует заменить условие излучения (2.10) принципом предельного поглощения, т.е. потребовать чтобы при наличии у  $k_0$  малой положительной мнимой части рассеянное поле не содержало вкладов, растущих на бесконечности.

Все соотношения метода спектрального уравнения получаются из соответствующих соотношений для задачи о двух полосах отбрасыванием величин, относящихся к вершине  $a_4$ . То есть нужно отбросить краевую функцию Грина  $u^4$ , ее диаграмму направленности  $S^4(\theta)$ , спектральные функции  $U_n^4(k)$   $U_4^m(k)$ , и т.д. Верхний предел в определении функций  $U_3^m$  (см. (2.100)) следует заменить на  $+\infty$ .

Единственная трудность заключается в восстановлении рассеянного поля при  $\theta^{\text{in}} < \pi/2$ . В этом случае аналоги формул (2.102) и (2.50) становятся неприменимыми. Эта трудность имеет непринципиальный характер и может быть обойдена изменением постановки задачи для рассеянного поля. Для простоты здесь этот вопрос не рассматривается.

В качестве примера результата расчетов для данной задачи на рис. 2.15 показаны полное поле и нормальная производная рассеянного поля на оси  $x$ , вычисленные при  $k_0 = 1 + 0,2i$ ,  $a_1 = -12$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 12$ ,  $\theta^{\text{in}} = 2\pi/3$ . Видно, что восстановленное поле с хорошей точностью удовлетворяет граничным условиям.

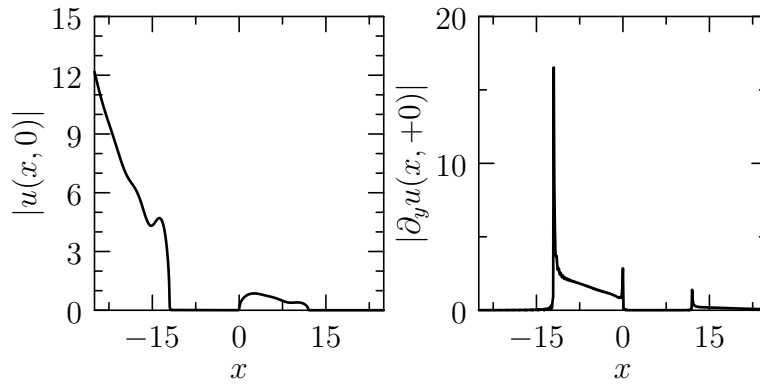


Рис. 2.15. Поля на оси  $x$ , восстановленные с помощью формулы расщепления.

Заметим также, что решение задачи о дифракции на экране со щелью с помощью интегрального уравнения крайне затруднительно из-за того, что рассеиватель не является компактным. В то же время, применение метода спектрального уравнения не сложнее, чем для задач дифракции на одной и на двух полосах.

## §2.9. Основные результаты главы

1. Построен численный алгоритм решения скалярной (акустической) задачи о дифракции плоской волны на полосе с граничными условиями Дирихле методом спектрального уравнения. Основу алгоритма составляет процедура отыскания коэффициентов этого уравнения по известным данным монодромии.
2. Показано, что построенный алгоритм позволяет вычислять решение с любой наперед заданной точностью.
3. Показано, что эффективность построенного алгоритма выше, чем эффективность численного решения соответствующего граничного интегрального уравнения, если требуется высокая точность и/или при больших значениях  $k_0 a$ .
4. Построенный алгоритм с минимальными изменениями приложен к задачам о дифракции плоской волны на двух полосах и на полубесконечном экране со щелью.

## Глава 3

# Аналитический расчет дифракционных коэффициентов четверти плоскости и угла куба

### §3.1. Введение

В данной главе рассматривается скалярная задача о дифракции плоской волны на конусах, имеющих вид четверти плоскости и угла куба. В этих случаях рассеянное поле формируется плоскими волнами, отраженными гранями, цилиндрическими волнами, рассеянными ребрами и сферической волной, рассеянной вершиной конуса. Основной целью является отыскание дифракционного коэффициента, то есть амплитуды сферической волны в зависимости от направлений падения и рассеяния.

Основным подходом к коническим задачам дифракции является отделение радиальной переменной, применение техники Бесселя–Зоммерфельда, и сведение исходной дифракционной задачи к набору задач для оператора Лапласа–Бельтрами на части единичной сферы. Этот подход был разработан Смышляевым и соавторами [21]. В результате была получена следующая формула для дифракционного коэффициента:

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i}{\pi} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu, \quad (3.1)$$

где  $\omega_0$  и  $\omega$  — направления падения и рассеяния соответственно, отождествляемые с точками единичной сферы,  $\nu$  — параметр разделения переменных,  $g$  — функция Грина сферической задачи, а контур  $\gamma$  показан на рис. 3.1.

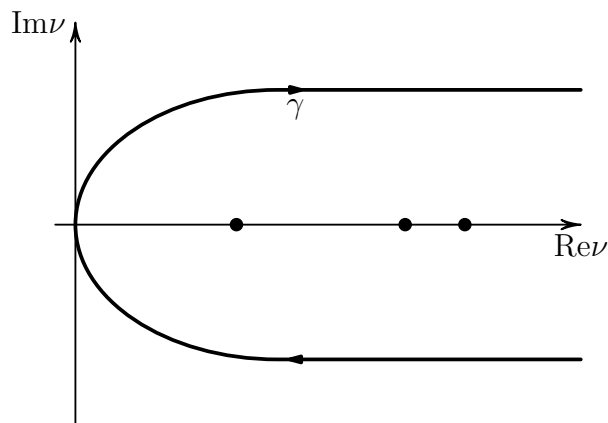


Рис. 3.1. Контур  $\gamma$ .

Кратко изложим схему вывода этой формулы. На первом шаге рассматривается функция Грина  $G$  трехмерной задачи, которая с помощью отделе-

ния радиальной переменной выражается в виде ряда

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; r_0, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{\pi}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\nu_n}(k_0 r_{<}) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 r_{>})}{\sqrt{r r_0}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) \Phi_n(\boldsymbol{\omega}_0), \quad (3.2)$$

где  $r_{<} = \min(r, r_0)$ ,  $r_{>} = \max(r, r_0)$ ,  $\nu_n$  и  $\Phi_n$  — собственные значения и собственные функции соответствующей сферической задачи.

Затем с помощью разложения функции Грина сферической задачи по собственным функциям

$$g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(\boldsymbol{\omega}) \Phi_j(\boldsymbol{\omega}_0)}{\nu^2 - \nu_j^2}, \quad (3.3)$$

ряд для  $G$  преобразуется в контурный интеграл

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; r_0, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{J_{\nu}(k_0 r_{<}) H_{\nu}^{(1)}(k_0 r_{>})}{\sqrt{r r_0}} g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) \nu d\nu. \quad (3.4)$$

Решение задачи дифракции плоской волны получается из  $G$  удалением источника на бесконечность вдоль направления  $\boldsymbol{\omega}_0$  (см. (3.24)). Используя асимптотику функции Ханкеля на бесконечности, имеем:

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = -2\pi \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-i\pi/4} \int_{\gamma} J_{\nu}(k_0 r) e^{-i\nu\pi/2} g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) \nu d\nu, \quad (3.5)$$

На следующем шаге выражение для  $u$  преобразуется использованием интегрального представления функции Бесселя:

$$J_{\nu}(k_0 r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{W}} e^{-ik_0 r \cos s + i\nu(\pi/2 - s)} ds, \quad (3.6)$$

где контур  $\mathcal{W}$  показан на рис. 3.2 слева.

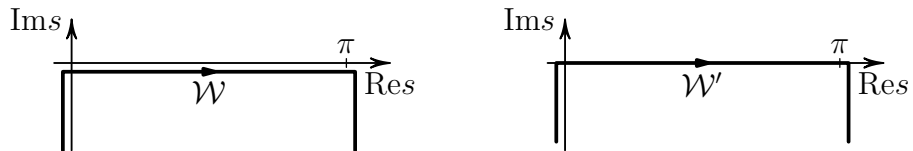


Рис. 3.2. Контур  $\mathcal{W}$  и  $\mathcal{W}'$ .

Для  $u$  имеем

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} e^{i\pi/4} \int_{\mathcal{W}} e^{-ik_0 r \cos s} F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, s) ds, \quad (3.7)$$

где

$$F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, s) = \frac{i}{\pi} \int_{\gamma} e^{-i\nu s} g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) \nu d\nu, \quad (3.8)$$

Затем контур  $\mathcal{W}$  деформируется в контур  $\mathcal{W}'$ , показанный на рис. 3.2 справа. Дальнюю асимптотику, имеющую вид сферической волны (3.25), дает точка стационарной фазы  $s = \pi$ , что получается стандартным образом [191]. Дифракционный коэффициент оказывается равным  $F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \pi)$  или, что то же самое, (3.1).

Большим достоинством этой формулы является ее применимость к случаю произвольного конуса. Однако вычисления с помощью нее сопряжены с значительными трудностями. В общем случае интеграл в (3.1) сходится только в смысле обобщенных функций, и вычислять его приходится с помощью предела Абеля–Пуассона [24], то есть

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu - \varepsilon^n \nu^n} g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) \nu d\nu, \quad (3.9)$$

где  $n$  — некоторое положительное число. Изначально в [24] справедливость этой формулы была доказана для  $n = 1$ , а затем было показано, что при  $n = 2$  и  $n = 4$  предел имеет то же самое значение. Такая регуляризация естественным образом возникает при деформации контура  $\mathcal{W}$  в  $\mathcal{W}'$ .

Существует область параметров  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)$ , в которой интеграл (3.1) может быть преобразован в экспоненциально сходящийся интеграл по мнимой оси. Действительно, представим функцию Грина  $g$  как сумму функции Грина полной сферы  $g_0$  и некоторой отраженной части  $g_r$ . Можно показать, что во-первых  $g_0$  не дает никакого вклада в дифракционный коэффициент [24], а во-вторых отраженная часть функции Грина растет при больших  $\nu$  как [152]

$$g_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) \sim e^{-|\operatorname{Im} \nu| \ell_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)}, \quad (3.10)$$

где

$$\ell_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \min_{\boldsymbol{\omega}'} [\ell(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') + \ell(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}_0)]. \quad (3.11)$$

Здесь минимум берется по точкам, принадлежащим сечению конуса единичной сферой, а  $\ell(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$  обозначает сферическое (угловое) расстояние между точками  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\omega}'$ . Ясно, что при

$$\ell_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) > \pi \quad (3.12)$$

интеграл (3.1) можно преобразовать в экспоненциально сходящийся. Легко видеть, что это условие при заданном направлении падения выделяет ту область направлений рассеяния, в которых распространяется только сферическая волна, рассеянная вершиной конуса.



Но даже в этой области для вычисления дифракционного коэффициента приходится решать интегральное уравнение относительно функции  $g$  для каждого значения  $\nu$ , принадлежащего контуру интегрирования [23]. Таким образом, процедура вычисления оказывается весьма трудоемкой.

Дальнейшее развитие этого подхода для практически важной задачи дифракции на четверти плоскости (плоском конусе) было осуществлено в работе [12], в которой были получены формулы того же типа, что и (3.1). В этих формулах подынтегральное выражение конструируется из так называемых сферических краевых функций Грина, представляющих собой предельное значение функции Грина  $g$  при стремлении положения источника к краю рассеивателя, сопровождающемся ростом силы источника. Интегралы по параметру разделения в этих модифицированных формулах Смышляева имеют более широкую область экспоненциальной сходимости, чем интеграл в (3.1): деформации контура перестают «мешать» одна или сразу обе цилиндрические волны, рассеянных ребрами. Кроме того, краевые функции Грина, из которых строится подынтегральное выражение могут быть получены в результате численного решения дифференциальных уравнений с многомерным временем [13], что является более эффективным способом, чем решение интегрального уравнения.

Вывод этих формул в [12] состоит из трех шагов. Во-первых, к полному полю применяется оператор расщепления, и результат выражается через трехмерные краевые функции Грина. Это выражение называется формулой расщепления. Затем диаграммы направленности краевых функций Грина представляются в виде рядов по собственным значениям оператора Лапласа–Бельтрами на сфере с разрезом. Использование формулы расщепления приводит к ряду для дифракционного коэффициента. На последнем шаге этот ряд преобразуется в контурный интеграл. Подынтегральное выражение приходилось угадывать и затем проверять верность полученной формулы, переходя от интеграла к ряду с помощью теоремы Коши о вычетах. Общего метода отыскания нужного вида подынтегрального выражения предложено не было.

Описанный выше подход может быть применен и к более сложным задачам, например, к задаче дифракции на трехгранном конусе (угле куба). Угадывание формул в этом случае становится более сложным и потенциально может приводить к ошибкам. В данной работе предлагается общий метод вывода модифицированных формул Смышляева из формул расщепления, что заполняет указанный пробел. Кроме новых конструктивных доказательств формул из статьи [12] приводится также вывод новой модифицированной формулы Смышляева для задачи о дифракции на четверти плоскости.

Кроме того, несмотря на родственность подходов, в работе [12] осталась невыявленной связь между формулой Смышляева и модифицированными

формулами Смышляева. В данной работе эта связь устанавливается на основе формул расщепления для решений задач для оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере с разрезом. Эти формулы устанавливают нетривиальные связи между сферической функцией Грина и сферическими краевыми функциями Грина.

Другим недостатком статьи [12] является то, что одна из трехмерных формул расщепления, из которой выводится модифицированная формула Смышляева содержит расходящиеся интегралы. В данной работе описывается процедура регуляризации, определяющая смысл, в котором должны пониматься эти интегралы.

Глава организована следующим образом. В §3.2 описывается постановка задачи и определяются основные используемые понятия. Этот параграф и раздел 3.3.1 содержат краткое изложение предыдущих результатов. Новые результаты излагаются в остальных разделах. В §3.3 описывается регуляризация трехмерной формулы расщепления. В §3.4 приводится конструктивный способ вывода модифицированных формул Смышляева из трехмерных формул расщепления. В §3.5 выводятся формулы расщепления на сфере и демонстрируется связь между формулой Смышляева и модифицированными формулами Смышляева. В §3.6 производится численная проверка одной из модифицированных формул Смышляева. В §3.7 построенные методы применяются к задаче дифракции на трехгранном конусе.

## §3.2. Основные соотношения

### 3.2.1. Постановка задачи

Рассматривается скалярная задача дифракции на четверти плоскости  $Q = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z = 0\}$  (см. рис. 3.3), на которой заданы однородные граничные условия Дирихле. То есть ищется решение  $u(x, y, z)$  уравнения

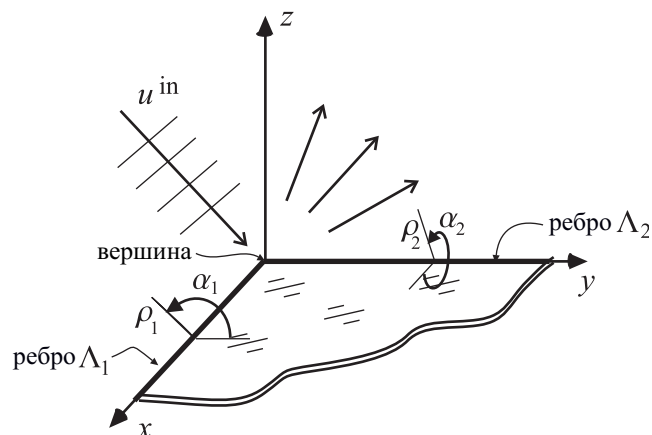


Рис. 3.3. Геометрия задачи.

Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0, \quad (3.13)$$

удовлетворяющее на обеих сторонах четверти плоскости условию

$$u|_Q = 0. \quad (3.14)$$

Зависимость всех величин от времени имеет вид  $e^{-i\Omega t}$  и в дальнейшем опускается.

Падающее поле  $u^{in}$  представляет собой плоскую волну, приходящую с направления, заданного единичным вектором  $\boldsymbol{\omega}_0$ :

$$u^{in}(\mathbf{r}) = e^{-ik_0(\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r})}. \quad (3.15)$$

Данная задача может быть симметризована стандартным образом. Поле  $u$  представляется в виде суммы четной и нечетной функции  $z$ :

$$u = u^s + u^a.$$

Четная часть — это решение, соответствующее падающей волне вида

$$u^{in,s} = \frac{1}{2}[u^{in}(x, y, z) + u^{in}(x, y, -z)],$$

а нечетная часть соответствует падающей волне вида

$$u^{in,a} = \frac{1}{2}[u^{in}(x, y, z) - u^{in}(x, y, -z)].$$

Заметим, что решение антисимметричной (нечетной) задачи тривиально: падающее поле удовлетворяет условиям Дирихле на всей плоскости  $z = 0$ , и, следовательно, рассеянное поле отсутствует. Таким образом, интерес представляет только симметричная (четная) задача. В дальнейшем рассматривается только она, а индекс  $s$  опускается. Заметим, что симметричное поле можно рассматривать только в полупространстве  $z > 0$ .

И полное симметричное поле и его рассеянная часть удовлетворяют однородным условиям Неймана на дополнении  $\tilde{Q}$  четверти плоскости  $Q$  до плоскости  $xy$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\tilde{Q}} = 0. \quad (3.16)$$

Для того, чтобы задача была корректно поставлена, ее следует дополнить условиями излучения, краевыми условиями и условиями в вершине. Краевые условия и условия в вершине означают, что на ребрах рассеивателя и в вершине отсутствуют источники, или, эквивалентно, что полная энергия поля конечна в любой конечной области. Краевые условия следуют

из решения задачи дифракции на идеальной полуплоскости. На ребрах нет источников, если вблизи них поле ведет себя следующим образом:

$$u(x, \rho_1, \alpha_1) = \frac{2C_x(x)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\alpha_1}{2} + O(\rho_1^{3/2}) \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

и

$$u(y, \rho_2, \alpha_2) = \frac{2C_y(y)}{\sqrt{\pi}} \rho_2^{1/2} \sin \frac{\alpha_2}{2} + O(\rho_2^{3/2}) \quad \text{при } \rho_2 \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

где  $\rho_j$  и  $\alpha_j$  — локальные цилиндрические координаты с осью, совпадающей с ребром  $\Lambda_j$  (см. рис. 3.3),  $C_x(x)$  и  $C_y(y)$  — некоторые неизвестные функции. Условия в вершине могут быть записаны в виде

$$u = o(r^{-1/2}), \quad |\nabla u| = o(r^{-3/2}) \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

где  $r$  — расстояние от точки наблюдения до вершины.

Условия излучения, означающие отсутствие в рассеянном поле приходящих из бесконечности волн, оказывается непросто сформулировать для случая падающей плоской волны. Эта трудность обходится стандартным образом: плоская волна рассматривается как поле точечного источника, расположенного на бесконечности [21]. Говоря точнее, рассмотрим функцию Грина нашей задачи  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ , то есть решение неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta G + k_0^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.20)$$

удовлетворяющее тем же граничным условиям, краевым условиям и условиям в вершине, которым удовлетворяет поле  $u$ . Потребуем также, чтобы  $G$  удовлетворяла условиям излучения:

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} - ik_0 \right) G = o(r^{-1}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Поле  $G$  соответствует падающей сферической волне  $G^{in}$  вида

$$G^{in} = -\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}. \quad (3.22)$$

Если источник удаляется на бесконечность вдоль направления  $\boldsymbol{\omega}_0$ , т.е.  $\mathbf{r}_0 = r_0 \boldsymbol{\omega}_0$  и  $r_0 \rightarrow \infty$ , то

$$G^{in} = -\frac{e^{ik_0 r_0}}{4\pi r_0} e^{-ik_0(\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{r})} + O(r_0^{-2}). \quad (3.23)$$

Таким образом, решение  $u$  задачи с падающей плоской волной естественно искать в виде предела

$$u(\mathbf{r}) = -\lim_{r_0 \rightarrow \infty} 4\pi r_0 e^{-ik_0 r_0} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0). \quad (3.24)$$

Наиболее важной характеристикой поля  $u$  является дифракционный коэффициент  $f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)$ . Он может быть определен как амплитуда сферической волны, входящей в рассеянное поле  $u^{sc} := u - u^{in}$ :

$$u^{sc}(r, \boldsymbol{\omega}) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) + O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Это определение корректно для направлений рассеяния  $\boldsymbol{\omega}$ , в которых распространяется только упомянутая сферическая волна. Оно может быть аналитически продолжено в область направлений рассеяния, в которой присутствуют отраженная плоская волна или рассеянные ребрами цилиндрические волны.

### 3.2.2. Собственные функции задачи на сфере

Естественным подходом к решению поставленной задачи является отделение радиальной переменной и изучение задачи на единичной сфере для каждого значения параметра разделения. Используем равенство

$$\Delta + k_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k_0^2 - r^{-2} \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) + r^{-2} \left[ \tilde{\Delta} + \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \right], \quad (3.26)$$

где  $\tilde{\Delta}$  — оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере, имеющий в стандартных сферических координатах  $(\zeta, \phi)$  вид

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sin \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \sin \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.27)$$

Указанное разложение оператора Гельмгольца приводит к следующей задаче на собственные значения для оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере  $S$  с разрезом  $S_q = S \cap Q$ , «проделанным» четвертью плоскости  $Q$  (см. рис. 3.4):

$$\tilde{\Delta}_\nu \Phi(\boldsymbol{\omega}) = 0, \quad (3.28)$$

$$\Phi|_{S_q} = 0, \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\tilde{S}_q} = 0, \quad (3.30)$$

$$\Phi \sim \zeta_1^{1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\zeta_1^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.31)$$

$$\Phi \sim \zeta_2^{1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.32)$$

Здесь  $\tilde{\Delta}_\nu = \tilde{\Delta} + \nu^2 - 1/4$ , а  $\tilde{S}_q$  — дополнение  $S_q$  до полного экватора;  $(\zeta_1, \phi_1)$  и  $(\zeta_2, \phi_2)$  — сферические координаты, показанные на рис. 3.4.

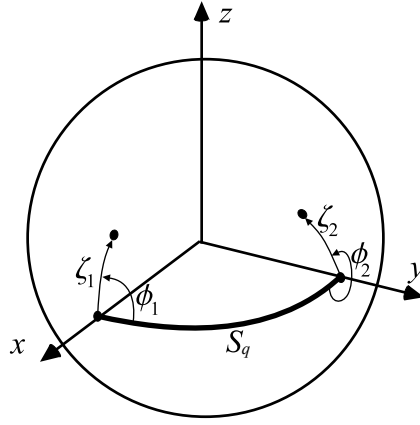


Рис. 3.4. Геометрия задачи на сфере.

Эта задача имеет решение только для дискретного набора действительных значений  $\nu = \pm\nu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , формирующих *спектр* задачи. Поскольку самосопряженный оператор  $-\tilde{\Delta}$  имеет положительный спектр [21], можно записать, что  $1/2 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \nu_n \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $\Phi_n(\boldsymbol{\omega})$  собственную функцию, соответствующую  $n$ -му собственному значению  $\nu_n$ . Предположим, что собственные функции нормированы следующим образом:

$$\iint_S \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) \Phi_m(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \delta_{mn}, \quad (3.33)$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера. Введем коэффициенты  $C_n$  и  $\tilde{C}_n$  через следующие асимптотики:

$$\Phi_n(\zeta_1, \phi_1) = \frac{2C_n}{\sqrt{\pi}} \zeta_1^{1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\zeta_1^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.34)$$

$$\Phi_n(\zeta_2, \phi_2) = \frac{2\tilde{C}_n}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.35)$$

### 3.2.3. Трехмерные краевые функции Грина

Введем вспомогательные функции, называемые трехмерными краевыми функциями Грина. Это волновые поля в трехмерном пространстве, порождаемые точечными источниками, расположенными на ребрах рассеивателя. Оказывается, что через них можно выразить решение исходной задачи.

Определим пару трехмерных краевых функций Грина  $G_x$  и  $G_y$  как следующие пределы:

$$G_x(\mathbf{r}; X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} G(\mathbf{r}; X, -\varepsilon, 0), \quad (3.36)$$

$$G_y(\mathbf{r}; Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} G(\mathbf{r}; -\varepsilon, Y, 0), \quad (3.37)$$

т.е. как поля точечных источников специального вида, расположенных на ребрах рассеивателя (см. рис. 3.5).

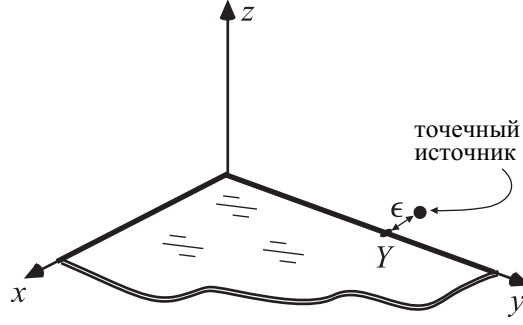


Рис. 3.5. К определению краевой функции Грина  $G_y$ .

Из-за наличия источника на ребре  $\Lambda_1$  краевая функция Грина  $G_x$  нарушает на нем краевое условие Мейкснера. Однако на другом ребре это условие выполняется. Введем функцию  $C_G(X, y)$  как коэффициент в первом мейксеровском члене разложения функции  $G_x$  в окрестности ребра  $\Lambda_2$ :

$$G_x(y, \rho_2, \alpha_2; X) = \frac{2C_G(X, y)}{\sqrt{\pi}} \rho_2^{1/2} \sin \frac{\alpha_2}{2} + O(\rho_2^{3/2}) \quad \text{при } \rho_2 \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

Заметим, что в силу теоремы взаимности в асимптотику функции  $G_y$  возле ребра  $\Lambda_1$  входит тот же коэффициент:

$$G_y(x, \rho_1, \alpha_1; Y) = \frac{2C_G(Y, x)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\alpha_1}{2} + O(\rho_1^{3/2}) \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0, \quad (3.39)$$

и в силу симметрии  $C_G(x, y) = C_G(y, x)$ .

В дальнейшем нам понадобятся диаграммы направленности  $f_x(\boldsymbol{\omega}, X)$  и  $f_y(\boldsymbol{\omega}, Y)$  краевых функций Грина  $G_x$  и  $G_y$  соответственно, определенные так же, как и  $f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)$  в (3.25):

$$G_x(r, \boldsymbol{\omega}; X) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f_x(\boldsymbol{\omega}, X) + O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (3.40)$$

$$G_y(r, \boldsymbol{\omega}; Y) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f_y(\boldsymbol{\omega}, Y) + O(r^{-2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

В работе [12] на основании теоремы взаимности были установлены следующие соотношения между неизвестными функциями  $C_x(x)$  и  $C_y(y)$ , введенными в (3.17) и (3.18), и диаграммами направленности краевых функций Грина:

$$C_x(x) = -\frac{4\pi^2}{k_0} f_x(\boldsymbol{\omega}_0, x) \quad \text{и} \quad C_y(y) = -\frac{4\pi^2}{k_0} f_y(\boldsymbol{\omega}_0, y). \quad (3.42)$$

Эти соотношения аналогичны формулам (2.29). Ниже аналогичные соотношения получаются для задачи дифракции на трехгранном конусе (3.186). Эти соотношения используются при выводе трехмерных формул расщепления.

### 3.2.4. Сферические краевые функции Грина

Для задачи на единичной сфере также можно ввести функцию Грина и краевые функции Грина, играющие важную роль в решении нашей задачи. Функция Грина  $g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)$  — это решение неоднородного уравнения Лапласа–Бельтрами

$$\tilde{\Delta}_\nu g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0), \quad (3.43)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям Дирихле на обеих сторонах разреза,  $g|_{S_q} = 0$ , и тем же краевым условиям, что и собственные функции  $\Phi$  (см. (3.31), (3.32)). Функция Грина может быть симметризована так же, как и решение исходной дифракционной задачи. Введем симметричную часть функции Грина  $g^s$ :

$$g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) := \frac{1}{2}[g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) + g(\boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_0, \nu)],$$

где  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_0$  — точка симметричная точке  $\boldsymbol{\omega}_0$  относительно экватора. Симметричная часть функции Грина удовлетворяет условиям Неймана на  $\tilde{S}_q$ ,

$$\frac{\partial g^s}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}_q} = 0,$$

и условиям Мейкснера на краях разреза. Эта функция заменяет  $g$  в формуле Смьшляева (3.1) для симметричной части поля. Важным свойством функции  $g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)$  является то, что она представляет собой четную функцию  $\nu$  и имеет полюсы в точках  $\nu = \pm\nu_n$  [21]. Таким образом, функция  $g^s$  определена только для значений  $\nu$ , не принадлежащих спектру.

Определим сферические краевые функции Грина  $v_1(\boldsymbol{\omega}, \nu)$  и  $v_2(\boldsymbol{\omega}, \nu)$  для  $\nu$ , не принадлежащих спектру, как следующие пределы:

$$v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\kappa x}, \nu) \quad \text{и} \quad (3.44)$$

$$v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\kappa y}, \nu), \quad (3.45)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{\kappa x}$  — точка, имеющая сферические координаты  $\zeta_1 = \kappa$ ,  $\alpha_1 = \pi$  (рис. 3.6), а  $\boldsymbol{\omega}_{\kappa y}$  — точка с координатами  $\zeta_2 = \kappa$ ,  $\alpha_2 = \pi$ .

Заметим, что из-за наличия источников краевые функции Грина не удовлетворяют условиям Мейкснера у «своих» краев. Действительно, пользуясь, например, методом конформных отображений, легко получить следующие



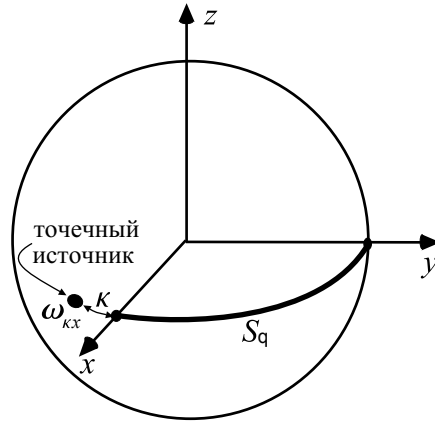


Рис. 3.6. К определению сферической краевой функции Грина  $v^1(\omega, \nu)$ .

асимптотики [13, 20]:

$$v^1(\zeta_1, \phi_1, \nu) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta_1^{-1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\zeta_1^{1/2}) \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.46)$$

$$v^2(\zeta_2, \phi_2, \nu) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{-1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{1/2}) \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.47)$$

Эти асимптотики аналогичны асимптотикам (2.16). См. также доказательство соотношений (3.193) и (3.194). Тем не менее, у противоположных краев условия Мейкснера сохраняются:

$$v^1(\zeta_2, \phi_2, \nu) = \frac{2C_2^1(\nu)}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0, \quad (3.48)$$

$$v^2(\zeta_1, \phi_1, \nu) = \frac{2C_2^1(\nu)}{\sqrt{\pi}} \zeta_1^{1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\zeta_1^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

Здесь  $C_2^1(\nu)$  — неизвестный коэффициент.

Пользуясь ортогональностью и полнотой системы собственных функций легко получить следующие представления краевых функций Грина [12]:

$$v^1(\omega, \nu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \Phi_n(\omega)}{\nu^2 - \nu_n^2} \quad \text{и} \quad v^2(\omega, \nu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{C}_n \Phi_n(\omega)}{\nu^2 - \nu_n^2}. \quad (3.50)$$

Функция  $C_2^1(\nu)$  также может быть представлена в виде такого ряда:

$$C_2^1(\nu) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \tilde{C}_n}{\nu^2 - \nu_n^2}. \quad (3.51)$$

Заметим, что  $v^{1,2}(\omega, \nu)$  и  $C_2^1(\nu)$  являются четными функциями  $\nu$  и имеют полюсы в точках  $\nu = \pm \nu_n$ .

## §3.3. Трехмерные формулы расщепления

### 3.3.1. Предыдущие результаты

Дифракционный коэффициент, определенный в (3.25), может быть выражен через диаграммы направленности краевых функций Грина, введенные в (3.40) и (3.41). Эти выражения называются *формулами расщепления*.

Изложим схему вывода этих формул. К полному полю  $u$  применяется оператор  $H$ , обладающий следующими свойствами: он должен аннулировать падающую волну  $u^{in}$ , коммутировать с оператором Гельмгольца и сохранять граничные условия. Однако он может нарушать краевые условия и условия в вершине. Краевые функции Грина также нарушают краевые условия, так что оказывается возможным построить из них поле, имеющее такие же сверхсингулярные краевые асимптотики, что и  $H[u]$ . Вычитая это поле из  $H[u]$  и пользуясь теоремой единственности, можно сделать вывод, что разность тождественно равна нулю. Детали этой процедуры изложены в [12, 20].

Приведем здесь формулы расщепления, полученные в [12]. Применение оператора  $H_x = \frac{\partial}{\partial x} + ik_0\omega_{0x}$ , где  $\omega_{0x}$  — проекция вектора  $\boldsymbol{\omega}_0$  на ось  $x$ , дает формулу

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2 i}{k_0^2(\omega_x + \omega_{0x})} \int_0^\infty f_y(\boldsymbol{\omega}; Y) f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y) dY. \quad (3.52)$$

Аналогично, применение оператора  $H_y = \frac{\partial}{\partial y} + ik_0\omega_{0y}$  приводит к формуле

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2 i}{k_0^2(\omega_y + \omega_{0y})} \int_0^\infty f_x(\boldsymbol{\omega}; X) f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX. \quad (3.53)$$

Применение оператора второго порядка  $H_{xy} = H_x H_y$  дает формулу расщепления

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2/k_0^3}{(\omega_y + \omega_{0y})(\omega_x + \omega_{0x})} \times \left( \int_0^\infty f_x(\boldsymbol{\omega}; X) H_x[f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X)] dX + \int_0^\infty f_y(\boldsymbol{\omega}; Y) H_y[f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y)] dY \right), \quad (3.54)$$

которая с помощью равенств

$$H_x[f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X)] = \int_0^\infty C_G(X, Y) f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y) dY \quad \text{и} \quad (3.55)$$

$$H_y[f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y)] = \int_0^\infty C_G(X, Y) f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX, \quad (3.56)$$

полученных в [12], может быть преобразована к виду

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2/k_0^3}{(\omega_y + \omega_{0y})(\omega_x + \omega_{0x})} \times \\ \times \left( \int_0^\infty dX f_x(\boldsymbol{\omega}; X) \int_0^\infty C_G(X, Y) f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y) dY + \right. \\ \left. + \int_0^\infty dY f_y(\boldsymbol{\omega}; Y) \int_0^\infty C_G(X, Y) f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX \right). \quad (3.57)$$

Формулы (3.52) и (3.53) надежно обоснованы и были проверены численно в [28] (см. также §3.6). Здесь они приведены для использования в выводе модифицированных формул Смышляева.

Однако тщательный анализ асимптотик в вершине (§A.2) показывает, что интегралы в формуле (3.54) и, следовательно, внешние интегралы в (3.57) расходятся. Действительно, из формулы (A.15) следует, что подынтегральное выражение в первом члене формулы (3.54) растет при  $X \rightarrow 0$  как  $(k_0 X)^{2\nu_1-3}$ . Поскольку  $\nu_1 < 1$ , это означает, что интеграл расходится. Таким образом, построения работы [12] требуют уточнения.

### 3.3.2. Регуляризация

В этом разделе предлагается процедура регуляризации, указывающая смысл, в котором должны пониматься расходящиеся интегралы в формулах (3.54) и (3.57). Сначала дадим определение регуляризованного значения интеграла.

**Определение.** Пусть некоторая функция  $w(x)$  интегрируема на любом отрезке  $[\varepsilon, a]$  при  $0 < \varepsilon < a$ , и имеет следующую асимптотику при  $x \rightarrow 0$ :

$$w(x) = \sum_{n=1}^N a_n x^{\beta_n} + o(x^{-1}), \quad \text{где } \beta_n < -1.$$

Тогда предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sum_{n=1}^N a_n \frac{\varepsilon^{\beta_n+1}}{\beta_n+1} + \int_{\varepsilon}^a w(x) dx \right] =: \underset{0}{\int}^a w(x) dx \quad (3.58)$$

будем называть регуляризованным значением интеграла  $\int_0^a w(x) dx$ .

Отметим некоторые важные свойства введенной операции.

1. Она линейна, т.е.

$$\underset{0}{\int}^a [c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)] dx = c_1 \underset{0}{\int}^a w_1(x) dx + c_2 \underset{0}{\int}^a w_2(x) dx \quad (3.59)$$

для любых констант  $c_{1,2}$  и функций  $w_{1,2}(x)$  таких, что регуляризованные интегралы существуют.

2. Если  $w(x) = o(x^{-1})$ , то регуляризованное значение интеграла совпадает с его обычным значением.
3. Если один из двух интегралов в повторном интеграле понимается в регуляризованном смысле, то в общем случае менять порядок интегрирования нельзя. Рассмотрим, например, следующий интеграл

$$\int_{\ell} d\nu \underset{0}{\int}^{\infty} J_{\nu}(x) J_{-1/2}(x) \frac{dx}{x}, \quad (3.60)$$

где  $\ell$  — петля, охватывающая точку  $\nu = 1/2$ . Из определения регуляризованного интеграла следует, что

$$\underset{0}{\int}^{\infty} J_{\nu}(x) J_{-1/2}(x) \frac{dx}{x} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}(\nu + 1/2)}{\pi \nu^2 - 1/4}. \quad (3.61)$$

Следовательно,

$$\int_{\ell} d\nu \underset{0}{\int}^{\infty} J_{\nu}(x) J_{-1/2}(x) dx = \int_{\ell} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}(\nu + 1/2)}{\pi \nu^2 - 1/4} = 4i \sin \pi/4. \quad (3.62)$$

С другой стороны, поскольку  $J_{\nu}(x)$  — голоморфная функция  $\nu$  в окрестности точки  $\nu = 1/2$  для любых  $x \geq 0$ , мы получаем

$$\int_{\ell} J_{\nu}(x) d\nu = 0. \quad (3.63)$$

И, следовательно,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_{\ell} J_{\nu}(x) J_{-1/2}(x) d\nu = 0. \quad (3.64)$$

Введенное понятие позволяет сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.1.** *Правильный вид формулы расщепления (3.54) таков:*

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2/k_0^3}{(\omega_y + \omega_{0y})(\omega_x + \omega_{0x})} \times \\ \times \left( \int_0^{\infty} f_x(\boldsymbol{\omega}; X) H_x[f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X)] dX + \int_0^{\infty} f_y(\boldsymbol{\omega}; Y) H_y[f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y)] dY \right). \quad (3.65)$$

Как следствие этого, правильный вид формулы (3.57) таков:

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{4\pi^2/k_0^3}{(\omega_y + \omega_{0y})(\omega_x + \omega_{0x})} \times \\ \times \left( \int_0^{\infty} dX f_x(\boldsymbol{\omega}; X) \int_0^{\infty} C_G(X, Y) f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y) dY + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} dY f_y(\boldsymbol{\omega}; Y) \int_0^{\infty} C_G(X, Y) f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX \right). \quad (3.66)$$

*Доказательство.* Применим теорему Грина к полям  $H_{xy}[u]$  и  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ :

$$H_{xy}[u](\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \left( H_{xy}[u](\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial H_{xy}[u](\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) d\sigma'. \quad (3.67)$$

Здесь точка  $\mathbf{r}$  лежит внутри поверхности  $\Sigma$ , показанной на рис. 3.7. Поверхность состоит из шести частей. Первая часть представляет собой сферу  $\Sigma_r$  малого радиуса  $\varepsilon_r$  с центром в начале координат, из которой удалена часть сложной формы, вырезаемая другими составляющими поверхности. Вторая и третья части представляют собой цилиндры  $\Sigma_x$  и  $\Sigma_y$  радиуса  $\varepsilon_\rho < \varepsilon_r$ , оси которых совпадают с координатными осями  $x$  и  $y$ . Из цилиндров удалены тонкие полоски, вырезаемые другими частями поверхности. Четвертой и пятой частями являются две четверти плоскости  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$ , полученные из  $Q$  сдвигом на  $\pm\varepsilon_z < \varepsilon_\rho$  в направлении оси  $z$ . Из них удалены круговые секторы

с центрами в вершинах. Шестая часть представляет собой сферу  $\Sigma_R$  большого радиуса  $R$  с центром в начале координат (не показана на рис. 3.7). Из нее удалена часть, подобная части, удаленной из маленькой сферы  $\Sigma_r$ . Все части поверхности «подшиты» друг к другу, как показано на рис. 3.7.

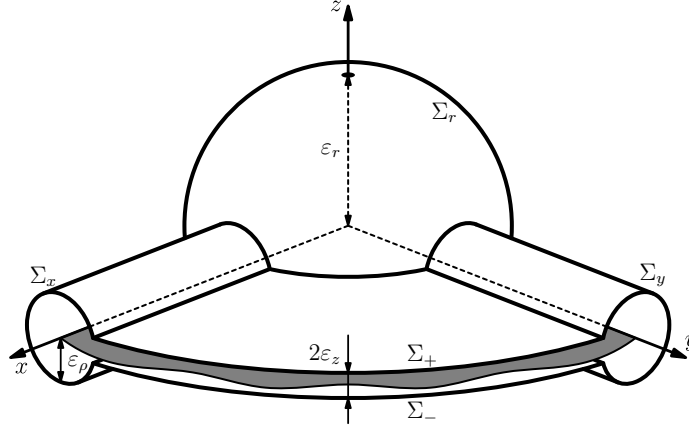


Рис. 3.7. Поверхность  $\Sigma$  без замыкающей сферы большого радиуса  $\Sigma_R$ .

Рассмотрим предел выражения (3.67) при  $R \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon_r, \varepsilon_\rho, \varepsilon_z \rightarrow 0$ . При этом будем считать, что  $\varepsilon_z = o(\varepsilon_\rho)$  и  $\varepsilon_\rho = o(\varepsilon_r)$ . Интеграл по  $\Sigma_R$  обнулится в силу условий излучения. Интегралы по  $\Sigma_\pm$  будут равны нулю в силу граничных условий Дирихле, наложенных на  $G$  и  $u$ . Интегралы по цилиндрам  $\Sigma_{x,y}$  дадут нам (3.65), регуляризующее слагаемое в которой получится из интеграла по  $\Sigma_r$ . Рассмотрим последние три интеграла подробнее.

Простой, но громоздкий анализ, приведенный в §A.2 дает следующие оценки роста подынтегральных функций выражения (3.67) вблизи начала координат (см. (A.3) и (A.20)–(A.27)):

$$G(\mathbf{r}; r', \boldsymbol{\omega}') = B_G(k_0 r')^{\nu_1 - 1/2} \Phi_1(\boldsymbol{\omega}') + o[(k_0 r')^1] \quad \text{при } r' \rightarrow 0, \quad (3.68)$$

$$H_{xy}[u](r', \boldsymbol{\omega}') = B_u k_0^2 (k_0 r')^{\nu_1 - 5/2} (\nu_1 - 1) [C_1 v^1(\boldsymbol{\omega}', \nu_1 - 2) + \tilde{C}_1 v^2(\boldsymbol{\omega}', \nu_1 - 2)] + o[(k_0 r')^{-1}] \quad \text{при } r' \rightarrow 0. \quad (3.69)$$

Следовательно, для интеграла по  $\Sigma_r$  имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_r} (\dots) d\sigma' &= -2B_u B_G k_0 (\nu_1 - 1) (k_0 \varepsilon_r)^{2\nu_1 - 2} \times \\ &\times \iint_S [C_1 v^1(\boldsymbol{\omega}', \nu_1 - 2) + \tilde{C}_1 v^2(\boldsymbol{\omega}', \nu_1 - 2)] \Phi_1(\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' + o[(k_0 \varepsilon_r)^0]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Для вычисления интеграла по единичной сфере используем ряд (3.50) и усло-

вие ортогональности (3.33). В итоге получим, что

$$\iint_{\Sigma_r} (\dots) d\sigma' = B_u B_G k_0 [C_1^2 + \tilde{C}_1^2] (k_0 \varepsilon_r)^{2\nu_1 - 2} + o[(k_0 \varepsilon_r)^{-1}]. \quad (3.71)$$

Сфокусируемся на интеграле по цилиндру  $\Sigma_x$ . В §A.2 получены следующие оценки роста подынтегральных функций выражения (3.67) вблизи ребра  $\Lambda_1$  (см. (A.9) и (A.28)–(A.30)):

$$G(\mathbf{r}; X, \rho_1, \alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\alpha_1}{2} G_x(\mathbf{r}; X) + O[\rho_1^{3/2}] \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0, \quad (3.72)$$

$$H_{xy}[u](X, \rho_1, \alpha_1) = -\frac{H_x[C_x(X)]}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{-1/2} \sin \frac{\alpha_1}{2} + O[\rho_1^{1/2}] \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0. \quad (3.73)$$

Следовательно, для интеграла по  $\Sigma_x$  имеем:

$$\iint_{\Sigma_x} (\dots) d\sigma' = \int_{\varepsilon_r}^{\infty} H_x[C_x(X)] G_x(\mathbf{r}; X) dX + o(\varepsilon_r). \quad (3.74)$$

Аналогичный результат может быть получен для интеграла по  $\Sigma_y$ , что вместе с (3.71) и (3.67) дает нам следующее:

$$H_{xy}[u](\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \left[ B_u B_G k_0 [C_1^2 + \tilde{C}_1^2] (k_0 \varepsilon_r)^{2\nu_1 - 2} + o[(k_0 \varepsilon_r)^0] + \int_{\varepsilon_r}^{\infty} H_x[C_x(X)] G_x(\mathbf{r}; X) dX + \int_{\varepsilon_r}^{\infty} H_y[C_y(Y)] G_y(\mathbf{r}; Y) dY \right]. \quad (3.75)$$

Оценим подынтегральные выражения при  $X, Y \rightarrow 0$ . Формулы (A.16) и (A.12) приводят к результату

$$H_x[C_x(X)] G_x(\mathbf{r}; X) = 2B_u B_G C_1^2 k_0^2 (\nu_1 - 1) (k_0 X)^{2\nu_1 - 3} + o[(k_0 X)^{-1}], \quad (3.76)$$

и к аналогичному для второго интеграла. Применяя определение (3.58) к пределу (3.75), получаем слабую форму формулы расщепления:

$$H_{xy}[u](\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} H_x[C_x(X)] G_x(\mathbf{r}; X) dX + \int_0^{\infty} H_y[C_y(Y)] G_y(\mathbf{r}; Y) dY. \quad (3.77)$$

Рассматривая дальнейшие асимптотики обеих сторон этого равенства и принимая во внимание соотношения (3.42), получаем (3.65). Формула (3.66) следует из (3.65) таким же образом, как (3.57) следует из (3.54).  $\square$

## §3.4. Модифицированное представление Конторовича–Лебедева

### 3.4.1. Основные идеи

Теперь наша цель — преобразовать формулы (3.52), (3.53), (3.65) и (3.66) в модифицированные формулы Смышляева, т.е. в контурные интегралы по параметру разделения  $\nu$ . Чтобы сделать это, мы представим в виде таких интегралов функции  $f_x(\omega, X)$ ,  $f_y(\omega, Y)$  и  $C_G(X, Y)$ , подставим полученные представления в формулы расщепления и затем преобразуем возникающие при этом многократные интегралы в однократные.

Используя ряды (A.14), (A.15), (A.17), (3.50) и (3.51), можно получить следующие представления (см. A.3):

$$f_x(\omega, X) = \frac{A}{X} \int_{\gamma} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_{\nu}(k_0 X) v^1(\omega, \nu) \nu d\nu, \quad (3.78)$$

$$f_y(\omega, Y) = \frac{A}{Y} \int_{\gamma} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_{\nu}(k_0 Y) v^2(\omega, \nu) \nu d\nu, \quad (3.79)$$

$$C_G(X, Y) = \frac{1}{2XY} \int_{\gamma} C_2^1(\nu) J_{\nu}(k_0 \min[X, Y]) H_{\nu}^{(1)}(k_0 \max[X, Y]) \nu d\nu, \quad (3.80)$$

где  $\gamma$  — контур, показанный на рис. 3.8, а  $A = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-i\pi/4}}{2\pi}}$ . Справедливость этих представлений проверяется прямым вычислением вычетов.

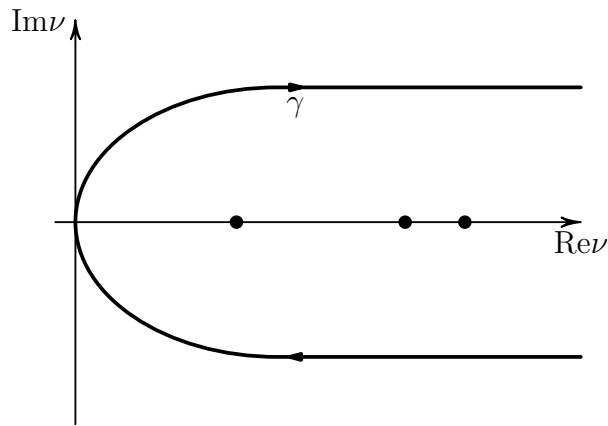


Рис. 3.8. Контур  $\gamma$ .



У нас есть формулы расщепления двух типов:

$$f(\omega, \omega_0) = \int_0^{\infty} f_1(\omega, r) f_2(\omega_0, r) \frac{dr}{r} \quad \text{и} \quad (3.81)$$

$$f(\omega, \omega_0) = \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} f_1(\omega, r) \int_0^{\infty} g(r, r') f_2(\omega_0, r') \frac{dr'}{r'}, \quad (3.82)$$

где  $f_{1,2}$  и  $g$  выражаются в виде контурных интегралов по параметру разделения  $\nu$  (возможно, деленных на некоторую степень  $r$  или  $r'$ ). Формально, прямая подстановка этих выражений в (3.81) или (3.82) приводит вычислению трех (для формулы типа (3.81)) или пяти (для (3.82)) вложенных интегралов по  $\nu$  и  $r$ . Однако оказывается, что эти интегралы можно преобразовать в модифицированные формулы Смышляева, выражающие  $f(\omega, \omega_0)$  в виде однократного контурного интеграла по  $\nu$ .

Возможность сведения многократных интегралов к однократным напоминает хорошо известные свойства преобразования Фурье. Поясним эту аналогию. Пусть функции  $F_{1,2}(x)$  имеют преобразования Фурье  $\hat{F}_{1,2}(\xi)$ . Пусть также функция  $G(x, y) = G(x - y)$  имеет преобразование  $\hat{G}(\xi)$ . Тогда выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) F_2^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_1(\xi) \hat{F}_2^*(\xi) d\xi, \quad (3.83)$$

представляющее собой формулу Планшереля, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) G(x, y) F_2^*(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_1(\xi) \hat{G}(\xi) \hat{F}_2^*(\xi) d\xi, \quad (3.84)$$

представляющее собой комбинацию формул Планшереля и свертки. Здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Если  $F_{1,2}(x)$  и  $G(x, y)$  выразить в виде интегралов, содержащих  $\hat{F}_{1,2}(\xi)$  и  $\hat{G}(\xi)$ , то левая часть (3.83) содержит три интеграла, а левая часть (3.84) — пять. В обоих случаях правая часть содержит только один интеграл.

Наиболее прямолинейным способом распространения этой аналогии на конический случай на первый взгляд является использование преобразования Конторовича–Лебедева. Однако прямое его использование невозможно из-за известных проблем со сходимостью интегралов. В частности, классическое преобразование Конторовича–Лебедева можно использовать только в

случае чисто мнимого параметра  $k_0$  уравнения Гельмгольца, который едва ли является интересным с практической точки зрения.

Здесь предлагается слегка другой подход. Вместо преобразования Конторовича – Лебедева используется преобразование, отличающееся от него выбором цилиндрической функции в ядре (используется функция Бесселя вместо функции Ханкеля) и, что более важно, выбором контура интегрирования. В результате функции, участвующие в преобразовании, перестают быть ортогональными. Однако оказывается, что для поставленных целей ортогональность (и даже единственность и обратимость преобразования) не является необходимой, а нужны только аналоги формул Планшереля и свертки. Поэтому доказываются только эти важные формулы. Построенная техника преобразования интегралов применяется для вывода модифицированных формул Смышляева.

### 3.4.2. Определение представления

Пусть функции  $h(r)$  и  $g(r, r')$ ,  $r, r' \geq 0$ , могут быть представлены в виде

$$h(r) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(k_0 r) \phi(\nu) \nu d\nu \quad (3.85)$$

и

$$g(r, r') = \frac{1}{2} \int_{\gamma} J_{\nu}(k_0 r_{<}) H_{\nu}^{(1)}(k_0 r_{>}) \psi(\nu) \nu d\nu \quad (3.86)$$

соответственно. Здесь  $r_{<} = \min(r, r')$  и  $r_{>} = \max(r, r')$ ; контур  $\gamma$  показан на рис. 3.8.

Представления функций  $h(r)$  и  $g(r, r')$  в виде (3.85) и (3.86) будем называть модифицированным представлением Конторовича-Лебедева для функций одной и двух переменных соответственно. Функции  $\phi(\nu)$  и  $\psi(\nu)$  назовем *трансформантами* функций  $h(r)$  и  $g(r, r')$  соответственно.

В отношении трансформант предположим, что

1. они являются четными функциями  $\nu$ ;
2. они имеют сингулярности только в виде простых действительных полюсов и регулярны при  $\nu = 0$ ;
3. они экспоненциально убывают при  $|\operatorname{Im} \nu| \rightarrow \infty$ .

Заметим, что между представлениями (3.85) и (3.86) есть существенная разница. В (3.85) функция одной переменной выражается через другую функцию одной переменной, в то время как в (3.86) функция двух переменных выражается через функцию одной переменной. Таким образом, представление (3.86) существует для очень ограниченного класса функций.

Нам не требуется обращение введенного представления, выражающее  $\phi(\nu)$  через  $h(r)$ . Нам также не требуется единственность трансформант в (3.85) и (3.86).

### 3.4.3. Свойства представления

В данном разделе рассматриваются некоторые свойства введенного представления. Доказываемые здесь варианты аналогов формул Планшереля и свертки имеют более простой вид, чем нужные для непосредственного преобразования трехмерных формул расщепления в модифицированные формулы Смышляева. Однако используемая в доказательствах техника преобразования контурных интегралов практически без изменений переносится на более сложные случаи.

**Теорема 3.2** (формула «свертки»). Пусть функции  $h(r)$  и  $g(r, r')$  имеют представления (3.85) и (3.86) с трансформантами  $\phi$  и  $\psi$  соответственно. Тогда

$$\int_0^{\infty} g(r, r') h(r') \frac{dr'}{r'} = \frac{1}{2} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(k_0 r) \phi(\nu) \psi(\nu) \nu d\nu, \quad (3.87)$$

т.е. интеграл в левой части (3.87) имеет представление (3.85) с трансформантой  $\phi(\nu)\psi(\nu)$ .

*Доказательство.* Деформируем контуры интегрирования в представлениях для  $h$  и  $g$  в  $\gamma_{\mu}$  и  $\gamma_{\nu}$  соответственно (см. рис. 3.9). Затем преобразуем произведение  $g(r, r')h(r')$  в двойной интеграл по декартовому произведению  $\gamma_{\nu} \times \gamma_{\mu}$ . Обозначим через  $K(r)$  интеграл в левой части (3.87):

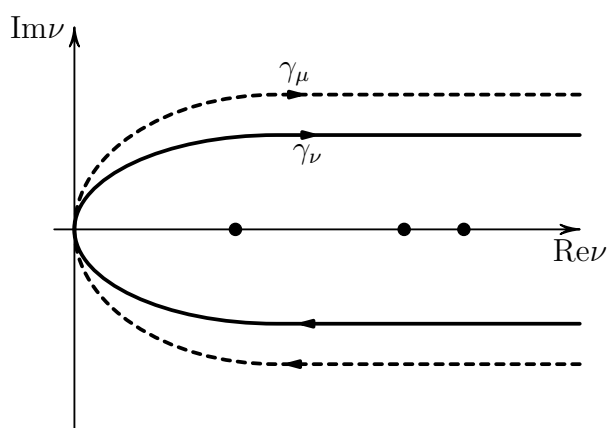


Рис. 3.9. Контурны  $\gamma_{\mu}$  и  $\gamma_{\nu}$ .

$$K(r) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dr'}{r'} \iint_{\gamma_\nu \times \gamma_\mu} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu\nu} \phi(\mu)\psi(\nu) \times \\ \times J_\mu(k_0r') J_\nu(k_0r_{<}) H_\nu^{(1)}(k_0r_{>}) d\mu d\nu. \quad (3.88)$$

Изменим порядок интегрирования, вычисляя сначала интеграл по  $r$ , то есть найдем

$$I = \int_0^\infty J_\mu(k_0r') J_\nu(k_0r_{<}) H_\nu^{(1)}(k_0r_{>}) \frac{dr'}{r'}. \quad (3.89)$$

Представим  $I$  как сумму двух интегралов

$$I = H_\nu^{(1)}(k_0r) \int_0^r J_\mu(k_0r') J_\nu(k_0r') \frac{dr'}{r'} + J_\nu(k_0r) \int_r^\infty J_\mu(k_0r') H_\nu^{(1)}(k_0r') \frac{dr'}{r'}. \quad (3.90)$$

Используем хорошо известную формулу [192]

$$\int_0^r Z_\mu^{(1)}(k_0r') Z_\nu^{(2)}(k_0r') \frac{dr'}{r'} = \frac{1}{\mu + \nu} Z_\mu^{(1)}(k_0r) Z_\nu^{(2)}(k_0r) - \\ - \frac{k_0r}{\mu^2 - \nu^2} \left[ Z_{\mu+1}^{(1)}(k_0r) Z_\nu^{(2)}(k_0r) - Z_\mu^{(1)}(k_0r) Z_{\nu+1}^{(2)}(k_0r) \right], \quad (3.91)$$

где  $Z^{(1)}$  и  $Z^{(2)}$  — произвольные цилиндрические функции. Выполняя вычисления, находим

$$I = \frac{2i J_\mu(k_0r) - e^{i\pi(\mu-\nu)/2} J_\nu(k_0r)}{\pi (\mu^2 - \nu^2)}. \quad (3.92)$$

Заметим, что  $I$  регулярно при  $\mu = \nu$ .

Подставим (3.92) в (3.88). Разобьем двойной интеграл на сумму двух членов и преобразуем их в повторные интегралы.

$$K(r) = -\frac{i}{2\pi} \left[ \int_{\gamma_\mu} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} J_\mu(k_0r) \phi(\mu) d\mu \int_{\gamma_\nu} \frac{\mu\nu}{\nu^2 - \mu^2} \psi(\nu) d\nu + \right. \\ \left. + \int_{\gamma_\nu} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(k_0r) \psi(\nu) d\nu \int_{\gamma_\mu} \frac{\mu\nu}{\mu^2 - \nu^2} \phi(\mu) d\mu \right]. \quad (3.93)$$

В первом члене преобразуем контур интегрирования по  $\nu$  в контур  $\gamma'_\nu$ , показанный на рис. 3.10 (нижняя ветвь отражена симметрично относительно

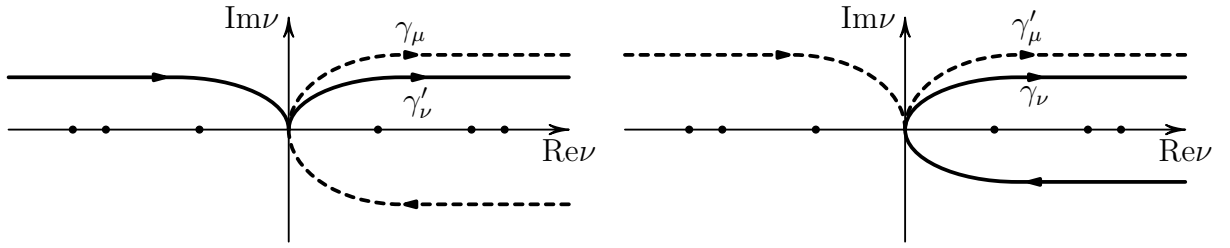


Рис. 3.10. Контуры  $\gamma'_\mu$  и  $\gamma'_\nu$ .

нуля). В силу четности  $\phi(\nu)$  значение интеграла при этом не меняется. Для каждого ненулевого  $\mu$  интеграл по  $\nu$  может быть вычислен методом вычетов после замыкания контура на  $+i\infty$ . Во втором члене контур  $\gamma_\mu$  преобразуется в  $\gamma'_\mu$ . Этот контур также замыкается в  $+i\infty$ .

Подынтегральная функция первого внутреннего интеграла имеет простой полюс при  $\nu = \mu$ , если  $\text{Im } \mu > 0$ , и при  $\nu = -\mu$ , если  $\text{Im } \mu < 0$ , а подынтегральная функция второго внутреннего интеграла регулярна. Окрестность точки  $\mu = \nu = 0$  не дает вклада в интегралы, поскольку подынтегральные функции в ней ограничены. В результате получаем (3.87).  $\square$

**Теорема 3.3** (формула Планшереля). Пусть функции  $h_1(r)$  и  $h_2(r)$  имеют представления (3.85) с трансформантами  $\phi_1$  и  $\phi_2$  соответственно. Тогда

$$\int_0^\infty h_1(r)h_2(r)\frac{dr}{r} = \frac{1}{4} \int_\gamma e^{-i\pi\nu} \phi_1(\nu)\phi_2(\nu) \nu d\nu. \quad (3.94)$$

*Доказательство.* Будем следовать процедуре доказательства предыдущей теоремы, т.е. деформируем контуры в  $\gamma_\mu$  и  $\gamma_\nu$ , изменим порядок интегрирования, затем используем известную формулу [192]

$$\int_0^\infty J_\mu(k_0r)J_\nu(k_0r)\frac{dr}{r} = \frac{2 \sin[\pi(\mu - \nu)/2]}{\pi \mu^2 - \nu^2}. \quad (3.95)$$

После этого разобьем интеграл на сумму двух членов и преобразуем их в повторные. Используя симметрию, преобразуем контуры интегрирования внутренних интегралов в  $\gamma'_\mu$  и  $\gamma'_\nu$ . Вычислим внутренние интегралы методом вычетов. В результате получим (3.94).  $\square$

#### 3.4.4. Модифицированные формулы Смышляева

Применяя построенную выше технику преобразования интегралов, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 3.4.** *Справедливы следующие формулы для дифракционного коэффициента (модифицированные формулы Смышляева):*

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} v^2(\omega, \mu) \phi^2(\omega_0, \mu) \mu d\mu; \quad (3.96)$$

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_y + \omega_{0y}} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} v^1(\omega, \mu) \phi^1(\omega_0, \mu) \mu d\mu; \quad (3.97)$$

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i/8\pi}{(\omega_x + \omega_{0x})(\omega_y + \omega_{0y})} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [V^1(\omega, \omega_0, \nu) + V^2(\omega, \omega_0, \nu) + 2\nu\omega_{0x}v^1(\omega, \nu)\phi^1(\omega_0, \nu) + 2\nu\omega_{0y}v^2(\omega, \nu)\phi^2(\omega_0, \nu)] d\nu; \quad (3.98)$$

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i/8\pi}{(\omega_x + \omega_{0x})(\omega_y + \omega_{0y})} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} C_2^1(\mu) [\phi^1(\omega, \mu)\phi^2(\omega_0, \mu) - \phi^1(\omega_0, \mu)\phi^2(\omega, \mu)] \mu d\mu. \quad (3.99)$$

Здесь

$$\phi^k(\omega, \mu) = \frac{v^k(\omega, \mu - 1) - v^k(\omega, \mu + 1)}{\mu}, \quad k = 1, 2, \quad (3.100)$$

$$V^k(\omega, \omega_0, \nu) = v^k(\omega, \nu + 1)v^k(\omega_0, \nu - 1) - v^k(\omega, \nu - 1)v^k(\omega_0, \nu + 1), \quad (3.101)$$

а контур  $\Gamma$  состоит из двух петель, охватывающих точки  $\nu_1 - 1$  и  $1 - \nu_1$ , как показано на рис. 3.11.

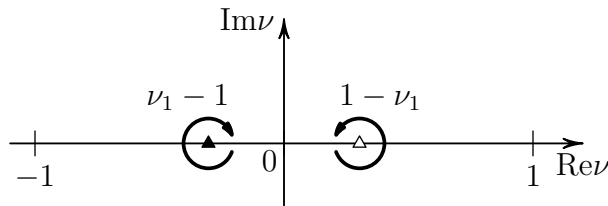


Рис. 3.11. Контур  $\Gamma$ .

Доказательство приведено в А.4. Идейно оно не отличается от доказательств теорем 3.2 и 3.3, однако является технически более сложным.

Формулы (3.96) и (3.97) следуют из трехмерных формул расщепления (3.52) и (3.53) соответственно. Их можно рассматривать, как более сложный вариант доказанной выше формулы Планшереля (3.94).

Формулы (3.98) и (3.99) следуют из трехмерных формул расщепления (3.65) и (3.66) соответственно. Их можно рассматривать, как комбинацию более сложных вариантов формул Планшереля и свертки.

Область направлений, в которой интегралы в данных формулах можно преобразовать в экспоненциально сходящиеся, шире, чем для формулы Смышляева. Действительно, можно показать [12], что при больших  $\nu$  справедливы оценки

$$v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) \sim e^{-|\operatorname{Im} \nu| \zeta_1} \quad (3.102)$$

$$v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu) \sim e^{-|\operatorname{Im} \nu| \zeta_2} \quad (3.103)$$

$$C_2^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) \sim e^{-\frac{\pi}{2} |\operatorname{Im} \nu|}. \quad (3.104)$$

Таким образом, контур  $\gamma$  можно преобразовать в мнимую ось при следующих условиях:

$$\text{для формулы (3.96):} \quad \zeta_2 + \zeta_2^0 > \pi, \quad (3.105)$$

$$\text{для формулы (3.97):} \quad \zeta_1 + \zeta_1^0 > \pi, \quad (3.106)$$

$$\text{для формулы (3.99):} \quad \zeta_1 + \zeta_2^0 > \pi/2 \quad \text{и} \quad \zeta_2 + \zeta_1^0 > \pi/2. \quad (3.107)$$

Заметим, что для случая дифракции на четверти плоскости условие (3.12) принимает вид

$$\zeta_1 + \zeta_1^0 > \pi \quad \text{и} \quad \zeta_2 + \zeta_2^0 > \pi. \quad (3.108)$$

Рассматриваемые свойства модифицированных формул Смышляева объясняются тем, что операторы  $H_x$  и  $H_y$  аннулируют одну из цилиндрических волн, рассеянных ребрами (каждый свою), а оператор  $H_{xy}$  аннулирует сразу обе этих волны. Соответствующие этим волнам сингулярности дифракционного коэффициента оказываются вынесенными в множители перед интегралами, а сами интегралы в окрестностях этих особенностей оказываются регулярными.

Формулы (3.96), (3.97) и (3.99) были предложены в работе [12]. Однако там они были угаданы, после чего их справедливость проверялась прямым вычислением вычетов. Было неясно, как конструктивно получить их из соответствующих трехмерных формул расщепления. Построенная техника преобразования вложенных контурных интегралов позволяет получить эти формулы с помощью прозрачной процедуры.

### §3.5. Формулы расщепления на сфере с разрезом

Формулы (3.1) и (3.96)–(3.99) выражают дифракционный коэффициент через решения задач для оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере с разрезом. Заметим, что эти формулы получаются независимо друг от

друга. Естественно задать вопрос, существует ли связь между ними, и если существует, то какая.

В данном разделе устанавливаются нетривиальные связи между собственными функциями сферической задачи, сферической функцией Грина и сферическими краевыми функциями Грина. Будем называть эти связи формулами расщепления на сфере. С их помощью формулы (3.96)–(3.99) выводятся из (3.1).

### 3.5.1. Операторы расщепления

Пусть  $W(\omega)$  произвольная достаточно гладкая функция на единичной сфере. Введем операторы  $X_\nu$  и  $Y_\nu$  с помощью равенств:

$$\frac{\partial}{\partial x} r^{\nu-1/2} W(\omega) = r^{\nu-3/2} X_\nu[W(\omega)], \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} r^{\nu-1/2} W(\omega) = r^{\nu-3/2} Y_\nu[W(\omega)]. \quad (3.110)$$

Будем называть  $X_\nu$  и  $Y_\nu$  операторами расщепления. Эти операторы имеют следующие представления в координатах  $(\zeta_1, \phi_1)$  и  $(\zeta_2, \phi_2)$ , показанных на рис. 3.4.

$$X_\nu = \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \cos \zeta_1 - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \quad (3.111)$$

$$Y_\nu = \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \sin \zeta_1 \cos \phi_1 + \cos \zeta_1 \cos \phi_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \frac{\sin \phi_1}{\sin \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \quad (3.112)$$

$$X_\nu = \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \sin \zeta_2 \cos \phi_2 + \cos \zeta_2 \cos \phi_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} - \frac{\sin \phi_2}{\sin \zeta_2} \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \quad (3.113)$$

$$Y_\nu = \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \cos \zeta_2 - \sin \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2}. \quad (3.114)$$

Сформулируем два важных свойства этих операторов.

**Лемма 3.1.** Пусть достаточно гладкая функция  $W(\omega)$  удовлетворяет граничным условиям

$$W(\omega)|_{S_q} = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n} W(\omega)|_{\tilde{S}_q} = 0. \quad (3.115)$$

Тогда  $X_\nu[W(\omega)]$  и  $Y_\nu[W(\omega)]$  также удовлетворяют этим условиям.

*Доказательство.* Из условий леммы следует, что комбинация  $r^{\nu-1/2} W(\omega)$  удовлетворяет однородным условиям Дирихле на  $Q$  и однородным условиям Неймана на  $\tilde{Q}$ . Поскольку дифференцирование по  $x$  и  $y$  сохраняет эти условия, из определения  $X_\nu$  и  $Y_\nu$  следует утверждение леммы.  $\square$



**Лемма 3.2.** Пусть достаточно гладкая функция  $W(\boldsymbol{\omega})$  удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Delta}_\nu W(\boldsymbol{\omega}) = h(\boldsymbol{\omega}). \quad (3.116)$$

Тогда  $X_\nu[W(\boldsymbol{\omega})]$  и  $Y_\nu[W(\boldsymbol{\omega})]$  удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\Delta}_{\nu-1} X_\nu[W(\boldsymbol{\omega})] = X_{\nu-2}[h(\boldsymbol{\omega})], \quad (3.117)$$

$$\tilde{\Delta}_{\nu-1} Y_\nu[W(\boldsymbol{\omega})] = Y_{\nu-2}[h(\boldsymbol{\omega})], \quad (3.118)$$

*Доказательство.* Докажем утверждение леммы для оператора  $X_\nu$ . Доказательство для  $Y_\nu$  аналогично. Из условий леммы следует, что комбинация  $r^{\nu-1/2}W(\boldsymbol{\omega})$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta[r^{\nu-1/2}W(\boldsymbol{\omega})] = r^{\nu-5/2}h(\boldsymbol{\omega}). \quad (3.119)$$

Поскольку оператор Лапласа коммутирует с дифференцированием по  $x$ , можно записать, что

$$\frac{\partial}{\partial x} r^{\nu-5/2}h(\boldsymbol{\omega}) = \Delta\left[\frac{\partial}{\partial x} r^{\nu-1/2}W(\boldsymbol{\omega})\right], \quad (3.120)$$

Применяя определение  $X_\nu$ , преобразуем это уравнение следующим образом:

$$r^{\nu-7/2}X_{\nu-2}[h(\boldsymbol{\omega})] = \Delta[r^{\nu-3/2}X_\nu[W(\boldsymbol{\omega})]]. \quad (3.121)$$

Учитывая явный вид оператора Лапласа в сферических координатах, получим утверждение леммы.  $\square$

### 3.5.2. Формулы расщепления

Свойства операторов  $X_\nu$  и  $Y_\nu$ , сформулированные выше, позволяют доказать три важных теоремы.

**Теорема 3.5.** Если  $\nu_j$  принадлежит спектру, а  $\nu_j \pm 1$  не принадлежат, то справедливы следующие формулы.

$$2\nu_j\omega_x\Phi_j(\boldsymbol{\omega}) = \tilde{C}_j[v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 1) - v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j + 1)], \quad (3.122)$$

$$2\nu_j\omega_y\Phi_j(\boldsymbol{\omega}) = C_j[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 1) - v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_j + 1)]. \quad (3.123)$$

*Доказательство.* Докажем первую формулу. Доказательство второй аналогично. Рассмотрим функцию  $X_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})]$ . Применяя представления (3.111) и (3.113) к асимптотикам (3.34) и (3.35), получим для нее следующие асимптотики на краях разреза:

$$X_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] = O(\zeta_1^{1/2}), \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.124)$$

$$X_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] = -\frac{\tilde{C}_j}{\sqrt{\pi}}\zeta_2^{-1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{1/2}), \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.125)$$

Следовательно, комбинация  $X_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] - \tilde{C}_j v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 1)$  удовлетворяет условиям Мейкснера на краях разреза. Из лемм 3.1 и 3.2 и из определения краевых функций Грина следует, что она также удовлетворяет однородным условиям Дирихле на  $S_q$ , однородным условиям Неймана на  $\tilde{S}_q$  и уравнению

$$\tilde{\Delta}_{\nu_j-1}[X_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] - \tilde{C}_j v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 1)] = 0. \quad (3.126)$$

Так как по условию теоремы  $\nu_j - 1$  не принадлежит спектру, эта комбинация тождественно равна нулю. Следовательно,

$$X_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] = \tilde{C}_j v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 1). \quad (3.127)$$

Принимая во внимание представление (3.111), можно записать

$$\left(\nu_j - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_1 \Phi_j(\boldsymbol{\omega}) - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \Phi_j(\boldsymbol{\omega}) = \tilde{C}_j v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 1). \quad (3.128)$$

Подставляя в это равенство  $-\nu_j$  вместо  $\nu_j$  и учитывая четность краевых функций Грина, получаем

$$\left(-\nu_j - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_1 \Phi_j(\boldsymbol{\omega}) - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \Phi_j(\boldsymbol{\omega}) = \tilde{C}_j v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j + 1). \quad (3.129)$$

Вычитая последние два равенства и пользуясь тем, что  $\cos \zeta_1 = \omega_x$ , получаем (3.130).  $\square$

**Теорема 3.6.** *Если  $\nu$  и  $\nu \pm 1$  не принадлежат спектру, то справедливы следующие формулы.*

$$2\nu\omega_x v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) + v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)] + C_2^1(\nu)[v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) - v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)], \quad (3.130)$$

$$2\nu\omega_y v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \nu[v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) + v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)] + C_2^1(\nu)[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) - v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)]. \quad (3.131)$$

*Доказательство.* Докажем первую формулу. Доказательство второй аналогично. Рассмотрим функцию  $X_\nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu)]$ . Применяя представления (3.111) и (3.113) к асимптотикам (3.46) и (3.48), получим следующие асимптотики  $X_\nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu)]$  на краях разреза:

$$X_\nu[v^1(\zeta_1, \phi_1, \nu)] = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi}} \zeta_1^{-1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\zeta_1^{1/2}), \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.132)$$

$$X_\nu[v^1(\zeta_2, \phi_2, \nu)] = -\frac{C_2^1(\nu)}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{-1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{1/2}), \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.133)$$

Следовательно, комбинация  $X_\nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu)] - \nu v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) - C_2^1(\nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1)$  удовлетворяет условиям Мейкснера на краях разреза. Из лемм 3.1 и 3.2 и из определения краевых функций Грина следует, что она также удовлетворяет однородным условиям Дирихле на  $S_q$ , однородным условиям Неймана на  $\tilde{S}_q$  и уравнению

$$\tilde{\Delta}_{\nu-1}[X_\nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu)] - \nu v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) - C_2^1(\nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1)] = 0. \quad (3.134)$$

По условию теоремы  $\nu - 1$  не принадлежит спектру, а значит, эта комбинация тождественно равна нулю, то есть

$$X_\nu[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu)] = \nu v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) + C_2^1(\nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1). \quad (3.135)$$

Принимая во внимание представление (3.111), можно записать

$$\begin{aligned} \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_1 v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \\ = \nu v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) + C_2^1(\nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Подставляя сюда  $-\nu$  вместо  $\nu$  и учитывая четность краевых функций Грина и  $C_2^1(\nu)$ , получаем

$$\begin{aligned} \left(-\nu - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_1 v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \\ = -\nu v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1) + C_2^1(\nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Вычитая последние два равенства и пользуясь тем, что  $\cos \zeta_1 = \omega_x$ , получаем (3.130).  $\square$

Чтобы получить формулу расщепления для сферической функции Грина, нам потребуется лемма, связывающая ее краевые асимптотики и краевые функции Грина.

**Лемма 3.3.** *Справедливы следующие соотношения*

$$g^s(\zeta_1, \phi_1; \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \frac{v^1(\boldsymbol{\omega}_0, \nu)}{\sqrt{\pi}} \zeta_1^{1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\zeta_1^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.138)$$

$$g^s(\zeta_2, \phi_2; \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \frac{v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu)}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{3/2}) \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.139)$$

*Доказательство.* Рассмотрим асимптотику функции Грина при  $\zeta_1 \rightarrow 0$ :

$$g^s(\zeta_1, \alpha_1; \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \frac{C_g}{\sqrt{\pi}} \zeta_1^{1/2} \sin \frac{\alpha_1}{2} + O(\zeta_1^{3/2}), \quad (3.140)$$

где  $C_g$  — неизвестный коэффициент. Из теоремы взаимности следует, что

$$g^s(\zeta_1, \alpha_1; \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = g^s(\boldsymbol{\omega}_0; \zeta_1, \alpha_1; \nu). \quad (3.141)$$

Из определения краевой функции Грина  $v^1$  получаем, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} g^s(\boldsymbol{\omega}_0; \zeta_1 = \kappa, \alpha_1 = \pi; \nu) = v^1(\boldsymbol{\omega}_0, \nu). \quad (3.142)$$

Отсюда следует равенство

$$v^1(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) = C_g,$$

что в результате дает (3.138). Формула (3.139) получается аналогично.  $\square$

В дальнейшем будем опускать аргументы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\omega}_0$  функции Грина  $g^s$ , в случаях, когда это не ведет к недоразумениям.

Обозначим сферические координаты  $(\zeta_{1,2}, \phi_{1,2})$  точки  $\boldsymbol{\omega}_0$  как  $(\zeta_{1,2}^0, \phi_{1,2}^0)$ .

**Теорема 3.7.** *Если  $\nu$  и  $\nu \pm 1$  не принадлежат спектру, то справедливы следующие формулы:*

$$2\nu\omega_x g^s(\nu) = \nu\omega_{0x} [g^s(\nu - 1) + g^s(\nu + 1)] + \frac{\nu}{2} v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}, \nu) - \left( \frac{3\omega_{0x}}{2} + \sin \zeta_1^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1^0} \right) [g^s(\nu - 1) - g^s(\nu + 1)]. \quad (3.143)$$

$$2\nu\omega_y g^s(\nu) = \nu\omega_{0y} [g^s(\nu - 1) + g^s(\nu + 1)] + \frac{\nu}{2} v^1(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) - \left( \frac{3\omega_{0y}}{2} + \sin \zeta_2^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_2^0} \right) [g^s(\nu - 1) - g^s(\nu + 1)]. \quad (3.144)$$

*Доказательство.* Докажем первую формулу. Доказательство второй аналогично. Рассмотрим функцию  $X_\nu[g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)]$ . Применяя представления (3.111) и (3.113) к асимптотикам (3.138) и (3.139), получим следующие асимптотики  $X_\nu[g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)]$  на краях разреза:

$$X_\nu[g^s(\zeta_1, \phi_1; \boldsymbol{\omega}_0, \nu)] = O(\zeta_1^{1/2}) \quad \text{при } \zeta_1 \rightarrow 0, \quad (3.145)$$

$$X_\nu[g^s(\zeta_2, \phi_2; \boldsymbol{\omega}_0, \nu)] = -\frac{v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu)}{2\sqrt{\pi}} \zeta_2^{-1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\zeta_2^{1/2}) \quad \text{при } \zeta_2 \rightarrow 0. \quad (3.146)$$

Следовательно, комбинация

$$g_*(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) := X_\nu[g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)] - v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1)/2 \quad (3.147)$$

удовлетворяет условиям Мейкснера на краях разреза. Из лемм 1 и 2 и из определения краевых функций Грина следует, что она также удовлетворяет

однородным условиям Дирихле на  $S_q$ , однородным условиям Неймана на  $\tilde{S}_q$  и уравнению

$$\tilde{\Delta}_{\nu-1}g_*(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = X_{\nu-2}[\delta^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0)]. \quad (3.148)$$

Здесь  $\delta^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = [\delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) + \delta(\boldsymbol{\omega} - \bar{\boldsymbol{\omega}}_0)]/2$ . Принимая во внимание представление (3.111), можно записать

$$X_{\nu-2}[\delta^s(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)] = \left(\nu - \frac{5}{2}\right) \cos \zeta_1 \delta^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \delta^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0). \quad (3.149)$$

Используем следующие свойства дельта-функции справедливые при достаточно гладкой функции  $w(x)$ :

$$w(x)\delta(x-a) = w(a)\delta(x-a), \quad (3.150)$$

$$w(x)\delta'_x(x-a) = -w(a)\delta'_a(x-a) - w'(a)\delta(x-a). \quad (3.151)$$

Эти свойства позволяют преобразовать выражение (3.149) к виду

$$X_{\nu-2}[\delta^s(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)] = \left[\left(\nu - \frac{3}{2}\right) \cos \zeta_1^0 + \sin \zeta_1^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1^0}\right] \delta^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0). \quad (3.152)$$

Для  $g_*(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)$  получаем

$$g_*(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \left[\left(\nu - \frac{3}{2}\right) \cos \zeta_1^0 + \sin \zeta_1^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1^0}\right] g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu - 1). \quad (3.153)$$

Из представления (3.111) следует, что

$$\begin{aligned} \left[\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_1 - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right] g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) &= v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1)/2 + \\ &+ \left[\left(\nu - \frac{3}{2}\right) \cos \zeta_1^0 + \sin \zeta_1^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1^0}\right] g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu - 1). \end{aligned} \quad (3.154)$$

Подставляя в это равенство  $-\nu$  вместо  $\nu$  и учитывая четность функции Грина (и, следовательно, ее производных по угловым переменным), получаем

$$\begin{aligned} \left[\left(-\nu - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_1 - \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right] g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) &= v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)/2 + \\ &+ \left[\left(-\nu - \frac{3}{2}\right) \cos \zeta_1^0 + \sin \zeta_1^0 \frac{\partial}{\partial \zeta_1^0}\right] g^s(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu + 1). \end{aligned} \quad (3.155)$$

Вычитая последние два равенства и полагая  $\cos \zeta_1 = \omega_x$  и  $\cos \zeta_1^0 = \omega_{0x}$ , получим (3.130).  $\square$

### 3.5.3. Вывод модифицированных формул Смышляева с помощью формул расщепления на сфере

Применим полученные формулы расщепления к выводу модифицированных формул Смышляева (3.96) – (3.99).

#### Вывод формулы (3.96) из формулы (3.1)

Домножим равенство (3.143) на  $e^{-i\pi\nu}$  и проинтегрируем результат по контуру  $\gamma \cup \Gamma$ . Поскольку  $g^s(\nu)$  регулярна в точках  $\nu_1 - 1$  и  $1 - \nu_1$ , можно записать

$$\int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} g^s(\nu) \nu d\nu = \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} g^s(\nu) \nu d\nu. \quad (3.156)$$

Рассмотрим интеграл от первого члена в правой части (3.143). Заменяя переменную интегрирования на  $\mu = \nu \pm 1$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [g^s(\nu - 1) + g^s(\nu + 1)] \nu d\nu = \\ = - \int_{\gamma \cup \Gamma + 1} e^{-i\pi\mu} g^s(\mu) (\mu - 1) d\mu - \int_{\gamma \cup \Gamma - 1} e^{-i\pi\mu} g^s(\mu) (\mu + 1) d\mu. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Контур интегрирования в первом члене,  $\gamma \cup \Gamma + 1$ , показан на рис. 3.12. Поскольку подынтегральное выражение регулярно в точке  $2 - \nu_1$  и точка

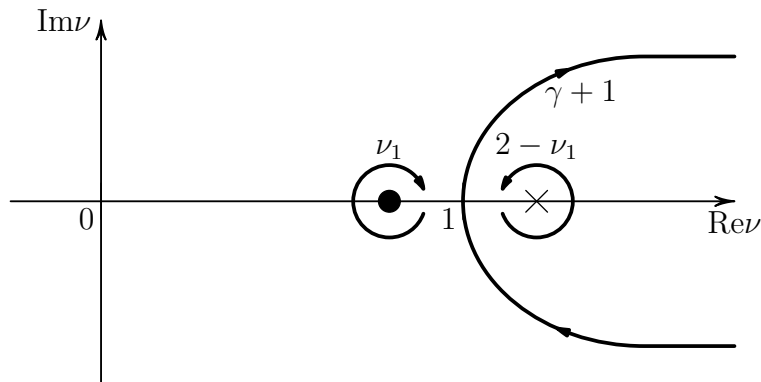


Рис. 3.12. Контур  $\gamma \cup \Gamma + 1$ .

$\nu_1$  — его единственный полюс на  $[0, 1]$ , можно деформировать этот контур в  $\gamma$ . Прделывая то же самое с контуром  $\gamma \cup \Gamma - 1$ , получаем

$$\int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [g^s(\nu - 1) + g^s(\nu + 1)] \nu d\nu = -2 \int_{\gamma} e^{-i\pi\mu} g^s(\mu) \mu d\mu. \quad (3.158)$$

Аналогично рассматривая третий член в правой части (3.143), получим

$$\int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [g^s(\nu - 1) - g^s(\nu + 1)] d\nu = 0. \quad (3.159)$$

Собирая все вместе, получаем

$$2\omega_x \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} g^s(\nu) \nu d\nu = -2\omega_{0x} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} g^s(\nu) \nu d\nu + \\ + \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} \frac{\nu}{2} v^2(\omega_0, \nu) \phi^2(\omega, \nu) d\nu. \quad (3.160)$$

Используя (3.1), получаем (3.96). Формула (3.97) может быть получена аналогично.

Строго говоря, изложенное доказательство работает только в области направлений рассеяния, в которой сходится интеграл (3.1). Однако его легко обобщить на случай, когда этот интеграл расходится, используя предел Абеля–Пуассона (3.9) при  $n = 1$ .

Действительно, на первом этапе умножим формулу (3.143) на  $e^{-i\pi\nu - \varepsilon\nu}$ . Затем, как и раньше, проинтегрируем ее по контуру  $\gamma \cup \Gamma$ , сделаем замену переменных и деформируем контур интегрирования. В результате для первого члена в правой части (3.143) получим следующее:

$$\int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [g^s(\nu - 1) + g^s(\nu + 1)] \nu d\nu = -(e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}) \int_{\gamma} e^{-i\pi\mu - \varepsilon\mu} g^s(\mu) \mu d\mu - \\ - (e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}) \int_{\gamma} e^{-i\pi\mu - \varepsilon\mu} g^s(\mu) d\mu. \quad (3.161)$$

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  второй член справа исчезает, а первый принимает нужное значение. Остальные члены в правой части (3.143) преобразуются аналогичным образом.

### Вывод формулы (3.99) из (3.96)

Используя теорему взаимности, запишем формулу (3.96) в двух эквивалентных видах:

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} v^2(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \mu d\mu, \quad (3.162)$$

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}, \mu) \mu d\mu. \quad (3.163)$$

Домножая первое равенство на  $2\omega_y$ , а второе на  $2\omega_{0y}$  и пользуясь формулой расщепления (3.131), получаем

$$2\omega_y f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} [v^2(\boldsymbol{\omega}, \mu - 1) + v^2(\boldsymbol{\omega}, \mu + 1) + C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu)] \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \mu d\mu, \quad (3.164)$$

$$2\omega_{0y} f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} [v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu - 1) + v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu + 1) + C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu)] \phi^2(\boldsymbol{\omega}, \mu) \mu d\mu. \quad (3.165)$$

Складывая эти равенства и пользуясь выражением для  $\phi^2$ , получаем

$$2(\omega_y + \omega_{0y}) f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i/4\pi}{\omega_x + \omega_{0x}} \times \left( \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} C_2^1(\mu) [\phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) + \phi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}, \mu)] \mu d\mu + \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} [v^2(\boldsymbol{\omega}, \mu - 1) v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu - 1) - v^2(\boldsymbol{\omega}, \mu + 1) v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu + 1)] d\mu \right). \quad (3.166)$$

Аналогично (3.158) получаем, что второй интеграл в правой части последней формулы равен нулю. В результате имеем (3.99).

Таким же образом формула (3.99) может быть получена из (3.98) с использованием (3.130) и (3.131).



### §3.6. Пример численных расчетов

Построим процедуру вычисления дифракционного коэффициента для задачи дифракции на четверти плоскости по формуле (3.96).

Проводить вычисления будем в «комфортной зоне», т.е. в области направлений  $\omega$  и  $\omega_0$ , в которой возможно деформировать контур интегрирования  $\gamma$  в прямую, параллельную мнимой оси  $\nu$ . В нашем случае условие (3.12) имеет вид

$$\zeta_2 + \zeta_2^0 > \pi \quad (3.167)$$

Для применения формулы (3.96) необходимо построить процедуру вычисления краевой функции Грина. Будем искать краевую функцию Грина  $v^2$  в виде суммы

$$v^2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2. \quad (3.168)$$

Функция  $v_0^2$  определяется как

$$v_0^2 = -\frac{\nu}{\sqrt{2} \sin \pi \nu} P_{\nu-1/2}^{-1/2}(-\cos \zeta_2) \sin(\phi_2/2). \quad (3.169)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа–Бельтрами при  $0 < \phi_2 < 2\pi$ , обладает заданной асимптотикой вблизи  $y$ -вершины разреза и удовлетворяет граничному условию Дирихле на разрезе  $S_q$ . В то же время, эта функция имеет разрыв первой производной на дуге  $\tilde{S}_q$  (на дополнении  $S$  до целого экватора). Таким образом, на  $\tilde{S}_q$  нарушается уравнение Лапласа–Бельтрами.

Функция  $v_1^2$  «поправляет» поведение функции  $v_0^2$  на  $\tilde{S}_q$ :

$$v_1^2(\omega) = -\int_{\tilde{S}_q} g_0(\omega, \omega', \nu) \frac{v_0^2(\omega')}{\sin(\zeta_1(\omega'))} dl'. \quad (3.170)$$

Здесь  $g_0$  — функция Грина «пустой» сферы, то есть [24]

$$g_0(\omega, \omega', \nu) = -\frac{1}{4 \cos \pi \nu} P_{\nu-1/2}(-\cos \ell(\omega, \omega')), \quad (3.171)$$

где  $P$  — функция Лежандра.

Сумма  $v_0^2 + v_1^2$  обладает заданной сверхсингулярной асимптотикой вблизи  $y$ -вершины разреза и является гладкой на  $\tilde{S}_q$ , но из-за функции  $v_1^2$  нарушаются граничные условия на  $S_q$ . Функция  $v_2^2$  исправляет эти граничные условия. А именно, функция  $v_2^2$  ищется в виде потенциала простого слоя

$$v_2^2(\omega) = \int_S g_0(\omega, \omega', \nu) \vartheta(\omega') dl', \quad (3.172)$$

где плотность  $\vartheta$  есть решение интегрального уравнения

$$\int_S g_0(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \nu) \vartheta(\boldsymbol{\omega}') dl' = -v_1^2(\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in S_q. \quad (3.173)$$

Нетрудно видеть, что сумма (3.168) удовлетворяет всем условиям, накладываемым на краевую функцию Грина.

Для контроля результатов проводились вычисления по формуле (3.1). Отраженная часть  $g_r$  функции Грина сферы с разрезом вычислялась как потенциал простого слоя, а именно

$$g_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \nu) = \int_{S_q} g_0(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \nu) \vartheta(\boldsymbol{\omega}') dl', \quad (3.174)$$

где  $\vartheta$  — неизвестный потенциал, который находится из интегрального уравнения

$$\int_{S_q} g_0(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \nu) \vartheta(\boldsymbol{\omega}') dl' = -g_0(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}, \nu), \quad \boldsymbol{\omega} \in S_q. \quad (3.175)$$

Уравнение решается численно.

Для сравнения дифракционных коэффициентов, вычисленных по формулам (3.96) и (3.1) выбиралось направление падающей волны на оси симметрии задачи:  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\theta = \pi/2, \varphi = 5\pi/4)$ . Направления рассеяния выбирались с координатами  $(\theta, 5\pi/4)$  при различных  $\theta$ . Действительная часть дифракционного коэффициента в конических задачах тождественно равна нулю, поэтому сравнивались мнимые части. Результат показан на рис. 3.13. Крестики соответствуют расчету на основе формулы (3.96), сплошные линии — на основе (3.1). Разница не превосходила  $3 \times 10^{-4}$ , т.е. получено очень хорошее согласие.

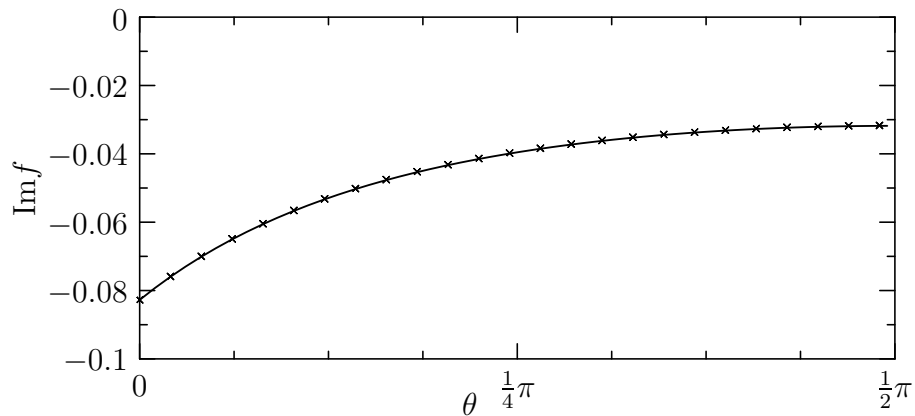


Рис. 3.13. Зависимость дифракционного коэффициента от направления рассеяния.

## §3.7. Задача дифракции на трехгранном конусе

### 3.7.1. Постановка задачи

Постановка задачи дифракции на трехгранном конусе в основном аналогична постановке задачи дифракции на четверти плоскости. Рассеиватель теперь представляет собой октант  $P = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ . На него падает плоская волна вида (3.15). На гранях октанта ставятся однородные граничные условия Дирихле. Условия в вершине могут быть записаны в виде (3.19). Для постановки условий излучения также используется прием с удалением источника функции Грина  $G$  на бесконечность (3.24). Искомый дифракционный коэффициент определяется соотношением (3.25).

Единственное отличие заключается в формулировке краевых условий для полного поля  $u$ , которые теперь выглядят следующим образом:

$$u(x, \rho_x, \alpha_x) = C_x(x)\rho_x^{2/3} \sin \frac{2\alpha_x}{3} + D_x(x)\rho_x^{4/3} \sin \frac{4\alpha_x}{3} + O(\rho_x^2), \quad \rho_x \rightarrow 0, \quad (3.176)$$

$$u(y, \rho_y, \alpha_y) = C_y(y)\rho_y^{2/3} \sin \frac{2\alpha_y}{3} + D_y(y)\rho_y^{4/3} \sin \frac{4\alpha_y}{3} + O(\rho_y^2), \quad \rho_y \rightarrow 0, \quad (3.177)$$

$$u(z, \rho_z, \alpha_z) = C_z(z)\rho_z^{2/3} \sin \frac{2\alpha_z}{3} + D_z(z)\rho_z^{4/3} \sin \frac{4\alpha_z}{3} + O(\rho_z^2), \quad \rho_z \rightarrow 0, \quad (3.178)$$

где  $\rho_{x,y,z}$  и  $\alpha_{x,y,z}$  — локальные цилиндрические координаты, показанные на рис. 3.14,  $C_{x,y,z}$  и  $D_{x,y,z}$  — некоторые неизвестные функции.

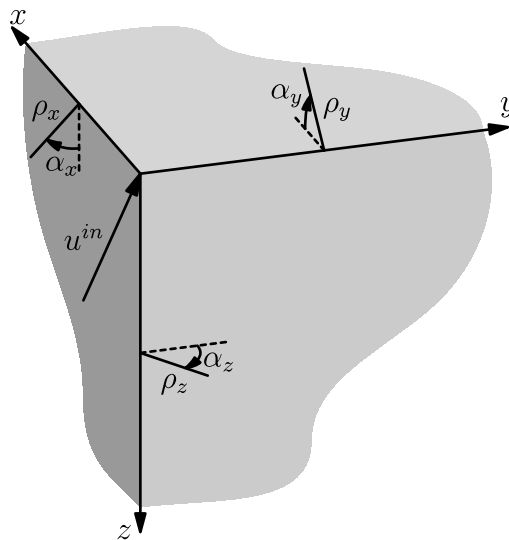


Рис. 3.14. Геометрия задачи.

### 3.7.2. Собственные функции задачи на сфере

Отделение радиальной переменной приводит к задаче на собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере  $S_p$  с «вырезанным» октантом  $P$  треугольником (см. рис. 3.15):

$$\tilde{\Delta}_\nu \Phi(\omega) = 0, \quad (3.179)$$

$$\Phi|_{\partial S_p} = 0, \quad (3.180)$$

$$\Phi = O\left[\zeta_c^{2/3} \sin \frac{2\alpha_c}{3}\right] \quad \text{при } \zeta_c \rightarrow 0, \quad c = x, y, z, \quad (3.181)$$

где  $(\zeta_c, \alpha_c)$  — сферические координаты, показанные на рис. 3.15. Собственные

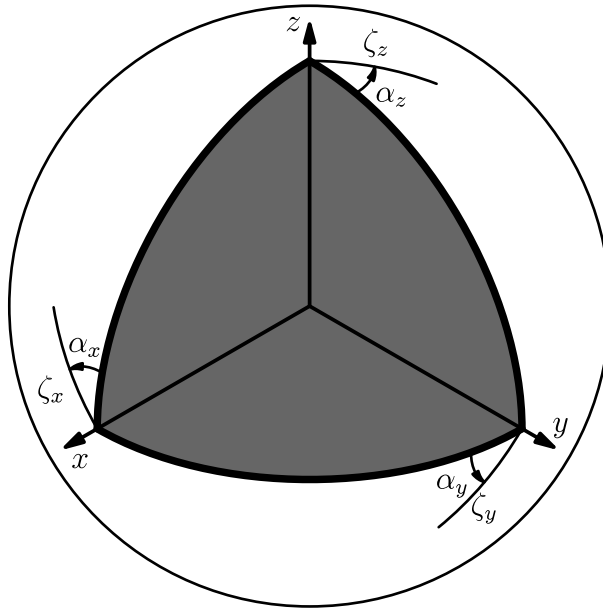


Рис. 3.15. Геометрия задачи на сфере.

функции  $\Phi_n(\omega)$ , отвечающие собственным значениям  $\nu_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , предполагаются нормированными в соответствии с (3.33). Введем коэффициенты  $C_n^{x,y,z}$  и  $D_n^{x,y,z}$  в соответствии с соотношениями

$$\Phi_n = C_n^c \zeta_c^{2/3} \sin \frac{2\phi_c}{3} + D_n^c \zeta_c^{4/3} \sin \frac{4\phi_c}{3} + O(\zeta_c^2) \quad \text{при } \zeta_c \rightarrow 0, \quad c = x, y, z. \quad (3.182)$$

### 3.7.3. Трехмерные краевые функции Грина

Введем шесть трехмерных краевых функций Грина  $G_{x,y,z}^1$  и  $G_{x,y,z}^2$ , соответствующих монопольным и дипольным источникам, помещенным на ребра

рассеивателя:

$$G_x^1(\mathbf{r}; X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2/3} G(\mathbf{r}; X, -\varepsilon/\sqrt{2}, -\varepsilon/\sqrt{2}), \quad (3.183)$$

$$G_x^2(\mathbf{r}; X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-4/3} \frac{\partial}{\partial \alpha_x} G(\mathbf{r}; X, -\varepsilon/\sqrt{2}, -\varepsilon/\sqrt{2}), \quad (3.184)$$

и аналогично для остальных ребер.

Введем диаграммы направленности этих функций,  $f_{x,y,z}^{1,2}$ , по аналогии с (3.40) и (3.41):

$$G_x^{1,2}(r, \boldsymbol{\omega}; X) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} f_x^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, X) + O[(k_0 r)^{-2}] \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (3.185)$$

и аналогично для остальных ребер. Оказывается, что эти диаграммы связаны с коэффициентами краевых асимптотик полного поля  $u$ .

**Лемма 3.4.** *Справедливы соотношения*

$$C_x(X) = -\frac{8\pi^2}{k_0} f_x^1(\boldsymbol{\omega}_0, X), \quad D_x(X) = -\frac{6\pi^2}{k_0} f_x^2(\boldsymbol{\omega}_0, X) \quad (3.186)$$

и аналогичные им для остальных ребер.

*Доказательство.* Для доказательства первого соотношения заметим, что из (3.176) следует равенство

$$C_x(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2/3} u(X, \varepsilon, 3\pi/4). \quad (3.187)$$

Воспользовавшись определением (3.24) и теоремой взаимности, получим, что

$$C_x(X) = -\lim_{r_0 \rightarrow \infty} 4\pi r_0 e^{-ik_0 r_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2/3} G(r_0, \boldsymbol{\omega}_0; X, \varepsilon, 3\pi/4). \quad (3.188)$$

Последнее равенство вместе с (3.183) и (3.185) дает требуемое.

Доказательство второго соотношения аналогично и основано на равенствах

$$D_x(X) = -\frac{3}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-4/3} \frac{\partial}{\partial \alpha_x} u(X, \varepsilon, 3\pi/4), \quad (3.189)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \alpha_x^0} G(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}). \quad \square \quad (3.190)$$

### 3.7.4. Сферические краевые функции Грина

Введем на  $S_p$  сферическую функцию Грина  $g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu)$  так же, как и при решении задачи о четверти плоскости, с соответствующей модификацией краевых условий. Введем также сферические краевые функции Грина  $v_{x,y,z}^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \nu)$ , соответствующие монопольным и дипольным источникам, помещенным на края рассеивателя, как следующие пределы:

$$v_x^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{-2/3} g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\kappa x}, \nu), \quad (3.191)$$

$$v_x^2(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{-4/3} \frac{\partial}{\partial \alpha_x} g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\kappa x}, \nu), \quad (3.192)$$

и аналогично для остальных ребер. Здесь  $\boldsymbol{\omega}_{\kappa x}$  точка с координатами  $\zeta_x = \kappa$ ,  $\alpha_x = 3\pi/4$ .

Так же, как и сферическая функция Грина, сферические краевые функции Грина удовлетворяют граничным условиям и краевым условиям у двух вершин, не содержащих источников. Однако у вершины, вблизи которой при выполнении предельной процедуры помещался источник, краевые условия нарушаются. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

**Лемма 3.5.** *Имеют место асимптотики*

$$v^1(\zeta_x, \alpha_x, \nu) = -\frac{1}{\pi} \zeta_x^{-2/3} \sin \frac{2\alpha_x}{3} + O[\zeta_x^{2/3}], \quad \zeta_x \rightarrow 0, \quad (3.193)$$

$$v^2(\zeta_x, \alpha_x, \nu) = -\frac{2}{3\pi} \zeta_x^{-4/3} \sin \frac{4\alpha_x}{3} + O[\zeta_x^{2/3}], \quad \zeta_x \rightarrow 0, \quad (3.194)$$

и аналогичные им для  $v_{y,z}^{1,2}$ .

*Доказательство.* Исследуем поведение сферической функции Грина  $g$  в случае, когда и источник и точка наблюдения лежат вблизи вершины,  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $\zeta^0 \rightarrow 0$ . Здесь и далее обозначим  $(\zeta, \alpha)$  — любые из координат  $(\zeta_{x,y,z}, \alpha_{x,y,z})$ .

В этом случае главный член асимптотики может быть получен из решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\zeta} \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(\alpha - \alpha_0) \quad (3.195)$$

в секторе

$$0 < \zeta < \infty, \quad 0 < \alpha < 3\pi/2 \quad (3.196)$$

с граничными условиями

$$g|_{\alpha=0} = g|_{\alpha=3\pi/2} = 0. \quad (3.197)$$

Переход к уравнению Лапласа–Бельтрами дает более высокие члены разложения.

Задачу (3.195)–(3.197) легко решить методом конформных отображений. Действительно, замена переменных

$$\zeta = \tilde{\zeta}^{3/2}, \quad \alpha = 3\tilde{\alpha}/2 \quad (3.198)$$

отображает сектор (3.196) на верхнюю полуплоскость и сохраняет вид уравнения. Воспользовавшись известным решением задачи для полуплоскости и возвращаясь к исходным координатам, получаем, что

$$g = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\zeta^{4/3} + \zeta_0^{4/3} - 2\zeta^{2/3}\zeta_0^{2/3} \cos \left[ \frac{2}{3}(\alpha - \alpha_0) \right]}{\zeta^{4/3} + \zeta_0^{4/3} - 2\zeta^{2/3}\zeta_0^{2/3} \cos \left[ \frac{2}{3}(\alpha + \alpha_0) \right]}. \quad (3.199)$$

Применим к полученному решению определения (3.191) и (3.192), полагая  $\zeta_0 = \kappa$ ,  $\alpha_0 = 3\pi/4$ , что даст главные члены асимптотик (3.193) и (3.194) соответственно.  $\square$

Разложим сферические краевые функции Грина по собственным функциям сферической задачи.

**Лемма 3.6.** *Справедливы разложения*

$$v_x^1(\omega, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j^x \Phi_j(\omega)}{\nu^2 - \nu_j^2}, \quad v_x^2(\omega, \nu) = \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j^x \Phi_j(\omega)}{\nu^2 - \nu_j^2} \quad (3.200)$$

и аналогичные им для  $v_{y,z}^{1,2}$ .

*Доказательство.* Указанные разложения непосредственно следуют из стандартного разложения сферической функции Грина [21]:

$$g(\omega, \omega_0, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi_j(\omega) \Phi_j(\omega_0)}{\nu^2 - \nu_j^2}, \quad (3.201)$$

асимптотик (3.182) и определений (3.191) и (3.192).  $\square$

### 3.7.5. Формула расщепления на сфере

Рассмотрим действие оператора расщепления  $X_\nu$ , введенного в (3.109), на функции, заданные на  $S_p$ .

Прежде всего заметим, что в координатах  $(\zeta_{x,y,z}, \alpha_{x,y,z})$  данный оператор имеет следующие представления:

$$X_\nu = \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \cos \zeta_x - \sin \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta_x}, \quad (3.202)$$

$$X_\nu = \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \sin \zeta_y \cos \alpha_y + \cos \zeta_y \cos \alpha_y \frac{\partial}{\partial \zeta_y} - \frac{\sin \alpha_y}{\sin \zeta_y} \frac{\partial}{\partial \alpha_y}, \quad (3.203)$$

$$X_\nu = -\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \sin \zeta_z \sin \alpha_z - \cos \zeta_z \sin \alpha_z \frac{\partial}{\partial \zeta_z} - \frac{\cos \alpha_z}{\sin \zeta_z} \frac{\partial}{\partial \alpha_z}, \quad (3.204)$$

что проверяется непосредственным дифференцированием.

На сфере с разрезом этот оператор сохранял граничные условия (лемма 3.1) и простым образом менял уравнение Лапласа – Бельтрами (лемма 3.2). На  $S_p$  лемма 3.2 сохраняет силу, однако граничные условия на  $\partial S_p$  оператор  $X_\nu$  не сохраняет. Однако их сохраняет оператор  $\Xi_\nu$ ,

$$\Xi_\nu := X_{\nu-1} X_\nu. \quad (3.205)$$

**Лемма 3.7.** Пусть достаточно гладкая функция  $W(\boldsymbol{\omega})$  удовлетворяет на  $S_p$  однородному уравнению Лапласа – Бельтрами

$$\tilde{\Delta}_\nu W(\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (3.206)$$

и однородным граничным условиям Дирихле

$$W(\boldsymbol{\omega})|_{\partial S_p} = 0. \quad (3.207)$$

Тогда  $\Xi_\nu[W(\boldsymbol{\omega})]$  также удовлетворяет однородным условиям Дирихле.

*Доказательство.* Из условий леммы следует, что комбинация  $r^{\nu-1/2}W(\boldsymbol{\omega})$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) r^{\nu-1/2}W(\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (3.208)$$

во внешности октанта  $P$  и однородным условиям Дирихле на его гранях.

Заметим, что из определения оператора  $\Xi_\nu$  следует равенство

$$\Xi_\nu[W(\boldsymbol{\omega})] = r^{5/2-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} r^{\nu-1/2}W(\boldsymbol{\omega}). \quad (3.209)$$

Очевидно, что дифференцирование по  $x$  сохраняет граничные условия на гранях, лежащих в плоскостях  $zx$  и  $xy$ . Следовательно,  $\Xi_\nu[W(\boldsymbol{\omega})]$  удовлетворяет граничным условиям на соответствующих сторонах  $\partial S_p$ .



Равенство (3.209) в силу (3.208) можно переписать в виде

$$\Xi_\nu[W(\boldsymbol{\omega})] = -r^{5/2-\nu} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) r^{\nu-1/2} W(\boldsymbol{\omega}). \quad (3.210)$$

Теперь очевидно, что граничные условия сохраняются и на грани, лежащей в плоскости  $yz$ , и, следовательно,  $\Xi_\nu[W(\boldsymbol{\omega})]$  удовлетворяет граничным условиям на оставшейся стороне  $\partial S_p$ , что завершает доказательство леммы.  $\square$

Заметим, что оператор  $X_\nu$  сохраняет порядок роста функции у вершины  $x$  и повышает его у вершин  $y$  и  $z$ . Это обстоятельство позволяет получить важную формулу — формулу расщепления на  $S_p$ .

**Теорема 3.8.** *Пусть  $\nu_j$  принадлежит спектру, а  $\nu_j - 2$  не принадлежит. Тогда справедлива формула*

$$\begin{aligned} \Xi_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] &= \frac{\pi}{3} [C_z^j v_z^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2) - C_y^j v_y^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2)] - \\ &\quad - \frac{4\pi}{9} [D_z^j v_z^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2) - D_y^j v_y^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2)]. \end{aligned} \quad (3.211)$$

*Доказательство.* Рассмотрим краевые асимптотики поля  $\Xi_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})]$ . Для этого используем представления (3.202)–(3.204) и асимптотики (3.182), что даст следующее:

$$\Xi_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] = O \left[ \zeta_x^{2/3} \sin \frac{2\alpha_x}{3} \right], \quad \text{при } \zeta_x \rightarrow 0, \quad (3.212)$$

$$\Xi_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] = \frac{2C_y^j}{9} \zeta_y^{-4/3} \sin \frac{4\alpha_y}{3} - \frac{4D_y^j}{9} \zeta_y^{-2/3} \sin \frac{2\alpha_y}{3} + O[\zeta_y^{2/3}], \quad \zeta_y \rightarrow 0, \quad (3.213)$$

$$\Xi_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] = -\frac{2C_z^j}{9} \zeta_z^{-4/3} \sin \frac{4\alpha_z}{3} + \frac{4D_z^j}{9} \zeta_z^{-2/3} \sin \frac{2\alpha_z}{3} + O[\zeta_z^{2/3}], \quad \zeta_z \rightarrow 0. \quad (3.214)$$

В отношении остаточных членов в последних двух асимптотиках заметим, что первый отброшенный член в (3.182) имеет вид  $O[\zeta^2 \sin 2\alpha]$  и аннулируется оператором  $\Xi_\nu$ , поэтому в указанных асимптотиках отсутствуют члены порядка  $\zeta^0$ .

Рассматриваемые асимптотики позволяют с помощью (3.193) и (3.194) заключить, что комбинация

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\omega}) &:= \Xi_{\nu_j}[\Phi_j(\boldsymbol{\omega})] - \frac{\pi}{3} [C_z^j v_z^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2) - C_y^j v_y^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2)] + \\ &\quad + \frac{4\pi}{9} [D_z^j v_z^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2) - D_y^j v_y^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_j - 2)] \end{aligned} \quad (3.215)$$

удовлетворяет краевым условиям Мейкснера у всех трех вершин  $\partial S_p$ . Помимо этого, в силу обсужденных выше свойств оператора  $\Xi_\nu$  эта комбинация удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле на  $\partial S_p$  и однородному уравнению Лапласа–Бельтрами  $\tilde{\Delta}_{\nu_j-2}\Psi(\boldsymbol{\omega}) = 0$ . Так как по условию теоремы  $\nu_j - 2$  не принадлежит спектру, то эта комбинация тождественно равна нулю, откуда непосредственно следует утверждение теоремы.  $\square$

### 3.7.6. Трехмерная формула расщепления

Используя технику доказательства теоремы 3.1, можно доказать справедливость трехмерной формулы расщепления, связанной с оператором  $H_{2x}$ ,

$$H_{2x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \omega_x^2. \quad (3.216)$$

Рассмотрим результат действия этого оператора на поле  $u$ . Во-первых, очевидно, что  $H_{2x}[u]$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Во-вторых, так как  $H_{2x}$  аннулирует падающую волну, то  $H_{2x}[u]$  удовлетворяет условиям излучения. В-третьих, поле  $H_{2x}[u]$  обращается в нуль на гранях октанта. Рассмотрим последнее утверждение подробнее. Оно очевидно для граней, лежащих в плоскостях  $xy$  и  $zx$ . Его справедливость для грани, лежащей в плоскости  $yz$  следует из того, что так как  $u$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то  $H_{2x}[u]$  можно записать в виде

$$H_{2x} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_0^2(1 - \omega_x^2). \quad (3.217)$$

Заметим, что  $H_{2x}$  сохраняет разрешенное поведение поля  $u$  у ребра  $x$  и повышает порядок роста у ребер  $y$  и  $z$ . Это обстоятельство позволяет получить трехмерную формулу расщепления.

**Теорема 3.9.** *Справедлива формула*

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{8\pi^3/3k_0^3}{\omega_{0x}^2 - \omega_x^2} \left[ \int_0^\infty f_z^2(\boldsymbol{\omega}_0, z) f_z^1(\boldsymbol{\omega}, z) dz - \int_0^\infty f_z^2(\boldsymbol{\omega}, z) f_z^1(\boldsymbol{\omega}_0, z) dz - \int_0^\infty f_y^2(\boldsymbol{\omega}_0, y) f_y^1(\boldsymbol{\omega}, y) dy + \int_0^\infty f_y^2(\boldsymbol{\omega}, y) f_y^1(\boldsymbol{\omega}_0, y) dy \right]. \quad (3.218)$$

*Доказательство.* Применим технику, использованную при доказательстве теоремы 3.1. Воспользуемся теоремой Грина для полей  $H_{2x}[u]$  и  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ :

$$H_{2x}[u](\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \left( H_{2x}[u](\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial H_{2x}[u](\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) d\sigma'. \quad (3.219)$$

Здесь точка  $\mathbf{r}$  лежит внутри поверхности  $\Sigma$ , показанной на рис. 3.16. Поверхность состоит из восьми частей. Первая часть представляет собой сферу  $\Sigma_r$  малого радиуса  $\varepsilon_r$  с центром в начале координат, из которой удалена часть сложной формы, вырезаемая другими составляющими поверхности. Вторая, третья и четвертая части представляют собой цилиндры  $\Sigma_{x,y,z}$  радиуса  $\varepsilon_\rho < \varepsilon_r$ , оси которых совпадают с координатными осями. Из цилиндров удалены части, вырезаемые другими частями поверхности. Пятой, шестой и седьмой частями являются три четверти плоскости  $\Sigma_{xy,yz,zx}$ , частично совпадающие с гранями октанта. Из них удалены круговые секторы с центрами в вершинах. Восьмая часть представляет собой сферу  $\Sigma_R$  большого радиуса  $R$  с центром в начале координат (не показана на рис. 3.16). Из нее удалена часть, подобная части, удаленной из маленькой сферы  $\Sigma_r$ . Все части поверхности «подшиты» друг к другу, как показано на рис. 3.16.

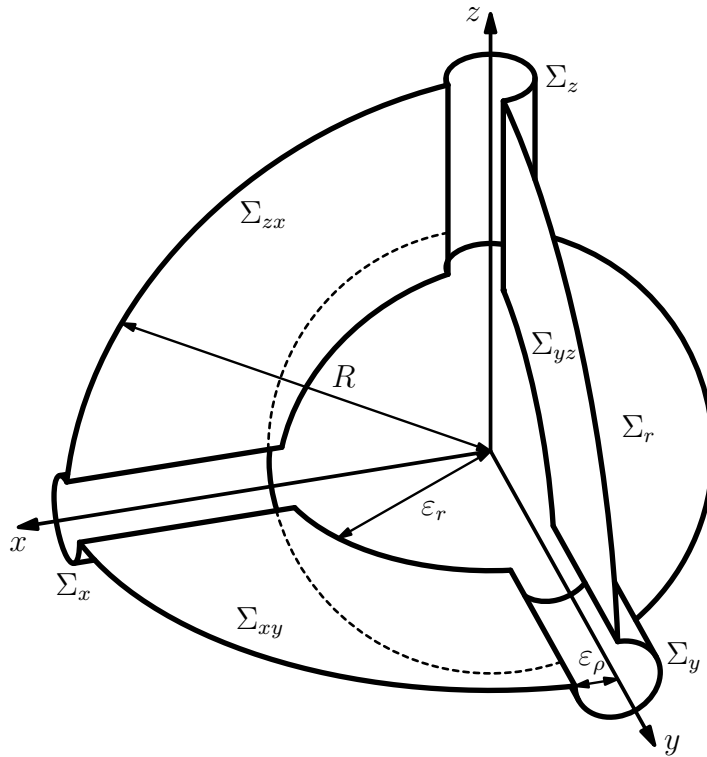


Рис. 3.16. Поверхность  $\Sigma$  без замыкающей сферы большого радиуса  $\Sigma_R$ .

Рассмотрим предел выражения (3.219) при  $R \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon_r, \varepsilon_\rho \rightarrow 0$ . При этом будем считать, что  $\varepsilon_\rho = o(\varepsilon_r)$ .

Интеграл по  $\Sigma_R$  обнулится в силу условий излучения. Интегралы по  $\Sigma_{xy,yz,zx}$  будут равны нулю в силу граничных условий Дирихле, наложенных на  $G$  и  $u$ . Интеграл по цилиндру  $\Sigma_x$  обнулится в силу условий Мейкснера. Интегралы по цилиндрам  $\Sigma_{y,z}$  дадут нам (3.218), регуляризирующие слагаемые в которой получатся из интеграла по  $\Sigma_r$ . Рассмотрим последние три интеграла подробнее.

Простой, но громоздкий анализ, приведенный в разделе A.2.3, дает следующие оценки роста подынтегральных функций выражения (3.219) вблизи начала координат (см. (A.3) и (A.41)):

$$G(\mathbf{r}; r', \boldsymbol{\omega}') = B_G(k_0 r')^{\nu_1 - 1/2} \Phi_1(\boldsymbol{\omega}') + o[(k_0 r')^1] \quad \text{при } r' \rightarrow 0, \quad (3.220)$$

$$H_{2x}[u](r', \boldsymbol{\omega}') = B_u k_0^2 (k_0 r')^{\nu_1 - 5/2} \Xi_{\nu_1}[\Phi_1(\boldsymbol{\omega}')] + o[(k_0 r')^{-1}]. \quad (3.221)$$

Следовательно, для интеграла по  $\Sigma_r$  имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_r} (\dots) d\sigma' &= -2B_u B_G k_0 (\nu_1 - 1) (k_0 \varepsilon_r)^{2\nu_1 - 2} \times \\ &\times \iint_{S_p} \Xi_{\nu_1}[\Phi_1(\boldsymbol{\omega}')] \Phi_1(\boldsymbol{\omega}') d\omega' + o[(k_0 \varepsilon_r)^0]. \end{aligned} \quad (3.222)$$

Заметим, что  $|\nu_1 - 2|$  не принадлежит спектру (см. табл. A.2) и, следовательно, можно использовать формулу (3.211). Таким образом, нам понадобятся следующие интегралы, которые вычисляются с помощью разложений (3.200) и условия ортогональности (3.33):

$$\iint_{S_p} v_{y,z}^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2) \Phi_1(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \frac{-D_1^{y,z}}{3(\nu_1 - 1)}, \quad (3.223)$$

$$\iint_{S_p} v_{y,z}^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2) \Phi_1(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \frac{-C_1^{y,z}}{4(\nu_1 - 1)}. \quad (3.224)$$

В силу формулы (3.211)

$$\begin{aligned} \iint_{S_p} \Xi_{\nu_1}[\Phi_1(\boldsymbol{\omega}')] \Phi_1(\boldsymbol{\omega}') d\omega' &= \frac{\pi}{3} \left[ C_1^z \frac{-D_1^z}{3(\nu_1 - 1)} - C_1^y \frac{-D_1^y}{3(\nu_1 - 1)} \right] - \\ &- \frac{4\pi}{9} \left[ D_1^z \frac{-C_1^z}{4(\nu_1 - 1)} - D_1^y \frac{-C_1^y}{4(\nu_1 - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.225)$$

Строго говоря, выражение в правой части тождественно равно нулю, однако не будем пока взаимно уничтожать подобные слагаемые, а используем их по отдельности для регуляризации интегралов по цилиндрам  $\Sigma_{y,z}$ .

Сфокусируемся на интеграле по цилиндру  $\Sigma_y$ . В разделе A.2.3 получены следующие оценки роста подынтегральных функций выражения (3.219) вблизи ребра  $y$  (см. (A.34) и (A.43)):

$$G(\mathbf{r}; Y, \rho_y, \alpha_y) = \rho_y^{2/3} \sin \frac{2\alpha_y}{3} G_y^1(\mathbf{r}; Y) + \\ + \frac{3}{4} \rho_y^{4/3} \sin \frac{4\alpha_y}{3} G_y^2(\mathbf{r}; Y) + O[\rho_y^2] \quad \text{при } \rho_y \rightarrow 0. \quad (3.226)$$

$$H_{2x}[u](Y, \rho_y, \alpha_y) = \frac{2C_y(y)}{9\rho_y^{4/3}} \sin \frac{4\alpha_y}{3} - \frac{4D_y(y)}{9\rho_y^{2/3}} \sin \frac{2\alpha_y}{3} + O\left[\rho_y^{2/3}\right], \rho_y \rightarrow 0. \quad (3.227)$$

Следовательно, для интеграла по  $\Sigma_y$  имеем:

$$\iint_{\Sigma_y} (\dots) d\sigma' = \frac{4\pi}{9} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} D_y(Y) G_y^1(\mathbf{r}; Y) dY - \\ - \frac{\pi}{3} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} C_y(Y) G_y^2(\mathbf{r}; Y) dY + o(\varepsilon_r). \quad (3.228)$$

Аналогичный результат получается для интеграла по  $\Sigma_z$  с помощью формул (A.34) и (A.44):

$$\iint_{\Sigma_z} (\dots) d\sigma' = -\frac{4\pi}{9} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} D_z(Z) G_z^1(\mathbf{r}; Z) dZ + \\ + \frac{\pi}{3} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} C_z(Z) G_z^2(\mathbf{r}; Z) dZ + o(\varepsilon_r). \quad (3.229)$$

Для интеграла по полной поверхности  $\Sigma$  теперь имеем:

$$\begin{aligned}
H_{xy}[u](\mathbf{r}) = & \\
= \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} & \left[ + \frac{2\pi}{9} B_u B_G k_0 \frac{C_1^z D_1^z}{\nu_1 - 1} (k_0 \varepsilon)^{2\nu_1 - 2} + \frac{4\pi}{9} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} D_y(Y) G_y^1(\mathbf{r}; Y) dY - \right. \\
& - \frac{2\pi}{9} B_u B_G k_0 \frac{C_1^y D_1^y}{\nu_1 - 1} (k_0 \varepsilon)^{2\nu_1 - 2} - \frac{\pi}{3} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} C_y(Y) G_y^2(\mathbf{r}; Y) dY - \\
& - \frac{2\pi}{9} B_u B_G k_0 \frac{C_1^z D_1^z}{\nu_1 - 1} (k_0 \varepsilon)^{2\nu_1 - 2} - \frac{4\pi}{9} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} D_z(Z) G_z^1(\mathbf{r}; Z) dZ + \\
& \left. + \frac{2\pi}{9} B_u B_G k_0 \frac{C_1^z D_1^z}{\nu_1 - 1} (k_0 \varepsilon)^{2\nu_1 - 2} + \frac{\pi}{3} \int_{\varepsilon_r}^{\infty} C_z(Z) G_z^2(\mathbf{r}; Z) dZ + o[(k_0 \varepsilon_r)^0] \right]. \quad (3.230)
\end{aligned}$$

Оценим подынтегральные выражения при  $Y, Z \rightarrow 0$ . Формулы (A.39), (A.40) и (A.35), (A.36) приводят к результатам

$$D_y(Y) G_y^1(\mathbf{r}; Y) = B_u B_G C_1^y D_1^y k_0^2 (k_0 Y)^{2\nu_1 - 3} + o[(k_0 Y)^{-1}], \quad (3.231)$$

$$C_y(Y) G_y^2(\mathbf{r}; Y) = \frac{4}{3} B_u B_G C_1^y D_1^y k_0^2 (k_0 Y)^{2\nu_1 - 3} + o[(k_0 Y)^{-1}] \quad (3.232)$$

и аналогичным им для интегралов по  $Z$ . Применяя определение (3.58) к пределу (3.230), получаем слабую форму формулы расщепления:

$$\begin{aligned}
H_{2x}[u](\mathbf{r}) = & \frac{4\pi}{9} \int_0^{\infty} D_y(Y) G_y^1(\mathbf{r}; Y) dY - \frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} C_y(Y) G_y^2(\mathbf{r}; Y) dY - \\
& - \frac{4\pi}{9} \int_0^{\infty} D_z(Z) G_z^1(\mathbf{r}; Z) dZ + \frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} C_z(Z) G_z^2(\mathbf{r}; Z) dZ. \quad (3.233)
\end{aligned}$$

Рассмотрим дальнейшие асимптотики обеих сторон этого равенства. Для этого учтем, что  $H_{2x}$  действует на дифракционный коэффициент как умножение на  $-k_0^2 \omega_x^2$ , и примем во внимание соотношения (3.186). В результате получаем формулу (3.218).  $\square$

Заметим, что в силу (3.231) и (3.232) формулу (3.233) можно записать в

виде, содержащем только сходящиеся в обычном смысле интегралы,

$$H_{2x}[u](\mathbf{r}) = \frac{\pi}{9} \int_0^{\infty} [4D_y(Y)G_y^1(\mathbf{r}; Y) - 3C_y(Y)G_y^2(\mathbf{r}; Y)] dY - \\ - \frac{\pi}{9} \int_0^{\infty} [4D_z(Z)G_z^1(\mathbf{r}; Z) - 3C_z(Z)G_z^2(\mathbf{r}; Z)] dZ, \quad (3.234)$$

и, как следствие, записать формулу (3.218) в виде

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{8\pi^3/3k_0^3}{\omega_{0x}^2 - \omega_x^2} \left[ \int_0^{\infty} [f_z^2(\boldsymbol{\omega}_0, z)f_z^1(\boldsymbol{\omega}, z) - f_z^2(\boldsymbol{\omega}, z)f_z^1(\boldsymbol{\omega}_0, z)] dz - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} [f_y^2(\boldsymbol{\omega}_0, y)f_y^1(\boldsymbol{\omega}, y) - f_y^2(\boldsymbol{\omega}, y)f_y^1(\boldsymbol{\omega}_0, y)] dy \right]. \quad (3.235)$$

Однако вид (3.218) удобнее для преобразования в модифицированную формулу Смышляева.

### 3.7.7. Модифицированная формула Смышляева

С помощью развитой техники преобразования вложенных контурных интегралов формула (3.218) может быть преобразована в контурный интеграл по параметру разделения переменных (в модифицированную формулу Смышляева). Как и раньше, возможность этого обеспечивается тем, что в виде таких интегралов можно представить диаграммы направленности краевых функций Грина  $f_{x,y,z}^{1,2}$ .

**Лемма 3.8.** *Справедливы представления*

$$f_x^1(\boldsymbol{\omega}, X) = \frac{ik_0A}{2} X^{-1/6} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(k_0X) \phi_x^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) \nu d\nu, \quad (3.236)$$

$$f_x^2(\boldsymbol{\omega}, X) = \frac{ik_0A}{2} X^{-5/6} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(k_0X) \phi_x^2(\boldsymbol{\omega}, \nu) \nu d\nu \quad (3.237)$$

и аналогичные им для  $f_{y,z}^{1,2}$ . Здесь

$$A = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\pi}, \quad \phi_x^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \nu) = \frac{v_x^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \nu - 1) - v_x^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \nu + 1)}{\nu}, \quad (3.238)$$

а  $\gamma$  и  $\Gamma$  — контуры, показанные на рис. 3.8 и рис. 3.11.

Доказательство дословно повторяет доказательство лемм A.1 и A.2 и опирается на представления диаграмм направленности в виде рядов (A.37) и (A.38).

**Теорема 3.10.** *Справедлива модифицированная формула Смышляева:*

$$f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{i/12}{\omega_{0x}^2 - \omega_x^2} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) - B(\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}, \nu)] \nu d\nu, \quad (3.239)$$

где

$$B(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_0, \nu) = \phi_z^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) \phi_z^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) - \phi_y^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) \phi_y^1(\boldsymbol{\omega}, \nu), \quad (3.240)$$

а  $\gamma$  и  $\Gamma$  – контуры, показанные на рис. 3.8 и рис. 3.11.

*Доказательство.* В силу симметрии можно рассмотреть только первый интеграл в правой части (3.218),  $\hat{I}_1$ ,

$$\hat{I}_1 = \int_0^\infty f_z^2(\boldsymbol{\omega}_0, z) f_z^1(\boldsymbol{\omega}, z) dz. \quad (3.241)$$

Глядя на представления (3.236) и (3.237), замечаем, что этот интеграл с точностью до обозначений совпадает с внешним интегралом формулы (A.73) (см. также формулы (A.81) и (A.82)). Наличие в подынтегральном выражении (A.81) множителя  $C_2^1(\nu)$  не является принципиальным, поскольку его полюсы никак не участвуют в вычислении интеграла  $I_1$ . Пользуясь результатом (A.105), для  $\hat{I}_1$  можно записать

$$\hat{I}_1 = -\frac{k_0^2 A^2}{4} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} \phi_z^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) \phi_z^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) \nu d\nu. \quad (3.242)$$

Выписывая аналогичные результаты для оставшихся трех интегралов, получаем (3.239).  $\square$

### §3.8. Основные результаты главы

1. Построена физически обоснованная процедура регуляризации расходящихся интегралов в трехмерной формуле расщепления для задачи дифракции плоской волны на четверти плоскости с граничными условиями Дирихле. Основу процедуры составляет применение теоремы Грина к поверхности сложной формы, охватывающей рассеиватель.



2. Введено модифицированное преобразование Конторовича–Лебедева, отличающееся от классического выбором цилиндрической функции в ядре и контуром интегрирования. Для введенного преобразования доказаны аналоги формул Планшереля и свертки, позволяющие преобразовывать повторные интегралы по пространственным переменным к однократным интегралам по параметру разделения переменных.
3. Показано, что построенная техника преобразования интегралов позволяет конструктивным образом получать модифицированные формулы Смышляева из трехмерных формул расщепления.
4. Построены сферические формулы расщепления, представляющие собой нетривиальные связи между решениями задач для оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере с разрезом. С помощью этих формул установлены связи между формулой Смышляева и модифицированными формулами Смышляева.
5. Предложенные методы применены к задаче о дифракции плоской волны на трехгранном конусе (угле куба) с граничными условиями Дирихле. В результате получены трехмерная формула расщепления (3.218) и модифицированная формула Смышляева (3.239).

## Заключение

Кратко сформулируем основные результаты работы.

1. Предложена модификация экспериментальной методики исследования акустических дифракционных задач, использующей в качестве входного сигнала M-последовательность. Составной частью методики является процедура восстановления объемной скорости источника акустических волн с помощью метода двух микрофонов. Основу модификации составляет использование теории Вайнштейна об излучении из открытого конца волновода. На основании предложенной методики впервые был измерен дифракционный коэффициент жесткого трехгранного конуса. Результаты измерений согласуются с теоретически вычисленными значениями с точностью 10%.
2. Построен численный алгоритм решения скалярных (акустических) задач о дифракции плоской волны на препятствиях типа полосы методом спектрального уравнения. Основу алгоритма составляет процедура отыскания коэффициентов уравнения по известному из физической постановки задачи поведению решений в особых точках. Показано, что для задачи о полосе метод спектрального уравнения более эффективен по сравнению с традиционным методом граничного интегрального уравнения в том случае, если требуется высокая точность решения а также в случае среднего и большого волнового размера полосы.
3. Предложены новые методы построения аналитических решений для задач дифракции на многогранных конусах. Предложенные методы позволили строго обосновать точные выражения для дифракционного коэффициента четверти плоскости и получить новое выражение для дифракционного коэффициента трехгранного конуса.

## Приложение А

# Вывод соотношений, используемых при решении задач дифракции на конусах

### §А.1. Собственные значения сферических задач

При доказательстве теорем 3.1, 3.4, 3.9 и 3.10 используются предположения о величине и взаимном расположении собственных значений соответствующих сферических задач (см. также формулировки теорем 3.5–3.8).

Для обоснования этих предположений собственные значения, не превосходящие по величине 4 были найдены численно. Некоторые из предположений также могут быть доказаны аналитически.

Вычисления для сферической задачи, соответствующей задаче дифракции на четверти плоскости производились с помощью процедуры, подробно описанной в работе [126] (см. также работы [193–195]). Указанная процедура основана на численном решении дифференциального уравнения Ламэ. Найденные собственные значения представлены в Таблице А.1.

Таблица А.1. Собственные значения задачи (3.28)–(3.32).

$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5$
0.7966	1.6312	1.9265	2.5396	2.7876
$\nu_6$	$\nu_7$	$\nu_8$	$\nu_9$	$\nu_{10}$
2.9809	3.5091	3.6464	3.9087	3.9959

Вычисления для случая дифракции на трехгранном конусе производились с помощью метода конечных элементов. Заметим, что в этом случае некоторые собственные значения двукратно вырождены, что соответствует симметрии задачи.

Таблица А.2. Собственные значения задачи (3.179)–(3.182).

$\nu_1$	$\nu_2, \nu_3$	$\nu_4$	$\nu_5, \nu_6$	$\nu_7, \nu_8$
0.955	1.732	2.29	2.62	3.02
$\nu_9$	$\nu_{10}$	$\nu_{11}$	$\nu_{12}, \nu_{13}$	
3.50	3.56	3.67	3.83	

## §А.2. Представления полей в виде рядов и их асимптотики

Для доказательства теорем 3.1 и (3.9) требуется произвести анализ роста полей  $u$  и  $G$  вблизи вершины и ребер. В данном разделе строятся представления полей в виде рядов, из которых и получаются нужные асимптотики. Ряды для диаграмм направленности краевых функций Грина также используются для представления их в виде контурных интегралов.

### А.2.1. Общий случай

И в случае задачи о четверти плоскости и в случае задачи об угле куба основой всех представлений служит представление в виде ряда для функции Грина  $G$ , имеющее место для задачи дифракции на произвольном конусе с идеальными граничными условиями [12, 21]:

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; r_0, \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{\pi}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\nu_n}(k_0 r_<) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 r_>)}{\sqrt{r r_0}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) \Phi_n(\boldsymbol{\omega}_0), \quad (\text{A.1})$$

где  $r_< = \min(r, r_0)$ ,  $r_> = \max(r, r_0)$ ,  $\nu_n$  и  $\Phi_n$  — собственные значения и собственные функции соответствующей сферической задачи. Суммирование ведется с учетом кратности собственных значений.

Используя это представление, соотношение (3.24) и принимая во внимание асимптотику функции Ханкеля на бесконечности, получаем следующее представление поля  $u$ :

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_{\nu_n}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}), \quad (\text{A.2})$$

где  $A_n = -2\pi^2 \sqrt{2/\pi} \exp[-i\pi(\nu_n/2 + 3/4)] \Phi_n(\boldsymbol{\omega}_0)$ .

Эти ряды позволяют оценить рост полей  $u$  и  $G$  вблизи вершины конуса:

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; r_0, \boldsymbol{\omega}_0) = B_G (k_0 r_0)^{\nu_1 - 1/2} \Phi_1(\boldsymbol{\omega}_0) + o[(k_0 r_0)^1], \quad \text{при } r_0 \rightarrow 0, \quad (\text{A.3})$$

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = B_u (k_0 r)^{\nu_1 - 1/2} \Phi_1(\boldsymbol{\omega}) + o[(k_0 r)^1], \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (\text{A.4})$$

где

$$B_G = \frac{\pi k_0}{2i} \frac{2^{-\nu_1}}{\Gamma(\nu_1 + 1)} \frac{H_{\nu_1}^{(1)}(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} \Phi_1(\boldsymbol{\omega}), \quad r > r_0, \quad (\text{A.5})$$

$$B_u = A_1 \frac{2^{-\nu_1}}{\Gamma(\nu_1 + 1)}. \quad (\text{A.6})$$

Оценки остаточных членов в обоих рассматриваемых случаях справедливы, так как первые отброшенные члены рядов имеют порядок  $(k_0 r)^{\nu_2 - 1/2}$ , и при этом  $\nu_2 > 3/2$  (см. табл. A.1 и A.2). Данное неравенство для  $\nu_2$  в случае задачи о четверти плоскости также может быть доказано аналитически [126].

### A.2.2. Задача дифракции на четверти плоскости

В данном разделе рассматриваются свойства рядов (A.1) и (A.2) в случае задачи о четверти плоскости. Под  $\nu_n$  и  $\Phi_n$  здесь понимаются решения задачи (3.28) – (3.32).

Обратимся к рассмотрению краевых асимптотик функции Грина  $G$ . Подставим краевые асимптотики (3.31) функций  $\Phi_n(\boldsymbol{\omega}_0)$  в ряд (A.1), принимая во внимание, что при  $\rho_1 \rightarrow 0$  выполнено  $r_0 \rightarrow X$  и  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\zeta_1, \alpha_1) \rightarrow (\rho_1/X, \alpha_1)$ :

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; X, \rho_1, \alpha_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{i} \sqrt{\frac{\rho_1}{X}} \sin \frac{\alpha_1}{2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[X, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, r])}{\sqrt{r X}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) + O[\rho_1^{3/2}]. \quad (\text{A.7})$$

Воспользуемся определением (3.36) краевой функции Грина  $G_x$ , т.е. подставим в предыдущее соотношение  $\alpha_1 = \pi$ , умножим его на  $\sqrt{\pi/\rho_1}$  и рассмотрим предел при  $\rho_1 \rightarrow 0$ . Получаем, что

$$G_x(r, \boldsymbol{\omega}; X) = \frac{\pi}{i} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[X, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, r])}{X \sqrt{r}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) \quad (\text{A.8})$$

и, следовательно,

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; X, \rho_1, \alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\alpha_1}{2} G_x(r, \boldsymbol{\omega}; X) + O[\rho_1^{3/2}] \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0. \quad (\text{A.9})$$

Анализ поведения  $G$  у ребра  $\Lambda_2$  дает схожие результаты:

$$G_y(r, \boldsymbol{\omega}; Y) = \frac{\pi}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[Y, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[Y, r])}{Y \sqrt{r}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}), \quad (\text{A.10})$$

$$G(r, \boldsymbol{\omega}; Y, \rho_2, \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho_2^{1/2} \sin \frac{\alpha_2}{2} G_y(r, \boldsymbol{\omega}; Y) + O[\rho_2^{3/2}] \quad \text{при } \rho_2 \rightarrow 0. \quad (\text{A.11})$$

Ряды (A.8) и (A.10) позволяют оценить рост краевых функций Грина у вершины:

$$G_x(r, \boldsymbol{\omega}; X) = 2C_1 \sqrt{k_0} B_G(k_0 X)^{\nu_1 - 1} + o[(k_0 X)^{1/2}], \quad \text{при } X \rightarrow 0, \quad (\text{A.12})$$

$$G_y(r, \boldsymbol{\omega}; Y) = 2\tilde{C}_1 \sqrt{k_0} B_G(k_0 Y)^{\nu_1 - 1} + o[(k_0 Y)^{1/2}], \quad \text{при } Y \rightarrow 0. \quad (\text{A.13})$$

Оценки остаточных членов получаются из тех же соображений, что и в (A.3), (A.4).

Аналогичное рассмотрение, то есть подстановка краевых асимптотик (3.32) в (A.8) и использование определения (3.38) приводит к следующему представлению для  $C_G(X, Y)$ :

$$C_G(X, Y) = \frac{\pi}{iXY} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tilde{C}_n J_{\nu_n}(k_0 \min[X, Y]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, Y]). \quad (\text{A.14})$$

Рассматривая предел (A.8) при  $r \rightarrow \infty$  и используя асимптотику функции Ханкеля на бесконечности, получаем ряд для диаграммы направленности  $f_x(\omega, X)$  краевой функции Грина  $G_x$ :

$$f_x(\omega, X) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{X} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(\omega) J_{\nu_n}(k_0 X) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}, \quad (\text{A.15})$$

что вместе с равенством (3.42) дает оценку роста функции  $C_x(x)$ , введенной в (3.17):

$$C_x(X) = B_u C_1 \sqrt{k_0} (k_0 X)^{\nu_1 - 1} + o[(k_0 X)^{1/2}] \quad \text{при } X \rightarrow 0. \quad (\text{A.16})$$

Такой же результат может быть получен сшивкой асимптотик (3.17) и (A.4). Для  $f_y(\omega, Y)$  и  $C_y(Y)$  справедливы аналогичные соотношения:

$$f_y(\omega, Y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{Y} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \Phi_n(\omega) J_{\nu_n}(k_0 Y) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}, \quad (\text{A.17})$$

$$C_y(Y) = B_u \tilde{C}_1 \sqrt{k_0} (k_0 Y)^{\nu_1 - 1} + o[(k_0 Y)^{1/2}] \quad \text{при } Y \rightarrow 0. \quad (\text{A.18})$$

Перейдем к изучению асимптотик производных поля  $u$ . Продифференцируем асимптотику (A.4) по  $x$ . В соответствии с определением (3.109) можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial x} = B_u k_0 (k_0 r)^{\nu_1 - 3/2} X_{\nu_1}[\Phi_1(\omega)] + o[(k_0 r)^0] \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (\text{A.19})$$

что с помощью формулы (3.127) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} = B_u k_0 \tilde{C}_1 (k_0 r)^{\nu_1 - 3/2} v^2(\omega, \nu_1 - 1) + o[(k_0 r)^0] \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (\text{A.20})$$

Аналогично получается оценка

$$\frac{\partial u}{\partial y} = B_u k_0 C_1 (k_0 r)^{\nu_1 - 3/2} v^1(\omega, \nu_1 - 1) + o[(k_0 r)^0] \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (\text{A.21})$$

Здесь был использован факт, что  $|\nu_1 - 1|$  не принадлежит спектру (табл. A.1).

Рассмотрим теперь смешанные производные поля  $u$ . Дифференцируя асимптотики (A.20) и (A.21) по  $y$  и по  $x$  соответственно, получаем, что при  $r \rightarrow 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = B_u k_0^2 C_1 (k_0 r)^{\nu_1 - 5/2} X_{\nu_1 - 1}[v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 1)] + o[(k_0 r)^{-1}], \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y \partial x} = B_u k_0^2 \tilde{C}_1 (k_0 r)^{\nu_1 - 5/2} Y_{\nu_1 - 1}[v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 1)] + o[(k_0 r)^{-1}]. \quad (\text{A.23})$$

Так как  $|\nu_1 - 2|$  не принадлежит спектру (см. табл. A.1), можно воспользоваться формулой (3.135) и ее аналогом для оператора  $Y_\nu$ , что даст при  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = B_u k_0^2 C_1 (k_0 r)^{\nu_1 - 5/2} [(\nu_1 - 1)v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2) + \\ + C_2^1(\nu_1 - 1)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2)] + o[(k_0 r)^{-1}], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y \partial x} = B_u k_0^2 \tilde{C}_1 (k_0 r)^{\nu_1 - 5/2} [(\nu_1 - 1)v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2) + \\ + C_2^1(\nu_1 - 1)v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2)] + o[(k_0 r)^{-1}]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Заметим, что в силу симметрии должно быть  $C_1 = \tilde{C}_1$  [126]. Приравнивая смешанные производные, с учетом этого равенства получаем

$$C_2^1(\nu_1 - 1) = \nu_1 - 1. \quad (\text{A.26})$$

Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = B_u k_0^2 (k_0 r)^{\nu_1 - 5/2} (\nu_1 - 1) [C_1 v^1(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2) + \tilde{C}_1 v^2(\boldsymbol{\omega}, \nu_1 - 2)] + \\ + o[(k_0 r)^{-1}] \quad \text{при } r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Рассмотрение краевых асимптотик производных поля  $u$  вблизи ребер четверти плоскости более прямолинейно. Из (3.17) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2C'_x(x)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\alpha_x}{2} + O(\rho_1^{3/2}) \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0. \quad (\text{A.28})$$

Представляя оператор  $\frac{\partial}{\partial y}$  в цилиндрических координатах  $(x, \rho_1, \alpha_1)$ , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{C_x(x)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{-1/2} \sin \frac{\alpha_x}{2} + O(\rho_1^{1/2}) \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{C'_x(x)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{-1/2} \sin \frac{\alpha_x}{2} + O(\rho_1^{1/2}) \quad \text{при } \rho_1 \rightarrow 0. \quad (\text{A.30})$$

Аналогичные формулы могут быть записаны для и случая  $\rho_2 \rightarrow 0$ .

### А.2.3. Задача дифракции на угле куба

В данном разделе рассматриваются свойства рядов (A.1) и (A.2) в случае задачи о трехгранном конусе. Под  $\nu_n$   $\Phi_n$  здесь понимаются решения задачи (3.179) – (3.182).

Краевые асимптотики функции Грина  $G$  получаются также, как и в случае задачи о четверти плоскости. Подставим краевые асимптотики (3.182) функций  $\Phi_n(\boldsymbol{\omega}_0)$  в ряд (A.1), принимая во внимание, что при  $\rho_x \rightarrow 0$  выполнено  $r_0 \rightarrow X$  и  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\zeta_x, \alpha_x) \rightarrow (\rho_x/X, \alpha_x)$ :

$$\begin{aligned} G(r, \boldsymbol{\omega}; X, \rho_x, \alpha_x) &= O[\rho_x^2] + \\ &+ \frac{\pi}{2i} \left(\frac{\rho_x}{X}\right)^{2/3} \sin \frac{2\alpha_x}{3} \sum_{n=1}^{\infty} C_x^n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[X, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, r])}{\sqrt{r X}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) + \\ &+ \frac{\pi}{2i} \left(\frac{\rho_x}{X}\right)^{4/3} \sin \frac{4\alpha_x}{3} \sum_{n=1}^{\infty} D_x^n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[X, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, r])}{\sqrt{r X}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Воспользуемся определением (3.183) краевой функции Грина  $G_x^1$ , т.е. подставим в предыдущее соотношение  $\alpha_x = 3\pi/4$ , умножим его на  $\rho_x^{-2/3}$  и рассмотрим предел при  $\rho_x \rightarrow 0$ . В результате получаем, что

$$G_x^1(r, \boldsymbol{\omega}; X) = \frac{\pi}{2i} X^{-7/6} \sum_{n=1}^{\infty} C_x^n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[X, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, r])}{\sqrt{r}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}). \quad (\text{A.32})$$

Совершенно аналогично, пользуясь определением (3.184) краевой функции Грина  $G_x^2$ , находим, что

$$G_x^2(r, \boldsymbol{\omega}; X) = \frac{2\pi}{3i} X^{-11/6} \sum_{n=1}^{\infty} D_x^n \frac{J_{\nu_n}(k_0 \min[X, r]) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 \max[X, r])}{\sqrt{r}} \Phi_n(\boldsymbol{\omega}). \quad (\text{A.33})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G(r, \boldsymbol{\omega}; X, \rho_x, \alpha_x) &= \rho_x^{2/3} \sin \frac{2\alpha_x}{3} G_x^1(r, \boldsymbol{\omega}; X) + \\ &+ \frac{3}{4} \rho_x^{4/3} \sin \frac{4\alpha_x}{3} G_x^2(r, \boldsymbol{\omega}; X) + O[\rho_x^2] \quad \text{при } \rho_x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Аналогичные результаты верны и для остальных ребер.

Ряды (A.32) и (A.33) позволяют оценить рост краевых функций Грина у вершины:

$$G_x^1(r, \boldsymbol{\omega}; X) = C_x^1 k_0^{2/3} B_G(k_0 X)^{\nu_1 - 7/6} + o[(k_0 X)^{1/3}], \quad \text{при } X \rightarrow 0, \quad (\text{A.35})$$

$$G_x^2(r, \boldsymbol{\omega}; X) = \frac{4}{3} D_x^1 k_0^{4/3} B_G(k_0 X)^{\nu_1 - 11/6} + o[(k_0 X)^{-1/3}], \quad \text{при } X \rightarrow 0. \quad (\text{A.36})$$



Аналогичные результаты верны и для остальных ребер. Оценки остаточных членов получаются из тех же соображений, что и в (A.3), (A.4).

Рассматривая пределы (A.32) и (A.33) при  $r \rightarrow \infty$  и используя асимптотику функции Ханкеля на бесконечности, получаем ряды для диаграмм направленности  $f_x^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, X)$  краевых функций Грина  $G_x^{1,2}$ :

$$f_x^1(\boldsymbol{\omega}, X) = \sqrt{\frac{k_0}{8\pi}} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{X^{7/6}} \sum_{n=1}^{\infty} C_x^n \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) J_{\nu_n}(k_0 X) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}, \quad (\text{A.37})$$

$$f_x^2(\boldsymbol{\omega}, X) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{k_0}{8\pi}} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{X^{11/6}} \sum_{n=1}^{\infty} D_x^n \Phi_n(\boldsymbol{\omega}) J_{\nu_n}(k_0 X) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}, \quad (\text{A.38})$$

что вместе с равенствами (3.186) дает оценку роста функций  $C_x(x)$  и  $D_x(x)$ , введенных в (3.176):

$$C_x(X) = B_u C_x^1 k_0^{2/3} (k_0 X)^{\nu_1 - 7/6} + o[(k_0 X)^{1/3}] \quad \text{при } X \rightarrow 0, \quad (\text{A.39})$$

$$D_x(X) = B_u D_x^1 k_0^{4/3} (k_0 X)^{\nu_1 - 11/6} + o[(k_0 X)^{-1/3}] \quad \text{при } X \rightarrow 0. \quad (\text{A.40})$$

Аналогичные результаты верны и для остальных ребер.

Перейдем к изучению асимптотик производной поля  $u$ . Продифференцируем асимптотику (A.4) дважды по  $x$ . В соответствии с определением (3.205) можно записать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = B_u k_0^2 (k_0 r)^{\nu_1 - 5/2} \Xi_{\nu_1}[\Phi_1(\boldsymbol{\omega})] + o[(k_0 r)^{-1}] \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (\text{A.41})$$

Рассмотрим краевые асимптотики производной. Из (3.176) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C_x''(x) \rho_x^{2/3} \sin \frac{2\alpha_x}{3} + D_x''(x) \rho_x^{4/3} \sin \frac{4\alpha_x}{3} + O(\rho_x^2) \quad \text{при } \rho_x \rightarrow 0. \quad (\text{A.42})$$

Представляя оператор  $\frac{\partial}{\partial x}$  в координатах  $(y, \rho_y, \alpha_y)$  и  $(z, \rho_z, \alpha_z)$  и дважды применяя его к асимптотикам (3.177) и (3.178), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = + \frac{2C_y(y)}{9\rho_y^{4/3}} \sin \frac{4\alpha_y}{3} - \frac{4D_y(y)}{9\rho_y^{2/3}} \sin \frac{2\alpha_y}{3} + O[\rho_y^{2/3}] \quad \text{при } \rho_y \rightarrow 0, \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{2C_z(z)}{9\rho_z^{4/3}} \sin \frac{4\alpha_z}{3} + \frac{4D_z(z)}{9\rho_z^{2/3}} \sin \frac{2\alpha_z}{3} + O[\rho_z^{2/3}] \quad \text{при } \rho_z \rightarrow 0. \quad (\text{A.44})$$

### §A.3. Представление полей в виде контурных интегралов

В данном разделе выводятся представления полей в виде контурных интегралов, используемые при выводе модифицированных формул Смышляева.

**Лемма А.1.** Функции  $f_x(\omega, X)$ ,  $f_y(\omega, Y)$  и  $C_G(X, Y)$  могут быть представлены в виде:

$$f_x(\omega, X) = \frac{A}{X} \int_{\gamma} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_{\nu}(k_0 X) v^1(\omega, \nu) \nu d\nu, \quad (\text{A.45})$$

$$f_y(\omega, Y) = \frac{A}{Y} \int_{\gamma} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_{\nu}(k_0 Y) v^2(\omega, \nu) \nu d\nu, \quad (\text{A.46})$$

$$C_G(X, Y) = \frac{1}{2XY} \int_{\gamma} C_2^1(\nu) J_{\nu}(k_0 R_{<}) H_{\nu}^{(1)}(k_0 R_{>}) \nu d\nu, \quad (\text{A.47})$$

где  $A = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-i\pi/4}}{2\pi}}$ ,  $R_{<} = \min[X, Y]$ ,  $R_{>} = \max[X, Y]$ , а  $\gamma$  – контур, показанный на рис. 3.8.

*Доказательство.* Заметим, что из (3.50) и (3.51) следует, что

$$\text{Res}[v^1(\omega, \nu), \nu_n] = C_n \Phi_n(\omega) / \nu_n, \quad (\text{A.48})$$

$$\text{Res}[v^2(\omega, \nu), \nu_n] = \tilde{C}_n \Phi_n(\omega) / \nu_n, \quad (\text{A.49})$$

$$\text{Res}[C_2^1(\nu), \nu_n] = C_n \tilde{C}_n / \nu_n. \quad (\text{A.50})$$

Значит, ряды (A.15), (A.17) и (A.14) могут быть переписаны следующим образом:

$$f_x(\omega, X) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{X}} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[v^1(\omega, \nu), \nu_n] \nu_n J_{\nu_n}(k_0 X) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}, \quad (\text{A.51})$$

$$f_y(\omega, Y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{Y}} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[v^2(\omega, \nu), \nu_n] \nu_n J_{\nu_n}(k_0 Y) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu_n}, \quad (\text{A.52})$$

$$C_G(X, Y) = \frac{\pi}{iXY} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}[C_2^1(\nu), \nu_n] \nu_n J_{\nu_n}(k_0 R_{<}) H_{\nu_n}^{(1)}(k_0 R_{>}). \quad (\text{A.53})$$

Эти ряды легко преобразовать в контурные интегралы:

$$f_x(\omega, X) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} - 1}{X}} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\cup \Gamma_{\nu_n}} v^1(\omega, \nu) \nu J_{\nu}(k_0 X) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} d\nu, \quad (\text{A.54})$$

$$f_y(\omega, Y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}} - 1}{Y}} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\cup \Gamma_{\nu_n}} v^2(\omega, \nu) \nu J_{\nu}(k_0 Y) e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} d\nu, \quad (\text{A.55})$$

$$C_G(X, Y) = \frac{\pi}{iXY} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\cup \Gamma_{\nu_n}} C_2^1(\nu) \nu J_{\nu}(k_0 R_{<}) H_{\nu}^{(1)}(k_0 R_{>}) d\nu, \quad (\text{A.56})$$

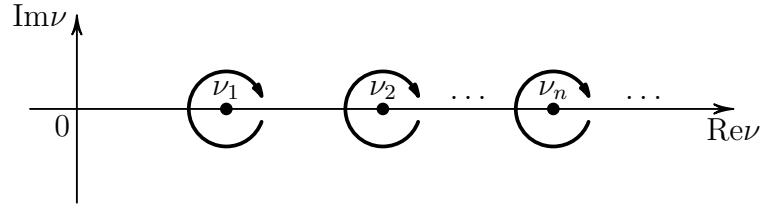


Рис. А.1. Контур  $\cup\Gamma_{\nu_n}$ .

где контур  $\cup\Gamma_{\nu_n}$  состоит из петель, охватывающих точки  $\nu_n$ , как показано на рис. А.1.

Соединяя петли друг с другом и деформируя получающийся контур, получаем (А.45)–(А.47).  $\square$

**Лемма А.2.** *Справедливы альтернативные представления для  $f_x$  и  $f_y$ :*

$$f_x(\omega, X) = \frac{ik_0A}{2} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0X) \phi^1(\omega, \mu) \mu d\mu, \quad (\text{A.57})$$

$$f_y(\omega, Y) = \frac{ik_0A}{2} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0Y) \phi^2(\omega, \mu) \mu d\mu, \quad (\text{A.58})$$

$$(\text{A.59})$$

где

$$\phi^{1,2}(\omega, \mu) = \frac{v^{1,2}(\omega, \mu - 1) - v^{1,2}(\omega, \mu + 1)}{\mu}. \quad (\text{A.60})$$

а контур  $\Gamma$  состоит из двух петель, охватывающих точки  $\nu_1 - 1$  и  $1 - \nu_1$ , как показано на рис. 3.11.

*Доказательство.* Используем хорошо известную формулу [192]

$$\frac{J_\nu(z)}{z} = \frac{J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z)}{2\nu}. \quad (\text{A.61})$$

Разобьем с ее помощью интеграл в (А.45) на сумму двух членов и заменим переменную интегрирования на  $\mu = \nu - 1$  в слагаемом, содержащем  $J_{\nu+1}$ , и на  $\mu = \nu + 1$  в слагаемом, содержащем  $J_{\nu-1}$ . В результате получим, что

$$f_x(\omega, X) = \frac{ik_0A}{2} \left[ \int_{\gamma+1} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0X) v^1(\omega, \mu - 1) d\mu - \int_{\gamma-1} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0X) v^1(\omega, \mu + 1) d\mu \right]. \quad (\text{A.62})$$

Заметим теперь, что единственным полюсом  $v^1(\omega, \mu - 1)$  на  $(0, 1]$  является  $1 - \nu_1$ , а  $v^1(\omega, \mu + 1)$  в этой точке регулярна. И наоборот для точки  $\nu_1 - 1$ . Это

позволяет деформировать контуры  $\gamma \pm 1$  в  $\gamma$ , не забывая, конечно, о полюсах, и записать (A.57). Формула (A.58) получается аналогично.  $\square$

**Лемма А.3.** Для производных диаграмм направленности справедливы следующие представления:

$$\frac{\partial f_x(\boldsymbol{\omega}, X)}{\partial X} = \frac{k_0^2 A}{4} \int_{\gamma \cup \Gamma_2} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0 X) \psi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \mu d\mu, \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{\partial f_y(\boldsymbol{\omega}, Y)}{\partial Y} = \frac{k_0^2 A}{4} \int_{\gamma \cup \Gamma_2} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0 Y) \psi^2(\boldsymbol{\omega}, \mu) \mu d\mu, \quad (\text{A.64})$$

где

$$\psi^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \mu) = \frac{v^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \mu - 2) - v^{1,2}(\boldsymbol{\omega}, \mu + 2)}{\mu}, \quad (\text{A.65})$$

а контур  $\Gamma_2$  состоит из петель, охватывающих точки  $\pm \hat{\nu}_j := \pm(2 - \nu_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , как показано на рис. A.2.

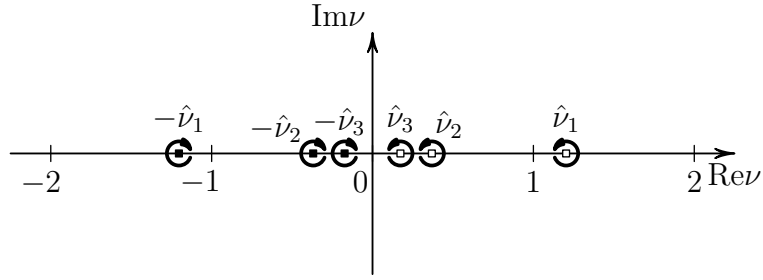


Рис. А.2. Контур  $\Gamma_2$ .

*Доказательство.* Используем представление (A.45), формулу (A.61) и хорошо известную формулу [192]

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial z} = \frac{J_{\nu-1} - J_{\nu+1}}{2}. \quad (\text{A.66})$$

Продельывая все выкладки, и заменяя переменную интегрирования на  $\mu = \nu \pm 2$ , получаем

$$\frac{\partial f_x(\boldsymbol{\omega}, X)}{\partial X} = \frac{k_0^2 A}{4} \left[ \int_{\gamma+2} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0 X) v^1(\boldsymbol{\omega}, \mu - 2) d\mu - \int_{\gamma-2} e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0 X) v^1(\boldsymbol{\omega}, \mu + 2) d\mu \right]. \quad (\text{A.67})$$

Теперь деформируем контуры интегрирования в  $\gamma$ , принимая во внимание, что  $v^1(\omega, \mu - 2)$  имеет полюса в точках  $\mu = \pm\nu_j + 2$ , в которых  $v^1(\omega, \mu + 2)$  регулярна. И наоборот для точек  $\mu = \pm\nu_j - 2$ . В результате деформации получаем (A.63). Формула (A.64) получается аналогично.  $\square$

## §A.4. Вывод модифицированных формул Смышляева

### A.4.1. Вывод формул (3.96) и (3.97)

Будем доказывать формулу (3.96). Доказательство (3.97) аналогично.

Подставим представление (A.46) диаграммы направленности  $f_y(\omega, Y)$  и представление (A.58) диаграммы направленности  $f_y(\omega_0, Y)$  в формулу (3.52). Деформируем контуры интегрирования в (A.46) и (A.58) в контуры  $\gamma_\nu^1$  и  $\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu_*}$  соответственно. Новые контуры показаны на рис. A.3. Здесь использовано обозначение  $\nu_* = \nu_1 - 1$ .

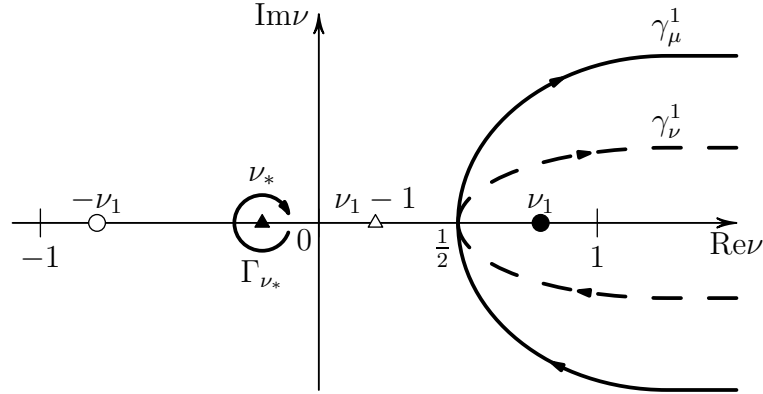


Рис. A.3. Контур  $\gamma_\mu^1$ ,  $\Gamma_{\nu_*}$  и  $\gamma_\nu^1$ .

После этого преобразуем произведение контурных интегралов в двойной интеграл по декартовому произведению  $\gamma_\nu^1 \times (\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu_*})$  и поменяем порядок интегрирования в (3.52), вычисляя сначала интеграл по  $Y$ . В результате получим

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma_\nu^1 \times (\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu_*})} v^2(\omega, \nu) \phi^2(\omega_0, \mu) e^{-i\pi(\nu+\mu)/2} \mu \nu d\nu d\mu \times \int_0^\infty J_\nu(k_0 Y) J_\mu(k_0 Y) \frac{dY}{Y}. \quad (\text{A.68})$$

Изменение порядка интегрирования законно, так как после деформации контуров интеграл по  $Y$  сходится для всех пар  $(\mu, \nu) \in \gamma_\nu^1 \times (\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu_*})$ .

Используя хорошо известную формулу [192]

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(z) J_{\mu}(z) \frac{dz}{z} = \frac{2 \sin[\pi \frac{\mu-\nu}{2}]}{\pi \mu^2 - \nu^2}, \quad (\text{A.69})$$

преобразуем последнее выражение к следующему виду:

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{1/4\pi^2}{\omega_x + \omega_{0x}} \int_{\gamma_{\nu}^1 \times (\gamma_{\mu}^1 \cup \Gamma_{\nu_*})} v^2(\omega, \nu) \phi^2(\omega_0, \mu) \frac{e^{-i\pi\nu} - e^{-i\pi\mu}}{\mu^2 - \nu^2} \mu \nu d\nu d\mu. \quad (\text{A.70})$$

Деформируем контуры  $\gamma_{\nu}^1$  и  $\gamma_{\mu}^1$  в контуры  $\tilde{\gamma}_{\nu}$  и  $\tilde{\gamma}_{\mu}$  соответственно, как показано на рис. A.4, разобьем интеграл на сумму двух членов и преобразуем каждый из них в повторный интеграл. В результате получим

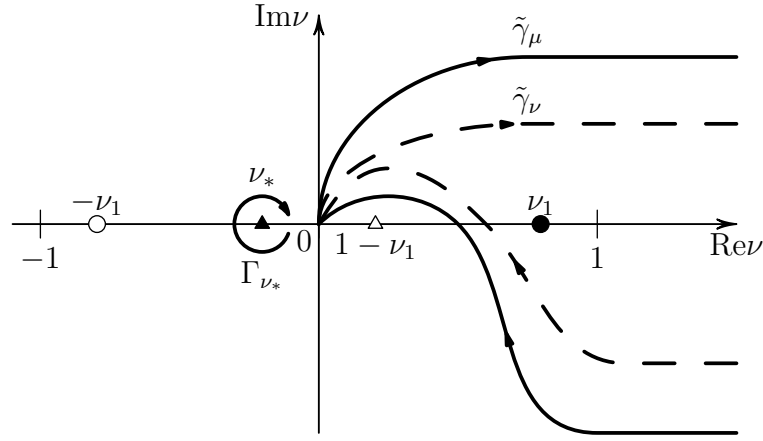


Рис. A.4. Контуры  $\tilde{\gamma}_{\mu}$  и  $\tilde{\gamma}_{\nu}$ .

$$f(\omega, \omega_0) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\omega_x + \omega_{0x}} \left( \int_{\tilde{\gamma}_{\mu} \cup \Gamma_{\nu_*}} \phi^2(\omega_0, \mu) e^{-i\pi\mu} d\mu \int_{\tilde{\gamma}_{\nu}} \frac{v^2(\omega, \nu)}{\nu^2 - \mu^2} \nu \mu d\nu + \right. \\ \left. + \int_{\tilde{\gamma}_{\nu}} v^2(\omega, \nu) e^{-i\pi\nu} d\nu \int_{\tilde{\gamma}_{\mu} \cup \Gamma_{\nu_*}} \frac{\phi^2(\omega_0, \mu)}{\mu^2 - \nu^2} \nu \mu d\mu \right). \quad (\text{A.71})$$

Для вычисления внутреннего интеграла в первом члене отразим нижнюю ветвь контура  $\tilde{\gamma}_{\nu}$ , как показано на рис. A.5. В результате из контура  $\tilde{\gamma}_{\nu}$  получается контур  $\gamma'_{\nu}$ . Такое преобразование контура не изменяет значения интеграла, поскольку подынтегральное выражение является нечетной функцией  $\nu$ . Замыкая контур  $\gamma'_{\nu}$  на  $+i\infty$ , замечаем, что для каждого фиксированного значения  $\mu \neq 0$  подынтегральное выражение имеет внутри контура

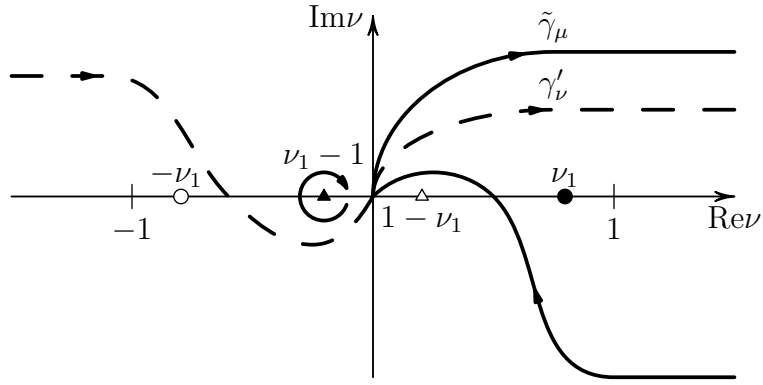


Рис. А.5. Контуры  $\gamma'_\nu$  и  $\tilde{\gamma}_\mu$ .

простой полюс  $\nu = \mu$ , если  $\mu$  лежит на контуре  $\Gamma_{\nu_*}$  или на верхней ветви контура  $\tilde{\gamma}_\mu$ , или  $\nu = -\mu$ , если на нижней. Следовательно,

$$\int_{\gamma'_\nu} \frac{v^2(\omega, \nu)}{\nu^2 - \mu^2} \nu \mu d\nu = \pi i \mu v^2(\omega, \mu). \quad (\text{A.72})$$

Окрестность точки  $\mu = \nu = 0$  не даст никакого вклада, поскольку подынтегральное выражение в ней ограничено.

Выполняя аналогичную процедуру с внутренним интегралом во втором члене в (A.71), заключаем, что он равен нулю, поскольку внутри контура  $\gamma'_\mu \cup \Gamma_{\nu_*}$  подынтегральное выражение регулярно (см. рис. A.6).

Подставляя (A.72) в (A.71), получаем (3.96).

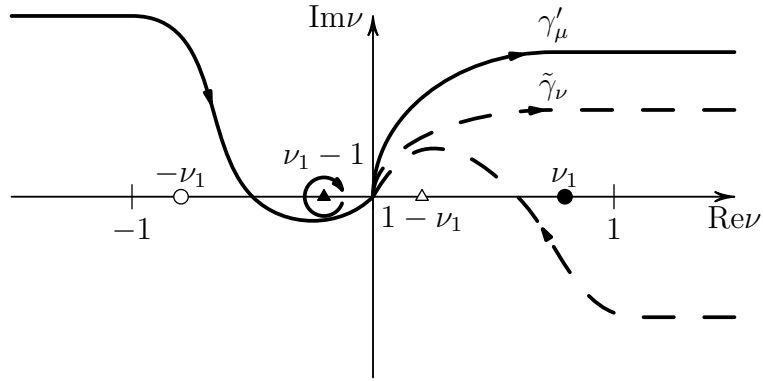


Рис. А.6. Контуры  $\gamma'_\mu$  и  $\tilde{\gamma}_\nu$ .

#### А.4.2. Вывод формулы (3.99)

Формула (3.99) следует из формулы расщепления (3.66). В силу симметрии рассмотрим только первый интеграл в скобках,  $I_1$ :

$$I_1 = \int_0^{\infty} dX f_x(\boldsymbol{\omega}; X) \int_0^{\infty} C_G(X, Y) f_y(\boldsymbol{\omega}_0; Y) dY := \int_0^{\infty} I_y(X) f_x(\boldsymbol{\omega}; X) dX. \quad (\text{A.73})$$

**Вычисление внутреннего интеграла.** Чтобы вычислить интеграл  $I_y(X)$ , будем следовать процедуре вывода формулы (3.96). Подставим представление (A.58) для  $f_y(\boldsymbol{\omega}_0, Y)$  и представление (A.47) для  $C_G(X, Y)$  в  $I_y(X)$ . Деформируем контуры интегрирования в (A.58) и (A.47) в контуры  $\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu^*}$  и  $\gamma_\nu^1$  соответственно. Новые контуры показаны на рис. A.3.

Затем преобразуем произведение контурных интегралов в двойной интеграл по декартовому произведению  $\gamma_\nu^1 \times (\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu^*})$  и изменим порядок интегрирования в  $I_y(X)$ , вычисляя сначала интеграл по  $Y$ . В результате получаем

$$I_y(X) = \frac{ik_0 A}{4X} \int_{\gamma_\nu^1 \times (\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu^*})} \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) e^{-i\frac{\pi}{2}\mu\nu} C_2^1(\nu) d\mu d\nu \times \\ \times \int_0^{\infty} J_\mu(k_0 Y) J_\nu(k_0 \min[X, Y]) H_\nu^{(1)}(k_0 \max[X, Y]) \frac{dY}{Y} \quad (\text{A.74})$$

Изменение порядка интегрирования законно, так как после деформирования контуров интеграл по  $Y$  сходится для всех пар  $(\mu, \nu) \in \gamma_\nu^1 \times (\gamma_\mu^1 \cup \Gamma_{\nu^*})$ .

Представим интеграл по  $Y$  как сумму двух интегралов

$$\int_0^{\infty} (\dots) \frac{dY}{Y} = H_\nu^{(1)}(k_0 X) \int_0^X J_\mu(k_0 Y) J_\nu(k_0 Y) \frac{dY}{Y} + \\ + J_\nu(k_0 X) \int_X^{\infty} J_\mu(k_0 Y) H_\nu^{(1)}(k_0 Y) \frac{dY}{Y}. \quad (\text{A.75})$$

Используем хорошо известную формулу [192]

$$\int^r Z_\mu^{(1)}(k_0 r) Z_\nu^{(2)}(k_0 r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{\mu + \nu} Z_\mu^{(1)}(k_0 r) Z_\nu^{(2)}(k_0 r) - \\ - \frac{k_0 r}{\mu^2 - \nu^2} \left[ Z_{\mu+1}^{(1)}(k_0 r) Z_\nu^{(2)}(k_0 r) - Z_\mu^{(1)}(k_0 r) Z_{\nu+1}^{(2)}(k_0 r) \right], \quad (\text{A.76})$$



верную для произвольных цилиндрических функций  $Z^{(1)}$  и  $Z^{(2)}$ . Выполняя вычисления, получаем

$$\int_0^{\infty} (\dots) \frac{dY}{Y} = \frac{2i}{\pi} \frac{J_{\mu}(k_0 X) - e^{i\pi(\mu-\nu)/2} J_{\nu}(k_0 X)}{\mu^2 - \nu^2}. \quad (\text{A.77})$$

Подставим этот результат в (A.74), деформируем контуры  $\gamma_{\nu}^1$  и  $\gamma_{\mu}^1$  в  $\tilde{\gamma}_{\nu}$  и  $\tilde{\gamma}_{\mu}$ , как показано на рис. A.4, разобьем интеграл на сумму двух слагаемых и преобразуем каждое из них в повторный интеграл. В результате имеем

$$I_y(X) = \frac{k_0 A}{2\pi X} \left( \int_{\tilde{\gamma}_{\mu} \cup \Gamma_{\nu^*}} J_{\mu}(k_0 X) e^{-i\pi\mu/2} \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) d\mu \int_{\tilde{\gamma}_{\nu}} \frac{C_2^1(\nu)}{\nu^2 - \mu^2} \mu \nu d\nu + \right. \\ \left. + \int_{\tilde{\gamma}_{\nu}} J_{\nu}(k_0 X) e^{-i\pi\nu/2} C_2^1(\nu) d\nu \int_{\tilde{\gamma}_{\mu} \cup \Gamma_{\nu^*}} \frac{\phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu)}{\mu^2 - \nu^2} \mu \nu d\mu \right). \quad (\text{A.78})$$

Чтобы вычислить внутренний интеграл в первом члене, отразим нижнюю ветвь контура  $\tilde{\gamma}_{\nu}$ , как показано на рис. A.5, получая контур  $\gamma'_{\nu}$ . Это не изменит значения интеграла, поскольку подынтегральная функция является нечетной функцией  $\nu$ . Замыкая контур  $\gamma'_{\nu}$  на  $+i\infty$ , замечаем, что при любом фиксированном значении  $\mu \neq 0$  подынтегральная функция имеет внутри контура полюс в точке  $\nu = \mu$  или  $\nu = -\mu$  и, следовательно,

$$\int_{\tilde{\gamma}_{\nu}} \frac{C_2^1(\nu)}{\nu^2 - \mu^2} \mu \nu d\nu = \pi i \mu C_2^1(\mu). \quad (\text{A.79})$$

Окрестность точки  $\mu = \nu = 0$  не дает вклада в интеграл, так как подынтегральная функция в ней ограничена.

Выполняя такую же процедуру с внутренним интегралом во втором члене (A.78), заключаем, что он равен нулю. Подставляя (A.79) в (A.78), получаем, что

$$I_y(X) = \frac{ik_0 A}{2X} \int_{\tilde{\gamma}_{\mu} \cup \Gamma_{\nu^*}} J_{\mu}(k_0 X) e^{-i\pi\mu/2} \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) C_2^1(\mu) \mu d\mu. \quad (\text{A.80})$$

**Вычисление внешнего интеграла.** Чтобы вычислить внешний интеграл, понимаемый в регуляризованном смысле, исследуем поведение подынтеграль-

ной функции при  $X \rightarrow 0$ . Деформируя контуры интегрирования в представлениях (A.80) и (A.57), получаем, что

$$I_y(X) = \frac{ik_0A}{2X} \left[ \int_{\gamma_\nu^1} + \int_{\Gamma_{\nu_*}} \right] J_\nu(k_0X) e^{-i\pi\nu/2} \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) C_2^1(\nu) \nu d\nu :=$$

$$:= \frac{ik_0A}{2X} [K_{\gamma^1}(X) + K_{\nu_*}(X)], \quad (\text{A.81})$$

$$f_x(\boldsymbol{\omega}, X) = \frac{ik_0A}{2} \left[ \int_{\gamma_\mu^1} + \int_{\Gamma_{\nu_*}} \right] e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0X) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \mu d\mu :=$$

$$:= \frac{ik_0A}{2} [L_{\gamma^1}(X) + L_{\nu_*}(X)]. \quad (\text{A.82})$$

Контуры  $\gamma_{\mu,\nu}^1$  и  $\Gamma_{\nu_*}$  показаны на рис. A.3. Из приведенных определений можно получить следующие оценки роста функций  $K_{\gamma^1}$ ,  $L_{\gamma^1}$ ,  $K_{\nu_*}$  и  $L_{\nu_*}$  при  $X \rightarrow 0$ :

$$K_{\gamma^1}(X) = o[(k_0X)^{1/2}], \quad L_{\gamma^1}(X) = o[(k_0X)^{1/2}], \quad (\text{A.83})$$

$$K_{\nu_*}(X) = 2\pi i e^{-i\pi\nu_*/2} C_2^1(\nu_*) R_y J_{\nu_*}(k_0X) = o[(k_0X)^{-1/2}], \quad (\text{A.84})$$

$$L_{\nu_*}(X) = 2\pi i e^{-i\pi\nu_*/2} R_x J_{\nu_*}(k_0X) = o[(k_0X)^{-1/2}], \quad (\text{A.85})$$

где  $R_y = \text{Res}[v^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu), \nu_1]$  и  $R_x = \text{Res}[v^1(\boldsymbol{\omega}, \mu), \nu_1]$ . Следовательно, для членов, возникающих в произведении  $I_y(X) f_x(\boldsymbol{\omega}, X)$ , имеем оценки:

$$\frac{K_{\gamma^1}(X) L_{\gamma^1}(X)}{X} = o[(k_0X)^0], \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{K_{\gamma^1}(X) L_{\nu_*}(X)}{X} = o[(k_0X)^{-1}], \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{L_{\gamma^1}(X) K_{\nu_*}(X)}{X} = o[(k_0X)^{-1}]. \quad (\text{A.88})$$

Регуляризованные интегралы от этих членов совпадают с обычными, и для интеграла  $I_1$  можно записать

$$\begin{aligned}
I_1 = -\frac{k_0^2 A^2}{4} & \left( \int_0^\infty K_{\nu_*}(X) L_{\nu_*}(X) \frac{dX}{X} + \int_0^\infty K_{\gamma^1}(X) L_{\nu_*}(X) \frac{dX}{X} + \right. \\
& \left. + \int_0^\infty K_{\nu_*}(X) L_{\gamma^1}(X) \frac{dX}{X} + \int_0^\infty K_{\gamma^1}(X) L_{\gamma^1}(X) \frac{dX}{X} \right) := \\
& := -\frac{k_0^2 A^2}{4} (I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}). \quad (\text{A.89})
\end{aligned}$$

Чтобы вычислить интеграл  $I_{11}$  используем выражения (A.84) и (A.85). Из определения регуляризованного интеграла (3.58) следует, что

$$\int_0^\infty J_\mu^2(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\mu}. \quad (\text{A.90})$$

Значит,

$$I_{11} = -2\pi^2 e^{-i\pi\nu_*} C_2^1(\nu_*) \frac{R_x R_y}{\nu_*}. \quad (\text{A.91})$$

При вычислении остальных трех интегралов будем следовать описанному выше методу, т.е. преобразуем произведение контурных интегралов в двойной интеграл по декартовому произведению контуров, изменим порядок интегрирования, вычисляя сначала интегралы по  $X$  с использованием формулы (A.69). Затем деформируем контуры  $\gamma_\mu^1$  и  $\gamma_\nu^1$  в контуры  $\tilde{\gamma}_\mu$  и  $\tilde{\gamma}_\nu$ , как показано на рис. A.4. Затем разобьем интегралы на суммы двух членов и преобразуем каждый из них в повторные интегралы.

В результате для  $I_{12}$  получим:

$$\begin{aligned}
I_{12} = \frac{1}{\pi i} & \left( \int_{\Gamma_{\nu_*}} \phi^1(\omega, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu \int_{\tilde{\gamma}_\nu} \frac{\phi^2(\omega_0, \nu) C_2^1(\nu)}{\nu^2 - \mu^2} \nu d\nu + \right. \\
& \left. + \int_{\tilde{\gamma}_\nu} \phi^2(\omega_0, \nu) C_2^1(\nu) e^{-i\pi\nu} \nu d\nu \int_{\Gamma_{\nu_*}} \frac{\phi^1(\omega, \mu)}{\mu^2 - \nu^2} \mu d\mu \right). \quad (\text{A.92})
\end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла в первом члене отразим нижнюю ветвь контура  $\tilde{\gamma}_\nu$ , преобразуя его в контур  $\gamma'_\nu$ , показанный на рис. A.7. Это не меняет значения интеграла, поскольку подынтегральное выражение является

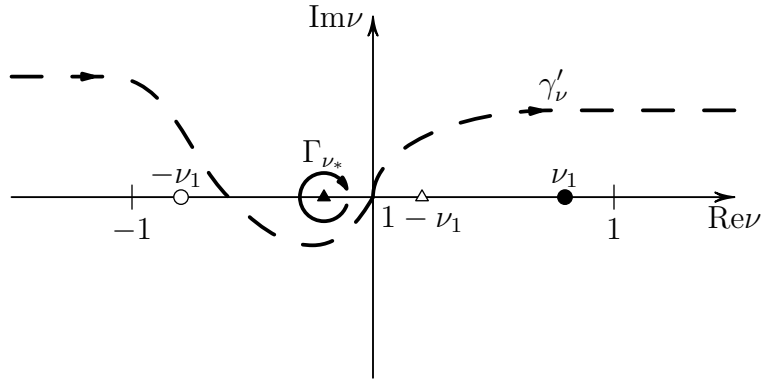


Рис. А.7. Контуры  $\Gamma_{\nu_*}$  и  $\gamma'_\nu$ .

нечетной функцией  $\nu$ . Замыкая контур  $\gamma'_\nu$  на  $+i\infty$ , замечаем, что внутри контура лежат полюса подынтегральной функции  $\nu = \mu$  и  $\nu = \nu_*$ . Вычисляя интеграл с помощью вычетов, получаем

$$\int_{\gamma'_\nu} \frac{\phi^2(\omega_0, \nu) C_2^1(\nu)}{\nu^2 - \mu^2} \nu d\nu = \pi i \phi^2(\omega_0, \mu) C_2^1(\mu) - 2\pi i \frac{R_y C_2^1(\nu_*)}{\nu_*^2 - \mu^2}. \quad (\text{A.93})$$

Для вычисления внутреннего интеграла во втором члене заметим, что подынтегральная функция имеет внутри контура  $\Gamma_{\nu_*}$  единственный полюс  $\mu = \nu_*$ . Следовательно,

$$\int_{\Gamma_{\nu_*}} \frac{\phi^1(\omega, \mu)}{\mu^2 - \nu^2} \mu d\mu = 2\pi i \frac{R_x}{\nu_*^2 - \nu^2}. \quad (\text{A.94})$$

Окончательно для  $I_{12}$  имеем:

$$\begin{aligned} I_{12} = & \int_{\Gamma_{\nu_*}} C_2^1(\mu) \phi^1(\omega, \mu) \phi^2(\omega_0, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu - \\ & - \int_{\Gamma_{\nu_*}} \frac{2R_y C_2^1(\nu_*)}{\nu_*^2 - \mu^2} \phi^1(\omega, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu + \\ & + \int_{\tilde{\gamma}_\nu} \phi^2(\omega_0, \nu) C_2^1(\nu) e^{-i\pi\nu} \frac{2R_x \nu}{\nu_*^2 - \nu^2} d\nu. \quad (\text{A.95}) \end{aligned}$$

Аналогично, для  $I_{13}$  будем иметь:

$$\begin{aligned}
I_{13} = & \int_{\Gamma_{\nu_*}} C_2^1(\nu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) e^{-i\pi\nu} \nu d\nu - \\
& - \int_{\Gamma_{\nu_*}} \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) C_2^1(\nu) e^{-i\pi\nu} \frac{2R_x \nu}{\nu_*^2 - \nu^2} d\nu + \\
& + \int_{\tilde{\gamma}_\mu} \frac{2R_y C_2^1(\nu_*)}{\nu_*^2 - \mu^2} \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu. \quad (\text{A.96})
\end{aligned}$$

А для  $I_{14}$ :

$$\begin{aligned}
I_{14} = & \int_{\tilde{\gamma}_\mu} C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu - \\
& - \int_{\tilde{\gamma}_\mu} \frac{2R_y C_2^1(\nu_*)}{\nu_*^2 - \mu^2} \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu - \\
& - \int_{\tilde{\gamma}_\nu} \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \nu) C_2^1(\nu) e^{-i\pi\nu} \frac{2R_x \nu}{\nu_*^2 - \nu^2} d\nu. \quad (\text{A.97})
\end{aligned}$$

Подставляя значения  $I_{11}$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{13}$  и  $I_{14}$  в выражение (A.89), получаем, что

$$\begin{aligned}
I_1 = & -\frac{k_0^2 A^2}{4} \left( -2\pi^2 e^{-i\pi\nu_*} C_2^1(\nu_*) \frac{R_x R_y}{\nu_*} + \int_{\Gamma_{\nu_*}} \psi(\mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu + \right. \\
& \left. + \int_{\tilde{\gamma}_\mu \cup \Gamma_{\nu_*}} C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu \right), \quad (\text{A.98})
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi(\mu) = & C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) - \frac{2R_y C_2^1(\nu_*)}{\nu_*^2 - \mu^2} \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) - \\
& - \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) C_2^1(\mu) \frac{2R_x}{\nu_*^2 - \mu^2}. \quad (\text{A.99})
\end{aligned}$$

Используя следующие разложения  $\phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu)$ ,  $\phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu)$  и  $C_2^1(\mu)$  в окрестности

ТОЧКИ  $\mu = \nu_*$

$$\phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) = -\frac{R_x/\nu_*}{\mu - \nu_*} + O(1), \quad \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) = -\frac{R_y/\nu_*}{\mu - \nu_*} + O(1), \quad (\text{A.100})$$

$$C_2^1(\mu) = C_2^1(\nu_*) + O(\mu - \nu_*), \quad (\text{A.101})$$

получаем

$$\psi(\mu) = -\frac{R_x R_y / \nu_*^2}{(\mu - \nu_*)^2} C_2^1(\nu_*) + \frac{R_x R_y / \nu_*^3}{\mu - \nu_*} C_2^1(\nu_*) + O(1). \quad (\text{A.102})$$

Следовательно,

$$\psi(\mu) e^{-i\pi\mu} \mu = C_2^1(\nu_*) e^{-i\pi\nu_*} \left( -\frac{R_x R_y / \nu_*}{(\mu - \nu_*)^2} + i\pi \frac{R_x R_y / \nu_*}{\mu - \nu_*} + O(1) \right) \quad (\text{A.103})$$

и

$$\int_{\Gamma_{\nu_*}} \psi(\mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu = 2\pi^2 R_x R_y C_2^1(\nu_*) e^{-i\pi\nu_*} / \nu_*. \quad (\text{A.104})$$

Для  $I_1$  имеем:

$$I_1 = -\frac{k_0^2 A^2}{4} \int_{\tilde{\gamma}_\mu \cup \Gamma_{\nu_*}} C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu. \quad (\text{A.105})$$

В силу симметрии для второго интеграла в (3.66) можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dY f_y(\boldsymbol{\omega}; Y) \int_0^\infty C_G(X, Y) f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX = \\ = -\frac{k_0^2 A^2}{4} \int_{\tilde{\gamma}_\mu \cup \Gamma_{\nu_*}} C_2^1(\mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \phi^2(\boldsymbol{\omega}, \mu) e^{-i\pi\mu} \mu d\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

Подставляя (A.105) и (A.106) в (3.66) и деформируя контур интегрирования, получаем (3.99).  $\square$

#### A.4.3. Вывод формулы (3.98)

Формула (3.98) следует из формулы (3.66). Для ее вывода используем представления (A.63) и (A.64) производных  $\partial f_x(\boldsymbol{\omega}, X)/\partial X$  и  $\partial f_y(\boldsymbol{\omega}, Y)/\partial Y$  в виде контурных интегралов.

В силу симметрии можно вычислить только первый интеграл в (3.65),  $\tilde{I}_1$ . Разобьем его на две части:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_0^\infty f_x(\boldsymbol{\omega}; X) H_x[f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X)] dX = \int_0^\infty f_x(\boldsymbol{\omega}; X) \frac{\partial}{\partial X} f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX + \\ &+ ik_0 \omega_{0x} \int_0^\infty f_x(\boldsymbol{\omega}; X) f_x(\boldsymbol{\omega}_0; X) dX := \tilde{I}_{11} + ik_0 \omega_{0x} \tilde{I}_{12}. \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Интеграл  $\tilde{I}_{12}$  сходится в обычном смысле и совпадает с интегралом в (3.53). Поэтому можно записать

$$\tilde{I}_{12} = \frac{ik_0 A^2}{2} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\mu} v^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \phi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \mu d\mu. \quad (\text{A.108})$$

Для вычисления  $\tilde{I}_{11}$  используем тот же метод, что и для внешнего интеграла в (A.73). Т.е. деформируем контуры интегрирования в (3.78) и (A.63) в контуры  $\gamma_\nu^2 \cup \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_{\nu_j}$  и  $\hat{\gamma}_\mu \cup \bigcup_{j=1}^3 \Gamma_{-\hat{\nu}_j}$ , показанные на рис. A.8 и рис. A.9. Напомним, что  $\hat{\nu}_j = \nu_j - 2$ .

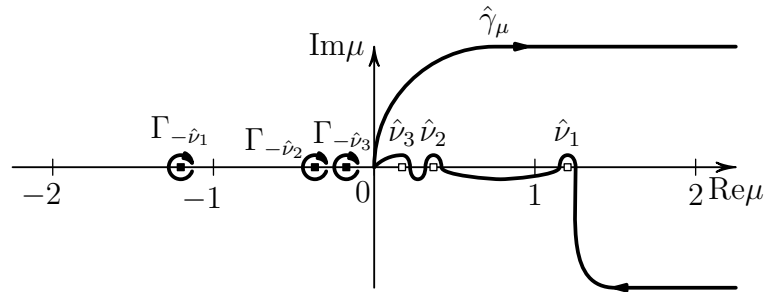


Рис. A.8. Контур  $\hat{\gamma}_\mu$  и  $\Gamma_{-\hat{\nu}_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Функции  $f_x(\boldsymbol{\omega}, X)$  и  $\partial f_x(\boldsymbol{\omega}_0, X)/\partial X$  можно теперь представить в следу-

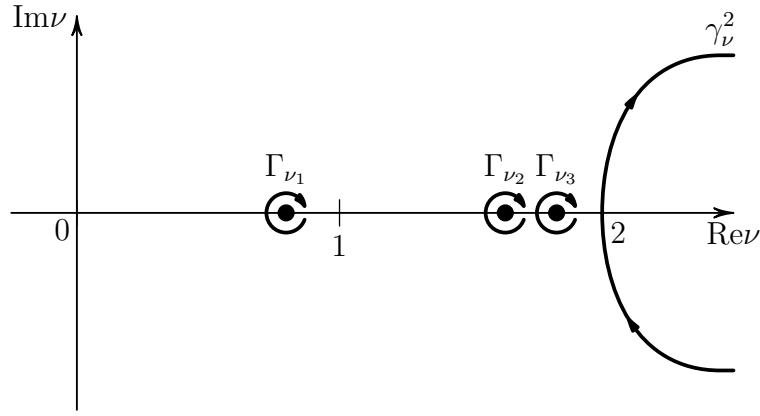


Рис. А.9. Контуры  $\gamma_\nu^2$  и  $\Gamma_{\nu_j}, j = 1, 2, 3$ .

ющем виде:

$$f_x(\boldsymbol{\omega}, X) = \frac{A}{X} \left[ \int_{\gamma_\nu^2} + \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_{\nu_j}} \right] e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(k_0 X) \phi^1(\boldsymbol{\omega}, \nu) \nu d\nu := \quad (\text{A.109})$$

$$:= \frac{A}{X} [K_{\gamma^2}(X) + \sum_{j=1}^3 K_{\nu_j}(X)].$$

$$\frac{\partial f_x(\boldsymbol{\omega}_0, X)}{\partial X} = \frac{k_0^2 A}{4} \left[ \int_{\hat{\gamma}} + \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_{-\hat{\nu}_j}} \right] e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(k_0 X) \psi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \mu d\mu := \quad (\text{A.110})$$

$$:= \frac{k_0^2 A}{4} [L_{\hat{\gamma}}(X) + \sum_{j=1}^3 L_{-\hat{\nu}_j}(X)].$$

Выполняя оценки аналогичные (A.83) – (A.85), заключаем, что интегралы от произведений  $K_{\gamma^2} L_{-\hat{\nu}_j}$ ,  $K_{\gamma^2} L_{\hat{\gamma}}$  и  $K_{\nu_j} L_{\hat{\gamma}}$  сходятся в обычном смысле и могут быть вычислены тем же способом, что и  $I_{12}$ ,  $I_{13}$  и  $I_{14}$  (см., например, (A.95)). Интегралы от произведений  $K_{\nu_j} L_{-\hat{\nu}_k}$  могут быть вычислены с использованием явных выражений для  $K_{\nu_j}(X)$  и  $L_{\hat{\nu}_k}(X)$  так же, как и  $I_{11}$  (см. (A.91)). Выполняя все эти вычисления, получаем:

$$\tilde{I}_{11} = \frac{k_0^2 A^2}{4} \int_{\gamma \cup \Gamma_2} e^{-i\pi\mu} v^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) \psi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu) \mu d\mu. \quad (\text{A.111})$$

Это выражение можно преобразовать. Подставим в него выражение для  $\psi^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu)$  и заменим переменную интегрирования на  $\nu = \mu - 1$  в члене, содержащем произведение  $v^1(\boldsymbol{\omega}, \mu) v^1(\boldsymbol{\omega}_0, \mu - 2)$ , и на  $\nu = \mu + 1$  в члене, содержащем



произведение  $v^1(\omega, \mu)v^1(\omega_0, \mu + 2)$ . В результате получим

$$\tilde{I}_{11} = -\frac{k_0^2 A^2}{4} \left[ \int_{\gamma \cup \Gamma_2+1} e^{-i\pi\nu} v^1(\omega, \nu + 1)v^1(\omega_0, \nu - 1)d\nu - \int_{\gamma \cup \Gamma_2-1} e^{-i\pi\nu} v^1(\omega, \nu - 1)v^1(\omega_0, \nu + 1)d\nu \right]. \quad (\text{A.112})$$

Рассмотрим первый интеграл в скобках. Контур  $\gamma \cup \Gamma_2+1$  показан на рис. A.10. Поскольку подынтегральное выражение регулярно в точках  $\nu = 3 - \nu_j$ , этот

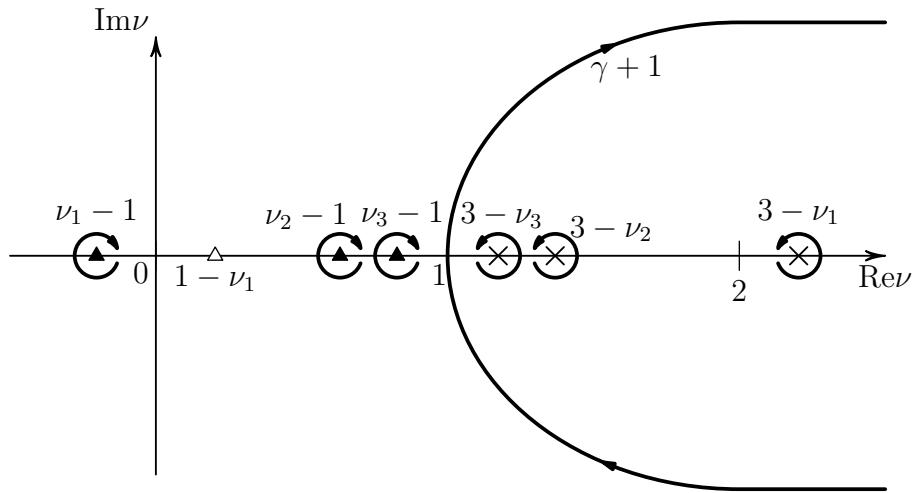


Рис. A.10. Контур  $\gamma \cup \Gamma_2 + 1$ .

контур можно деформировать в  $\gamma \cup \Gamma$ . Такое же преобразование можно выполнить и со вторым интегралом.

В результате для  $\tilde{I}_1$  получаем:

$$\tilde{I}_1 = -\frac{k_0^2 A^2}{4} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [v^1(\omega, \nu + 1)v^1(\omega_0, \nu - 1) - v^1(\omega, \nu - 1)v^1(\omega_0, \nu + 1) + 2\nu\omega_{0x}v^1(\omega, \nu)\phi^1(\omega_0, \nu)]d\nu. \quad (\text{A.113})$$

В силу симметрии для второго интеграла в (3.54),  $\tilde{I}_2$ , можно записать

$$\tilde{I}_2 = -\frac{k_0^2 A^2}{4} \int_{\gamma \cup \Gamma} e^{-i\pi\nu} [v^2(\omega, \nu + 1)v^2(\omega_0, \nu - 1) - v^2(\omega, \nu - 1)v^2(\omega_0, \nu + 1) + 2\nu\omega_{0y}v^2(\omega, \nu)\phi^2(\omega_0, \nu)]d\nu. \quad (\text{A.114})$$

Подставляя последние два выражения в (3.65), получаем (3.98).  $\square$

## Литература

1. Sommerfeld A. *Mathematische Theorie der Diffraction* // *Math. Ann.* 1896. Vol. 47. Pp. 317–374.
2. Малюжинец Г. Д. Обобщение метода отражений в теории дифракции. ЦНИИ «Румб», 1981. 67 с.
3. Shanin A. V. Three theorems concerning diffraction by a strip or a slit // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* 2001. Vol. 54. Pp. 107–137.
4. Шанин А. В. К задаче о дифракции на щели. Некоторые свойства ряда Шварцшильда // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* 2001. Т. 275. С. 258–285.
5. Шанин А. В. О связи метода Винера-Хопфа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений // *Электромагнитные волны и электронные системы.* 2002. Т. 7. С. 10–16.
6. Shanin A. V., Craster R. V. Removable singular points for ordinary differential equations // *Europ. Journ. Appl. Math.* 2003. Vol. 13. Pp. 617–639.
7. Shanin A. V. Diffraction of a plane wave by two ideal strips // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* 2003. Vol. 56. Pp. 187–215.
8. Shanin A. V. A generalization of the separation of variables method for some 2D diffraction problems // *Wave Motion.* 2003. Vol. 37. Pp. 241–256.
9. Craster R. V., Shanin A. V., Doubravsky E. M. Embedding formulae in diffraction theory // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 459. Vol. 2003. Pp. 2475–2496.
10. Craster R. V., Shanin A. V. Embedding formula for diffraction by wedge and angular geometries // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 2005. Vol. 461. Pp. 2227–2242.
11. Шанин А. В. Формула расщепления для электромагнитной задачи дифракции // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* 2005. Т. 324. С. 247–261.
12. Shanin A. V. Modified Smyshlyaev's formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane // *Wave motion.* 2005. Vol. 41. Pp. 79–93.
13. Shanin A. V. Coordinate equations for a problem on a sphere with a cut associated with diffraction by an ideal quarter-plane // *Q. J. Mechanics Appl. Math.* 2005. Vol. 58. Pp. 289–308.
14. Shanin A. V., Doubravsky E. M. Acoustical scattering at a gap between

- two orthogonal, semi-infinite barriers: coordinate and spectral equations // Journ. Eng. Math. 2007. Vol. 59. Pp. 437–449.
15. Шанин А. В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Асимптотики решений координатных и спектральных уравнений // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. 2007. Т. 342. С. 233–256.
  16. Skelton E. A., Craster R. V., Shanin A. V. Embedding formulae for diffraction by non-parallel slits // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 2008. Vol. 61. Pp. 93–116.
  17. Shanin A. V., Craster R. V. Pseudo-differential operators for embedding formulae // Journ. Comput. Appl. Math. 2010. Vol. 234. Pp. 1637–1646.
  18. Шанин А. В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Постановка задачи определения неизвестных констант // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. 2008. Т. 354. С. 220–244.
  19. Shanin A. V. Weinstein’s Diffraction Problem: Embedding Formula and Spectral Equation in Parabolic Approximation. // SIAM Journ. Appl. Math. 2009. Vol. 70. Pp. 1201–1218.
  20. Шанин А. В. Новые дифференциальные уравнения в канонических задачах дифракции: Докторская диссертация / МГУ им. М.В. Ломоносова. 2010.
  21. Smyshlyaev V. P. Diffraction by conical surfaces at high frequencies // Wave motion. 1990. Vol. 12. Pp. 329–339.
  22. Smyshlyaev V. P. The high frequency diffraction of electromagnetic waves by cones of arbitrary cross-section // SIAM Journ. Appl. Math. 1993. Vol. 53. Pp. 670–688.
  23. Babich V. M., Smyshlyaev V. P., Dement’ev D. B., Samokish B. A. Numerical calculation of the diffraction coefficients for an arbitrary shaped perfectly conducting cone // IEEE transactions on antennas and propagation. 1996. Vol. 44. Pp. 740–747.
  24. Babich V. M., Dement’ev D. B., Samokish B. A., Smyshlyaev V. P. On evaluation of the diffraction coefficients for an arbitrary “nonsingular” directions of a smooth convex cone // SIAM J. Appl. Math. 2000. Vol. 60. Pp. 536–573.
  25. Keller J. B. The geometrical theory of diffraction. // Journ. Opt. Soc. Am. 1962. Vol. 52. Pp. 116–130.
  26. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.:

- Связь, 1978. 248 с.
27. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. Радио, 1962. 244 с.
  28. Skelton E. A., Craster R. V., Shanin A. V., Valyaev V. Yu. Embedding formulae for scattering by three-dimensional structures // *Wave motion*. 2010. Vol. 47. Pp. 299–317.
  29. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Numerical procedure for solving the strip problem by the spectral equation // *Journal of computational acoustics*. 2011. Vol. 19. Pp. 269–290.
  30. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Метод последовательностей максимальной длины в дифракционном эксперименте // *Акуст. Журн.* 2011. Т. 57. С. 420–425.
  31. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Модифицированное преобразование Контровича–Лебедева и его применение к решению канонических конических задач дифракции // *Акуст. Журн.* 2011. Т. 57. С. 755–762.
  32. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Embedding formulae for Laplace–Beltrami problems on the sphere with a cut // *Wave Motion*. 2012. Vol. 49. Pp. 83–92.
  33. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Derivation of modified Smyshlyaev’s formulae using integral transform of Kontorovich–Lebedev type // *Proceedings of the international conference «Days on diffraction»2010 / Ed. by I. V. Andronov, A. P. Kiselev, M. V. Perel, A. S. Kirpichnikova. St. Petersburg: 2010. — June. Pp. 174–180.*
  34. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Экспериментальное изучение дифракции акустической волны на жестком цилиндре MLS-методом // *Сборник трудов участников XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» («Волны-2010»)*. Звенигород: 2010. — Май. С. 53–54.
  35. Валяев В. Ю., Шанин А. В. Численный алгоритм решения задачи дифракции плоской волны на двух полосах // *Сборник трудов XXII сессии Российского акустического общества и Сессии Научного совета РАН по акустике. Т. 1. Москва: ГЕОС, 2010. — Июнь. С. 257–260.*
  36. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Spectral equation for a strip/slit diffraction problem: numerical algorithm // *Days on diffraction’2009, Abstracts. St. Petersburg: 2009. — May. P. 92.*
  37. Valyaev V. Yu., Shanin A. V. Embedding formulae for Laplace–Beltrami

- problems on the sphere with a cut // Days on diffraction'2011, Abstracts. St. Petersburg: 2011. — May/June. P. 96.
38. Schwarzschild K. Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. I // Math. Ann. 1901. Vol. 55. Pp. 177–247.
  39. Serdyuk V. M. Exact solutions for electromagnetic wave diffraction by a slot and strip // Int. J. Electron. Commun. (AEÜ). 2011. Vol. 65. Pp. 182–189.
  40. Morse P. M., Rubenstein P. J. The diffraction of waves by ribbons and by slits // Phys. Rev. 1938. Vol. 54. Pp. 895–898.
  41. Sieger B. Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischen Querschnitt // Ann. Phys. 1908. Vol. 27. Pp. 626–664.
  42. Hansen E. B. Scalar diffraction by an infinite strip and a circular disc // Journ. of Math. and Phys. 1962. Vol. 41. Pp. 229–245.
  43. Shinbrot M. The solution of some integral equations of Wiener–Hopf type // Quart. Appl. Math. 1970. Vol. 28. Pp. 15–36.
  44. Karp S., Russek A. Diffraction by a wide slit // J. of Appl. Phys. 1956. Vol. 27. Pp. 886–894.
  45. Clemmow P. C. Edge Currents in Diffraction Theory // Trans. Inst. of Radio Eng. AP-4. 1956. Vol. 4. Pp. 282–287.
  46. Millar R. F. Diffraction by a wide slit and complimentary strip (I and II) // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1958. Vol. 54. Pp. 479–511.
  47. Braunbek W. Neue Näherungsmethode für die Beugung am ebenen Schirm // Zeitschrift für Physik. 1950. Vol. 127. Pp. 381–390.
  48. Braunbek W. Zur Beugung an der Kreisscheibe // Zeitschrift für Physik. 1950. Vol. 127. Pp. 405–415.
  49. Keller J. Rays, waves and asymptotics // Bull. of Am. Math. Soc. 1978. Vol. 84. Pp. 727–750.
  50. Хаскинд М. Д., Вайнштейн Л. А. Дифракция плоской волны на щели и ленте // Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9. С. 1800–1811.
  51. Гринберг Г. А. Дифракция электромагнитной волны на полосе конечной ширины // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129. С. 295.
  52. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 280 с.

53. Уфимцев П. Я. Вторичная дифракция электромагнитных волн на ленте // ЖТФ. 1958. Т. 28. С. 569–582.
54. Уфимцев П. Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13. С. 1867–1869.
55. Уфимцев П. Я. Асимптотическое исследование задачи о дифракции на ленте. // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14. С. 1173–1185.
56. Уфимцев П. Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте в случае граничных условий Дирихле // Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15. С. 914–923.
57. Уфимцев П. Я. Асимптотические разложения в теории дифракции плоской волны на ленте // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. С. 1257–1260.
58. Уфимцев П. Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2007. 366 с.
59. Jones D. S. Acoustic and electromagnetic waves. Oxford: Clarendon press, 1986.
60. Jones D. S. The theory of Electromagnetism. Amsterdam: Elsevier, 1964. 812 pp.
61. Саутбеков С. С. Еще раз о дифракции на ленте и щели // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. С. 1202–1209.
62. Гринберг Г. А. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на плоскости с безграничной прямолинейной щелью и родственными ей проблем // ЖТФ. 1957. Т. 27. С. 2595–2605.
63. Гринберг Г. А. Метод решения дифракционных задач для плоских идеально проводящих экранов, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов // ЖТФ. 1958. Т. 28. С. 542–568.
64. Курицын В. Н. К решению «ключевой» задачи для дифракции на идеальной проводящей полосе // ЖТФ. 1961. Т. 31. С. 1485–1490.
65. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины // ЖТФ. 1965. Т. 35. С. 381–389.
66. Фиалковский А. Т. Дифракция плоских электромагнитных волн на щели и ленте // Радиотехника и электроника. 1966. Т. 11. С. 178–186.
67. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Асимптотическая теория дифракции

- электромагнитных волн на конечных структурах. М.: Наука, 1972. 204 с.
68. Боровиков В. А. Дифракция плоской волны на отрезке // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 711–714.
  69. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 456 с.
  70. Красильщикова Е. А. Дифракция звуковой волны на щели // МЖГ. 1975. Т. 10. С. 139–145.
  71. Fox E. N. The diffraction of two-dimensional sound pulses incident on an infinite uniform slit in a perfectly reflecting screen // Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1949. Vol. 242. Pp. 1–32.
  72. Itoh K., Takayama K. Shock wave propagation through a slit // Theor. Appl. Mech. 1988. Vol. 36. Pp. 103–112.
  73. Сологуб В. Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования // ЖВММФ. 1971. Т. 11. С. 837–855.
  74. Boersma J. Boundary value problems in diffraction theory and lifting surface theory // Compositio Mathematica. 1964. Vol. 16. Pp. 205–293.
  75. Kunik M., Skrzypacz P. Diffraction of light revisited // Math. Meth. Appl. Sci. 2008. Vol. 31. Pp. 793–820.
  76. DeAcetis L. A., Einstein F. S., Juliano Jr., R. A., Lazar I. Single strip diffraction: comparison of Kirchhoff theory and geometrical theory with the exact solution in the limit of small glancing angle and width; perpendicular polarization // Appl. Opt. 1976. Vol. 15. Pp. 2866–2870.
  77. Senior T., Uslenghi P. Comparison between Keller's and Ufimtsev's theories for the strip // IEEE Trans. Ant. Prop. 1971. Vol. 19. Pp. 557–558.
  78. Brooker G. A. Diffraction at a single ideally conducting slit // Journ. of Modern Optics. 2008. Vol. 55. Pp. 423–445.
  79. Дагуров П. Н., Дмитриев А. В. Применение метода Кирхгофа к задаче дифракции волн на ленте при малых углах скольжения // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. С. 22–27.
  80. Eswaran K. On the solutions of a class of dual integral equations occurring in diffraction problems // Proc. Roy. Soc. A. 1990. Vol. 429. Pp. 399–427.
  81. Gorenflo N. A new explicit solution method for the diffraction through a

- slit // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physic. 2002. Vol. 53. Pp. 877–886.
82. Gorenflo N. A new explicit solution method for the diffraction through a slit – part 2 // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physic. 2007. Vol. 58. Pp. 16–36.
  83. Lüneburg E. The Sommerfeld problem: methods, generalizations and frustrations // Modern Mathematical Methods in Diffraction Theory and its Applications in Engineering, Proceedings of the Sommerfeld'96 Workshop, 30 Sept. – 4 Oct. 96, Freudenstadt / Ed. by E. Meister. Frankfurt am Main: Peter Lang, Verlag der Wissenschaften, 1997. Pp. 145–162. Methoden Verfahren Math. Phys. 42.
  84. Williams W. E. A note on diffraction by a half plane // Canadian Journ. Phys. 1960. Vol. 38. Pp. 507–510.
  85. Kleinmann R. E. Plane wave diffraction by a strip // Proceedings of the Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas, Copenhagen, June 25–30, 1962 / Ed. by E. C. Jordan. Oxford: Pergamon Press, 1963. Pp. 97–103.
  86. Tinman R., Kleinman R. E. Integral representations for the field diffracted by a strip // URSI General Assembly 1960, Monograph on Radio Waves Cirquits / Ed. by Silver. Elsevier, 1963. Pp. 38–65.
  87. Bindingavale S. S., Volakis J. L. Scattering by a narrow groove in an impedance plane // Radio Science. 1996. Vol. 31. Pp. 401–408.
  88. Idemen M., Alkumru A., Akduman I. One-dimensional profile inversion of a halfspace bounded by a three-part impedance ground // Inverse Problems. 1996. Vol. 12. Pp. 641–666.
  89. Белинский Б. П. Интегральные уравнения стационарных задач дифракции коротких волн на препятствиях типа отрезка // ЖВММФ. 1973. Т. 13. С. 373–384.
  90. Serbest A. H., Uzgören G., Büyükkaksoy A. Diffraction of plane waves by a resistive strip residing between two impedance half-planes // Ann. Telecom. 1991. Vol. 46. Pp. 359–366.
  91. Asghar S., Hayat T., Ahmad B. Acoustic diffraction from a slit in an absorbing sheet // Jap. Journ. Ind. Appl. Math. 1996. Vol. 13. Pp. 519–532.
  92. Asghar S., Hayat T. Plane wave diffraction by a slit in an infinite penetrable sheet // Can. Appl. Math. Quart. 1999. Vol. 7. Pp. 1–15.



93. Bernard J.-M. L. Scattering by a three-part impedance plane: a new spectral approach // *Quart. Journ. Appl. Math. Mech.* 2005. Vol. 58. Pp. 383–418.
94. Ayub M., Mann A. B., Ramzan M., Tiwana M. H. Diffraction of a plane wave by a soft-hard strip // *Optics Communications.* 2009. Vol. 282. Pp. 4322–4328.
95. Baldwin G. L., Heins A. E. On diffraction of scalar waves by a periodic array of screens // *Math. Scand.* 1954. Vol. 2. Pp. 103–118.
96. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966. 428 с.
97. Лукьянов В. Д. Точное решение задачи о дифракции на решетке наклонно падающей плоской волны // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 255. С. 78–80.
98. Лукьянов В. Д. Точное решение задачи о дифракции на решетке наклонно падающей плоской волны // *ЖТФ.* 1981. Т. 51. С. 2001–2006.
99. Erbas B., Abrahams I. D. Scattering of sound waves by an infinite grating composed of rigid plates // *Wave Motion.* 2007. Vol. 44. Pp. 282–303.
100. Храпков А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме // *ПММ.* 1971. Т. 35. С. 625–637.
101. Lüneburg E., Westpfahl K. Diffraction of plane waves by an infinite strip grating // *Ann. Phys.* 1971. Vol. 27. Pp. 257–288.
102. Achenbach J. D., Li Z. L. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // *Wave Motion.* 1986. Vol. 8. Pp. 225–234.
103. Scarpetta E., Sumbatyan M. A. Explicit analytical results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens // *IMA J. Appl. Math.* 1996. Vol. 56. Pp. 109–120.
104. Porter R., Evans D. V. Wave scattering by periodic arrays of breakwaters // *Wave Motion.* 1996. Vol. 23. Pp. 95–120.
105. Шестоपालов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Том 1. Дифракционные решетки. 1986: Наукова Думка, Киев. 232 с.
106. Сологуб В. Г. Дифракция плоской волны на ленточной решетке в случае коротких длин волн // *ЖВММФ.* 1972. Т. 12. С. 975–989.
107. Крутицкий П. А., Колыбасова В. В. О смешанной задаче для дисси-

- пативного уравнения Гельмгольца в двумерной области с разрезами с условием Дирихле на разрезах // Вестник Московского университета. Сер. 3. 2005. С. 25–28.
108. Крутицкий П. А., Колыбасова В. В. О смешанной задаче для уравнения Гельмгольца в плоской области // УМН. 2005. Т. 60. С. 167–168.
  109. Казаков А. Я. Симметрии конфлюэнтного уравнения Гойна // Математические вопросы теории распространения волн. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 275. С. 55–71.
  110. Казаков А. Я., Славянов С. Ю. Интегральные соотношения для специальных функций класса Гойна // ТМФ. 1996. Т. 107. С. 388–396.
  111. Latta G. The solution of a class of integral equations // J. Rat. Mech. 1956. Vol. 5. Pp. 821–834.
  112. Gorenflo N., Werner M. Solution of a finite convolution equation with a Hankel kernel by matrix factorization // SIAM Jour. Math. Anal. 1997. Vol. 28. Pp. 434–451.
  113. Williams M. Diffraction by a finite strip // Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math. 1982. Vol. 35. Pp. 103–124.
  114. Biggs N. R. T., Porter D., Stirling D. S. G. Wave diffraction through a perforated breakwater // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 2000. Vol. 53. Pp. 375–391.
  115. Biggs N. R. T., Porter D. Wave diffraction through a perforated barrier of non-zero thickness // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 2001. Vol. 54. Pp. 523–547.
  116. Biggs N. R. T., Porter D. Wave scattering by a perforated duct // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. 55. Vol. 2002. Pp. 249–272.
  117. Biggs N. R. T., Porter D. Wave scattering by an array of perforated barriers // IMA J. Appl. Math. 2005. Vol. 70. Pp. 908–936.
  118. Баланцев И. А., Делицын А. Л. Векторные функциональные пространства, связанные с задачей электромагнитной дифракции в конусе, и их свойства // Вестник Московского университета. Сер. 3, Физика. Астрономия. 2009. Pp. 23–28.
  119. Jones D. S. Scattering by a cone // Quaterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1997. Vol. 50. Pp. 499–523.

120. Miranker W. Uniqueness and Representation Theorems for Solutions of  $\Delta u + k^2 u = 0$  in Infinite Domains // *Indiana Univ. Math. J.* 1957. Vol. 6. Pp. 847–858.
121. Cheeger J., Taylor M. E. Diffraction of waves by conical singularities. I // *Comm. Pure Appl. Math.* 1982. Vol. 35. Pp. 275–331.
122. Cheeger J., Taylor M. E. Diffraction of waves by conical singularities. II // *Comm. Pure Appl. Math.* 1982. Vol. 35. Pp. 487–529.
123. Kraus L., Levine L. M. Diffraction by an elliptic cone // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. Vol. 14. Pp. 49–68.
124. Kraus L., Levine L. M. Diffraction by an elliptic cone: Research report EM-156. New York: Institute of mathematical sciences, Department of electromagnetic research, New York University, 1960. — March.
125. Bowman J. J., Senior T. B., Uslenghi L. E. *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1987. 728 pp.
126. Boersma J., Jansen J. K. M. Electromagnetic field singularities at the tip of an elliptic cone: Tech. Rep. EUT 90-01. Eindhoven: Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, 1990.
127. Satterwhite R. Diffraction by a quarter plane, the exact solution and some numerical results // *IEEE Trans. Ant. Prop.* 1974. Vol. 22. Pp. 500–503.
128. Hansen T. B. Corner diffraction coefficients for the quarter plane // *IEEE Trans. Ant. Prop.* 1991. Vol. 39. Pp. 976–984.
129. Blume S. Spherical-multipole analysis of electromagnetic and acoustical scattering by a semi-infinite elliptic cone // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 1996. Vol. 38. Pp. 33–44.
130. Blume S., Krebbs V. Numerical evaluation of dyadic diffraction coefficients and bistatic radar cross sections for a perfectly conducting semi-infinite elliptic cone // *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. 1998. Vol. 46. Pp. 414–424.
131. Blume S., Uschkerat U. The Radar cross-section of the semiinfinite elliptic cone - Numerical evaluation // *Wave motion*. 1995. Vol. 22. Pp. 311–324.
132. Klinkenbusch L. Electromagnetic scattering by semi-infinite circular and elliptic cones // *Radio Science*. 2007. Vol. 42. P. RS6S10.

133. Watson G. N. General Transforms // Proc. Lond. Math. Soc. 1933. Vol. s2-35. Pp. 156–199.
134. Felsen L. B. Back scattering from wide-angle and narrow-angle cone // Journ. Appl. Phys. 1955. Vol. 26. Pp. 138–151.
135. Felsen L. B. Plane wave scattering by small-angle cones // IRE Trans. Ant. Prop. 1957. Vol. 5. Pp. 121–129.
136. Николаев Б. Г. О волновых процессах, возникающих при дифракции идеально отражающим конусом в осесимметричном случае // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ. 1972. Т. 25. С. 151–171.
137. Николаев Б. Г. Дифракция поля точечного источника круговым конусом (неосесимметричный случай) // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ. 1974. Т. 42. С. 212–227.
138. Radlow J. Diffraction by a quarter-plane // Arch. Rat. Mech. Anal. 1961. Vol. 8. Pp. 139–158.
139. Meister E., Speck F.-O. A contribution to the quarter-plane problem in diffraction theory // Journ. Math. Anal. Appl. 1988. Vol. 130. Pp. 223–236.
140. Albani M. On Radlow's quarter-plane diffraction solution // Radio Science. 2007. Vol. 42. P. RS6S11.
141. Strang G. Toeplitz operators in a quarter-plane // Bull. Am. Math. Soc. 1970. Vol. 76. Pp. 1303–1307.
142. Meister E., Speck F.-O. Some multidimensional Wiener-Hopf equations with applications // Trends in Applications of pure Mathematics to Mechanics, Ed. by H. Zorski. London: Pitman, 1979. Pp. 217–262.
143. Meister E., Speck F.-O. The Moore-Penrose inverse of Wiener-Hopf operators on the half axis and the quarter plane // Journal of Integral Equations. 1985. Vol. 9. Pp. 45–61.
144. Speck F.-O., Duduchava R. Bessel potential operators for the quarter-plane // Applicable Analysis. 1992. Vol. 45. Pp. 49–68.
145. Albani M., Capolino F., Maci S. Diffraction at the vertex of a quarter plane // Ant. and Prop. Soc. Int. Symp. IEEE., 20–25 June 2004, Vol. 2. 2004. Pp. 1991 – 1994.
146. Albani M., Capolino F., Maci S. Vertex diffraction coefficient for a quarter plane // URSI Int. Symp. on EM Theory, Pisa, Italy, May 2004. 2004.

- Рр. 1146–1148.
147. Budaev B. V., Bogy D. B. Diffraction by a plane sector // Proc. R. Soc. Lond. A. 2004. Vol. 460. Pp. 3529–3546.
  148. Popov A., Ladyzhensky (Brodskaya) A., Khozioski S. Uniform asymptotics of the wave diffracted by a cone of arbitrary cross section // [Russian Journal of Mathematical Physics](#). 2009. Vol. 16. Pp. 296–299.
  149. Babich V. M. On the PC-ansatz // J. Math. Sci. (N. Y.). 2006. Vol. 132. Pp. 2–10.
  150. Шанин А. В. Асимптотики волнового поля при дифракции на конусе и дифракционный ряд на сфере // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Vol. 393. Pp. 234–258.
  151. Babich V. M., Dement'ev D. B., Samokish B. A. On diffraction of high frequency waves by a cone of arbitrary shape // Wave Motion. 1995. Vol. 21. Pp. 203–207.
  152. Камотский В. В. Вычисление некоторых интегралов, описывающих волновые поля // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. 1999. Т. 257. С. 44–55.
  153. Babich V. M., Dement'ev D. B., Samokish B. A., Smyshlyaev V. P. On the scattering of a high-frequency electromagnetic wave by the vertex of an ideally conducting cone. (Singular directions) // J. Math. Sci. (N. Y.). 2004. Vol. 122. Pp. 3453–3458.
  154. Bonner B. D., Graham I. G., Smyshlyaev V. P. The computation of conical diffraction coefficients in high-frequency acoustical wave scattering // SIAM Journ. Num. Anal. 2005. Vol. 43. Pp. 1202–1230.
  155. Bonner B. D. Calculating conical diffraction coefficients: Ph. D. thesis / Bath University. UK, 2003.
  156. Assier R. C., Peake N. On the diffraction of acoustic waves by a quarter-plane // [Wave Motion](#). 2012. Vol. 49. Pp. 64–82.
  157. Дорошенко В. А., Кравченко В. Ф. Рассеяние поля электрического диполя на конической структуре с продольными щелями // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. С. 792–798.
  158. Дорошенко В. А., Кравченко В. Ф., Пустовойт В. И. Преобразования Мелера-Фока в задачах дифракции волн на незамкнутых структурах во временной области // ДАН. 2005. Т. 405. С. 184–187.

159. Дорошенко В. А., Кравченко В. Ф. Применение сингулярных интегральных уравнений для решения задачи дифракции волн на решетке из импедансных плоских нерегулярных лент // Докл. АН. 2002. Т. 383. С. 189–193.
160. Bernard J.-M. L. Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau. Non oscillant pour le cas d'impédance constante: Tech. Rep. rapport CEA-R-5764. Editions Dist-Saclay: CEA, 1997.
161. Bernard J.-M. L., Lyalinov M. A. The leading asymptotic term for the scattering diagram in the problem of diffraction by a narrow circular impedance cone // Journ. Phys. A. 1999. Vol. 32. Pp. L43–L48.
162. Bernard J.-M. L., Lyalinov M. A. Diffraction of scalar waves by an impedance cone of arbitrary cross-section // Wave Motion. 2001. Vol. 33. Pp. 155–181.
163. Bernard J.-M. L., Lyalinov M. A. Spectral domain solution and asymptotics for the diffraction by an impedance cone // IEEE Trans. AP. 2001. Vol. 49. Pp. 1633–1637.
164. Лялинов М. А. О дифракции плоской волны на импедансном конусе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 191–215.
165. Лялинов М. А. Об интегральном уравнении в задаче дифракции плоской волны на прозрачном круговом конусе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 308. С. 101–123.
166. Bernard J.-M. L., Lyalinov M. A. Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone // IMA Journ. Appl. Math. 2004. Vol. 69. Pp. 285–333.
167. Lyalinov M. A., Zhu N. Y. Acoustic scattering by a circular semi-transparent conical surface // Journ. Eng. Math. 2007. Vol. 59. Pp. 385–398.
168. Bernard J.-M. L., Lyalinov M. A., Zhu N. Y. Analytical-Numerical Calculation of Diffraction Coefficients for a Circular Impedance Cone // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 2008. Vol. 56. Pp. 1616–1622.
169. Лялинов М. А. Дифракция плоской акустической волны на импедансном конусе. Поверхностные волны // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 369. С. 95–109.
170. Lyalinov M. A., Zhu N. Y., Smyshlyaev V. P. Scattering of a plane electromagnetic wave by a hollow circular cone with thin semi-transparent walls // IMA Journal of Applied Mathematics. 2010. Vol. 75, no. 5. Pp. 676–719.

171. Lyalinov M. A. Scattering of an acoustic axially symmetric surface wave propagating to the vertex of a right-circular impedance cone // [Wave Motion](#). 2010. Vol. 47, no. 4. Pp. 241–252.
172. Stanton T. K., Chu D., Norton G. V. Acoustic diffraction by deformed edges of finite length: Theory and experiment // [J.Acoust.Soc.Am.](#) 2007. Vol. 122. Pp. 3167–3176.
173. Буров В. А., Шмелев А. А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // [Акуст. журн.](#) 2009. Т. 55. С. 466–480.
174. Буров В. А., Евтухов С. Н., Румянцева О. Д. Восстановление картины кровотока в процессе томографирования акустического нелинейного параметра. Численное и физическое моделирование // [Акуст. журн.](#) 2008. Т. 54. С. 712–754.
175. Буров В. А., Евтухов С. Н., Ткачева А. М., Румянцева О. Д. Акустическая томография нелинейного параметра с помощью малого числа преобразователей // [Акуст. журн.](#) 2006. Т. 52. С. 760–776.
176. Paulo J. P., Martins C. R., Coelho J. B. A hybrid MLS technique for room impulse response estimation // [Appl. Acoust.](#) 2009. Vol. 70. Pp. 556–562.
177. Vorländer M., Kob M. Practical aspects of MLS measurements in building acoustics // [Applied Acoustics](#). 1997. Vol. 52, no. 3-4. Pp. 239 – 258.
178. Vorländer M., Mommertz E. Guidelines for the application of the MLS acoustics and in outdoor measurements // [Inter-noise Proceedings](#). 1997.
179. Lui W. K., Li K. M. The scattering of sound by a long cylinder above an impedance boundary // [J.Acoust.Soc.Am.](#) 2010. Vol. 127. Pp. 664–674.
180. Wang Q., Li K. M. Sound propagation over concave surfaces // [J.Acoust.Soc.Am.](#) 1999. Vol. 106. Pp. 2358–2366.
181. Joseph P. J., Tyson A. D., Burnside W. D. An absorber tip diffraction coefficient // [IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility](#). 1994. Vol. 36. Pp. 372–379.
182. Rossi J.-P., Wiart J., Eynard F. In situ measurement of reflection and diffraction coefficients of UHF radio waves on buildings using a ring array // [Radio Sci.](#) 2000. Vol. 35. Pp. 361–369.
183. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. Минск: Лань, 2005. 400 с.

184. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
185. Linton С., McIver P. Handbook of mathematical techniques for wave-structure interactions. London: ChapmanHall, 2001.
186. Meixner J. Über das asymptotische Verhalten von Funktionen, die durch Reihen nach Zylinderfunktionen dargestellt werden können // Mathematische Nachrichten. 1949. Vol. 3. Pp. 9–13.
187. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
188. Noble B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. New York: Pergamon Press, 1958.
189. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Мир, 1990. 528 с.
190. Калиткин Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
191. Borovikov V. A. Uniform stationary phase method. London: IEE, 1994. 233 pp.
192. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
193. Abawi A. T., Dashen R. F., Levine H. The eigenvalues of the Laplacian on a sphere with boundary conditions specified on a segment of a great circle // J. Math. Phys. 1997. — March. Vol. 38. Pp. 1623–1649.
194. Hargrave B. A., Sleeman B. D. The numerical solution of two-parameter eigenvalue problems in ordinary differential equations with an application to the problem of diffraction by a plane angular sector // [Teaching Mathematics and its Applications](#). 1994. Vol. 14. Pp. 9–22.
195. Keller J. B. Singularities at the tip of a plane angular sector // [Journal of Mathematical Physics](#). 1999. Vol. 40. Pp. 1087–1092.