

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

РУМЯНЦЕВА ОЛЬГА ДМИТРИЕВНА

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ МНОГОМЕРНЫХ
ЗАДАЧ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ
И ИХ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Специальность: 01.04.06 – Акустика

**Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
заслуженный профессор МГУ

Буров Валентин Андреевич

Москва – 2022 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| Введение | 5 |
| ЧАСТЬ I. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ..... | 23 |
| Глава 1. Акустическая томография как обратная задача когерентного рассеяния | 25 |
| Глава 2. Модельная и практическая реализация двухшагового томографирования мягких биотканей | 44 |
| Раздел 2.1. Описание двухшагового алгоритма..... | 45 |
| Раздел 2.2. Модельная иллюстрация работоспособности алгоритма | 56 |
| Раздел 2.3. Реализация в ультразвуковой томографической установке..... | 67 |
| Глава 3. Статистические оценки в обратных задачах рассеяния | 89 |
| Раздел 3.1. Оценка характеристик рассеивателя методом максимальной апостериорной вероятности | 91 |
| § 3.1.1. <i>Оценки в координатном представлении и в пространственно-спектральном представлении</i> | 92 |
| § 3.1.2. <i>Численная модель реконструкции рассеивателей</i> | 108 |
| Раздел 3.2. Влияние объема экспериментальных данных на единственность и устойчивость решения обратной задачи рассеяния томографического типа | 116 |
| § 3.2.1. <i>Условия единственности и устойчивости восстановления</i> | 120 |
| § 3.2.2. <i>Восстановление сильного рассеивателя как совокупности точечных рассеивателей</i> | 123 |
| § 3.2.3. <i>Обратная задача рассеяния для пространственно-распределенных рассеивателей</i> | 126 |
| Глава 4. Перспективы развития методов томографирования линейных акустических параметров среды..... | 132 |
| Раздел 4.1. Состояние акустических томографических систем (разработки последних лет) | 132 |
| Раздел 4.2. Повышение разрешения в направлении, перпендикулярном плоскости двумерного томографирования | 139 |
| Раздел 4.3. Раздельное восстановление упругих и вязких характеристик рассеивателя при неполных данных | 148 |
| § 4.3.1. <i>Разделение рассеивающих компонент в многочастотном или импульсном режимах в условиях неточно известной частотной зависимости коэффициента поглощения</i> | 150 |
| 4.3.1.1. <i>Моделирование алгоритма разделения рассеивающих компонент в трехчастотном режиме при известной частотной зависимости коэффициента поглощения</i> | 154 |
| 4.3.1.2. <i>Влияние отклонения частотной зависимости коэффициента поглощения от предполагаемой</i> | 158 |

| | |
|--|------------|
| § 4.3.2. Выделение истинных оценок скорости звука и коэффициента поглощения. Определение неизвестной частотной зависимости коэффициента поглощения | 163 |
| Раздел 4.4. Восстановление пространственного распределения вектора скорости кровотока в процессе акустического томографирования | 166 |
| § 4.4.1. Аддитивно-корреляционный и мультипликативно-корреляционный алгоритмы восстановления общей картины кровотока и вектора его скорости | 168 |
| § 4.4.2. Численное моделирование корреляционно-томографических методов восстановления вектора скорости кровотока | 175 |
| ЧАСТЬ II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ | 181 |
| Глава 5. Вступление к Части II (по материалам библиографических источников) | 181 |
| Глава 6. Точное решение двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния | 195 |
| Раздел 6.1. Применение формализма комплексных волновых векторов к обратным задачам | 195 |
| Раздел 6.2. Уравнения типа Марченко–Ньютона–Роуза в терминах обобщенных вторичных источников и данных рассеяния. Роль соотношения Сохоцкого в обеспечении единственности решения | 212 |
| Раздел 6.3. Алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова и его связь с соотношениями Марченко–Ньютона–Роуза | 220 |
| Раздел 6.4. Восстановление рефракционно-поглощающих рассеивателей. Помехоустойчивость решения | 228 |
| § 6.4.1. Восстановление алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова и модифицированным алгоритмом Роуза | 230 |
| § 6.4.2. Высокочастотные компоненты пространственных спектров рассеивателя и его вторичных источников как дополнительные помехи | 235 |
| § 6.4.3. Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на крупномасштабном контрастном фоне | 238 |
| Глава 7. Восстановление акустических граничных рассеивателей алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова | 244 |
| Раздел 7.1. Восстановление граничных рассеивателей с большими волновыми размерами и область работоспособности алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова | 245 |
| Раздел 7.2. Восстановление граничных рассеивателей с малыми волновыми размерами | 253 |
| Глава 8. Многочастотное обобщение двумерного алгоритма Новикова | 258 |
| Раздел 8.1. Модифицированный двумерный алгоритм Новикова в монохроматическом и полихроматическом режимах | 261 |

| | |
|---|-----|
| Раздел 8.2. Численное моделирование полихроматического алгоритма | 273 |
| Глава 9. Решение трехмерной монохроматической обратной задачи рассеяния алгоритмом Новикова | 281 |
| Раздел 9.1. Основные соотношения для волновых векторов и данных рассеяния в трехмерном пространстве | 281 |
| Раздел 9.2. Уравнения трехмерного алгоритма Новикова | 287 |
| Раздел 9.3. Численное моделирование алгоритма | 297 |
| Основные результаты и выводы | 308 |
| Благодарности | 313 |
| Список публикаций автора по теме диссертации | 314 |
| Список литературы | 329 |

Введение

Под обратными задачами обычно понимают задачи, в результате решения которых удается определить те или иные характеристики причины на основании наблюдения ее следствий. Обратные задачи достаточно ясным образом отличаются от прямых задач – предсказания следствий известной причины. На интуитивном уровне подобные решения обратных задач находятся нами непрерывно: интерпретация зрительных или слуховых ощущений – типичные примеры таких решений. Вместе с тем, содержательная математическая формулировка подобного рода проблем и разработка строгих или приближенных методов их решения является одним из сложнейших разделов математики, а в приложении к физическим проблемам – разделом математической физики.

Обратные волновые задачи относятся к этим сложным областям. В приложении к акустическим проблемам, перечень задач, относящихся к области обратных волновых задач, очень велик и хорошо известен. Это задачи акустического мониторинга окружающей среды, атмосферы и океана; дефектоскопия; медицинская акустоскопия; идентификация естественных шумов и вибраций, сейсмоакустика, кардиофоноскопия и респираторная фоноскопия и т.д. В предлагаемой диссертационной работе рассматриваются, прежде всего, прикладные акустические задачи томографического типа. Диссертационная работа разделена на две части, в определенной мере взаимосвязанные между собой. В каждой из частей излагаются теоретические аспекты проблемы, а также обсуждаются перспективы прикладного применения.

Часть I “Обратные задачи акустического рассеяния” (главы 1–4) посвящена обратным задачам акустического рассеяния, как в приближении однократного рассеяния, так и с учетом перерассеяний [А 3–А 20; А 62; А 65–А 80]. Помимо общей теории, затрагиваются вопросы единственности и устойчивости решения обратной задачи рассеяния. Большое внимание уделяется обсуждению прикладных возможностей акустических томографических систем, разработанных в последние годы. Полученные результаты отражены в монографии [А 2].

Применению строгих методов функционального анализа для решения акустических обратных задач рассеяния и впервые полученным при этом результатам модельных исследований посвящена *часть II “Функционально-аналитические методы решения многомерной акустической обратной задачи рассеяния”* (главы 5–9) [А 21–А 40; А 81–А 96; А 131]. Эти исследования опираются на результаты, полученные ранее в области решения обратных задач рассеяния квантованных полей на потенциалах, хорошо локализованных в пространстве.

Материал, относящийся к обратным задачам излучения [А 41–А 47; А 97–А 107; 133], не вошел в представляемую диссертационную работу в виде самостоятельных глав. Однако этот материал подытожен в монографии “Обратные задачи излучения в акустике” [А 1], неоднократно цитируемой в диссертационной работе. В данной монографии [А 1] кратко рассматриваются обратные когерентные задачи излучения, которым присуща некорректность и сильнейшая степень неединственности. Излагаются различные подходы к решению обратных волновых задач излучения и некогерентных задач активно-пассивной акустической термотомографии. Показывается, что активно-пассивный режим позволяет

определять совокупность акустических и термических характеристик среды в рамках общей томографической схемы.

Кроме того, в представляемой диссертационной работе не рассматривается отдельно (но только в виде ссылок) материал, относящийся к томографии пространственного распределения акустических нелинейных параметров второго и третьего порядков. Этой тематике посвящены работы [А 48–А 58; А 108–А 121; А 132; 133; 134] и патенты [А 63; А 64], в которых излагаются оригинальные методы и устройства, предназначенные для другого типа томографии – активной томографии акустических нелинейных параметров сред (прежде всего, биологических), и предлагаются достаточно перспективные подходы к их практической реализации. Возможность томографии данного типа обеспечивается уже при малом количестве преобразователей благодаря использованию сложных рассеянных сигналов. Такие нелинейно рассеянные сигналы порождаются нелинейным взаимодействием в случае трех зондирующих волн, из которых две или три являются когерентными.

Отдельное место занимают работы по классификации изображений [А 59–А 61; А 122; 135].

Актуальность темы исследования

Математической стороне обратных задач, посвящены, например, крупные работы [123–130]. В книге [126] рассматриваются, в первую очередь, рентгеновские методы томографирования, как с математической, так и с прикладной точек зрения. Прикладная сторона обратных задач затрагивается также в [128–130]. Постановка многих обратных задач носит достаточно общий характер, и методы их решения могут быть полезными при решении акустических обратных задач.

Использование акустического излучения в целях медицинской, геофизической и технической диагностики насчитывает многие десятилетия. При этом трудности, возникающие при разработке различных акустических томографических систем (предназначенных, например, для целей медицинской диагностики или для диагностических целей в промышленности, океанологии, геоакустике и т.п.) делают *актуальным* рассмотрение обратных волновых задач в самых различных постановках. Необходимо принимать во внимание, с одной стороны, физико-математическую сторону задачи, которая весьма нетривиальна из-за эффектов рефракции и многократного рассеяния волн внутри исследуемого объекта, а с другой стороны – специфику и конечные цели конкретных прикладных задач.

В частности, одной из актуальнейших медицинских задач является диагностика доброкачественных и злокачественных новообразований биологических тканей. В ряде случаев (например, при раке молочной железы) патологию важно обнаружить и классифицировать еще на ранней стадии ее развития. В настоящее время в медицинских целях наиболее широко используются такие системы интроскопии как рентгеновские томографы (так называемая КТ-томография), магниторезонансные томографы, действующие на основе эффекта ядерного магнитного резонанса (ЯМР), и ультразвуковые системы типа УЗИ-аппаратов. Однако упомянутым диагностическим системам присущи определенные недостатки. Так, рентгеновское излучение при КТ-томографировании может быть небезопасным; кроме того, чувствительность рентгеновских томографов к ряду патологических новообразований определенных типов не всегда высока [171]. С другой стороны, качество

диагностирования с помощью ЯМР-томографов очень высоко; тем не менее, высокая стоимость этих устройств не позволяет использовать их для массового профилактического обследования населения.

Если говорить об акустических системах интроскопии, то в настоящее время их развитие происходит в двух основных направлениях. Первое направление – это совершенствование технических характеристик устройств. Однако чисто техническое совершенствование на определенном этапе приводит к некоторому пределу, при достижении которого дальнейший рост качества диагностики с помощью данного устройства останавливается. Такая ситуация заставляет обратиться ко второму направлению развития – анализу на новом научном уровне, с учетом последних современных достижений в области математических и физических наук, тех физических принципов и методов получения томограмм, на основе которых действует та или иная интроскопическая система. Оба упомянутых направления учитываются и активно развиваются в разработках ультразвуковых медицинских томографов, которые проводятся в настоящее время научными коллективами США, Германии и России. Достаточно подробно ситуация описывается в разделе 4.1 представляемой диссертационной работы, и там же приводятся ссылки на соответствующие публикации.

Фактически все системы активной ультразвуковой интроскопии основаны на наблюдении нарушений регулярного характера распространения зондирующего акустического излучения. В медицинских задачах восстановление рассеивающего объекта – в виде априори неизвестных пространственных распределений искомых акустических параметров – сводится к полному или частичному решению той или иной обратной задачи. Приемлемое качество восстановления внутренней структуры объекта, сильно рассеивающего (искажающего) падающую волну, возможно только при учете эффектов рефракции и поглощения волн, происходящих внутри рассеивателя. Более того, если необходимо не только обнаружить малое новообразование, рассеивающее акустические волны, но и получить его количественные характеристики, то необходимо привлекать достаточно точные математические методы решения обратных задач. Тем самым, совершенствование таких методов (например, итерационных процедур, которые могут быть организованы в координатном или пространственно-спектральном представлении), а также развитие новых методов решения (в рамках диссертации рассматривается внедрение строгих функциональных методов в прикладные обратные акустические задачи – как двумерные, так и трехмерные) представляет собой сложную, но весьма *актуальную* задачу. Сложность усугубляется тем, что обратные задачи рассматриваемого томографического типа являются, во-первых, некорректными и, во-вторых, им присуща, в большинстве практических случаев, нелинейная зависимость наблюдаемых данных (рассеянных полей на приемниках) от тех характеристик внутренней структуры исследуемого объекта, которые надо восстановить в результате томографирования.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является разработка и апробация итерационных и функциональных методов решения многомерных обратных волновых задач с последующим внедрением этих методов в конкретные акустические томографические устройства. Разработка предназначена для получения количественных характеристик внутренней

структуры исследуемого объекта с высокой разрешающей способностью – в первую очередь, для диагностики патологий мягких биологических тканей на ранней стадии возникновения патологий.

В этой связи были поставлены и решались следующие задачи:

1. Разработка двухшагового алгоритма томографирования, позволяющего воспроизводить тонкую структуру объекта на фоне его крупномасштабных деталей, предварительно определяемых на первом шаге процедуры восстановления.
2. Решение обратной задачи рассеяния в статистической постановке.
3. Выявление влияния объема и характера дискретизованных экспериментальных данных на единственность и устойчивость решения обратной задачи рассеяния томографического типа.
4. Разработка способа улучшения разрешающей способности итоговых томограмм в направлении, перпендикулярном плоскости двумерного томографирования.
5. Разделение рассеивающих компонент исследуемого объекта (скорости звука, плотности, коэффициента поглощения) в многочастотном режиме в условиях неточно известной частотной зависимости коэффициента поглощения.
6. Разработка корреляционных методов восстановления карты вектора скорости кровотока в процессе акустического томографирования.
7. Внедрение строгих функциональных методов решения двумерных и трехмерных обратных задач в акустические задачи с прикладной направленностью.
8. Определение границ работоспособности и степени помехоустойчивости функциональных алгоритмов.
9. Разработка способа обобщения двумерного функционального алгоритма на многочастотный режим зондирования исследуемого объекта.
10. Апробация рассматриваемых методов на модельных и экспериментальных данных.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования диссертационной работы являются методы и алгоритмы решения акустической обратной задачи рассеяния применительно к прикладным задачам томографического типа. Предметом исследования являются восстановленные пространственные распределения различных акустических характеристик области томографирования.

Методология исследования

Исследования, выполненные в рамках диссертационной работы, являются продолжением научных работ отечественных и зарубежных авторов, посвященных развитию методов решения обратных задач рассеяния как в общетеоретическом плане, так и с точки зрения практического применения. Для восстановления полных пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения в исследуемом объекте в диссертации применена, во-первых, методология двухшагового способа определения характеристик крупных и мелких деталей объекта. Во-вторых, методология, основанная на статистических оценках (метод максимальной апостериорной вероятности), которая позволяет использовать априорную информацию о корреляционных свойствах как искомым характеристикам, так и помехи. Для разделения упругих и вязких характеристик рассеивателя в слу-

чае неполных экспериментальных данных, а также при написании уравнений связи с целью обобщения функционального метода решения обратной задачи на многочастотный режим, использован тот факт, что различные компоненты рассеивателя имеют индивидуальный характер зависимости от частоты. Для восстановления карты вектора скорости кровотока привлечена методология построения промежуточных изображений (содержащих спекл-структуры, которые смещаются во времени из-за смещения движущихся кластеров крови) и методология последующей пространственной корреляции фрагментов этих изображений. При рассмотрении функциональных алгоритмов использована методология добавления к волновым векторам мнимой добавки, произвольно или, в частности, ортогонально ориентированной к действительной части этих векторов; данный прием был предложен и развит учеными-математиками специально для разработки строгих функциональных методов решения обратных задач. При апробировании предлагаемых алгоритмов восстановления на численных моделях использовались методы математического моделирования и вычислительной математики; при этом в ряде случаев оказалось целесообразным выполнять процедуру восстановления в пространстве, фурье-сопряженном к пространству углов падения зондирующих волн и углов приема рассеянных сигналов.

Научная новизна работы

1. Впервые показано, что при томографировании акустического рассеивателя, создающего эффекты многократного рассеяния волн, восстановление тонкой структуры этого рассеивателя в виде адекватных количественных оценок значений скорости звука и коэффициента поглощения невозможно без сопутствующей оценки характеристик более крупномасштабных деталей.
2. Разработан оригинальный алгоритм, позволяющий восстанавливать характеристики рассеивателя в пространственно-спектральном представлении при учете статистических аспектов задачи. В этой связи впервые получено обобщение процедуры винеровской фильтрации на случай, когда исследуемые рассеиватели сильно искажают зондирующее поле, и, тем самым, измеряемые данные становятся нелинейно зависящими от искоемых характеристик.
3. Впервые сделаны количественные оценки, касающиеся взаимосвязи между конечным объемом томографических экспериментальных данных, с одной стороны, и процессами возникновения неустойчивости и неединственности при решении акустической обратной задачи рассеяния, с другой стороны, в двумерном и трехмерном пространствах.
4. Разработан оригинальный способ повышения разрешающей способности ультразвуковых систем послойного томографирования в направлении, перпендикулярном поверхности слоя. Впервые показано, что предложенный эффект достигается благодаря внесению наклонов излучающих и приемных преобразователей антенной решетки на разные углы.
5. Впервые предложены алгоритмы отдельного восстановления различных акустических линейных характеристик (скорости звука, плотности среды, коэффициента поглощения и его неизвестной частотной зависимости) в случае неполных данных рассеяния, что приводит к возникновению мнимой части у аппаратной функции алгоритма восстановления и, как следствие, “перемешивает” информацию об искоемых характеристиках на томограммах, изначально полученных в одночастотном режиме.

6. Разработаны оригинальные корреляционные алгоритмы, которые позволяют по некогерентным данным, полученным при различных излучателях в процессе томографирования акустических линейных параметров, дополнительно воспроизводить карту вектора скорости кровотока на основе эффекта движения спекл-структур.
7. Впервые выполнено численное моделирование нескольких вариантов двумерных функциональных алгоритмов, позволяющих восстанавливать одновременно разномасштабные детали рассеивателя произвольной силы в монохроматическом режиме без привлечения итерационной процедуры.
8. Впервые численным моделированием проиллюстрировано, что область работоспособности исследуемых двумерных функциональных алгоритмов в монохроматическом режиме гораздо шире, чем это предполагалось изначально в рамках теоретических исследований авторов алгоритмов.
9. Впервые предложено обобщение монохроматического двумерного функционального алгоритма на случай многочастотного зондирования. Впервые численным моделированием проиллюстрирована эффективность выполненного обобщения как способа подавления процессов неустойчивости решения, возникающих в монохроматическом случае.
10. Впервые выполнено численное моделирование трехмерного функционального алгоритма Новикова, позволяющего посредством итераций восстанавливать рефракционно-поглощающие рассеиватели произвольной силы.

Практическая значимость работы

Практическая значимость диссертационной работы для акустики, в целом, заключается в том, что предлагаемые методы и алгоритмы предназначаются для внедрения их в конкретные устройства томографического типа [А 62–А 64], служащие для решения прикладных задач в медицине, океанологии и неразрушающем контроле. Более конкретно можно отметить следующие моменты.

Непосредственно на основе экспериментальных данных, полученных с опытного образца ультразвукового медицинского томографа [А 62] и обработанных двухшаговым алгоритмом, показана эффективность данного алгоритма при получении томограмм с высоким разрешением (не хуже половины длины волны, т.е. около 0.5 мм при работе в мегагерцовом диапазоне) в реальных условиях. В то же время, дальнейшая модернизация двухшагового алгоритма позволит улучшить точность получаемых количественных оценок восстанавливаемых параметров – в первую очередь, коэффициента поглощения. С другой стороны, привлечение технологии параллельного программирования CUDA для обработки экспериментальных данных позволяет восстанавливать двумерную томограмму форматом 1024×1024 отсчетов всего за несколько минут. Таким образом, двухшаговый алгоритм, наряду с функциональными алгоритмами, может быть использован, например, для ранней диагностики доброкачественных и злокачественных новообразований молочной железы.

Разработанный и апробированный на модельных данных алгоритм, который учитывает статистические аспекты задачи восстановления характеристик акустического рассеивателя и зашумленность экспериментальных данных, представляет собой хорошую теоретическую базу для последующего использования в прикладных томографических задачах.

Проведенные исследования, касающиеся необходимого объема независимых экспериментальных данных и, одновременно, устойчивости и единственности процесса восстановления, являются конкретными рекомендациями при организации томографического эксперимента, с точки зрения обеспечения минимально необходимого количества излучателей и приемников, а также наиболее целесообразного их размещения вокруг исследуемого объекта.

Выполненный анализ ограничений, возникающих при практической реализации процесса томографирования в конкретном устройстве в силу технических причин или в силу анатомических особенностей исследуемого органа, позволил предложить методику учета этих ограничений на этапе обработки экспериментальных данных. В свою очередь, это позволило, по возможности, скомпенсировать влияние упомянутых ограничений на точность восстановления искомым количественных характеристик исследуемого объекта.

Предложенный способ наклона излучающих и приемных преобразователей антенной решетки при томографировании каждого фиксированного слоя трехмерного объекта очень удобен для практического применения: улучшить разрешающую способность по третьей координате можно простым техническим приемом и соответствующей процедурой обработки данных, без увеличения количества преобразователей.

Предложенные корреляционные алгоритмы, оперирующие с рассеянными сигналами от движущихся кластеров крови, позволяют получать практически по тем же данным, которые регистрируются в ультразвуковом томографе для получения пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения, векторную карту кровотока. Более того, эта методика была модифицирована для внедрения ее в томографические системы, использующие эффекты нелинейного взаимодействия волн с образованием комбинационных частот [А 63; А 64].

Высокоточные функциональные методы, берущие свое начало в квантовомеханических обратных задачах, специально были адаптированы и доведены до программной реализации с целью использования в акустических прикладных обратных задачах. Высокая точность решения даже при весьма сильно выраженных эффектах перерасеяния волн, высокая разрешающая способность (около одной трети характерной длины волны), а также обобщение алгоритмической схемы на многочастотный режим, выполненное с целью обеспечения хорошей помехоустойчивости, позволяют рассматривать функциональные алгоритмы как новый класс алгоритмов восстановления, который в настоящее время подготовлен к внедрению в практику акустической томографии, как в области медицины, так и океанологии. Трехмерные функциональные алгоритмы требуют особенно большого объема вычислительных затрат, однако и они могут быть внедрены в акустоскопические системы, снабженные многоэлементной приемоизлучающей антенной и высокопроизводительными вычислительными мощностями.

Положения, выносимые на защиту

1. Пространственные распределения скорости звука и коэффициента поглощения восстанавливаются двухшаговым методом томографирования в виде количественных значений крупномасштабного фона (с линейным размером более нескольких длин волн) и тонкой структуры (с размером от нескольких десятых длины волны до нескольких длин

волн) на таком фоне с разрешающей способностью около $\lambda_0/3$, где λ_0 – характерная длина волны.

2. Статистический подход к оценке характеристик акустического рассеивателя приводит к алгоритму восстановления, включающему в себя нелинейную фильтрацию винеровского типа – эффективный фактор подавления влияния сильных помех при восстановлении рассеивателей, которые, в общем случае, существенно искажают падающее на них поле, т.е. создают явно выраженные эффекты многократного рассеяния волн.
3. Единственность и устойчивость решения акустической обратной задачи рассеяния на основе конечного объема независимых дискретизованных экспериментальных данных обеспечивается только при определенных условиях, зависящих от размерности пространства, от типа рассеивателя (совокупность точечных рассеивателей или пространственно-распределенный рассеиватель), а также от линейных размеров рассеивателя и характерной ширины пространственного спектра его вторичных источников. Данная информация учитывается при постановке физического эксперимента.
4. Наклоны преобразователей двумерной антенной решетки на разные углы улучшают в несколько раз разрешающую способность итогового изображения в направлении, перпендикулярном плоскости томографирования. Так, при томографировании мягких биотканей разрешающая способность становится около $(2.5 \div 3.5)\lambda_0$, в то время как в отсутствие наклонов она близка к толщине озвучиваемого слоя $(10 \div 15)\lambda_0$.
5. Разработанные алгоритмы реконструкции изображений в условиях неполных экспериментальных данных позволяют получать отдельные пространственные распределения не только скорости звука, плотности среды и коэффициента поглощения, но и степени частотной зависимости коэффициента поглощения на основе данных, соответствующих различным частотным спектрам зондирующих импульсов.
6. Дополнительная возможность ультразвукового томографа – восстановление карты вектора скорости движущихся рассеивателей (карты кровотока в медицинских приложениях) – обеспечивается посылкой не менее трех последовательных зондирующих импульсов каждым излучателем, предварительной селекцией регистрируемых полей, построением промежуточных изображений со спекл-структурой и последующей пространственной корреляцией отдельных фрагментов этих изображений.
7. Функциональные двумерные и трехмерные алгоритмы решения монохроматической обратной задачи рассеяния, изначально предназначавшиеся для решения квантовомеханических обратных задач, хорошо адаптируются для решения акустических задач томографического типа при всестороннем облучении исследуемого объекта и всестороннем приеме данных. Такие алгоритмы восстанавливают сразу полную структуру рассеивателя и ее количественные характеристики при строгом учете процессов многократного рассеяния акустических волн, делающие задачу особенно сложной. В отличие от двухшагового алгоритма, в процессе восстановления не происходит разделения структуры на крупномасштабные и мелкомасштабные составляющие при сохранении высокой разрешающей способности около $\lambda_0/3$.
8. Модифицированный функциональный двумерный алгоритм решения обратной задачи рассеяния, исследованный в диссертационной работе, имеет эффективное обобщение на многочастотный режим получения данных благодаря привлечению уравнений связи,

вытекающих из рассмотрения частотной зависимости отдельных характеристик акустического рассеивателя. Многочастотный вариант алгоритма позволяет подавить эффекты неустойчивости, которые могут возникать при восстановлении сильных акустических рассеивателей (создающих дополнительный набег фазы более π), и повысить информативность томограмм.

Степень достоверности полученных результатов

Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, обусловлена следующими факторами: корректной постановкой задач; базированием процедуры решения на строгих физико-математических методах и вытекающих из них строгих математических соотношениях; согласием итоговых результатов с физическими характеристиками объектов-моделей (как с однородной, так и с неоднородной внутренней структурой), которые задавались при численном моделировании и при проведении физических экспериментов с фантомами. Результаты диссертационной работы многократно представлялись на всероссийских и международных конференциях и опубликованы в ряде рецензируемых журналов.

Апробация результатов работы

Результаты, представляемые в диссертационной работе, доложены и обсуждены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- Научная конференция “Ломоносовские чтения” (г. Москва, Россия, 1990);
- X Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (г. Винница, Украина, 1990);
- XI Всесоюзная Акустическая конференция (г. Москва, Россия, 1991);
- Международная конференция “Некорректно поставленные задачи в естественных науках” (г. Москва, Россия, 1991);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-21” (California, USA, 1994);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-22” (Florence, Italy, 1995);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-23” (Boston, USA, 1997);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-24” (Santa Barbara, USA, 1998);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-25” (Bristol, UK, 2000);
- XI сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2001);
- I Евразийский конгресс по медицинской физике и инженерии “Медицинская физика – 2001” (г. Москва, Россия, 2001);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-26” (Windsor, Canada, 2001);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-27” (Saarbrucken, Germany, 2003);
- XV сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2004);
- II Евразийский конгресс по медицинской физике и инженерии “Медицинская физика-2005” (г. Москва, Россия, 21-24 июня 2005);
- XVI сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2005);
- XI Всероссийская школа-семинар “Физика и применение микроволн. Волны-2007” (г. Звенигород Московской области, Россия, 2007);
- XIX сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2007);

- XI Всероссийская школа-семинар “Волновые явления в неоднородных средах. Волны-2008” (г. Звенигород Московской области, Россия, 2008);
- The 18th International Symposium on Nonlinear Acoustics (Stockholm, Sweden, 2008);
- XX сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2008);
- XXII сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2010);
- III Евразийский конгресс по медицинской физике и инженерии “Медицинская Физика-2010” (г. Москва, Россия, 2010);
- 53-я научная конференция МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Управление и прикладная математика” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2010);
- The 8th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing (г. Москва, Россия, 2011);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-30” (Monterey, USA 2009);
- 54-я научная конференция МФТИ “Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2011);
- XIII Всероссийская школа-семинар “Волновые явления в неоднородных средах. Волны-2012” (г. Звенигород Московской области, Россия, 2012);
- V Троицкая конференция “Медицинская Физика и Инновации в Медицине” (г.Троицк Московской области, Россия, 2012);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-31” (Warsaw, Poland, 2011);
- The 11th European Conference on Underwater Acoustics (Edinburgh, Scotland, 2012);
- 5-я Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (г. Суздаль, Россия, 2012);
- XXV сессия Российского Акустического Общества (г. Москва, Россия, 2012);
- 55-я научная конференции МФТИ “Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2012);
- 6-я Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (г. Суздаль, Россия, 2013);
- 57-я научная конференции МФТИ с международным участием “Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики. Управление и прикладная математика” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2014);
- XV Всероссийская школа-семинар “Физика и применение микроволн. Волны-2015” (г. Москва, Россия, 2015);
- Международный симпозиум “Acoustical Imaging-32” (Singapore, Singapore, 2013);
- Международная конференция “Quasilinear equations, inverse problems and their applications” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2015);
- XV Всероссийская школа-семинар “Волновые явления в неоднородных средах. Волны-2016” (г. Москва, Россия, 2016);
- Международная конференция “Quasilinear equations, inverse problems and their applications” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2016);
- XVI Всероссийская школа-семинар “Физика и применение микроволн. Волны-2017” (г. Москва, Россия, 2017);

- II Всероссийская акустическая конференция, совмещенная с XXX сессией Российского акустического общества (г. Нижний Новгород, Россия, 2017);
- Международная конференция “Quasilinear equations, inverse problems and their applications” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2017);
- XVI Всероссийская школа-семинар “Волновые явления в неоднородных средах. Волны-2018” (г. Москва, Россия, 2018);
- Международная конференция “Quasilinear equations, inverse problems and their applications” (г. Долгопрудный Московской области, Россия, 2018);
- XVII Всероссийская школа-семинар “Физика и применение микроволн. Волны-2019” (г. Москва, Россия, 2019);
- The 179th Meeting the Acoustical Society of America (Virtual meeting, USA, 2020);
- Международная конференция “Days on Diffraction 2020” (г. С.-Петербург, Россия, 2020);
- XXXII Всероссийская школа-семинар “Волновые явления: физика и применение. Волны-2021” (г. Москва, Россия, 2021);
- Международная конференция “Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Numerics. XIII international scientific conference and young scientist school” (г. Новосибирск, Россия, 2021);
- The 180th Meeting of the Acoustical Society of America (Virtual meeting, USA, 2021).

Кроме того, полученные результаты обсуждались на научных семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ и на научных семинарах кафедры математики физического факультета МГУ под руководством профессора А. Н. Боголюбова, на семинаре Лаборатории геометрических методов математической физики им. Н. Н. Боголюбова механико-математического факультета МГУ, на семинаре “Динамические обратные задачи” в Санкт-Петербургском отделении Математического института РАН им. В.А. Стеклова, на семинаре под руководством д.ф.-м.н. Г. М. Хенкина “Квазилинейное уравнение и обратные задачи” (г. Москва), а также на семинарах Научного Совета по акустике РАН, Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Научного центра волновых исследований Института общей физики им. А. М. Прохорова РАН.

Публикации автора

Основные результаты диссертации изложены в 122 печатных работах, в том числе в 2 монографиях [А 1; А 2], 59 статьях в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова [А 3–А 61], 3 патентах [А 62–А 64] и 58 публикациях в сборниках трудов [А 65–А 122] (тезисы конференций в списке не приводятся). Список основных публикаций автора [А 1–А 122] представлен в конце диссертационной работы перед списком литературы других авторов.

Личный вклад автора

Оригинальные результаты, изложенные в диссертационной работе, получены автором лично либо при его определяющей роли, а также при непосредственном участии автора в теоретических и прикладных исследованиях, которые проводились совместно с соавторами публикаций, изданных по теме диссертации. В работах, опубликованных в соавторстве, основополагающий вклад принадлежит соискателю.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертационная работа состоит из введения, девяти глав текста, заключения, списка публикаций автора по теме диссертации и списка литературы. Объем работы составляет 347 страниц, включая 133 рисунка; список цитируемой литературы содержит 417 работ.

Содержание диссертации

Во *введении* обозначены актуальность темы исследований, цели и задачи диссертационной работы, объект и предмет исследования, методология исследования, научная новизна и практическая значимость работы; приведены выносимые на защиту положения и краткое содержание работы, а также сведения об апробации результатов работы.

Первая глава носит обзорный характер. В ней приводятся основные понятия и соотношения, которые в последующих главах используются для рассмотрения проблемы акустической волновой томографии как обратной задачи рассеяния. По ходу изложения даются ссылки на научные публикации, соответствующие теме исследований.

Материал последующих глав связан с рассмотрением возможностей и особенностей различных методов решения обратной задачи рассеяния. При этом учитываются процессы многократного рассеяния волн внутри томографируемого объекта. Такие процессы характерны для подавляющего большинства прикладных акустических обратных задач; они существенно усложняют решение соответствующей обратной задачи, однако только при учете этих процессов возможно высококачественное восстановление томографических изображений. Рассматриваемые в диссертационной работе итоговые томограммы отображают пространственные распределения скорости звука, плотности среды, коэффициента поглощения и степени его частотной зависимости.

Вторая глава посвящена двухшаговому алгоритму, который описывается в разделе 2.1 и предназначается для восстановления пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения. Своим возникновением двухшаговый подход обязан специфике задач медицинской томографии, при которой неоднородности в фазовой скорости звука и большие размеры областей с такими неоднородностями вызывают сильное искажение волновых фронтов в биоткани. Необходимо восстановить объект-рассеиватель, состоящий из мелких характерных деталей (т.е. из тонкой структуры, имеющей линейные размеры от нескольких десятых долей длины волны до нескольких длин волн), которые присутствуют на фоне крупномасштабных неизвестных неоднородностей (с размером в несколько длин волн и более) фазовой скорости, плотности биоткани и коэффициента поглощения. Тогда на первом шаге алгоритма восстанавливаются именно крупномасштабные неоднородности скорости звука и коэффициента поглощения. Необходимость выполнения первого шага обусловлена большим диапазоном возможных вариаций скорости звука и коэффициента поглощения в биотканях. Разрешающая способность первого шага определяется диаметром лучевой трубки, поскольку при восстановлении делается приближение – полагается, что сигналы распространяются вдоль лучей. Еще одним приближением, допускаемым на первом шаге, является предположение о прямолинейности лучей, означающее пренебрежение процессами рефракции на акустических неоднородностях. Возникающая за счет обоих приближений ошибка восстановления частично устра-

няется на втором шаге, предполагающем восстановление тонкой (мелкомасштабной) структуры рассеивателя, которая располагается на неоднородном фоне – вышеупомянутых крупномасштабных неоднородностях, которые уже восстановлены. На втором шаге достаточно использовать один из алгоритмов, основанных на приближении однократного рассеяния, но с учетом неоднородности фона.

Работоспособность двухшагового алгоритма иллюстрируется с помощью томографических данных рассеяния – полей, регистрируемых на приемниках при каждом фиксированном падающем (т.е. зондирующем исследуемый объект) поле. При этом используются данные, смоделированные на компьютере решением прямой задачи (раздел 2.2), а также экспериментальные данные, снятые с помощью опытного образца ультразвукового томографа (раздел 2.3). Делается вывод о принципиальной необходимости восстановления крупномасштабных деталей объекта для последующего восстановления тонкой структуры, являющейся наиболее информативной для целей ранней диагностики новообразований.

Третья глава посвящена статистическим оценкам в обратных задачах рассеяния. Обратные задачи рассеяния являются, как и большинство обратных задач, некорректными, т.е. их решения могут быть весьма критичными к ошибкам в измерениях. Нелинейность обратных задач рассеяния относительно неизвестных характеристик рассеивателя усугубляет положение. Раздел 3.1 посвящен восстановлению характеристик рассеивателя методом максимальной апостериорной вероятности. Дело в том, что используемые данные рассеяния с неизбежностью содержат ошибки измерения, статистические свойства которых в той или иной степени известны. Относительно вида рассеивателя обычно также имеется та или иная априорная информация, которая может быть эффективно использована при рассмотрении обратной задачи рассеяния как статистической задачи оценивания. Алгоритм решения строится путем минимизации функционала. При построении функционала используется невязка между экспериментальными данными рассеяния и их оценками, следующими из уравнений типа Липпмана–Швингера, а также априорная информация о корреляционных свойствах помех и искомым характеристикам рассеивателя. Кроме того, привлекаются уравнения связи, которые включаются непосредственно в функционал или, в упрощенном варианте, используются как отдельные дополнительные уравнения. Тем самым, процессы перерассеяния учитываются в максимально строгой математической постановке. Нелинейность решения относительно входных данных рассеяния и, возможно, одновременная нелинейность самих данных относительно искомым неизвестных функций делают задачу весьма трудной и предполагают итерационный поиск решения по предложенному алгоритму, который включает в себя полученное нелинейное обобщение процедуры винеровской фильтрации. В итоге получаются регуляризованные оценки, воспроизводящие пространственное распределение по области томографирования комплексной функции рассеивателя. Из действительной части этой функции непосредственно извлекается информация о неоднородностях скорости звука (и, при необходимости, о плотности среды в случае использования данных рассеяния на разных частотах); из мнимой части – информация о коэффициенте поглощения. Платой за оптимальность подхода является усложнение результирующей системы нелинейных уравнений и сравнительно большой (однако, как показало численное моделирование, приемлемый для современных вычислительных мощностей) объем вычислительных затрат.

В разделе 3.2 обсуждается проблема взаимосвязи неустойчивости и неединственности решения обратной акустической задачи рассеяния для рассеивателей произвольной силы, а также обсуждается роль избыточности конечного объема дискретизованных экспериментальных данных. Нетривиальность вопроса и важность учета этих факторов при решении прикладных задач обусловлены нелинейностью задачи относительно характеристик рассеивателя.

Четвертая глава включает в себя несколько разделов, касающихся особенностей и, одновременно, дополнительных возможностей, которые возникают при решении обратной задачи рассеяния в условиях реального томографического эксперимента. Подобные вопросы относятся к перспективам развития методов томографирования в практических условиях. Раздел 4.1 носит обзорный характер; в нем достаточно подробно описывается современное состояние дел в области разработки конкретных томографических устройств – ультразвуковых медицинских томографов, нацеленных на диагностику патологий молочной железы с высокой разрешающей способностью. Создание таких устройств, способных предоставить диагностическую информацию принципиально более высокого уровня, чем широко используемые в настоящее время УЗИ-системы, сталкивается с рядом проблем как при технической реализации устройства, так и при разработке точных и, в то же время, достаточно быстродействующих алгоритмов обработки томографических данных. В разделе 4.2 предлагается оригинальный и простой для практического внедрения метод улучшения разрешающей способности томограмм в направлении, перпендикулярном плоскости томографирования при послойном озвучивании исследуемого объекта. Такое улучшение разрешения в несколько раз достигается наклонами излучающих и приемных преобразователей на различные углы в заданном диапазоне. Возможный диапазон углов наклона определяется как возможностями используемой антенны, так и особенностями томографируемого объекта (например, диагностируемого органа).

С другой стороны, практическая реализация томографических схем сталкивается с проблемой неполноты доступных данных рассеяния. Дело в том, что данные рассеяния в полном объеме не всегда доступны по техническим либо другим причинам (рассматриваемые в разделе 4.2 схемы с наклонными преобразователями являются примером таких систем). Эта проблема требует разработки алгоритмов, в которых “геометрическая” неполнота данных восполняется привлечением многочастотного режима зондирования (раздел 4.3). Ситуация усугубляется еще тем, что для восстановления томограмм в виде *раздельных* пространственных распределений акустических характеристик объекта нужно дополнительно знать показатель степени частотной зависимости коэффициента поглощения, значение которого, как правило, не только неизвестно априори, но еще и варьируется в разных участках неоднородного по структуре объекта (органа). Эти вопросы и соответствующие алгоритмические схемы, апробируемые численным моделированием, рассматриваются в разделе 4.3.

Наконец, в разделе 4.4 обсуждается дополнительная возможность ультразвукового медицинского томографа – получение карты вектора скорости кровотока исследуемого органа за счет корреляционной обработки принимаемых полей, без привлечения доплеровского эффекта. Удобство предлагаемого метода заключается в том, что использование круговой (или близкой к ней) схемы получения первичной информации позволяет построить векторную картину кровотока в тесной связи с процессом построения (на основе тех

же измерений) томографического изображения всего органа в целом – в виде пространственных распределений фазовой скорости звука и коэффициента поглощения.

Пятая глава носит обзорный характер. Написанная по материалам библиографических источников, она открывает вторую крупную часть диссертационной работы, посвященную функциональным методам решения обратной задачи рассеяния. Эти строгие методы обеспечивают высокую точность решения, позволяя полностью учитывать процессы многократного рассеяния, и очень удобны для обработки томографических данных, полученных в реальных условиях. Однако упомянутые функциональные методы отличаются изначально их квантово-механической направленностью и сугубо математическим характером ряда работ. Это затрудняет восприятие важных и перспективных результатов акустическими-прикладниками и, тем самым, предполагает соответствующую адаптацию изложения математического материала, выполненную в диссертационной работе. Кроме того, численное моделирование функциональных алгоритмов, рассматриваемых в диссертационной работе, впервые было выполнено именно в связи с прикладными акустическими задачами.

Шестая глава посвящена точному функциональному решению двумерной обратной задачи рассеяния в монохроматическом случае. Раздел 6.1 содержит описание математического аппарата, который является необходимым для последующего восприятия алгоритмической стороны функциональных методов. Аппарат, рассматриваемый в рамках диссертационной работы, основан на идее академика РАН Л. Д. Фаддеева – вводит мнимые добавки к исходным действительным волновым векторам. Тем самым, волновые векторы становятся формально комплексными. Важно, что при этом добавленная мнимая часть волнового вектора не обязательно сонаправлена его действительной части (как это имеет место при описании поглощения в среде): в общем случае, имеет место произвольная взаимная ориентация действительной и мнимой частей. В дальнейшем, при решении обратной задачи, используется *ортогональная* взаимная ориентация. Данное обстоятельство позволяет сохранить условие монохроматичности данных рассеяния, полученных в реальных условиях томографирования, когда волновые векторы в фоновой непоглощающей среде являются чисто действительными.

Раздел 6.2 содержит описание физического смысла уравнений, на которых основаны функциональные алгоритмы решения двумерной монохроматической обратной задачи. При этом процесс решения строится на нахождении из томографических данных (задаваемых в виде амплитуд рассеяния) не классических волновых полей, а так называемых обобщенных волновых полей, которые соответствуют, с математической точки зрения, присутствию бесконечно малых добавок к волновым векторам. Такие бесконечно малые добавки, тем не менее, остаются ортогонально ориентированными. В упомянутом разделе 6.2 обсуждается роль уравнений Сохоцкого для обеспечения единственности решения. Кроме того, для удобства последующего численного моделирования предлагается переход из пространства углов, характеризующих направления падения зондирующих волн на исследуемый объект и направления приема рассеянных полей (несущих информацию об объекте), в фурье-сопряженное пространство. Описание функциональной методики в двумерном случае завершается в разделе 6.3, где излагается алгоритм Новикова–Гриневича–Манаква (НГМ), предназначенный для восстановления рассеивателей по монохроматическим данным. Отличительной чертой этого алгоритма является то, что он требует реше-

ния последовательности систем уравнений, но каждая из этих систем является *линейной* относительно искомых неизвестных. В итоге, искомая функция рассеивателя также оказывается линейно связанной с обобщенным внутренним полем. Таким образом, решение задачи не требует привлечения итераций, хотя при этом процессы многократного рассеяния волн учитываются в полной мере благодаря тому, что томографические данные рассеяния входят в используемые соотношения нелинейным образом.

Результаты впервые выполненного численного моделирования данного алгоритма, применительно к обратной задаче восстановления акустических рассеивателей, обсуждаются в разделе 6.4. При этом показано, что НГМ-алгоритм способен восстанавливать не только чисто рефракционные рассеиватели, которые описываются действительной функцией рассеивателя и соответствуют присутствию только неоднородностей скорости звука, но и рефракционно-поглощающие рассеиватели, которые описываются комплексной функцией и соответствуют одновременному присутствию внутри рассеивателя неоднородностей скорости звука и коэффициента поглощения. Это обстоятельство имеет большое практическое значение, поскольку существенно расширяет класс прикладных задач, в которых может использоваться обсуждаемый метод решения. Кроме того, показано, что решение обладает хорошей помехоустойчивостью как к случайным ошибкам в данных рассеяния (§ 6.4.1), так и к дополнительному виду помех – в виде рассеяния назад обобщенных полей (§ 6.4.2). Еще один важный практический результат проиллюстрирован в § 6.4.3: алгоритм способен восстанавливать тонкую структуру рассеивателя, расположенную на изначально неизвестном неоднородном фоне, с разрешающей способностью около одной трети характерной длины волны. При этом, в отличие от двухшагового алгоритма (глава 2), НГМ-алгоритм (и все другие рассматриваемые ниже функциональные алгоритмы) восстанавливает внутреннюю структуру рассеивателя целиком, без деления присутствующих пространственных деталей по их характерным размерам, что не только повышает точность восстановления, но и является весьма удобным для практического использования.

Седьмая глава посвящена восстановлению НГМ-алгоритмом граничных (т.е. имеющих абсолютно мягкую и абсолютно жесткую границу) акустических двумерных рассеивателей. Так, в разделе 7.1 рассмотрены граничные рассеиватели с достаточно большими волновыми размерами. При этом привлечение НГМ-алгоритма имело целью не исследование нового метода восстановления рассеивателей такого типа, а определение предела области работоспособности алгоритма в принципе. Установить такой предел с помощью обычных рефракционно-поглощающих рассеивателей не получилось из-за проблемы моделирования данных рассеяния в случае сильных рассеивателей. В то же время, для граничных рассеивателей с круговой формой их сечения существует аналитическое решение прямой задачи, так что данные рассеяния можно было рассчитать. Постепенное увеличение силы рассеивателей достигалось увеличением радиуса их кругового сечения. При этом наблюдался эффект снижения устойчивости процедуры восстановления НГМ-алгоритмом вплоть до уровня, неприемлемого с практической точки зрения, для очень сильных рассеивателей. Таким образом, численное моделирование показало, что область работоспособности НГМ-алгоритма оказывается гораздо более широкой, чем это предполагалось изначально, исходя из достаточного (но не необходимого) условия на норму дан-

ных рассеяния, полученного авторами алгоритма. Тем не менее, эта область не безгранична при монохроматическом режиме томографирования.

Самостоятельный интерес представляют результаты восстановления НГМ-алгоритмом граничных рассеивателей с малыми волновыми размерами. В связи с этим, в разделе 7.2 сопоставляются особенности рассеяния на мягком и жестком рассеивателях, а также сравнивается их рассеивающая способность и степень выраженности эффектов многократного рассеяния.

Восьмая глава посвящена проблеме обобщения функционального решения обратной задачи рассеяния на многочастотный или импульсный режим. Такой режим, наиболее часто применяющийся в практических задачах диагностики, в то же время, позволяет увеличить объем независимых дискретизованных данных, получаемых в томографическом эксперименте. В свою очередь, это позволяет повысить устойчивость решения даже в случае очень сильных рассеивателей, процесс восстановления которых является наиболее чувствительным к погрешностям в данных. Однако простое аддитивное объединение множества решений монохроматических задач не является эффективным методом и не эквивалентно решению *единой* задачи, в котором используется факт общности рассеивателя для каждой монохроматической задачи. Поэтому необходим более полный метод объединения решений, который нуждается в дополнительном исследовании. Цель восьмой главы – найти (раздел 8.1) и апробировать на численных моделях (раздел 8.2) способ органичного объединения многочастотных данных и методов решения множества монохроматических задач двумерного рассеяния в виде единого функционального алгоритма. Такой способ был разработан на основе модифицированного двумерного алгоритма Новикова в сочетании с условиями связи на внутренние поля. Эти условия связи вытекают из заданных частотных зависимостей для отдельных рассеивающих компонент искомого объекта-рассеивателя и из соотношений, позволяющих выразить эти компоненты через внутренние поля. В итоге было показано, что многочастотный вариант двумерного модифицированного алгоритма, сохраняя все достоинства монохроматического варианта, оказывается устойчивым и позволяет реконструировать сильные рассеиватели, не поддающиеся адекватному воспроизведению в монохроматическом режиме. При этом, если возникает неустойчивость монохроматического решения, то многочастотный режим не только стабилизирует решение, но и делает его более точным, чем результат простого усреднения соответствующих наборов монохроматических решений. Необходимое количество частот нуждается в оценке для конкретной решаемой задачи; оно зависит от класса томографируемых рассеивателей – их силы в используемом частотном диапазоне и сложности пространственной структуры. Достижимая помехоустойчивость алгоритма к случайным помехам растет с увеличением количества используемых частот, давая возможность реализовать импульсный режим томографирования в сочетании с мощными функциональными методами восстановления.

Девятая глава посвящена функциональному методу решения уже *трехмерной* монохроматической обратной задачи рассеяния. Трудность заключается в том, что вышеупомянутые двумерные функциональные алгоритмы не имеют непосредственного обобщения на трехмерное пространство в силу специфики используемых математических приемов. Тем не менее, исходная предпосылка – введение в алгоритмической схеме эффективной мнимой добавки к волновым векторам – остается. Ввиду усложнения матема-

тического аппарата, в разделе 9.1 приводятся базовые соотношения для волновых векторов и данных рассеяния в трехмерном пространстве, а в разделе 9.2 – непосредственно уравнения трехмерного алгоритма Новикова. В отличие от двумерных функциональных алгоритмов, здесь характеристики рассеивателя ищутся на основе соотношения взаимосвязи пространственного спектра функции рассеивателя и обобщенной амплитуды рассеяния. При учете процессов многократного рассеяния решаемые уравнения становятся нелинейными относительно неизвестных, что делает процесс решения итерационным и существенно увеличивает количество вычислительных операций. Тем не менее, впервые выполненные результаты численного моделирования (раздел 9.3) свидетельствуют о перспективности алгоритма, несмотря на то, что он достаточно сложен в вычислительном плане как в силу трехмерности задачи, так и за счет его итерационной структуры. В настоящее время не выявлено пределов работоспособности алгоритма в случае рассеивателей большой силы. Таким образом, приведенные результаты представляют собой первый шаг на пути использования строгих функциональных методов решения трехмерной обратной задачи рассеяния в задачах практической интроскопии.

Завершают диссертационную работу *основные результаты и выводы*, подводющие итог представленного материала, а также *список публикаций* автора и список других цитируемых публикаций.

ЧАСТЬ I. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ

В акустике под обратными задачами рассеяния понимается восстановление характеристик рассеивателей, т.е. пространственных неоднородностей среды (плотности, скорости звука, упругих констант в случае твердого тела, вязкости в акустических задачах), рассеивающих первичное поле. Исходными данными для процесса восстановления является измеренное рассеянное акустическое поле в некотором множестве экспериментов, – так называемые “данные рассеяния”. Использование звуковых волн для зондирования сред и объектов с целью выяснения их внутренней структуры имеет долгую историю. В настоящей части диссертационной работе внимание сконцентрировано на рассмотрении общих теоретических вопросов акустоскопии и на прикладных аспектах их применения, прежде всего, в медицинской томографии.

Быстрый прогресс в этой области связан с использованием идей общей теории обратных задач рассеяния, разрабатывавшихся в математической физике, в первую очередь в приложении к квантовому рассеянию элементарных частиц [124; 125; 136–138], а также к физике нелинейных волн типа солитонов. Такого рода подход к акустическим задачам лег в основу приведенного ниже рассмотрения. При этом акустическая направленность данного рассмотрения позволила, во-первых, выявить важную черту подобных обратных задач – их весьма нетривиальную некорректность, которая связана с нелинейным характером обратной задачи и выражена в большой чувствительности результатов решения к ошибкам, шумам, неточностям знания характеристик эксперимента; во-вторых, исследовать причину возрастания этой некорректности по мере роста силы рассеивателя. Сложность проблемы объясняется необходимостью учитывать нелинейность обратных задач, т.е. нелинейную связь между исходными данными и искомыми параметрами, характеризующими рассеиватель, что обусловлено процессами многократного рассеяния. К серьезным трудностям следует также отнести неоднозначность оценки характеристик рассеивателя, возникающую как при очевидно ограниченном объеме имеющихся данных, так и при их кажущейся полноте. Такая неоднозначность требует введения в схему решения априорной информации. Кроме того, ситуация осложняется большой размерностью задачи описания рассеивателей сложной внутренней структуры. Это особенно ярко проявляется при рассмотрении трехмерных обратных задач рассеяния.

Вместе с тем, сопоставление пространственной размерности восстанавливаемой неоднородности в двумерных и трехмерных волновых обратных задачах с размерностью многообразия измеряемых данных показывает, что ситуация коренным образом отличается от ситуации, возникающей в обратных задачах излучения [А 1]. В отличие от обратной задачи излучения, в обратной задаче рассеяния возможно получение объема экспериментальных данных, необходимого для обеспечения единственности решения этой задачи даже в когерентном случае, за счет различных ракурсов падения волны на рассеиватель [139]. Так, размерность области определения функции, описывающей однопараметрический рассеиватель (например, пространственное распределение фазовой скорости звука) в

пространстве размерности D также равна D , т.е. равна двум или трем для двумерного или трехмерного пространств, соответственно. В то же время, размерность контура или поверхности, на которых могут быть размещены излучающие и приемные преобразователи вне рассеивателя, равна $D - 1$, т.е. одному или двум, соответственно. При рассмотрении, основанном на использовании данных в виде амплитуды рассеяния (см. далее главу 1), целесообразно говорить о размерности многообразий, характеризующих направление падения или рассеяния плоских волн. В этом случае речь идет об окружности или сфере, на которых лежат как углы падения, так и углы рассеяния. Таким образом, в монохроматическом случае данные рассеяния характеризуются двумерным индексом – двумя углами на окружностях направлений падающих и рассеянных волн в двумерной задаче и, соответственно, четверкой углов, характеризующей точку на сфере направлений падающей волны и точку на сфере направлений рассеянной волны, в трехмерном случае. Другими словами, размерность возможного многообразия независимых монохроматических данных составляет $2(D - 1)$. Включение в многообразие данных рассеяния частотной или временной переменной, т.е. переход к полихроматическому или импульсному режиму, увеличивает на единицу размерность данных рассеяния. В итоге, для двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния имеет место размерностная адекватность данных рассеяния и искомого рассеивателя. В трехмерной задаче имеется размерностная избыточность данных рассеяния даже в монохроматической постановке.

Приведенные факты говорят о вероятной единственности решения двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния. Однако могут существовать определенные ограничивающие требования, гарантирующие устойчивость и единственность в этом случае. Дальнейшее рассмотрение данного вопроса в разделе 3.2 подтверждает непростую ситуацию, возникающую при попытке проанализировать единственность и устойчивость решения обратных задач рассеяния в монохроматическом двумерном случае. Переход к многочастотным данным рассеяния существенно упрощает проблему единственности и устойчивости решения, по крайней мере, в двумерных прикладных задачах томографирования. В трехмерных задачах даже монохроматические данные рассеяния обладают размерностной избыточностью, которая возрастает в случае использования многочастотных данных или данных, соответствующих тому или иному варианту импульсного первичного излучения.

Глава 1. Акустическая томография как обратная задача когерентного рассеяния

В основе решения многих прямых и обратных волновых задач, в том числе, акустических, лежит волновое уравнение:

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \frac{\partial^2 u(\mathbf{z}, t)}{\partial t^2} = F_0(\mathbf{z}, t) . \quad (1.1)$$

Здесь звуковое поле, распространяющееся в среде, неоднородной только по фазовой скорости звука $c(\mathbf{z})$, описывается скалярной характеристикой $u(\mathbf{z}, t)$; \mathbf{z} – произвольная точка пространства. В качестве $u(\mathbf{z}, t)$ может выступать, например, звуковое (акустическое) давление $p(\mathbf{z}, t) \equiv P(\mathbf{z}, t) - P_0(\mathbf{z})$, представляющее собой отклонение полного давления $P(\mathbf{z}, t)$ от его невозмущенного значения P_0 , или может выступать потенциал скорости (предполагается безвихревое движение среды). В рассматриваемых ниже обратных задачах рассеяния функция $F_0(\mathbf{z}, t)$ описывает источники падающего (называемого также первичным) поля $u_0(\mathbf{z}, t)$, зондирующего исследуемую область \mathfrak{R} извне. Далее, следуя [140–142], используются следующие обозначения:

\mathcal{X} – область сосредоточения источников F_0 падающего поля;

\mathfrak{R} – область рассеяния, т.е. область локализации рассеивающих неоднородностей, подлежащих определению;

\mathcal{Y} – область измерения полного поля u или рассеянного поля $u_{sc} \equiv u - u_0$, т.е. область расположения приемников.

Предполагается, что

$$\mathfrak{R} \cap \mathcal{Y} = \emptyset; \quad \mathfrak{R} \cap \mathcal{X} = \emptyset . \quad (1.2)$$

Важно условие отделимости (1.2) области рассеяния \mathfrak{R} от областей излучения и приема (\mathcal{X} и \mathcal{Y}), так как только в этом случае рассматриваемая задача является обратной волновой задачей дистанционного зондирования, к которым относятся и томографические задачи. В то же время, область излучения \mathcal{X} и область приема \mathcal{Y} могут как угодно пересекаться, вплоть до полного их совпадения, и в предельном случае со всех сторон окружать область рассеяния.

В монохроматическом случае источники, описываемые в (1.1) функцией $F_0(\mathbf{z}, t)$, имеют при комплексном представлении вид $F_0(\mathbf{z}, t) = F_0(\mathbf{z}) \exp(-i\omega t)$, что приводит уравнение (1.1), после сокращения общего для всех членов множителя $\exp(-i\omega t)$, к уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + k^2(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) . \quad (1.3)$$

Здесь $k(\mathbf{z}) \equiv \omega/c(\mathbf{z})$ – волновое число, зависящее от координат точки среды \mathbf{z} ; параметр ω в аргументах функций $F_0(\mathbf{z})$ и $u(\mathbf{z})$ для краткости опущены. Уравнение (1.3) можно преобразовать, придав ему более удобный для дальнейшего рассмотрения вид. Для этого следует прибавить и отнять в левой части уравнения (1.3) функцию $k_0^2 u(\mathbf{z})$, где $k_0 \equiv \omega/c_0$ – волновое число, относящееся к некоторой “фоновой” среде, характеризующей рассматриваемую область пространства в отсутствие исследуемых неоднородностей, вызывающих рассеяние падающих волн. Однородная изотропная непоглощающая фоновая среда характеризуется постоянной скоростью звука c_0 . Тогда уравнение (1.3) приобретает вид:

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + k_0^2 u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) + \omega^2 \left[\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right] u(\mathbf{z}) , \quad (1.4)$$

или в эквивалентной записи:

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + k_0^2 u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) + v(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}) . \quad (1.5)$$

Функция

$$v(\mathbf{z}) \equiv k_0^2 - k^2(\mathbf{z}) = \omega^2 \left[\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right] \quad (1.6)$$

называется *функцией рассеивателя*; она характеризует неоднородность среды в области рассеяния \mathfrak{R} , причем $v(\mathbf{z}) \equiv 0$ при $\mathbf{z} \notin \mathfrak{R}$. Тем самым, в данном случае неоднородность описывается локальным отклонением обратного квадрата фазовой скорости звука $c(\mathbf{z})$ от постоянного фонового значения c_0 . В аргументе функции $v(\mathbf{z})$ зависимость от ω сейчас опять же для краткости опускается.

В более общей ситуации функция рассеивателя $v(\mathbf{z})$ характеризует неоднородность, возникающую за счет отличия как скорости звука $c(\mathbf{z})$, так и частотно-зависимого амплитудного коэффициента поглощения или усиления $\alpha(\mathbf{z}, \omega)$ внутри области \mathfrak{R} от их значений в фоновой среде; для временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$, рассматриваемой в настоящей работе, поглощение будет при $\alpha(\mathbf{z}, \omega) > 0$, усиление – при $\alpha(\mathbf{z}, \omega) < 0$. В этом случае имеют место уравнения [А 1 (§ 2.2.2)]:

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + \left(k^c(\mathbf{z}) \right)^2 u(\mathbf{z}) = \frac{F_0(\mathbf{z})}{\left[1 - \frac{i b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})} \right]} , \quad (1.7)$$

где

$$(k^C(\mathbf{z}))^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{z})} \frac{1}{\left[1 - \frac{i b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})}\right]} \equiv \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{z})} \frac{\left\{1 + i \frac{b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})}\right\}}{1 + \left[\frac{b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})}\right]^2}, \quad (1.8)$$

$b(\mathbf{z}, \omega)$ – коэффициент вязкости, ρ_0 – постоянное значение плотности фоновой среды. Поскольку сейчас рассматривается однородная непоглощающая фоновая среда, то правая часть уравнения (1.7) равна просто $F_0(\mathbf{z})$, поскольку источники падающего поля $F_0(\mathbf{z})$ находятся, по постановке задачи, вне области рассеяния \mathfrak{R} . Таким образом, сравнение уравнений (1.3) и (1.7) показывает, что в (1.3) волновое число $k(\mathbf{z})$ заменяется на локальное комплексное волновое число $k^C(\mathbf{z})$; верхний индекс в обозначении k^C означает комплексность. Тогда для однородной изотропной непоглощающей фоновой среды со скоростью звука c_0 и волновым числом k_0 вид уравнения (1.5) остается неизменным, но присутствующая в нем функция рефракционно-поглощающего рассеивателя составляет

$$v(\mathbf{z}) \equiv k_0^2 - (k^C(\mathbf{z}))^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{z})} \frac{\left\{1 + i \frac{b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})}\right\}}{1 + \left[\frac{b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})}\right]^2}. \quad (1.9)$$

В акустических задачах часто имеет место ситуация, когда $\frac{b(\mathbf{z}, \omega) \omega}{\rho_0 c^2(\mathbf{z})} < 1$, что по физическому смыслу означает малое поглощение на расстоянии около одной длины волны. Тогда выражение (1.9), с точностью до членов, линейных по параметру $\frac{b \omega}{\rho_0 c^2}$, принимает вид [143]:

$$v(\mathbf{z}) \approx \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{z}, \omega)}{c(\mathbf{z})}, \quad (1.10)$$

где $\alpha(\mathbf{z}, \omega) = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3(\mathbf{z})} b(\mathbf{z}, \omega)$; $k^C(\mathbf{z}) = \frac{\omega}{c(\mathbf{z})} + i\alpha(\mathbf{z}, \omega)$ ($|\alpha| \ll k_0$).

В еще более общем случае фоновая среда является неоднородной и характеризуется скоростью звука $c_0(\mathbf{z})$, известным образом изменяющейся с координатой. В приклад-

ных задачах иногда бывает удобно полагать, что фоновая среда обладает также своим заранее известным поглощением с амплитудным коэффициентом $\alpha_0(\mathbf{z}, \omega)$. Разумно предположить, что коэффициент $\alpha_0(\mathbf{z}, \omega)$ отличен от нуля только в конечной области пространства, так как при этом не возникает необходимость в пересмотре условия излучения для фоновой среды. Комплексное волновое число и его квадрат в неоднородной фоновой среде составляют

$$k_0^C(\mathbf{z}) \approx \frac{\omega}{c_0(\mathbf{z})} + i\alpha_0(\mathbf{z}, \omega), \quad \left(k_0^C(\mathbf{z})\right)^2 \approx \frac{\omega^2}{c_0^2(\mathbf{z})} + 2i\omega \frac{\alpha_0(\mathbf{z}, \omega)}{c_0(\mathbf{z})}, \quad (1.11)$$

и уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + \left(k^C(\mathbf{z})\right)^2 u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z})$$

преобразуется к виду

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + \left(k_0^C(\mathbf{z})\right)^2 u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) + v(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}). \quad (1.12)$$

Здесь рассеиватель относительно данного неоднородного фона описывается функцией

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &\equiv \left(k_0^C(\mathbf{z})\right)^2 - \left(k^C(\mathbf{z})\right)^2 \approx \\ &\approx \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2(\mathbf{z})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right) - 2i\omega \left(\frac{\alpha(\mathbf{z}, \omega)}{c(\mathbf{z})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{z}, \omega)}{c_0(\mathbf{z})} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тот факт, что плотность среды $\rho(\mathbf{z})$ также неоднородна, желательно учитывать, например, в задачах медицинской диагностики [А 3]. Волновое уравнение, обобщающее уравнение (1.1) в присутствии неоднородности плотности, записывается именно для звукового давления $p(\mathbf{z}, t)$. В силу условия (1.2) отделимости области излучения от области рассеяния ($\mathfrak{R} \cap \mathcal{X} = \emptyset$) это волновое уравнение имеет вид [141; 142 (§ 2.1); 144 (Т. 1, гл. 13, § 11)]

$$\nabla^2 p(\mathbf{z}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\mathbf{z}, t) = F_0(\mathbf{z}, t) + \frac{\nabla \rho(\mathbf{z})}{\rho(\mathbf{z})} \nabla p(\mathbf{z}, t). \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) можно преобразовать, вводя новую комбинированную переменную

$$u(\mathbf{z}, t) = p(\mathbf{z}, t) \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}}, \quad \text{где } \rho_0 - \text{постоянное значение плотности фоновой среды [141;$$

142 (§ 2.2); 145; 146]. Поскольку $\rho(\mathbf{z}) = \rho_0$ вне области рассеяния \mathfrak{R} , и, следовательно, $u(\mathbf{z}, t) = p(\mathbf{z}, t)$ при $\mathbf{z} \notin \mathfrak{R}$, то в области наблюдений \mathcal{Y} измеряется звуковое давление

$u(\mathbf{y}, t) = p(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. В терминах введенной переменной $u(\mathbf{z}, t)$ уравнение (1.14) принимает следующий вид [145]:

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{z}, t) - \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}} \right) u(\mathbf{z}, t) = F_0(\mathbf{z}, t), \quad (1.15)$$

где $\rho_0 \equiv \text{const}$.

В монохроматическом варианте данное соотношение (1.15) можно записать по аналогии с уравнением Гельмгольца (1.5) в случае однородной изотропной непоглощающей фоновой среды со скоростью звука c_0 и плотностью ρ_0 :

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + k_0^2 u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) + v(\mathbf{z}) u(\mathbf{z});$$

при этом в выражение (1.6) для $v(\mathbf{z})$ добавляется плотностной член:

$$v(\mathbf{z}) = \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right) + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}} \right) \quad (1.16)$$

в отсутствие поглощения в области рассеяния \mathfrak{R} . Аналогичный плотностной член добавляется в комбинированную функцию неоднородности (1.10) в присутствии поглощения в \mathfrak{R} :

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &\equiv k_0^2 - \left(k^C(\mathbf{z}) \right)^2 + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}} \right) \approx \\ &\approx \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right) + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}} \right) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{z}, \omega)}{c(\mathbf{z})}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В случае фоновой среды, однородной по плотности $\rho_0 \equiv \text{const}$, но неоднородной по скорости звука $c_0(\mathbf{z})$ и по коэффициенту поглощения $\alpha_0(\mathbf{z}, \omega)$ (α_0 не равно нулю лишь в конечной области пространства), имеет место уравнение Гельмгольца вида (1.12), т.е.

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + \left(k_0^C(\mathbf{z}) \right)^2 u(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) + v(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}),$$

где, по аналогии с (1.13),

$$\begin{aligned} v(\mathbf{z}) &\equiv \left(k_0^C(\mathbf{z}) \right)^2 - \left(k^C(\mathbf{z}) \right)^2 + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}} \right) \approx \\ &\approx \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2(\mathbf{z})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{z})} \right) + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{z})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{z})}} \right) - 2i\omega \left(\frac{\alpha(\mathbf{z}, \omega)}{c(\mathbf{z})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{z}, \omega)}{c_0(\mathbf{z})} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Левая часть уравнений Гельмгольца (1.5) и (1.12) описывает волновые процессы в фоновой среде. В правую же часть внесены источники двух типов – *первичные источники* $F_0(\mathbf{z})$ падающего поля (эти источники находятся только в области \mathcal{X}) и так называемые *вторичные источники* $I(\mathbf{z}) \equiv v(\mathbf{z})u(\mathbf{z})$, индуцируемые в области \mathcal{R} падением полного поля $u(\mathbf{z})$ на неоднородности относительно фоновых значений, т.е. на возмущения характеристик среды $v(\mathbf{z})$. В отсутствие этих неоднородностей первичные источники вызвали бы невозмущенное рассеивающими неоднородностями падающее поле $u_0(\mathbf{z})$, являющееся решением соответствующего уравнения Гельмгольца при $v(\mathbf{z}) \equiv 0$. Например, в случае однородной изотропной непоглощающей фоновой среды,

$$\nabla^2 u_0(\mathbf{z}) + k_0^2 u_0(\mathbf{z}) = F_0(\mathbf{z}) . \quad (1.19)$$

Из разности (1.5) и (1.19) следует, что поле, вызываемое вторичными источниками, т.е. *рассеянное поле*

$$u_{\text{sc}}(\mathbf{z}) \equiv u(\mathbf{z}) - u_0(\mathbf{z})$$

(нижний индекс “sc” – от “scattered”, т.е. “рассеянный”), подчиняется уравнению

$$\nabla^2 u_{\text{sc}}(\mathbf{z}) + k_0^2 u_{\text{sc}}(\mathbf{z}) = v(\mathbf{z})u(\mathbf{z}) . \quad (1.20)$$

В случае неоднородной фоновой среды, согласно (1.12), в левой части соотношений (1.19)

и (1.20) следует заменить k_0^2 на $(k_0^C(\mathbf{z}))^2$ или $\left\{ (k_0^C(\mathbf{z}))^2 - \sqrt{\rho_0(\mathbf{z})} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0(\mathbf{z})}} \right) \right\}$, при

этом в качестве $v(\mathbf{z})$ используя соответствующую функцию рассеивателя. Важно обратить внимание на то, что рассеянное поле описывается как поле в фоновой среде (однородной или неоднородной), а его источниками являются вторичные источники

$$I(\mathbf{z}) \equiv v(\mathbf{z})u(\mathbf{z}) ,$$

вызванные полным полем $u(\mathbf{z})$. Тот факт, что полное поле $u(\mathbf{z}) \equiv u_0(\mathbf{z}) + u_{\text{sc}}(\mathbf{z})$ и его части – первичное поле $u_0(\mathbf{z})$ и рассеянное поле $u_{\text{sc}}(\mathbf{z})$ – описываются как поля в фоновой среде, позволяет выразить $u(\mathbf{z})$ в виде формального запаздывающего решения $u = u^+$ (удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда на бесконечности) или опережающего решения $u = u^-$ (удовлетворяет комплексно сопряженному условию излучения). Эти решения используют известный вид запаздывающей (G_0^+) или опережающей (G_0^-) функции Грина для фоновой среды:

$$u^\pm(\mathbf{z}) \equiv u_0^\pm(\mathbf{z}) + u_{sc}^\pm(\mathbf{z}) = \int_{\mathcal{X}} G_0^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{x}) F_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathfrak{R}} G_0^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') u^\pm(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' ; \quad (1.21)$$

\mathbf{z} – произвольная точка пространства, $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $\mathbf{r}' \in \mathfrak{R}$ (рассеиватель, и, следовательно, возникающие вторичные источники находятся только в области рассеяния \mathfrak{R}). Уравнение (1.21), называемое уравнением Липпмана–Швингера, было приведено в [147] в связи с исследованиями по квантовой теории поля. Функции Грина для однородного изотропного непоглощающего фонового пространства $G_0^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = G_0^\pm(\mathbf{z} - \mathbf{z}')$ удовлетворяют уравнению (1.5), но с δ -образной правой частью:

$$\nabla_{\mathbf{z}}^2 G_0^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{z}') + k_0^2 G_0^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}') .$$

Конкретный вид этих функций зависит от размерности задачи. Для принятого характера временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$ этот вид задается соотношениями:

$$\begin{aligned} G_0^+(\mathbf{z} - \mathbf{z}') &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|) , \\ G_0^-(\mathbf{z} - \mathbf{z}') &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|) \quad \text{при } \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{R}^2 , \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ – функции Ханкеля 0-го порядка 1-го и 2-го рода, соответственно;

$$\begin{aligned} G_0^+(\mathbf{z} - \mathbf{z}') &= -\frac{\exp(ik_0 |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|)}{4\pi |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|} , \\ G_0^-(\mathbf{z} - \mathbf{z}') &= -\frac{\exp(-ik_0 |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|)}{4\pi |\mathbf{z} - \mathbf{z}'|} \quad \text{при } \mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{R}^3 . \end{aligned} \quad (1.23)$$

Однако используемая в уравнении (1.21) функция Грина G_0^\pm для запаздывающих или опережающих решений не обязательно должна соответствовать однородному фоновому пространству, в котором находится область локализации неоднородности \mathfrak{R} . Фоновое пространство само может являться неоднородным по фазовой скорости или плотности, что отражается на виде функций Грина. В этом случае уравнение (1.21) сохраняет свою справедливость, но вместо G_0^\pm будет фигурировать запаздывающая или опережающая функция Грина неоднородного пространства G^\pm . Далее будут использоваться, если не оговорено особо, именно функции Грина однородного изотропного пространства G_0^\pm , хотя обобщение на случай неоднородного фона очевидно.

Важным для дальнейшего является то, что уравнение Липпмана–Швингера (1.21) справедливо для полного поля в любой точке \mathbf{z} . По постановке задачи $\mathbf{z} \in \mathcal{Y} \cup \mathcal{R}$, и тогда в области наблюдений \mathcal{Y} , т.е. при $\mathbf{z} = \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$, это уравнение записывается как

$$\begin{aligned} u^\pm(\mathbf{y}) &\equiv u_0^\pm(\mathbf{y}) + u_{sc}^\pm(\mathbf{y}) = \\ &= \int_{\mathcal{X}} G_0^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{x}) F_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{R}} G_0^\pm(\mathbf{y}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') u^\pm(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{y} \in \mathcal{Y}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Кроме того, в самой области рассеяния \mathcal{R} , т.е. при $\mathbf{z} = \mathbf{r} \in \mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} u^\pm(\mathbf{r}) &\equiv u_0^\pm(\mathbf{r}) + u_{sc}^\pm(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{\mathcal{X}} G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{x}) F_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{R}} G_0^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') u^\pm(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Известно, что в классических волновых процессах, не имеющих связанных состояний, уравнение Липпмана–Швингера (1.25) имеет единственное решение (относительно поля внутри области \mathcal{R}) в пассивных средах для всех физически содержательных случаев [136 (§ 1.3, § 5.1); 149 (§ 38)]. Фактически оно является *неявным* решением уравнения Гельмгольца вида (1.5) или (1.12) (в зависимости от задаваемой фоновой среды, для которой вычисляются функции Грина) и эквивалентно ему. Уравнение Липпмана–Швингера чрезвычайно интенсивно изучалось со всех точек зрения в контексте прямых и обратных задач квантовой механики. Работа [136] содержит прекрасный обзор результатов, полученных в области обратных задач квантового рассеяния, вплоть до конца 1980-х годов, а также некоторые результаты, направленные на расширение функциональных подходов к задачам более широкого физического содержания – акустическим, электродинамическим. Необходимо также упомянуть обзорную статью Л. Д. Фаддеева [124], книгу Р. Ньютона [127], книгу К. Шадана и П. Сабатье [125]. Краткое изложение этих вопросов дано в [А 131 (гл. 14)].

Далее в части I представляемой работы верхние индексы “ \pm ” у функций Грина и соответствующих им полей будут для краткости опускаться, если не оговаривается особо, какие поля – запаздывающие или опережающие – рассматриваются в текущем контексте.

Уравнение Гельмгольца (1.5) для однородной изотропной непоглощающей фоновой среды вне первичных источников, т.е.

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}) + k_0^2 u(\mathbf{z}) = v(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}), \quad (1.26)$$

и уравнение Шредингера в моноэнергетическом (т.е. монохроматическом – в контексте акустических задач) случае

$$\nabla^2 \psi + E_0 \psi = U \psi \quad (1.27)$$

имеют, с точностью до буквенных обозначений, тождественный вид. В (1.27) ψ – волновая функция; U – рассеивающий потенциал; E_0 – энергия первичного поля, аналогом которой в акустическом случае является величина k_0^2 . Подробное изложение результатов исследования трехмерной обратной задачи квантово-механического рассеяния содержится в книге Р. Ньютона [127]. Здесь же необходимо подчеркнуть следующие два обстоятельства:

1. Кардинальное отличие в поведении функции рассеивателя в уравнениях (1.26) и (1.27). Так, в квантовой механике рассеивающий потенциал U не зависит от энергии рассеиваемых частиц, и, в результате этого, эффекты рассеяния ослабевают с ростом энергии. Частицы с большой энергией “не замечают” потенциальных “ямок” и “горок”, и их волновая функция стремится к волновой функции свободного пространства.

В случае же акустических волн функция рассеивателя ν , даже при отсутствии собственной частотной дисперсии в рассеивателе, растет пропорционально квадрату частоты (за счет неоднородностей фазовой скорости звука), и влияние рассеивателя не только не ослабевает, но быстро возрастает. Кроме того, присутствие поглощения в рассеивателе приводит к заметному росту мнимой части функции ν при увеличении частоты, согласно (1.10). Этот факт частотной зависимости акустического рассеивателя не позволяет использовать для акустического поля асимптотические свойства волновой функции $\psi \rightarrow \psi_0$ при $E_0 \rightarrow \infty$, сильно упрощающие в ряде случаев процесс решения обратной квантово-механической задачи рассеяния.

2. При анализе квантово-механической задачи большую трудность представляет собой учет так называемых “исключительных точек”, которые описывают связанные состояния, свойственные потенциальной яме $U(\mathbf{r}) < 0$ и возникающие в квантовой теории. Они соответствуют отрицательной энергии частицы, находящейся в яме и не способной преодолеть потенциальную стенку. В то же время, в акустике связанные состояния отсутствуют для пассивных рассеивателей, что существенно облегчает ситуацию при решении прямых и обратных задач. Этот вопрос проанализирован, например, в [А 2 (раздел 5.1)] с учетом результатов монографии [148 (гл. 6, § 3)]. Тем не менее, при анализе и решении *обратных* задач акустического рассеяния принципиальные проблемы другого рода остаются достаточно сложными. В наиболее общей форме существо проблемы сводится к росту сложности картины пространственного распределения вторичных источников $\nu(\mathbf{r})u(\mathbf{r})$, порождающих рассеянное поле, по мере увеличения частоты, и к соответствующему росту силы рассеивателя. Этот процесс приводит к росту неустойчивости решения обратной задачи, а затем к потере единственности решения (прежде всего, в двумерном случае). Более общий подход, рассмотренный в разделе 3.2 и основанный на анализе функциональных аспектов проблемы, позволяет продвинуться в понимании существа дела и очертить границы возможного в решении обратных задач рассеяния, а также уяснить методы и требования к объему и характеру данных рассеяния, приводящие к расширению области существования решения.

Дальнейшее рассмотрение обратной задачи рассеяния будет основано на исходных соотношениях в виде набора (параметризованного множества) уравнений Липпмана–Швингера (1.21)

$$u(\mathbf{z}, \alpha) = u_0(\mathbf{z}, \alpha) + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{z}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}', \alpha) d\mathbf{r}', \quad (1.28)$$

которые являются неявным решением соответствующего набора (множества) уравнений Гельмгольца для среды, содержащей неоднородность, при ее облучении набором падающих волн:

$$\nabla^2 u(\mathbf{z}, \alpha) + k_0^2 u(\mathbf{z}, \alpha) = F_0(\mathbf{z}, \alpha) + v(\mathbf{z}) u(\mathbf{z}, \alpha). \quad (1.29)$$

Здесь $F_0(\mathbf{z}, \alpha)$ – источники первичного (падающего) поля $u_0^\pm(\mathbf{z}, \alpha)$; α – конфигурационный параметр, характеризующий конфигурацию падающего поля, положение его источников или направление падения первичного излучения, частоту излучения и т.д. и принимающий дискретное или непрерывное множество значений из области \mathcal{A} , т.е. $\alpha \in \mathcal{A}$; $u^\pm(\mathbf{z}, \alpha)$ – полное поле как в области наблюдения (т.е. при $(\mathbf{z} = \mathbf{y}) \in \mathcal{Y}$), так и в области локализации искомой неоднородности (т.е. при $(\mathbf{z} = \mathbf{r}) \in \mathfrak{R}$); $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число однородной фоновой среды.

Уравнение Липпмана–Швингера может быть также записано в терминах пространственных спектров входящих в него функций и операторов. Этот переход дает результат, имеющий наиболее наглядную форму для однородной изотропной непоглощающей фоновой среды в предположении, что падающее излучение в произвольной точке \mathbf{z} представляет собой плоскую волну с волновым вектором $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_\alpha$: $u_0^+(\mathbf{z}, \alpha) = u_0(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{kz})$ при временной зависимости полей $\exp(-i\omega t)$. Параметр α в данном случае характеризует направление падения поля и его частоту. Здесь и далее для определенности будут рассматриваться запаздывающие поля $u_0 = u_0^+$, $u = u^+$ и запаздывающая функция Грина $G_0 = G_0^+$. В этом случае полное поле описывается уравнением, следующим из (1.28):

$$u(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{kz}) + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{z}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}', \mathbf{k}) d\mathbf{r}', \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^D; \quad (1.30)$$

D – размерность пространства. Умножение левой и правой части (1.30) при $\mathbf{z} = \mathbf{r} \in \mathfrak{R}$ на $v(\mathbf{r})$ приводит к уравнению Липпмана–Швингера в терминах вторичных источников $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv v(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, индуцированных падающей плоской волной:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + v(\mathbf{r}) \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \mathbf{k}) d\mathbf{r}'.$$

Последующее умножение левой и правой части этого уравнения на $\exp(-i\xi\mathbf{r})$ и интегрирование по \mathbf{r} в области \mathbb{R}^D дает в левой части пространственный фурье-образ (т.е. пространственный спектр) вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) \equiv \int_{\mathfrak{R}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ (интегрирование по всему пространству \mathbb{R}^D сводится к интегрированию по области рассеяния \mathfrak{R} , где отличны от нуля функции рассеивателя и вторичных источников):

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) = \tilde{v}(\xi - \mathbf{k}) + \int_{\mathfrak{R}} \exp(-i\xi\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \mathbf{k}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}; \quad (1.31)$$

$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ в силу однородности фоновой среды; $\tilde{v}(\xi) = \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ – пространственный спектр рассеивателя. Понятие пространственного спектра обсуждалось во Введении к книге [А 1]; ξ – действительный вектор пространственной частоты, принадлежащий D -мерному пространству, которое является фурье-сопряженным к пространству координат. В контексте настоящей диссертации оно обозначается как пространство K и называется по традиции \mathbf{K} -пространством или \mathbf{K} -представлением, пространственно-спектральным представлением (используется также терминология “импульсное представление”). Название “ \mathbf{K} -пространство” связано с тем, что в работах разных авторов вектор пространственной частоты обозначается по-разному, и помимо его обозначения ξ часто используется обозначение \mathbf{K} .

Соотношения для прямого и обратного пространственного фурье-преобразования

$$\tilde{G}_0(\xi) = \int G_0(\mathbf{r}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{G}_0(\xi') \exp[i\xi'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\xi'$$

позволяют привести соотношение (1.31) к виду

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) = \tilde{v}(\xi - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\xi - \xi') \tilde{G}_0(\xi') \tilde{I}(\xi', \mathbf{k}) d\xi', \quad \xi \in K. \quad (1.32)$$

Вариант записи уравнения (1.32) является, фактически, уравнением Липпмана–Швингера в \mathbf{K} -пространстве. Это уравнение связывает пространственный фурье-образ (пространственный спектр) вторичных источников с фурье-образом неоднородности $\tilde{v}(\xi - \mathbf{k})$ на “разностной” пространственной частоте $\xi - \mathbf{k}$ и интегральной формой, содержащей те же пространственные фурье-образы вторичных источников и рассеивателя, а также пространственный фурье-образ функции Грина \tilde{G}_0 . Выражения для $\tilde{G}_0(\xi) = \tilde{G}_0^+(\xi)$ приведены во Введении к книге [А 1].

Область интегрирования в уравнении (1.32) по векторам пространственной частоты $\xi' \in K$ неопределенно велика и содержит все векторы пространственной частоты, имеющие смысл с точки зрения физического содержания рассматриваемой задачи. При решении прямой задачи рассеяния это уравнение позволяет найти вторичные источники, а затем полностью описать процесс рассеяния, что будет обсуждаться далее. При решении обратной задачи данные рассеяния, описываемые этим уравнением и называемые *амплитудой рассеяния*, являются значениями фурье-образа вторичных источников на сфере Эвальда (при $D = 3$) или на окружности Эвальда (при $D = 2$), которая характеризуется множеством векторов ξ , имеющих длину k_0 (волновое число в однородной фоновой среде): $|\xi| = |\mathbf{k}| = k_0$. Далее векторы ξ , принадлежащие сфере (окружности) Эвальда, будут обозначаться также с помощью вектора \mathbf{I} , чтобы подчеркнуть, что пространственные компоненты $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ при $\xi = \mathbf{I}$, $|\mathbf{I}| = k_0$, доступны для измерения в эксперименте. Иногда такие компоненты, полученные в эксперименте, будут приводиться с дополнительным нижним символом “ex” (от “experiment”), т.е. $\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{I}, \mathbf{k}) \equiv \tilde{I}(\xi = \mathbf{I}, \mathbf{k})$, чтобы подчеркнуть возможность их измерения в эксперименте (в дальнем поле, – см. далее (1.38) в настоящем разделе) или пересчета из экспериментальных данных (если речь идет о ближнем поле, – см. [А 131 (глава 20); 136; 150]). По определению, амплитудой рассеяния называется комплексная функция

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^D} \tilde{I}(\xi = \mathbf{I}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{I}\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \quad (1.33)$$

Коэффициент пропорциональности между амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ и пространственным спектром вторичных источников $\tilde{I}(\xi = \mathbf{I}, \mathbf{k})$ в литературе определяется по-разному. Это непринципиально с точки зрения анализа физических процессов и методов решения обратной задачи, но требует внимательности при численной реализации конкретного алгоритма в силу нелинейности обратной задачи рассеяния относительно данных рассеяния. В настоящей работе будет принята именно связь (1.33), часто используемая в работах по функциональным методам решения обратной задачи рассеяния, которым посвящена часть II настоящей работы и монография [А 131].

При $\xi = \mathbf{I}$ уравнение (1.32) приобретает вид:

$$(2\pi)^D f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) = \tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\mathbf{I} - \xi') \tilde{G}_0(\xi') \tilde{I}(\xi', \mathbf{k}) d\xi' . \quad (1.34)$$

Отличие этого уравнения от (1.32) в том, что не только $\mathbf{k} \in K_0$, но и $\mathbf{I} \in K_0$, где K_0 – подобласть пространства K , для которой векторы пространственной частоты ξ имеют фиксированную длину $|\xi| = k_0$.

Амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ описывает амплитуду и фазу плоских волн, рассеянных в направлении \mathbf{l} в ответ на падающую плоскую волну единичной амплитуды с направлением падения \mathbf{k} . Действительно, из явных выражений для запаздывающей функции Грина однородного изотропного пространства (1.22) и (1.23) следует асимптотика этой функции Грина после перехода в дальнюю зону $|\mathbf{z}| \rightarrow \infty$ (точка $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$ фиксирована):

$$G_0(\mathbf{z} - \mathbf{r}) \approx \frac{C_D}{(2\pi)^D} \frac{\exp(ik_0|\mathbf{z}|)}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}} \exp\left(-ik_0 \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \mathbf{r}\right), \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R}, \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty; \quad (1.35)$$

множитель C_D зависит от размерности пространства D :

$$C_D = -\frac{\pi\sqrt{\pi}(1+i)}{\sqrt{k_0}} \quad \text{при } D=2; \quad C_D = -2\pi^2 \quad \text{при } D=3. \quad (1.36)$$

Более точно, условие дальней зоны имеет следующий вид, – см., например, соотношение (1.22) в [A 1]:

$$|\mathbf{z}| \gg \frac{(2\mathbf{r})^2}{\lambda_0}, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{R}, \quad (1.37)$$

где λ_0 – длина волны. Тогда уравнение Липпмана–Швингера (1.30) для поля в произвольной точке пространства $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^D$ после перехода в дальнюю зону $|\mathbf{z}| \rightarrow \infty$, с учетом (1.35), дает связь между наблюдаемым в дальней зоне рассеянным полем $u_{sc}(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = u(\mathbf{z}, \mathbf{k}) - \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z})$ и амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ [129 (гл. 1.2.1, § 3; гл. 1.2.3, § 5)]:

$$u_{sc}(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = C_D \frac{\exp(ik_0|\mathbf{z}|)}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}} f(\mathbf{k}, \mathbf{l} = k_0 \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}}\right), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

Следовательно, $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ описывает асимптотику рассеянной волны в направлении вектора \mathbf{l} при неограниченном удалении от области рассеяния. При этом сферическое (при $D=3$) или цилиндрическое (при $D=2$) спадание рассеянной волны $\sim \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}}$, а

также фазовый множитель $\exp(i\mathbf{l} \cdot |\mathbf{z}|) = \exp(ik_0|\mathbf{z}|)$, возникающий при распространении, вынесены в (1.38) в отдельный множитель. Из (1.38) и (1.33) видно, что

рассеянное поле в дальней зоне при переборе направлений приема $\frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ пропорционально компонентам пространственного спектра вторичных источников рассеивателя, лежащим на сфере (окружности) Эвальда, т.е. пропорционально $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$. Таким образом, в случае падающей плоской волны, значения $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ легко получить при непосредственном измерении рассеянного поля в дальней зоне. Однако наряду с использованием плоских падающих волн, значения $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ могут быть пересчитаны из данных рассеяния, измеренных при размещении излучателей и приемников, эквивалентных точечным, вокруг исследуемой области рассеяния [А 2 (раздел 5.1); А 33; А 34; А 86; 136; 150]. Один из таких алгоритмов для квазиточечных излучателей и приемников подробно рассмотрен в [А 131 (глава 20)].

Укороченный вариант уравнения (1.32) или (1.34), содержащий в правой части лишь пространственный фурье-образ рассеивателя $\tilde{v}(\xi - \mathbf{k})$, т.е.

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) \approx \tilde{I}_{\text{борн}}(\xi, \mathbf{k}) = \tilde{v}(\xi - \mathbf{k}), \quad (1.39)$$

лежит в основе целой серии томографических схем, использующих *первое приближение Борна*, которое также называется просто приближением Борна или *приближением однократного рассеяния*. Ему соответствует соотношение (1.39), в котором пространственный спектр вторичных источников \tilde{I} приближенно заменяется на его борновское значение $\tilde{I}_{\text{борн}}$. Несмотря на серьезнейшие ограничения, накладываемые приближением однократного рассеяния (что будет пояснено ниже), оно рассматривалось и использовалось в огромном количестве исследований, в которых обсуждались всевозможные схемы его реализации [130; 151–174]. Эти работы рассматривают большое число схем практической реализации томографов. Их можно разделить по самым разным признакам на несколько классов. Важна, прежде всего, конфигурация антенной системы. Здесь можно выделить линейные приемные и излучающие антенны с механическим или электронным сканированием, способным последовательно или одновременно формировать множество (до нескольких сотен) зон чувствительности, например, в виде пучков почти плоских волн и аналогичных зон излучения [139; 157–166]. Одним из сложных моментов является формирование дискретного набора данных, наиболее приспособленных к осуществлению на их основе восстановления рассеивателя $v(\mathbf{r})$ обратным фурье-преобразованием, что следует из уравнения (1.39) [154; 167]. Второй обширный класс схем основан на использовании кольцевых многоэлементных антенных решеток [168–173].

Из соотношения (1.39) следует, что для каждого фиксированного волнового вектора \mathbf{k} зондирующей плоской волны пространственный спектр вторичных источников в приближении однократного рассеяния $\tilde{I}_{\text{борн}}(\xi, \mathbf{k})$ представляет собой пространственный спектр рассеивателя при смещении области его локализации на \mathbf{k} . Эксперименты по томографированию слабого, т.е. борновского, рассеивателя (это рассеиватель, для которого справедливо первое приближение Борна) при различных направлениях \mathbf{k} дает информа-

цию, которая позволяет восстановить компоненты пространственного спектра рассеивателя $\tilde{v}(\mathbf{l}-\mathbf{k})$, согласно (1.39) или укороченному варианту уравнения (1.34) [141; 142 (§ 4.1)]:

$$\tilde{v}(\xi' = \mathbf{l}-\mathbf{k}) = \tilde{I}_{\text{born}}(\mathbf{l}, \mathbf{k}) \approx (2\pi)^D f(\mathbf{k}, \mathbf{l}), \quad \text{где } \mathbf{l}, \mathbf{k} \in K_0. \quad (1.40)$$

Перебор всех направлений падающей и рассеянной волн при фиксированной частоте зондирующего поля предоставляет информацию о пространственном спектре рассеивателя $\tilde{v}(\xi')$ при $|\xi'| \leq 2k_0$, т.е. внутри сферы (окружности) радиуса $2k_0$ [130 (§ 6.7); 141; 142]. Попытка использования операции аналитического продолжения функции $\tilde{v}(\xi')$ для восстановления компонент $\tilde{v}(\xi')$ при $|\xi'| > 2k_0$ сталкивается с проблемой неустойчивости. В итоге оценка $\hat{v}(\mathbf{r})$ искомого пространственного распределения функции рассеивателя $v(\mathbf{r})$ получается обратным фурье-преобразованием:

$$\hat{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \tilde{v}(\xi') \exp(i\xi' \mathbf{r}) d\xi', \quad (1.41)$$

где интегрирование осуществляется по тем значениям ξ' , о которых имеется информация из эксперимента.

Соотношение (1.40) позволяет проследить связь пространственного спектра вторичных источников и восстанавливаемого фрагмента пространственного спектра рассеивателя в зависимости от режима томографирования – просветного режима, при котором углы рассеяния (углы между вектором \mathbf{l} рассеянной волны и вектором \mathbf{k} падающей волны) не превышают по модулю $\pi/2$, и режима томографии “на отражение”, т.е. обратного рассеяния. Действительно, из (1.41) вытекает, что фиксированный вектор пространственной частоты ξ' в пространственном спектре рассеивателя $\tilde{v}(\xi')$ несет информацию о деталях рассеивателя с характерными размерами $\ell \cong \frac{2\pi}{2|\xi'|}$ (символ \cong означает, что оценка дается по порядку величины). В просветном режиме наблюдение рассеянного вперед поля (1.38) (вектор \mathbf{l} близок к \mathbf{k}) предоставляет информацию о низких пространственных частотах в спектре рассеивателя – вблизи значения $\xi' = 0$, согласно (1.40) – и, следовательно, о крупномасштабных деталях рассеивателя $\ell \gg \lambda_0$. В режиме отражения (\mathbf{l} близок к $-\mathbf{k}$, т.е. встречное направление векторов \mathbf{k} и \mathbf{l}) рассеянное назад поле дает информацию о ξ' вблизи значения $\xi' = -2\mathbf{k}$, т.е. о высоких пространственных частотах $|\xi'| \approx 2k_0$ и мелкомасштабных деталях рассеивателя $\ell \cong \lambda_0/4$, определяющих разрешение оценки $\hat{v}(\mathbf{r})$. Итак, низкие пространственные частоты, т.е. малые значения модуля разностного вектора $\mathbf{l}-\mathbf{k}$, соответствуют крупномасштабным деталям рассеивателя, а встречное на-

правление векторов \mathbf{l} и \mathbf{k} дает данные рассеяния, несущие информацию о малоразмерных деталях. Однако такое четкое деление возникает лишь в случае однократного рассеяния, т.е. в первом приближении Борна. В практических условиях в большинстве случаев это приближение не работает, так как искажения волнового фронта, возникающие при распространении в неоднородной среде (медицинская томография, томография океана), приводят к отклонению формы фронта от стандартной (имеющей место в однородной среде) на большое количество длин волн. Такие искажения практически полностью разрушают результат процесса восстановления, основанного на приближении однократного рассеяния. Исключения составляют томографы, использующие *только* данные на отражение назад в узком диапазоне углов рассеяния, близком к обратному рассеянию. В таком случае сильные искажения крупными (а потому сильными) неоднородностями скорости звука приводят к эффектам, сходным к рассматриванию сцены сквозь кривое стекло. Изображение при этом искажено, но все детали различимы и узнаваемы. Однако этот режим является, фактически, режимом УЗИ, для которого наличие крупных неоднородностей не является разрушительным. В полных томографических системах необходимо использовать все углы рассеяния, начиная от почти нулевых, вплоть до отражения под большими углами. Необязательно использовать углы рассеяния, близкие к π , но диапазон углов рассеяния не может состоять из разорванных фрагментов, так как при этом утрачивается информация об участках пространственного спектра рассеивателя. Как следствие, *количественное* восстановление рассеивателя становится невозможным даже при ограничениях в разрешающей способности, которые неизбежны в силу конечности области в пространстве K , покрываемой множеством векторов $\xi' = \mathbf{l} - \mathbf{k}$ при $\mathbf{l}, \mathbf{k} \in K_0$.

Проблемы, возникающие в УЗИ-системах, могут быть количественно пояснены с точки зрения условия справедливости приближения однократного рассеяния, которое правомерно только при условии очень слабого искажения падающей волны при прохождении томографируемого объекта. Такие пояснения даны, например, в [А 2 (раздел 5.1)]. Дело в том, что УЗИ-системы работают только с сигналами, отраженными в обратном направлении. В то же время, сильные крупные неоднородности не дают заметного отражения назад, разрушая, однако, фазировку системы. Частично эти трудности можно обойти, используя адаптивную фокусировку на естественные или искусственные квазиточечные неоднородности, играющие роль опорных точек. Но более полное и последовательное решение проблемы лежит в регистрации сигналов, рассеянных не только на большие углы, т.е. назад, но и на малые, просветные, углы – рассеяние вперед. В этом варианте облучение объекта плоскими волнами или с помощью сосредоточенных источников происходит со всех сторон (хотя бы в одной плоскости), так же как и наблюдение рассеянного поля. Не во всех схемах медицинского ультразвукового обследования возможно получение такой полной информации, однако в ряде важных направлений, например, маммографии, полная схема, называемая томографической, вполне реальна. Так, во многих современных ультразвуковых диагностических системах алгоритмы восстановления основаны на приближении однократного рассеяния или на приближении плавного изменения характеристик рассеяния, т.е. приближении Рытова [130 (§ 6.10, § 8.7); 141; 142; 151; 152; 154; 157; 162; 165; 168–170]. Теоретические представления, лежащие в основе построения подобных систем, на сегодняшний день изучены достаточно полно.

Дифракционно-волновой подход к решению обратных задач рассеяния в приближении однократного рассеяния во многом связан с циклом работ А. Деванея (A.J. Devaney). В них отправной точкой является, так же как и во времялучевом подходе [175], аналогия с рентгеновской томографией. При этом предполагается корректирующая пространственная фильтрация, выравнивающая неравномерность пространственно-частотного спектра аппаратной функции данного метода [130 (§ 8.1, § 8.7–8.11); 157; 176]. Исходным соотношением для процесса восстановления является (1.40). На основе этого соотношения в [А 2 (раздел 5.2); А 6; А 177] проблема томографии в приближении однократного рассеяния была рассмотрена с точки зрения обобщения случая монохроматических плоских волн, зондирующих исследуемый двумерный или трехмерный объект [159; 178], на случай зондирования плоскими импульсными сигналами. При этом обсуждалась возможность учета в алгоритме реконструкции информации о корреляционных характеристиках рассеивателя и помех [179], а также дискретного характера данных рассеяния. В качестве тестовых объектов для оценивания влияния пространственных характеристик томографической схемы и точности измерения данных рассеяния в работах [А 7; А 65; 180] были использованы различные слабые (борновские) рассеиватели.

В рамках представляемой диссертационной работы вышеупомянутый алгоритм реконструкции, работающий в приближении однократного рассеяния, был модифицирован на случай импульсного режима зондирования борновского рассеивателя при точечных излучателях и точечных приемниках, – это сделано в [А 6] с учетом результатов работы [181] и подытожено в [А 2 (раздел 5.2)]. С другой стороны, применение чисто борновского варианта томографии для медицинских целей в существенной мере ограничено, так как скорость ультразвука в биологических тканях может меняться более чем на 50 м/с, что вызывает существенное искажение падающего поля внутри органа. Разработчикам алгоритмов, предназначенных для реальных акустических диагностических устройств, хорошо известно то обстоятельство, что приемлемое качество восстановления параметров рассеивателя, достаточно сильно искажающего падающую волну, возможно только при учете, тем или иным способом, процессов искажения волн внутри рассеивателя [А 4; А 5]. Поэтому необходимо учитывать (с той или иной степенью строгости) *эффекты многократного рассеяния*, т.е. решать обратную задачу восстановления неоднородности, основываясь на том или ином более строгом решении волновых уравнений относительно неоднородностей среды. Например, в ряде систем интродукции используется лучевое описание для построения изображения. Однако разрешающая способность времялучевого подхода достаточно низкая, поскольку она определяется диаметром лучевой трубки [175]. Недостатки низкого разрешения времялучевого подхода не мешают, однако, использовать данный метод в реальных практических системах [182; 183], а также в качестве первого шага в двухшаговой схеме томографии, рассмотренной ниже в главе 2. В то же время, в ряде случаев можно ограничиться внесением определенных поправок в полученные алгоритмы реконструкции борновского рассеивателя [А 6]. Например, в [171; 184] в основе процесса реконструкции используется приближение однократного рассеяния, однако при этом рассматривается возможность компенсации искажений изображения, вызванных рефракцией ультразвуковых волн в неоднородной среде.

Для дальнейшего обсуждения будет полезным *разделение рассеивателей на следующие три класса* [141; 142 (§ 2.3, § 6.3)]:

а) *Слабые (борновские) рассеиватели*. Для них рассеянное поле в области рассеяния \mathfrak{R} пренебрежимо мало по сравнению с падающим полем:

$$\frac{|u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)|}{|u_0(\mathbf{r}, \alpha)|} \ll 1, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{R}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}. \quad (1.42)$$

В этом случае приближение однократного рассеяния, т.е. первое приближение Борна, может быть с успехом применено при решении как прямых, так и обратных задач рассеяния.

б) *Рассеиватели средней силы*. Для них рассеянное поле по абсолютному значению сравнимо, но уступает падающему полю *во всех* точках области рассеяния:

$$\frac{|u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)|}{|u_0(\mathbf{r}, \alpha)|} < 1, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{R}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}. \quad (1.43)$$

В этом случае первое приближение Борна уже непригодно, но ряд Борна–Неймана для рассеивателей средней силы сходится.

в) *Сильные рассеиватели*. Для них условие (1.43) не выполняется хотя бы в сколь угодно малой окрестности одной точки $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$ для одного из значений α , т.е.

$$\exists \alpha \in \mathcal{A}, \quad \exists \mathbf{r} \in \mathfrak{R} : \frac{|u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)|}{|u_0(\mathbf{r}, \alpha)|} > 1. \quad (1.44)$$

Еще одно предварительное замечание касается *решения прямой задачи*, т.е. расчета полного или рассеянного полей на основе заданного падающего поля и заданной функции рассеивателя. Решение прямых задач в различных постановках имеет значение как отдельная самостоятельная задача и, кроме того, как важный предварительный этап при решении модельных обратных задач. Так, для модельной проверки работоспособности, помехоустойчивости и границ применимости того или иного алгоритма решения обратной задачи необходимо иметь данные достаточно точно решенной прямой задачи, заменяющие собой экспериментальные данные. В противном случае может остаться неясным, являются ли искажения и ошибки, полученные в результате решения обратной задачи, следствием несостоятельности используемого метода ее решения, или же они обусловлены погрешностью решения прямой задачи. Таким образом, высокая точность решения прямой задачи весьма важна, поскольку качество восстановления рассеивателей при решении обратной задачи рассеяния существенно зависит от уровня интерполяционных погрешностей на этапе решения прямой задачи [185].

Аналитически решенных прямых волновых задач рассеяния на данный момент существует не так уж много. Наиболее просто решаются задачи для относительно слабых рассеивателей различной формы, где достаточно рассмотреть лишь первое приближение

Борна [186] или небольшое число актов перерасеяния [187]. В случае же рассеивателей произвольной силы, точные аналитические решения получены только для некоторых “классических” прямых задач, рассматривающих рассеиватели с однородной структурой и простой формой, например, цилиндрической [188 (гл. IX, § 7, п. 1)] (включая эллиптические сечения), эллипсоидальной, сферической [189 (т. II, § 11.3, с. 452–455 в русском переводе)] и т.п. [190]. Для рассеивателей сложных конфигураций обычно используется метод конечных элементов [191–195]. Это наиболее универсальный метод решения прямых волновых задач, не имеющий видимых ограничений своей применимости. Однако он очень сложный и многодельный для поисковых модельных исследований. Поэтому при численных расчетах часто используется то или иное упрощающее обстоятельство [196–198], например, рассмотрение области низких частот [199]. Отдельное место занимает решение прямой граничной задачи рассеяния для объектов с импедансной границей [200].

В [А 2 (раздел 5.3); А 9; 185] рассматривается возможность достаточно точного численного решения прямой задачи рассеяния на основе строгих уравнений типа уравнения Липпмана–Швингера в координатном пространстве и в фурье-сопряженном к нему пространстве векторов пространственной частоты. Предлагаемый подход применим для широкого (по силе рассеивателя и сложности его пространственной структуры) класса рефракционно-поглощающих рассеивателей, а его практическая реализация относительно несложна.

Глава 2. Модельная и практическая реализация двухшагового томографирования мягких биотканей

Как упоминалось в конце предшествующей главы, предположения, используемые в лучевом, первом борновском или рытовском приближениях, существенно снижают область применимости как теоретических результатов, так и собственно прикладных систем. В связи с этим, следующим этапом является расширение исследований в области акустических обратных задач рассеяния и использование этих результатов в конкретных прикладных работах. Такие исследования связаны с учетом в строгой математической постановке процессов многократного рассеяния.

Нелинейность зависимости рассеянного поля от характеристик рассеивателя, т.е. нелинейность соотношений, описывающих процессы многократного рассеяния, означает необходимость использования соответствующих процедур решения. Такие процедуры должны учитывать эту нелинейность и быть пригодными для практического применения при решении многомерных задач с очень большой размерностью представлений, описывающих как исходную информацию, так и искомое решение. Данные трудности усугубляются тем, что даже в предельном случае слабых рассеивателей и, тем самым, линеаризованной обратной задачи, эта обратная задача продолжает оставаться некорректной (плохо обусловленной – “ill-posed” в западной терминологии), нуждающейся в тех или иных методах регуляризации, стабилизирующей решение. Нелинейность строгой обратной задачи чрезвычайно усложняет ситуацию, делая ее одной из центральных, до конца не исследованных проблем математической физики и функционального анализа, не говоря уже о чисто прикладных аспектах рассматриваемой проблемы. В этой связи важно подчеркнуть, что рассмотрение более мощных функциональных методов в приложении к обратным задачам акустического рассеяния находится в самом начале своего развития, несмотря на то, что базовые идеи таких подходов и многообещающие исследования развивались (в связи с отнюдь не акустическим их приложением) не одно десятилетие. Функционально-аналитическим методам решения многомерных обратных задач рассеяния посвящена часть II настоящей диссертации, а также монография [А 131].

Исторически более традиционным подходом к решению обратных задач акустического рассеяния с учетом эффектов многократного рассеяния на протяжении многих лет были итерационные и градиентно-итерационные методы, подробно рассмотренные в [А 2 (§ 5.4.2)]. Очевидно, что применение итерационных методов в обратных задачах рассеяния выглядит вполне естественно, и к этим методам внимание было обращено прежде всего (хотя постепенно становился очевидным круг проблем, связанных с применением итерационного подхода, и прояснился комплекс причин, порождающих эти многочисленные проблемы). Исторически первые итерационные алгоритмы связаны с именами Р. Йоста, В. Коэна, Х. Мозеса и Р. Проссера [201–205]. В частности, в [205] получена итерационная схема реконструкции рассеивателя, являющегося локальным. Здесь под термином “локальный” имеется в виду, что в интегральных выражениях типа уравнения Липпмана–Швингера рассеиватель описывается функцией одной пространственной переменной (возможно, многомерной), а не в виде ядра интегрального преобразования – типа мас-

сового оператора $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, как это имеет место, например, в уравнении Дайсона [206 (§ 48)]. В этом случае рассмотрено итерационное восстановление рассеивателя по данным *рассеяния назад* для *всех* направлений падения первичных волн на *всех* частотах. Использование широкого спектра частот ставит свои проблемы. Так, удастся построить итерационную процедуру для рассеивателя, сила которого *не зависит* от частоты и при этом не слишком велика, т.е. норма некоторого оператора, характеризующего процесс рассеяния и определяемого этим рассеивателем, меньше единицы. При переходе к рассеивателям с квадратично растущей от частоты силой (как это имеет место в акустике), требование на малость такого оператора неприменимо, и в [205] используется своего рода перенормировка амплитуды рассеяния на квадрат частоты. В этом случае итерационная процедура выглядит близкой к первому случаю (одновременно восстанавливаются функция рассеивателя и амплитуда рассеяния, обе перенормированные на квадрат частоты), однако возникает вопрос о низких частотах ω . Дело в том, что в этом случае при $\omega \rightarrow 0$ неограниченно растет нормирующий множитель для амплитуды рассеяния, и вопрос о корректном ограничении частоты с этой стороны требует определенного рассмотрения, отсутствующего в [205]. Очевидно, что предельно низкие частоты должны соответствовать длине волны, сравнимой и в определенной мере превосходящей размеры рассеивателя. Тем не менее, важно возникающее уже в этих работах ограничение на некоторую норму рассеивателя: рассеиватель должен быть “достаточно слабым” или, иначе, “не слишком сильным” (такие формулировки нередко можно найти в работах по обратным задачам рассеяния). Смысл этих ограничений заключается в обеспечении сходимости использованных итерационных процедур.

В полученном в [205] алгоритме можно отметить важную особенность, присущую многим более поздним алгоритмам итерационного типа. Для нахождения функции рассеивателя по фрагментарным данным рассеяния (а данные в виде амплитуды рассеяния назад для определенного интервала частот, не обязательно безграничного, являются фрагментарными) необходимо восстановить полную картину данных рассеяния. В практическом плане подобный алгоритм, по-видимому, не является достаточно эффективным и легко реализуемым. Тем не менее, являясь исторически одним из первых, он, несомненно, сыграл важную иницирующую роль и породил в дальнейшем целый ряд различных алгоритмов, обладающих разнообразными достоинствами и определенными недостатками как в принципиальном, так и в прикладном плане.

Наибольшей относительной простотой обладают двухшаговые алгоритмы, позволяющие в ряде случаев получить приемлемые результаты после двух существенно различных по своему характеру процедур. Один из таких алгоритмов обсуждается ниже.

Раздел 2.1. Описание двухшагового алгоритма

Рассматриваемый далее двухшаговый алгоритм не является, строго говоря, итерационным, так как он с самого начала предполагает выполнение всего одного цикла, в то время как итерационные процедуры предполагают неопределенное количество циклов постепенного приближения к решению. Естественно, что при этом встают вопросы анализа

условий сходимости процедуры и условий ее прекращения по достижении требуемой точности. Своим возникновением двухшаговый подход обязан специфике задач медицинской томографии, при которой неоднородности в фазовой скорости звука и большие размеры областей с такими неоднородностями вызывают сильное искажение волновых фронтов в биоткани. Это, в свою очередь, приводит к невозможности прямого применения линейризованного борновского приближения (т.е. приближения однократного рассеяния). Тем не менее, двухшаговый подход, используя пространственные особенности проблемы и за счет этого как бы предельно упрощая многократное повторение итерационного цикла, с одной стороны, содержит много общего с “классическими” итерационными методами, а с другой стороны, использует на своем втором шаге линейризованное приближение, однако на неоднородном фоне.

Предположим, что рассматривается типичная для медицинской практики ситуация, когда необходимо восстановить рассеиватель, состоящий из мелких характерных деталей объекта (тонкой структуры), которые присутствуют на фоне крупномасштабных неизвестных неоднородностей фазовой скорости, плотности биоткани и коэффициента поглощения. Мелкие детали, значимые для дальнейшего рассмотрения, имеют линейный размер от нескольких десятых долей длины волны (лежащей в миллиметровом диапазоне, если томографируются мягкие биоткани) до нескольких длин волн; размер крупномасштабных неоднородностей составляет несколько длин волн и более. Предполагается, что такие мелкие детали в отсутствие крупных неоднородностей создают рассеяние, описываемое приближением однократного рассеяния. Полная оценка всего рассеивателя, содержащего как крупные фрагменты, так и мелкие детали с “борновским” контрастом, может быть осуществлена на основе идеи использования борновского алгоритма, но с учетом неоднородности фона, предварительно оцениваемого на основе экспериментальных данных. Подобная идея не является новой [130 (§ 9.8, § 9.10); 159; 171; 184]. В настоящем разделе описывается один из алгоритмов такого типа [А 2 (§ 5.4.1); А 12; А 13; А 72–А 75; А 79], работоспособность которого иллюстрируется численным моделированием (см. раздел 2.2), а также обсуждается при обработке экспериментальных томографических данных (см. раздел 2.3). Подход состоит в следующем.

На первом шаге предполагается восстановление пространственного распределения по объекту крупномасштабных неоднородностей – областей со значительными отклонениями по скорости звука $c(\mathbf{r})$ или амплитудному коэффициенту поглощения $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ от постоянных значений c_0 и α_0 , предварительно зарегистрированных в фоновой среде без объекта. Необходимость выполнения этого этапа обусловлена большим диапазоном возможных вариаций скорости звука и коэффициента поглощения в биотканях. Это снижает в несколько раз предельно достижимые значения разрешающей способности “одношаговых” (т.е. работающих в приближении однократного рассеяния или в приближении Рытова) ультразвуковых томографов, так как нарушает фазировку антенной решетки [142]. В качестве экспериментальных данных на первом шаге используются измеренные времена распространения импульсных сигналов, пересекающих область томографирования, и коэффициенты ослабления амплитуды этих сигналов. При восстановлении делается приближение, что сигналы распространяются вдоль лучей. Диаметр такой лучевой трубки составляет около $\sqrt{L\lambda_0} \cong 1$ см (при $\lambda_0 \cong 1$ мм и линейном размере рассеивателя

$L \cong 10 \div 20$ см), что и определяет разрешающую способность первого шага, достаточную на данном этапе. Еще одним приближением, допускаемым на первом шаге, является предположение о прямолинейности лучей, означающее пренебрежение процессами рефракции на неоднородностях скорости звука. Возникающая за счет обоих приближений ошибка восстановления частично устраняется на втором шаге, предполагающем восстановление тонкой (мелкомасштабной) структуры рассеивателя, т.е. мелких деталей, на фоне крупномасштабного пространственного распределения, уже известного из первого шага, о чем подробнее говорится далее. В работе [171] для определения времен распространения сигналов использовался многочастотный режим зондирования с последующим синтезом квазиимпульсных сигналов с помощью ≈ 10 частот. Полученная времяпролетная карта далее использовалась для частичной компенсации искажений изображения, восстанавливаемого на основе логики борновской схемы томографирования [184].

На втором шаге достаточно использовать один из алгоритмов, основанных на приближении однократного рассеяния, но с учетом неоднородности фона. Экспериментальными данными для второго шага являются дискретизованные во времени волновые поля на приемниках. Разность измеренных полных полей и падающих полей, – однако падающие поля оцениваются на фоне крупномасштабных неоднородностей (уже известных из первого шага), – формирует рассеянные поля на крупномасштабном фоне. Восстановление тонкой структуры рассеивателя на крупномасштабном фоне осуществляется посредством процесса фазировки этих рассеянных сигналов, скорректированной с помощью весовых компенсирующих амплитудно-фазовых поправок, учитывающих крупномасштабное пространственное распределение скорости звука и поглощения. Важно, что такие поправки оцениваются тоже в предположении прямолинейного распространения волн. Как показали модельные исследования, взаимное погашение погрешностей первого и второго шагов действительно имеет место, благодаря чему потери в разрешающей способности (характерные для тех методов фазирования, которые не учитывают реально существующую неоднородность фона) удастся в существенной мере уменьшить. В итоге, после выполнения двух шагов алгоритма, воспроизводится полная картина распределения скорости, поглощения и плотности ткани в томографируемом объекте.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на двухшаговый характер алгоритма, в нем на первом шаге учитывается многократное рассеяние вперед на крупномасштабных неоднородностях, что выражается в различии времен распространения сигнала в присутствии объекта и без него. Благодаря этому учету, на втором шаге обеспечивается высокая точность восстановления тонкой структуры рассеивателя на уже оцененном неоднородном крупномасштабном фоне, контраст которого может быть высок.

В [207; 208] для восстановления пространственного распределения акустических рассеивателей тоже используется, по сути, двухшаговый алгоритм. На первом шаге предварительно оцениваются значения скорости звука и коэффициента поглощения в области томографирования. С этой целью предлагается использовать лучевое приближение, т.е. искомые оценки опять же получаются в виде крупномасштабных пространственных распределений. На втором шаге привлекается уравнение Кирхгофа для поля внутри области рассеяния \mathcal{R} , и, одновременно, используется волновое уравнение для фоновой среды, неоднородной по скорости звука и поглощению; тем самым полагается, что источники звука расположены только вне \mathcal{R} . Тогда на основе волновых данных, измеренных на границе

области томографирования, находится поле внутри \mathcal{R} за счет процедуры типа продления поля с границы измерений внутрь области томографирования. При этом обрабатываются данные, рассеянные преимущественно назад (в определенном секторе углов), а не вперед. Крупномасштабные значения скорости звука и коэффициента поглощения используются для оценки времен распространения сигнала и уменьшения его амплитуды за счет поглощения вдоль трасс от излучателя до текущей точки изображения и далее до приемника. Амплитуда поля, рассчитанного в итоге в каждой точке $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$, принимается за “reflection imaging” – изображение, полученное в режиме отражения и характеризующее мелкие детали объекта. Таким образом, описанный метод дает карту мелкомасштабной структуры объекта, без количественной характеристики этой структуры и без разделения вкладов от неоднородностей скорости звука и поглощения.

Другой алгоритм типа двухшагового предлагается и апробируется на модельных и экспериментальных данных в [209; 210]. Суть алгоритма [209] заключается в построении на первом этапе, на основе времяпролетных данных, карты пространственного распределения скорости звука, причем, желательно, с учетом искривления лучей за счет рефракционных эффектов [210]. Однако задача получения оценки неизвестной скорости звука при отклонении траекторий лучей от прямолинейных становится нелинейной и нуждается в итерационном решении [211]. На втором этапе привлекается обработка волнового типа с применением техники синтезированной апертуры и последующей пространственной фильтрации. Эта обработка делается в приближении однократного рассеяния на неоднородном фоне, полученном на первом этапе, и предполагает предварительное решение прямой задачи рассеяния для расчета поля, распространяющегося на таком фоне.

Идея двухшагового алгоритма может использоваться как в двумерных, так и трехмерных томографических схемах. Описанная двухшаговая обработка приближает разрешающую способность ультразвукового томографа к максимально достижимой – близкой к четверти длины волны на данной рабочей частоте [212]. В двумерной схеме это относится к разрешающей способности в плоскости томографирования при восстановлении томограмм для нужного количества слоев исследуемого объекта. Визуальное представление результатов двумерного томографирования может быть сделано либо в послойном виде, либо в виде синтезированного трехмерного изображения, полученного по известным программам подобного синтеза [213–215].

В [A 2 (§ 5.4.1); A 12; A 13; 216] используется следующая двумерная томографическая схема. Квазиточечные приемоизлучающие преобразователи расположены на антенном кольце радиуса R_0 . Эти преобразователи могут размещаться равномерно по всему антенному кольцу [171; 184] или же иметь специальным образом подобранное нерегулярное расположение. В последнем случае, небольшое число приемоизлучающих преобразователей, в сочетании с дискретным вращением антенной решетки, обеспечивают объем данных рассеяния, равнозначный объему данных от равномерно расположенных неподвижных приемоизлучающих преобразователей с малым угловым шагом между ними, – см. [A 2 (раздел 8.1); A 62].

Процедура *первого шага* близка к процедуре рентгеновского томографирования в расходящихся пучках [217; 218], с естественным для перехода к акустическим задачам переопределением измеряемых величин и оцениваемых параметров. Эта процедура далее

условно будет называться “квазирентгеновским” алгоритмом, поскольку восстановление осуществляется в приближении прямолинейного распространения сигналов через объект, т.е. эффекты рефракции не учитываются. Экспериментальные данные \mathcal{D}_{RS} измеряются для различных пар “излучатель (индекс S) – приемник (индекс R)”; геометрические положения излучателя и приемника в полярной системе координат с началом в центре антенного кольца задаются радиус-векторами $\mathbf{r}_S = \{R_0, \varphi_S^0\}$ и $\mathbf{r}_R = \{R_0, \varphi_R^0\}$, соответственно. Восстановление крупномасштабных пространственных распределений медленности $1/c_0(\mathbf{r})$ и амплитудного коэффициента поглощения $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$ происходит по одному и тому же алгоритму времяпролетного типа на основе экспериментальных данных \mathcal{D}_{RS} . Для оценки пространственного распределения медленности полагается $\mathcal{D}_{RS} \equiv t_{RS} - t_{RS}^0$, где t_{RS} и t_{RS}^0 – времена распространения сигналов от излучателя S до приемника R в присутствии объекта и без него, соответственно. При этом в каждой фиксированной точке \mathbf{r} восстанавливается функция $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} - \frac{1}{c_0}$. Для оценки пространственного распределения поглощения полагается $\mathcal{D}_{RS} \equiv -\ln(A_{RS}/A_{RS}^0)$, где A_{RS} , A_{RS}^0 – эффективные амплитуды сигналов, приходящих на приемник R от излучателя S , в присутствии объекта и без него. Здесь значения \mathcal{D}_{RS} характеризуют степень дополнительного затухания волны относительно ослабления за счет расходимости волнового фронта; в этом случае $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \alpha_0(\mathbf{r}, \omega) - \alpha_0(\omega)$. Если сигнал при обработке не раскладывается на монохроматические составляющие, то вместо частотно-зависимых коэффициентов поглощения $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$ и $\alpha_0(\omega)$ будут фигурировать их значения, усредненные по ω в рабочем частотном диапазоне с шириной $\Delta\omega$, т.е. $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ и $\overline{\alpha_0}^{\Delta\omega}$; тогда $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega} - \overline{\alpha_0}^{\Delta\omega}$. Таким образом, по физическому смыслу, значения \mathcal{D}_{RS} представляют собой суммарное дополнительное (по отношению к среде без исследуемого объекта) время распространения или дополнительное поглощение на пути от излучателя S до приемника R .

Восстановление пространственного распределения $\mathfrak{Z}(\mathbf{r})$ по известным значениям $\mathcal{D}_{RS} \equiv \mathcal{D}(\varphi_S^0, \varphi_R^0)$ осуществляется из соотношения:

$$\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} g(\mathbf{r}, \varphi_S^0) \frac{1}{H^2(\mathbf{r}, \varphi_S^0)} d\varphi_S^0, \quad (2.1)$$

где

$$g(\mathbf{r}, \varphi_S^0) = \lim_{\delta_1, \delta_2 \rightarrow +0} \left[-\frac{R_0}{2} \left(\int_0^{\varphi_R^{\text{excl}} - 2\delta_1} + \int_{\varphi_R^{\text{excl}} + 2\delta_2}^{2\pi} \right) \frac{\left| \sin\left(\frac{\varphi_R^0 - \varphi_S^0}{2}\right) \right|}{\cos^2\left(\frac{\varphi_R^0 - \varphi_S^0}{2} - \gamma\right)} \times \right. \\ \left. \times \mathcal{D}(\varphi_S^0, \varphi_R^0) d\varphi_R^0 + R_0 \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) (\cos \gamma) \mathcal{D}(\varphi_S^0, \varphi_R^{\text{excl}}) \right]; \quad (2.2)$$

$$H^2(\mathbf{r}, \varphi_S^0) = R_0^2 + x^2 + y^2 - 2R_0(x \cos \varphi_S^0 + y \sin \varphi_S^0), \quad \mathbf{r} = \{x, y\};$$

$$\gamma = \gamma(\mathbf{r}, \varphi_S^0) = \arctg \left[\frac{x \sin \varphi_S^0 - y \cos \varphi_S^0}{R_0 - (x \cos \varphi_S^0 + y \sin \varphi_S^0)} \right], \quad \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right];$$

$$\varphi_R^{\text{excl}} = \left(\varphi_S^0 + 2\gamma + \pi \right)_{\text{mod } 2\pi}, \quad \varphi_R^{\text{excl}} \in [0, 2\pi).$$

Смысл величин, входящих в (2.1), (2.2), пояснен на рис. 2.1. Для каждой фиксированной точки восстановления $\mathbf{r} = \{x, y\}$ рассматриваются текущие положения излучателя S и приемника R . Тогда H – расстояние между излучателем S и точкой \mathbf{r} ; γ – угол между направлениями из точки S на начало координат O и на точку \mathbf{r} . Особый угол φ_R^{excl} соответствует такому положению приемника R^{excl} , при котором хорда, соединяющая точки S и R^{excl} , проходит через точку \mathbf{r} . Величины H , γ , φ_R^{excl} зависят только от положения излучателя S и точки \mathbf{r} .

При расчете функции $g(\mathbf{r}, \varphi_S^0)$, согласно (2.2), выделяется малая окрестность (не обязательно симметричная) $[\varphi_R^{\text{excl}} - 2\delta_1; \varphi_R^{\text{excl}} + 2\delta_2]$ особого угла, поскольку подынтегральное выражение в точке $\varphi_R^0 = \varphi_R^{\text{excl}}$ имеет особенность: $\cos\left(\frac{\varphi_R^{\text{excl}} - \varphi_S^0}{2} - \gamma\right) = 0$.

При численном расчете результат вычислений функции $g(\mathbf{r}, \varphi_S^0)$ не зависит от выбираемых малых значений $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ благодаря присутствию дополнительного неинтегрального слагаемого в выражении (2.2).

Другой вариант процедуры первого шага, позволяющей оценить крупномасштабные распределения фазовой скорости и поглощения в виде МНК-решения, будет упомянут ниже в разделе 2.3.

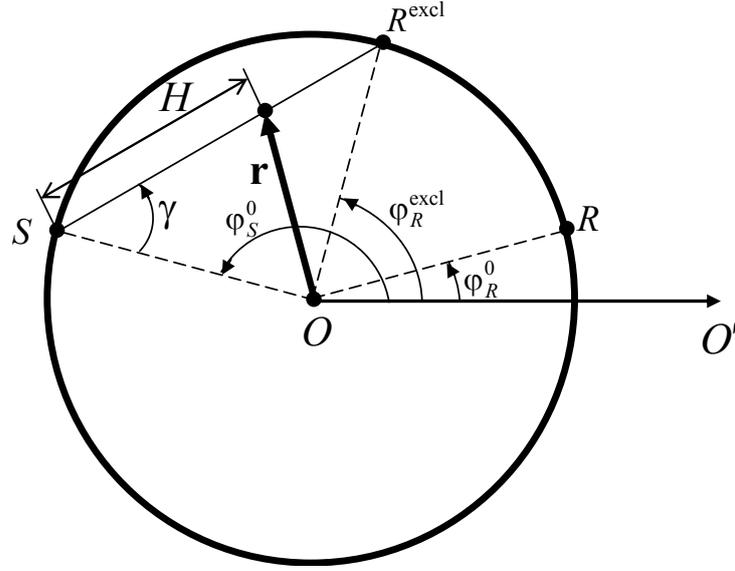


Рис. 2.1. Геометрия квазирадиационного алгоритма в расходящихся пучках: (OO') – полярная ось; S – текущее положение излучателя; R – текущее положение приемника; R^{excl} – особое положение приемника; \mathbf{r} – точка восстановления.

Процедура *второго шага* основана на традиционном алгоритме восстановления слабых рассеивателей, но на известном неоднородном фоне, который задается найденными из первого шага крупномасштабными распределениями $c_0(\mathbf{r})$ и $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$, где $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ – уже упоминавшееся пространственное распределение коэффициента поглощения $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$, усредненного по ω в рабочей полосе частот с шириной $\Delta\omega$. Эта процедура достаточно подробно описана в [А 2 (раздел 5.2); А 6], и здесь будут отмечены только основные ее моменты.

В двумерном случае падающее на рассеиватель поле $u_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S, t)$ представляет собой цилиндрическую волну с амплитудным спектром $A(\omega)$:

$$u_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{|\mathbf{r}_S|}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp\left(-i\omega t + i \frac{\omega}{c_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|\right) d\omega, \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R},$$

при $|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}| > 1.5\lambda_{\text{max}}$ (λ_{max} – максимальная рабочая длина волны). Тонкая структура рассеивателя, присутствующая на неоднородном фоне, описывается функцией $V(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) = & \left(\frac{c_0^2}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right) \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega + \\
& + c_0^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega^2} d\omega - \\
& - 2c_0^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\mathbf{r}, |\omega|)}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r}, |\omega|)}{c_0(\mathbf{r})} \right) \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega ,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где в двумерном случае

$$B(\omega, t_0) = \frac{A(\omega) (1 + i \operatorname{sgn} \omega)}{2\pi \sqrt{|\omega|}} \exp(-i\omega t_0) . \tag{2.4}$$

Способ выбора постоянного значения t_0 оговаривается ниже, после выражений (2.8), (2.9). Выражение (2.3) можно переписать как

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) \approx & \left(\frac{c_0^2}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right) M_c + c_0^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right) M_\rho + \\
& + c_0^2 \left(\frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь M_c , M_ρ , M_α – размерностные числовые комплексные коэффициенты, зависящие только от частотного спектра зондирующих сигналов:

$$M_c = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega ; \quad M_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega^2} d\omega ; \quad M_\alpha = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega , \tag{2.6}$$

причем данное выражение для M_α приведено в следующем приближении:

$$-2c_0^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha(\mathbf{r}, |\omega|)}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r}, |\omega|)}{c_0(\mathbf{r})} \right) \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega \approx c_0^2 \left(\frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha .$$

Более точно коэффициент M_α можно вычислить, если знать показатель ζ степени частотной зависимости коэффициента поглощения. Однако на практике этот показатель степени, как правило, неизвестен, и, кроме того, его значение ζ зависит от точки \mathbf{r} внутри томографируемого объекта. Поэтому определение пространственного распределения

$\zeta(\mathbf{r})$ представляет собой отдельную задачу, имеющую диагностический смысл и отчасти обсуждаемую в разделе 4.3, а также в [А 14; А 77].

В выражениях (2.3)–(2.6) рассматриваются частоты ω только одного знака в силу использования комплексного аналитического представления обрабатываемых сигналов. Оценка $\hat{V}(\mathbf{r})$ функции $V(\mathbf{r})$ строится на основе рассеянных полей $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$, которые надо сформировать с учетом неоднородного фона:

$$u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) \equiv u(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) - u_0^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) .$$

Здесь $u(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$ – полное поле, экспериментально измеряемое в присутствии объекта приемником R с радиус-вектором \mathbf{r}_R при излучателе S с радиус-вектором \mathbf{r}_S ; $u_0^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$ – падающее поле на неоднородном фоне. Поле $u_0^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$ предварительно оценивается с помощью специально разработанной методики, что подробно обсуждается в [А 2 (раздел 8.3); 216] в связи с обработкой экспериментальных данных. Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi\bar{c}}} \int_0^{2\pi} d\varphi_S(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} d\varphi_R(\mathbf{r}) |\sin\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\}| \times \\ & \times \sqrt{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}|} \frac{\sqrt{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{\sqrt{|\mathbf{r}_S|}} Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r})) ; \end{aligned} \quad (2.7)$$

здесь использованы следующие обозначения:

$$t_{RS}(\mathbf{r}) = t_0 + T(\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}) + T(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_R) , \quad \text{где } T(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) \equiv \int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} \frac{1}{c_0(\mathbf{r}')} dl_{\mathbf{r}'} ; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) = & \exp[\mathcal{P}(\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}) + \mathcal{P}(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_R)] , \\ \text{где } \mathcal{P}(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) \equiv & \int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} \overline{\alpha_0(\mathbf{r}')^{\Delta\omega}} dl_{\mathbf{r}'} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Углы $\varphi_S(\mathbf{r})$ и $\varphi_R(\mathbf{r})$ задают положение точечных излучателей и приемников (соответственно) в полярной системе координат с центром в текущей точке изображения \mathbf{r} ; \bar{c} – среднее по \mathbf{r} значение фона $c_0(\mathbf{r})$ в области томографирования. Интегрирование

$\int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} (\bullet) dl_{\mathbf{r}'}$ в (2.8), (2.9) осуществляется вдоль оси лучевой трубки $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$, соединяющей

точки \mathbf{a} и \mathbf{b} в неоднородной фоновой среде; $dl_{\mathbf{r}'}$ – длина элемента траектории в окрест-

ности точки \mathbf{r}' . Тем самым, значение $\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\}$ в (2.7) равно угловому расстоянию между направлениями из точки \mathbf{r} на излучатель и на приемник.

Фигурирующий в (2.7) момент времени $t_{RS}(\mathbf{r})$ зависит, согласно (2.8), от времени распространения сигнала от излучателя S до точки \mathbf{r} и от точки \mathbf{r} до приемника R . Постоянное значение t_0 не является строго определенной величиной; оно выбирается таким образом, чтобы при фиксированных \mathbf{r}_R , \mathbf{r}_S и текущем фиксированном \mathbf{r} обеспечить сфазированные значения $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$, близкие по абсолютной величине к максимальным. Значение t_0 приближенно можно выбрать из условия

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega \right| \approx \max_t \left| \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t) d\omega \right|, \text{ близкого к моменту времени, в который достигается максимум исходного сигнала в точке } \mathbf{z}, \text{ совпадающей с точкой излучения:}$$

$$\left| u_0(\mathbf{z} = \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S, t = t_0) \right| \approx \max_t \left| u_0(\mathbf{z} = \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S, t) \right|. \text{ Выбор (2.8) нужного момента } t_{RS}(\mathbf{r})$$

означает фазировку рассеянного сигнала u_{sc}^{bg} в точку \mathbf{r} с учетом неоднородности фоновых значений $c_0(\mathbf{r})$. Функциональный весовой множитель $Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$, присутствующий в (2.7) и приведенный в (2.9), компенсирует ослабление амплитуды сигнала за счет поглощения в неоднородной фоновой среде. Как уже упоминалось, при численных расчетах интегралов (2.8) и (2.9) траектории вдоль осей лучевых трубок заменялись прямолинейными траекториями для согласования второго шага алгоритма с теми приближениями, которые делались на первом шаге.

Значение $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$ при фиксированных \mathbf{r}_R и \mathbf{r}_S получается интерполяцией значений $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_j)$, известных для дискретных моментов времени $\{t_j\}$, с помощью интерполяционных выражений [А 2 (раздел 5.1); А 6].

Геометрическое положение квазиточечных излучателей и приемников в полярной системе координат с центром в начале координат O характеризуется радиус-векторами $\mathbf{r}_S = \{|\mathbf{r}_S|, \varphi_S^0\}$, $\mathbf{r}_R = \{|\mathbf{r}_R|, \varphi_R^0\}$, соответственно. Присутствующие в (2.7) дифференциалы $d\varphi_S(\mathbf{r})$ и $d\varphi_R(\mathbf{r})$, а также геометрические коэффициенты, зависящие от углов $\varphi_S(\mathbf{r})$ и $\varphi_R(\mathbf{r})$, выражаются через φ_S^0 , φ_R^0 соответствующими соотношениями [А 2 (§ 5.4.1); А 13; 216]. Для дальнейших вычислений (выполняемых на этапе численного моделирования в разделе 2.2 и при практической реализации двухшагового алгоритма в акустическом томографе в разделе 2.3) целесообразно привести вид, который приобретает выражение (2.7) в случае равномерного расположения N_0 приемоизлучающих преобразователей на окружности радиуса $|\mathbf{r}_S| = |\mathbf{r}_R| \equiv R_0$ с угловым шагом $\Delta\varphi_S^0 = \Delta\varphi_R^0 \equiv \Delta\varphi_0$, где $\Delta\varphi_0 = 2\pi/N_0$;

$$\hat{V}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi c} R_0} \sum_{S=1}^{N_0} \sum_{R=1}^{N_0} \sqrt{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}|} \sqrt{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \times \quad (2.10)$$

$$\times \mathcal{Z}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r})) ,$$

где

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \equiv \int_{\varphi_S(\mathbf{r}) - \Delta\varphi_S(\mathbf{r})/2}^{\varphi_S(\mathbf{r}) + \Delta\varphi_S(\mathbf{r})/2} d\varphi_S(\mathbf{r}) \int_{\varphi_R(\mathbf{r}) - \Delta\varphi_R(\mathbf{r})/2}^{\varphi_R(\mathbf{r}) + \Delta\varphi_R(\mathbf{r})/2} d\varphi_R(\mathbf{r}) \left| \sin\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\} \right|; \quad (2.11)$$

$\Delta\varphi_S(\mathbf{r})$, $\Delta\varphi_R(\mathbf{r})$ – угловое расстояние между соседними положениями излучателей и приемников (соответственно) в системе координат с центром в точке \mathbf{r} . Значения $\Delta\varphi_S(\mathbf{r})$, $\Delta\varphi_R(\mathbf{r})$ выражаются через $\Delta\varphi_0$, и интеграл (2.11) для $\mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ вычисляется аналитически [А 2 (§ 5.4.1); А 13; 216].

Итак, функция $V(\mathbf{r})$, описывающая тонкую структуру рассеивателя, которая присутствует на неоднородном крупномасштабном фоне, восстанавливается посредством соотношения (2.7). Данное соотношение, будучи адаптировано для вычислительных целей, принимает вид (2.10). Восстановление основано на фазировании (являющегося, по сути, своего рода фокусировкой) рассеянного сигнала в текущую точку изображения \mathbf{r} путем использования фазирующего момента времени $t_{RS}(\mathbf{r})$, определенного в (2.8), а также амплитудно-геометрических коэффициентов $\mathcal{Z}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ и $\mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$. Далее из полученной оценки $\hat{V}(\mathbf{r})$ можно выделить искомые диагностические характеристики – фазовую скорость $c(\mathbf{r})$, средний в рабочей полосе частот коэффициент поглощения $\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ и, в общем случае, плотность среды $\rho(\mathbf{r})$. Такое выделение основано на связи (2.5), (2.6) функции рассеивателя с искомыми характеристиками. Тогда, при наличии полных данных рассеяния (облучение и прием сигналов осуществляются со всех сторон), для выделения $c(\mathbf{r})$ и $\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ из $\hat{V}(\mathbf{r})$ без учета неоднородного распределения плотности $\rho(\mathbf{r})$ достаточно данных рассеяния для одного частотного спектра, а с учетом $\rho(\mathbf{r})$ – для двух частотных спектров [А 8; А 78; 142 (§ 8.1); 164]. Так, при работе только с одним частотным спектром, оценка $\hat{V}(\mathbf{r})$ приближенно трактуется, как обусловленная только неоднородностями скорости звука и поглощения:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) \approx c_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) M_c + c_0^2 \left(\frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha . \quad (2.12)$$

Из (2.12) для каждой фиксированной точки \mathbf{r} получается линейная система из двух уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \hat{V}(\mathbf{r}) \approx c_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) \operatorname{Re} M_c + c_0^2 \left(\frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) \operatorname{Re} M_\alpha ; \\ \operatorname{Im} \hat{V}(\mathbf{r}) \approx c_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) \operatorname{Im} M_c + c_0^2 \left(\frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) \operatorname{Im} M_\alpha , \end{cases}$$

имеющая решение

$$\begin{aligned} c_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) &\approx \frac{(\operatorname{Im} M_\alpha) \operatorname{Re} \hat{V}(\mathbf{r}) - (\operatorname{Re} M_\alpha) \operatorname{Im} \hat{V}(\mathbf{r})}{(\operatorname{Re} M_c) (\operatorname{Im} M_\alpha) - (\operatorname{Im} M_c) (\operatorname{Re} M_\alpha)} ; \\ c_0^2 \left(\frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) &\approx \frac{-(\operatorname{Im} M_c) \operatorname{Re} \hat{V}(\mathbf{r}) + (\operatorname{Re} M_c) \operatorname{Im} \hat{V}(\mathbf{r})}{(\operatorname{Re} M_c) (\operatorname{Im} M_\alpha) - (\operatorname{Im} M_c) (\operatorname{Re} M_\alpha)} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Раздел 2.2. Модельная иллюстрация работоспособности алгоритма

Проверка двумерного двухшагового алгоритма выполнена с помощью численного моделирования данных рассеяния на приемниках при последовательном облучении томографируемого объекта каждым излучателем. Количество неподвижных приемоизлучающих преобразователей, расположенных на окружности равномерно, составляло $N_0 = 256$.

Сначала рассматривался чисто рефракционный рассеиватель, т.е. поглощение отсутствовало. Крупная контрастная неоднородность задавалась “ступенчатым” изменением фазовой скорости звука на 3% (45 м/с) в половине восстанавливаемой области, представляющей собой круг радиуса $R_0 = 0.135$ м. Две половины круга разделялись хордой, проходящей через центр круга и наклоненной к оси OX на угол $\pi/256$. В верхней половине значение скорости совпадало со значением c_0 в среде без рассеивателя и составляло $c_1 = c_0 = 1500$ м/с (медленность $1/c_1 \approx 6.67 \times 10^{-4}$ с/м); в нижней половине $c_2 = 1545$ м/с ($1/c_2 \approx 6.47 \times 10^{-4}$ с/м). Центральное сечение этой неоднородности вдоль оси OY изображено на рис. 2.2б (пунктирная линия). Восстановление по квази рентгеновскому алгоритму (2.1), (2.2) проводилось в узлах грубой сетки (17×17 пространственных отсчетов), образуемой разбиением квадрата со стороной $2R_0$ на 16×16 ячеек, каждая со стороной $q_1 = 2R_0/16 \approx 18.6\lambda_0$; длина волны $\lambda_0 \approx 0.91 \times 10^{-3}$ м определяется фоновой скоростью c_0 и частотой $f_0 = 1.65$ МГц. Выбранные значения R_0 , c_0 , f_0 близки к ис-

пользуемым в конкретной томографической установке [А 2 (глава 8); А 62; 216], описываемой в разделе 2.3. Поскольку разрешение первого шага определяется шириной лучевой трубки $\cong \sqrt{2R_0\lambda_0} \approx 0.016$ м, то выбранный размер q_I приемлем при восстановлении крупномасштабной структуры. Результат восстановления, представляющий собой “сглаженное” пространственное распределение крупномасштабных неоднородностей медленности $1/c_0(\mathbf{r})$, приведен на рис. 2.2а, б.

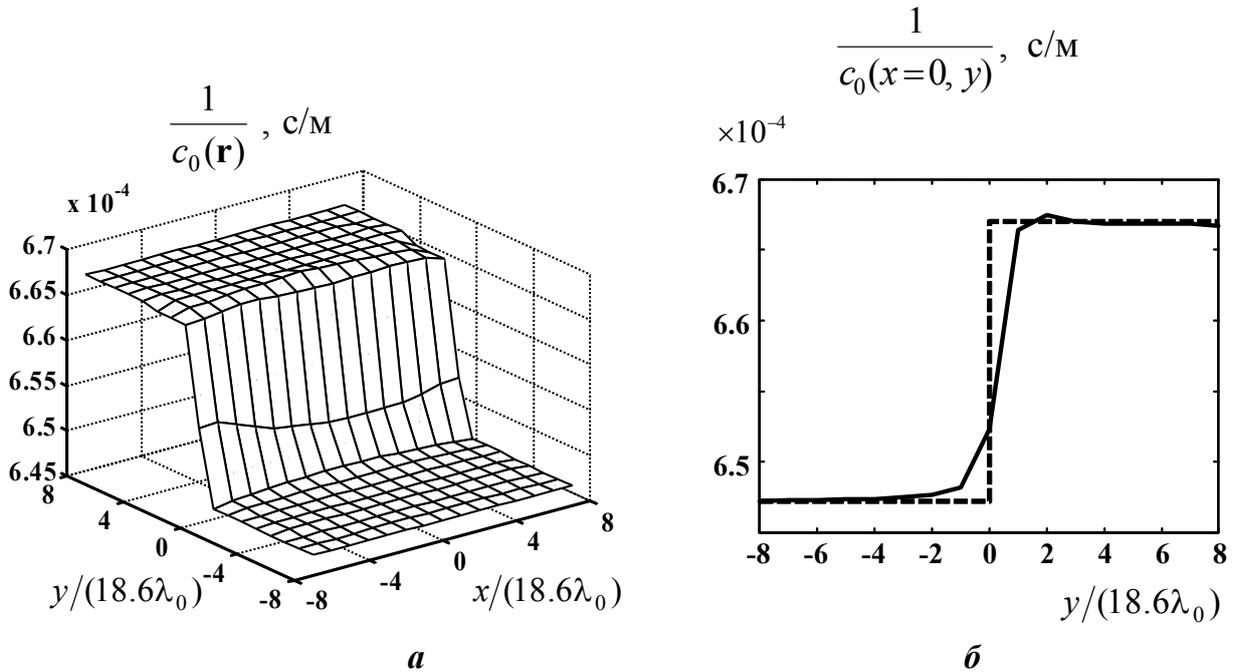


Рис. 2.2. Результат восстановления крупномасштабной контрастной неоднородности медленности на первом шаге двухшагового алгоритма:

(а) – общий вид восстановленной неоднородности;

(б) – центральное сечение вдоль оси OY для восстановленной (сплошная линия) и истинной (пунктирная линия) неоднородности.

Восстановленные в узлах грубой сетки значения далее интерполируются на узлы более мелкой сетки. Размер q_{II} стороны ячейки мелкой сетки согласован с ожидаемой разрешающей способностью второго шага, т.е. составляет доли миллиметра. С этой целью при численном моделировании каждая ячейка грубой сетки разбивалась дополнительно на 16×16 ячеек; следовательно, $q_{II} = q_I/16 \approx 1.16\lambda_0$. В итоге, в мелкой сетке получают крупномасштабные пространственные распределения $c_0(\mathbf{r})$ и $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$, служащие оценкой неоднородного фона для второго шага реконструкции.

На втором шаге наиболее трудоемкой операцией является трассировка – расчет времени распространения (2.8) и суммарного поглощения (2.9) вдоль всех трасс, соединяющих все восстанавливаемые точки объекта \mathbf{r} с положением текущего преобразователя (излучателя \mathbf{r}_S или приемника \mathbf{r}_R). Эта процедура подробно обсуждается в [А 2 (§ 5.4.1); А 12].

Моделирование второго шага, – реконструкции тонкой структуры рассеивателя на крупномасштабном неоднородном фоне, – начиналось с определения степени разрушения аппаратной функции томографа $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ за счет присутствия крупной контрастной неоднородности, приближенно восстановленной на первом шаге. Аппаратная функция является реакцией $\hat{V}(\mathbf{r}) = \hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ алгоритма обработки (2.7)–(2.9) на рассеянный сигнал от “точечной” неоднородности с единичной нормировкой $V(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, – см. (2.5); неоднородность находится в точке $\mathbf{r}_0 = \{x_0; y_0\}$ в плоскости томографирования. Эту тестовую неоднородность (по скорости звука, плотности или поглощению) с очень малыми размерами и большим контрастом следует рассматривать как идеализацию, служащую для целей построения аппаратной функции $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$. Функция $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}')$ является ядром интегрального уравнения типа свертки, описывающего процесс воспроизведения внутренней структуры произвольного рассеивателя $V(\mathbf{r})$ томографом:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \int_{\mathfrak{R}} \hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' , \quad (2.14)$$

где \mathfrak{R} – область рассеяния. Незначительность искажений аппаратной функции, вызванных присутствием крупномасштабных сильных неоднородностей, гарантирует малую ошибку восстановления объектов со сложной структурой, поскольку в этом случае ни разрешающая способность, ни способность алгоритма к количественной оценке рассеивателя не претерпевают существенных изменений (по сравнению со случаем борновского рассеивателя на неоднородном фоне). Фактически это означает, что присутствие слабой мелкомасштабной неоднородности на фоне другой контрастной крупной неоднородности оставляет слабую неоднородность столь же заметной при восстановлении, как и в случае однородного фона.

При численном моделировании тестовая δ -образная неоднородность помещалась в различные точки \mathbf{r}_0 , и с помощью соотношения (2.7) в форме (2.10) строилось изображение $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ этой неоднородности. Полагалось, что спектр зондирующих сигналов имеет гауссовскую форму с полушириной $\Delta f / 2$ по уровню $1/e$:

$$\sim \exp \left[- \left(\frac{f - f_0}{\Delta f / 2} \right)^2 \right]; \quad (2.15)$$

несущая частота $f_0 = 1.65$ МГц; $\Delta f = 150$ кГц; значения частоты f учитывались в полосе 300 кГц, т.е. $|f - f_0| \leq 150$ кГц. Выбранное значение Δf таково, что ширина данного гауссовского спектра по уровню 0.7 от максимума совпадает с шириной спектра для сигнала длительности $\cong 10$ мкс, имеющего прямоугольную огибающую.

На рис. 2.3 представлены центральные сечения вдоль оси OX (при заданном $y = y_0$) аппаратных функций для различных положений $\mathbf{r}_0 = \{x_0 = 0; y_0\}$ точечной

неоднородности на оси OY . В целях детального анализа формы и ширины аппаратных функций, их значения восстановлены в “сверхмелкой” сетке, соответствующей шагу дискретизации вдоль сечений $q'_{II} = q_{II} / 15 \approx 0.0777\lambda_0$.

Эталонная аппаратная функция, которая может быть обеспечена на втором шаге, реализуется в случае отсутствия неоднородностей крупномасштабного фона (рис. 2.3а, пунктирная линия). Эталонная аппаратная функция практически действительна; погрешность восстановления характеризуется отношением максимальных значений присутствующей ложной мнимой части и информативной действительной части данной аппарат-

ной функции: $\frac{\max |\text{Im} \hat{V}_\delta|}{\max \text{Re} \hat{V}_\delta} \approx 0.09 \times 10^{-2}$. Ширина эталонной аппаратной функции по

уровню 0.7 составляет $\approx \lambda_0 / 4 \approx 0.2$ мм. При качественном техническом изготовлении всех элементов томографа его разрешающая способность может достичь этой величины. Эталонная аппаратная функция практически одинакова для всех положений \mathbf{r}_0 точечной неоднородности в области томографирования (в том числе, и для находящихся в непосредственной близости от преобразователей). Это обеспечивается благодаря высокой угловой плотности (в плоскости томографирования) данных рассеяния.

Аппаратная функция в случае неоднородной фоновой среды, оцененной на первом шаге (рис. 2.2а), слабо отличается от аппаратной функции для однородной фоновой среды, если точечная неоднородность расположена не слишком близко к резкой границе раздела фоновых областей со скоростями c_1 и c_2 . На рис. 2.3а (сплошная линия) представлено центральное сечение $y = y_0 = R_0 / 2$ аппаратной функции для точки локализации неоднородности $\mathbf{r}_0 = \{x_0 = 0; y_0 = R_0 / 2 = 0.0675 \text{ м}\}$. Малые искажения аппаратной функции в случае неоднородной фоновой среды, по сравнению с однородной фоновой средой, подтверждают хорошую степень погашения ошибок восстановления, которые связаны с приближением прямолинейного распространения, используемым при оценке неоднородного фона на первом шаге и при трассировке на втором шаге. Это важный практический результат, поскольку заданное при моделировании “ступенчатое” изменение скорости фона сразу в половине области томографирования сильнее возможных реальных изменений в мягких биотканях. Если же присутствие крупномасштабных неоднородностей на втором шаге не учитывается, то такое же “ступенчатое” изменение скорости приводит к сильному искажению аппаратной функции, вплоть до обращения ее знака. Так, на рис. 2.3в приведено прежнее сечение $y = y_0 = R_0 / 2$ аппаратной функции, но при трассировке неоднородный крупномасштабный фон, восстановленный на первом шаге, заменялся однородным фоном со скоростью звука, равной средней скорости в неоднородном фоне $(c_1 + c_2) / 2$. Как следствие, аппаратная функция разрушилась полностью, причем ее максимальное абсолютное значение (рис. 2.3в) на порядок отличается от масштаба аппаратной функции, полученной при учете неоднородного фона (рис. 2.3а). Неприемлемая степень разрушения наблюдается также в случае замены при трассировке неоднородного фона на однородный фон со скоростью c_1 или c_2 .

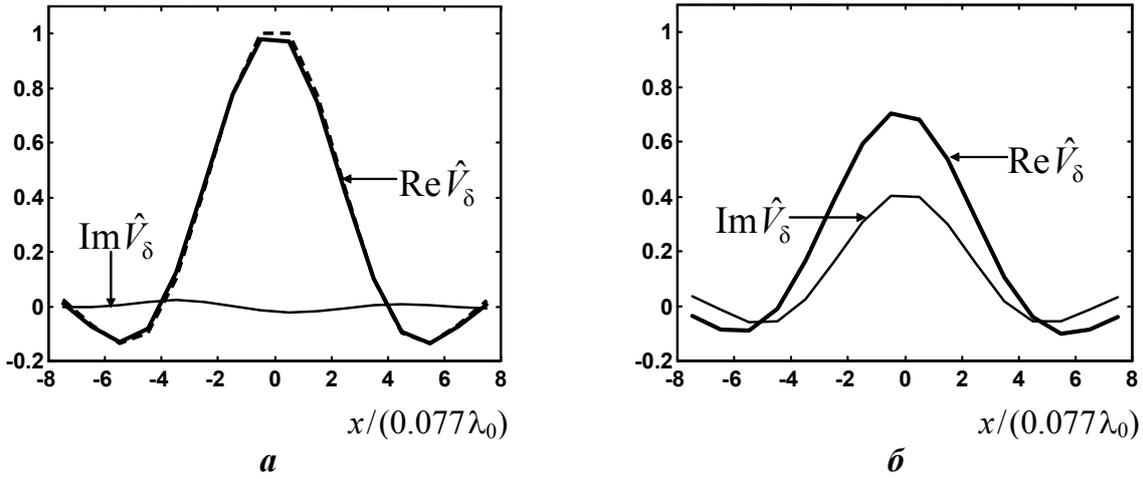
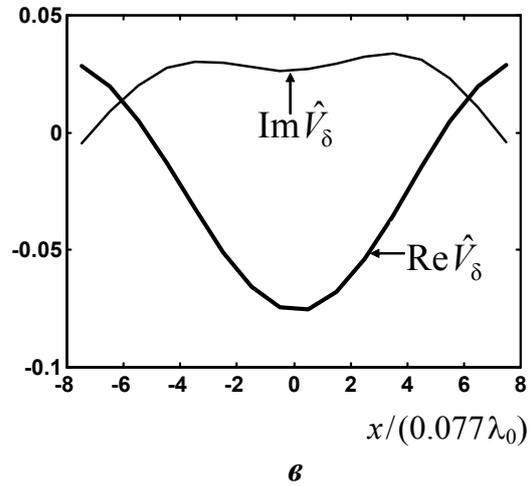


Рис. 2.3. Центральные сечения аппаратных функций \hat{V}_δ двухшагового алгоритма, нормированные на максимальное значение аппаратной функции для однородной фоновой среды (*а*, пунктирная линия):

- точечная неоднородность находится вдали от резкой границы раздела неоднородной крупномасштабной фоновой среды. Аппаратная функция получена с учетом (*а*, сплошная линия) и без учета (*б*) фоновых неоднородностей;
- точечная неоднородность находится вблизи границы раздела, и аппаратная функция получена с учетом фоновых неоднородностей (*б*).



Важно, что при учете неоднородностей фоновой среды аппаратная функция практически не изменяется (как это было и для аппаратной функции в случае изначально однородной фоновой среды) при перемещении радиус-вектора точечной неоднородности \mathbf{r}_0 в пределах области томографирования. Лишь при расположении точечной неоднородности непосредственно вблизи резкой границы изменения скорости (на расстоянии $\cong 0.01 \text{ м} \approx 10\lambda_0$ от границы) наблюдается ощутимое (в 1.4 раза) снижение максимального значения действительной части аппаратной функции; при этом ее уширения практически не происходит. Кроме того, у аппаратной функции появляется заметная мнимая часть, достигающая уровня $\cong 0.6$ от действительной части, – см. рис. 2.3б:

$$\mathbf{r}_0 = \{ x_0 = 0; y_0 = 10R_0/128 = 0.0105 \text{ м} \}; \quad \frac{\max \text{Im} \hat{V}_\delta}{\max \text{Re} \hat{V}_\delta} \approx 0.57. \quad \text{Таким образом, отри-$$

цательное влияние резкой границы раздела оказывается значительно более сильным для точек изображения вблизи нее. Причина этого может быть объяснена тем, что при прохо-

ждении волной границы раздела, эффекты рефракции будут больше для углов падения, которые близки к скользящим, чем для углов, которые близки к случаю падения по нормали. Следовательно, суммарная ошибка во временах распространения от фиксированной точки изображения до преобразователей будет больше в случае нахождения точки изображения вблизи рассматриваемой резкой границы раздела неоднородной среды, чем вдали от нее.

Обсуждаемый ниже другой пример по восстановлению крупномасштабных неоднородностей и тонкой структуры объекта служит дальнейшей иллюстрацией возможностей двухшагового алгоритма. Поскольку, в итоге, описываемые исследования предназначаются для работы с экспериментальным образцом ультразвукового томографа (раздел 2.3), то характерные параметры при численном моделировании (размеры области томографирования, радиус окружности расположения преобразователей, рабочие частоты, формат изображений, шаги дискретизации изображений и т.п.) задавались близкими к реальным, хотя и несколько отличающимися от параметров предыдущей модели. Так, радиус окружности с центром в начале координат, на которой размещаются приемоизлучающие преобразователи, составлял $R_0 = 0.1515$ м. Томографируемое двумерное сечение объекта полностью находилось внутри круга меньшего радиуса $R_{\text{grid}} = 0.128$ м с тем же центром. Количество приемоизлучающих преобразователей по-прежнему составляло $N_0 = 256$. Зондирующие сигналы со спектром гауссовской формы (2.15) имели прежнюю несущую частоту $f_0 = 1.65$ МГц, но большую ширину $\Delta f = 300$ кГц по уровню $1/e$; значения частоты f учитывались в полосе 1200 кГц. Крупномасштабный фон задавался в виде “ступенчатого” изменения сразу двух акустических параметров – скорости звука и поглощения. Так, в верхней половине томографируемой области значение скорости звука составляло $c_1 = 1500$ м/с, а значение поглощения 0.5 дБ/см соответствовало амплитудному коэффициенту поглощения $\alpha_1 = 5.76$ Нп/м; в нижней половине $c_2 = 1545$ м/с и 1.5 дБ/см, т.е. $\alpha_2 = 17.27$ Нп/м (рис. 2.4). Границей соответствующих половин круговой области томографирования являлась хорда, проходящая через начало координат и наклоненная к оси OX на угол $\pi/256$. Тонкая структура имитировалась в виде букв текста, располагающихся на таком крупномасштабном фоне (рис. 2.5).

Восстановление акустических параметров рассеивателя и на первом, и на втором шагах осуществлялось внутри круга радиуса $R_{\text{grid}} = 0.128$ м.

Крупномасштабный фон восстанавливался на первом шаге квази рентгеновским алгоритмом (2.1), (2.2) в узлах грубой сетки, образуемой разбиением квадрата со стороной $2R_{\text{grid}}$ на 32×32 ячейки. Тем самым, оценка крупномасштабных неоднородностей получалась в формате 33×33 пространственных отсчетов при крупном интервале дискретизации вдоль каждой оси $q_1 = 2R_{\text{grid}}/32 = 32\Delta x = 32\Delta y = 8$ мм (т.е. $7 \div 10$ характерных длин волн в мегагерцовом диапазоне частот), где $\Delta x = \Delta y = 0.25$ мм. Восстановленные значения медленности и поглощения (рис. 2.4) хорошо согласуются с исходной моде-

лью. Область “ступенчатого” изменения параметров в результате восстановления оказывается “сглаженной”, в соответствии с разрешающей способностью первого шага.

Далее крупномасштабные пространственные распределения интерполировались на сетку формата 256×256 пространственных отсчетов при интервале дискретизации $q_{II} = 2R_{\text{grid}}/256 = 4\Delta x = 4\Delta y = 1 \text{ мм}$ (т.е. около одной длины волны), и такие проинтерполированные распределения играли роль неоднородного фона на втором шаге процедуры восстановления. Тем самым, сетка из 256×256 отсчетов предназначалась для выполнения трассировки по неоднородному фону на втором шаге процедуры восстановления. Сетка формата 1024×1024 пространственных отсчетов соответствовала самому мелкому шагу дискретизации $\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ мм}$ (т.е. около $0.25 \div 0.3$ длины волны). В этой самой сетке происходит восстановление тонкой структуры рассеивателя, т.е. получается оценка функции $\hat{V}(\mathbf{r})$ на втором шаге процедуры восстановления. Тогда итоговые значения пространственных распределений фазовой скорости и коэффициента поглощения в формате 1024×1024 отсчетов с шагом $\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ мм}$ являются результатом объединения крупномасштабных (фоновых) значений, полученных на первом шаге и проинтерполированных уже на сетку 1024×1024 отсчетов, и поправок к ним, полученных на втором шаге. Выбранный конечный шаг пространственной дискретизации $\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ мм}$, с одной стороны, не превышает разрешающую способность получаемого изображения и, с другой стороны, удобен для врача-диагноста при определении конкретных координат подозрительного участка.

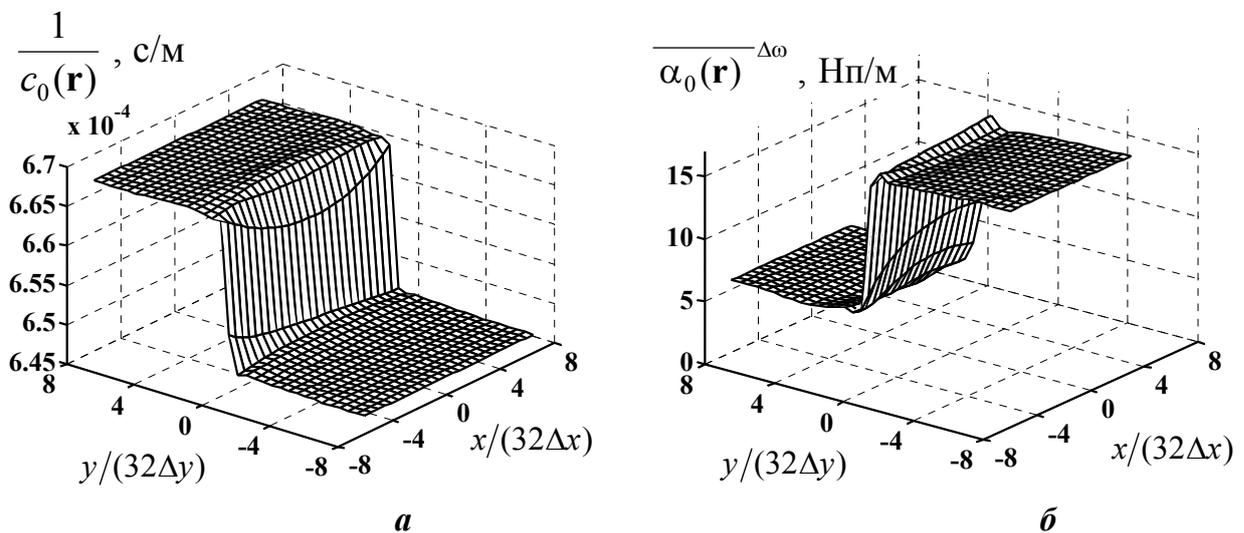


Рис. 2.4. Пространственные распределения крупномасштабных контрастных неоднородностей медленности (а) и амплитудного коэффициента поглощения (б), восстановленные на первом шаге двухшагового алгоритма. Истинная крупномасштабная неоднородность “ступенчатой” формы имеет скорость звука 1500 м/с (медленность 6.67×10^{-4} с/м) и поглощение 0.5 дБ/см (5.76 Нп/м) в верхней части области томографирования; соответствующие значения в нижней части 1545 м/с (медленность 6.47×10^{-4} с/м) и 1.5 дБ/см (17.27 Нп/м); $\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ мм}$.

Мелкомасштабная (тонкая) структура, которую надо восстановить на втором шаге используемого двухшагового алгоритма, моделировалась, для наглядности, с помощью различных букв, образующих фрагмент текста (рис. 2.5). Функция $V(\mathbf{r})$, описывающая эту мелкомасштабную структуру, которая присутствует на неоднородном крупномасштабном фоне, задавалась в виде совокупности точечных рассеивателей с фазой θ_k , изменяющейся случайным образом в интервале $[0, 2\pi)$:
$$V(\mathbf{r}) = \sum_k \exp(i\theta_k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k).$$

Элементарные рассеиватели, формирующие фиксированную букву, имели одну и ту же фазу. За счет этого каждая буква в модельном изображении действительной части $\text{Re}V(\mathbf{r})$ (рис. 2.5а) и мнимой части $\text{Im}V(\mathbf{r})$ (рис. 2.5б) имела свое индивидуальное значение яркости, хотя абсолютное значение $|V|$ было одинаковым для всех букв (рис. 2.5в). Комплексная функция $V(\mathbf{r})$ описывает мелкомасштабные неоднородности как скорости звука, так и поглощения. Элементарные рассеиватели располагались равномерно на расстоянии друг от друга в один отсчет, равный $\Delta x = 0.25$ мм, что при длине волны $\lambda_0 \approx 0.9$ мм на несущей частоте 1.65 МГц составляло $\approx \lambda_0/3.6$. Каждая строчная буква занимала по высоте и по ширине, в среднем, около 18 дискретных отсчетов ($\approx 5\lambda_0$); при этом ширина линий, формирующих букву, составляла от 1 до 3 отсчетов, т.е. $\approx (0.28 \div 0.8)\lambda_0$. Высота единственной заглавной буквы “О” – 24 отсчета ($\approx 6.7\lambda_0$).

При численном моделировании проверялось, насколько хорошо используемая модель рассеивателя в виде совокупности точечных рассеивателей имитирует тонкую структуру рассеивателей, являющихся, в действительности, пространственно-распределенными. Для этого плотность расположения точечных рассеивателей была увеличена в девять раз, т.е. расстояние между соседними точечными рассеивателями было сокращено в три раза и стало составлять $\approx \lambda_0/11$ при неизменных высоте и ширине букв (в абсолютных единицах длины). Результат восстановления такого рассеивателя оказался близким к описываемым ниже результатам до увеличения плотности точечных рассеивателей модели.

Тонкая структура располагалась на описанном выше “ступенчатом” крупномасштабном фоне, имеющем сильный контраст. Граница, на которой происходит резкое изменение параметров истинного крупномасштабного фона, условно изображена на рис. 2.5г пунктирной линией. На этом фоне размещались два фрагмента текста. Один из фрагментов находился в средней части области томографирования (однако выше границы изменения параметров крупномасштабного фона); другой фрагмент, точно такой же, как и первый, для сравнения качества восстановления помещался на периферии этой области, над первым фрагментом. Представление о местах расположения обоих фрагментов дает рис. 2.5г.

При численном моделировании второго шага абсолютное значение внутри букв условно полагалось равным 1, т.е. $|V|=1$. Абсолютное значение $|V|$ не играет роли в модельной задаче, поскольку моделирование волновых данных рассеяния для второго шага (рассеянных полей u_{sc}^{bg} , рассчитанных по отношению к крупномасштабному фону), так же как и решение обратной задачи на втором шаге, в соответствии с (2.7) или (2.10), про-

водились в приближении однократного рассеяния, которое линейно по V . При этом результаты восстановления второго шага далее приводятся отдельно от первого шага. При моделировании в качестве входных данных для второго шага использовались *идеальные* данные – рассеянные поля $u_{sc}^{bg} = u - u_0^{bg}$, которые были аналитически вычислены относительно падающего поля u_0^{bg} , имеющего место на крупномасштабном фоне в виде *идеальной* ступеньки.

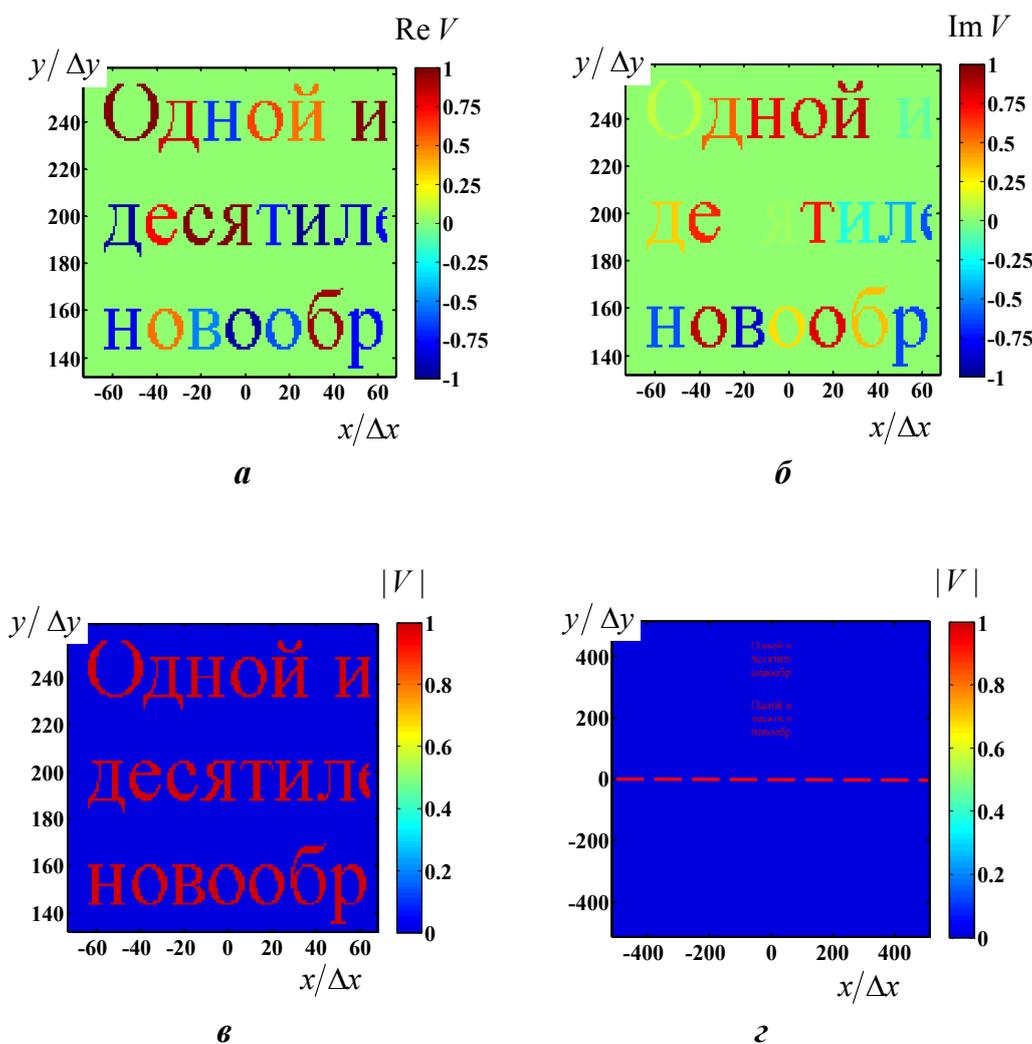


Рис. 2.5. Модель тонкой структуры – мелкомасштабных деталей исследуемого объекта в виде текста, присутствующих на крупномасштабном сильно неоднородном фоне; один пространственный отсчет составляет $\Delta x = \Delta y = 0.25$ мм:

- изображение фрагмента действительной (а) и мнимой (б) частей модельной функции V , описывающей тонкую структуру пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения, а также модуль этой функции (в);
- общий вид всей области томографирования с тонкой структурой в виде двух одинаковых фрагментов текста (г); граница изменения параметров крупномасштабного фона изображена пунктирной линией.

Тонкая структура восстанавливается в отсутствие помех с достаточно хорошим качеством и высоким разрешением (рис. 2.6а–в) при учете влияния фона – крупномасштабных неоднородностей скорости звука и поглощения, восстановленных на первом шаге (рис. 2.4). Незначительное ухудшение качества восстанавливаемого изображения наблюдается только на самом краю области томографирования. Для сопоставления в [А 2 (§ 5.4.1); А 13; 216] рассматривалась та же тонкая структура, но уже на *однородном* непоглощающем фоне со скоростью звука $c_0 = 1500$ м/с. Результат ее восстановления вторым шагом алгоритма свидетельствует, что качество воспроизведения тонкой структуры в случае сильно контрастного неоднородного фона ухудшается незначительно, по сравнению с качеством воспроизведения той же структуры в случае однородного фона. Таким образом, при использовании 256-ти приемоизлучающих преобразователей и обозначенной полосе частот, диаметр рабочей зоны, где качество восстановления достаточно высоко, составляет около $24 \div 25$ см. Это удовлетворяет потребностям многих практических задач, в том числе, – задаче диагностики молочной железы. Высокое разрешение в рассматриваемом линейном томографе [А 2 (глава 8); А 62; 216], составляющее около одной трети длины волны, обеспечивается за счет большого эффективного количества преобразователей (256 штук) антенной решетки, а также за счет волнового алгоритма обработки второго шага, учитывающего неоднородный фон, где происходят эффекты многократного рассеяния полей внутри томографируемого объекта.

Принципиальная необходимость восстановления крупномасштабной структуры фона и последующего учета этого неоднородного фона при восстановлении тонкой структуры была проиллюстрирована следующим образом. Восстановление тонкой структуры осуществлялось так, как будто бы фон однородный, с постоянной скоростью звука и постоянным коэффициентом поглощения, равными соответствующим средним значениям истинного неоднородного фона $(c_1 + c_2)/2 \approx 1523$ м/с и $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 \approx 11.5$ Нп/м. Поскольку на самом деле контраст истинного неоднородного фона сильный, то текст в восстановленном изображении не виден вовсе (рис. 2.6з), и лишь угадываются очертания строк, в которых был написан текст.

В отличие от исходной модели, имеющей одинаковое значение модуля всех букв $|V| = 1$ (рис. 2.5в), модуль оценки изображения букв $|\hat{V}|$, полученной уже при учете неоднородностей фона, неодинаков и флуктуирует в заметном диапазоне значений (рис. 2.6в). Причина этого связана с тем, что аппаратная функция $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ используемого двухшагового алгоритма имеет sinc-образный характер (см. рис. 2.3а), и, тем самым, амплитуда периферии аппаратной функции убывает достаточно медленно. Как следствие, в оценку $\hat{V}(\mathbf{r})$ восстанавливаемого изображения $V(\mathbf{r})$ в текущей фиксированной точке \mathbf{r} вносит вклад не только аппаратная функция $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 = \mathbf{r})$, соответствующая положению “точечной” неоднородности в той же точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$, но и аппаратные функции $\hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}')$ для других точек $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$ области рассеяния \mathfrak{R} , причем даже для точек, далеко отстоящих от \mathbf{r} , в силу медленного спада периферии: $\hat{V}(\mathbf{r}) = \int_{\mathfrak{R}} \hat{V}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$, согласно (2.14). В итоге, оценка $\hat{V}(\mathbf{r})$ будет искажена за счет некомпенсированного остатка, получающегося при объединении влияния в точке \mathbf{r}

аппаратных функций $\hat{V}_s(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ от разных точек \mathbf{r}' области рассеяния. Такой эффект влияния периферии аппаратной функции наблюдается в виде флуктуаций значений $|\hat{V}|$ даже в случае однородного фона.

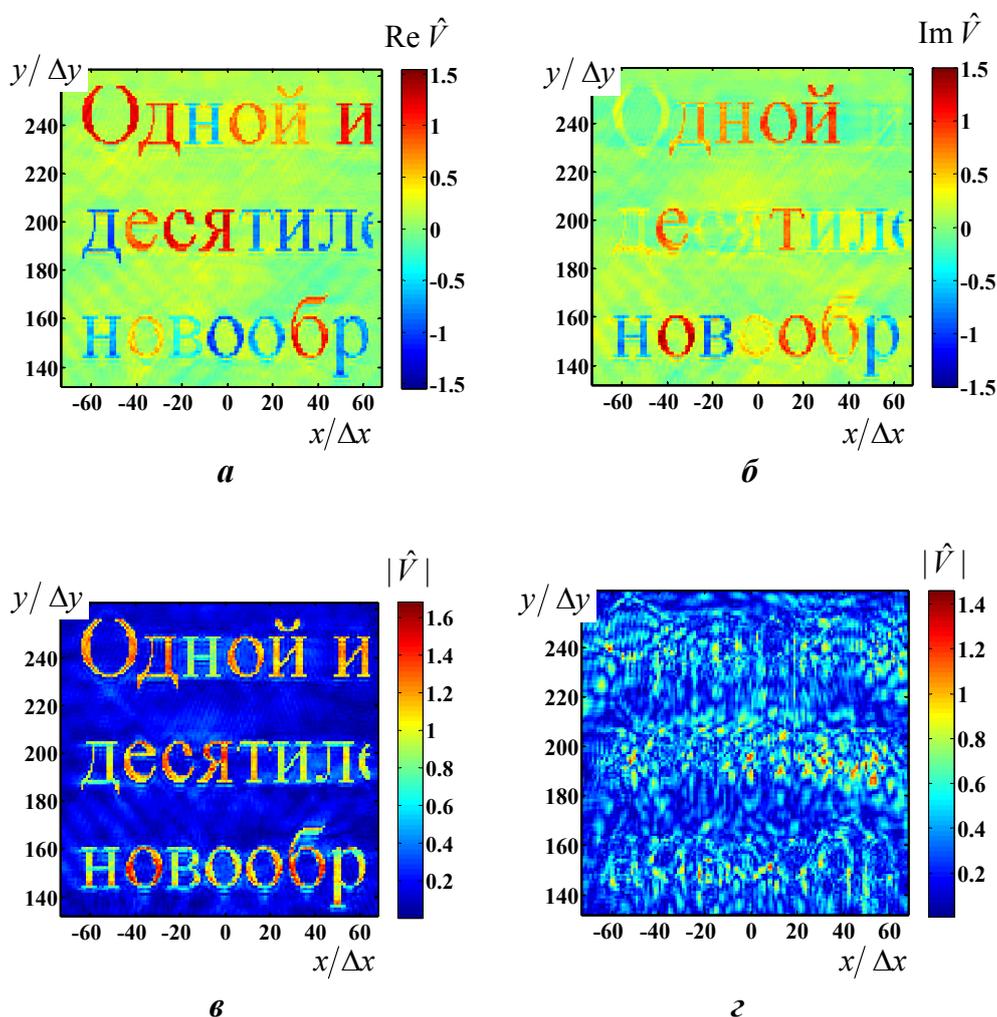
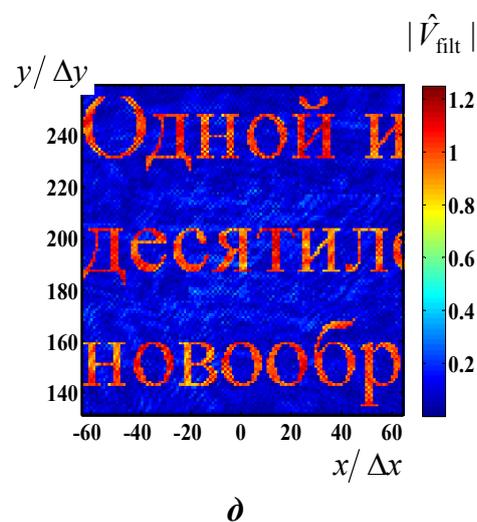


Рис. 2.6. Модельная иллюстрация возможности восстановления двухшаговым алгоритмом тонкой структуры, изображенной на рис. 2.5; $\Delta x = \Delta y = 0.25$ мм:

- оценка фрагмента тонкой структуры \hat{V} , полученная с учетом восстановленного на первом шаге и изображенного на рис. 2.4 крупномасштабного фона: *a* – действительная часть, *б* – мнимая часть, *в* – модуль;
- оценка фрагмента тонкой структуры, когда при восстановлении на втором шаге вместо оценки крупномасштабного фона используется однородный фон со скоростью и поглощением, равными средним значениям истинного фона (*г*);
- результат \hat{V}_{filt} (*д*) фрагментарной пространственной фильтрации оценки тонкой структуры \hat{V} , изображенной на рис. 2.6*а–в*.



Для устранения описанного эффекта влияния периферии аппаратной функции проводилась пространственная фильтрация отдельных фрагментов полученного изображения с помощью той аппаратной функции, которая построена как оценка алгоритмом точечной неоднородности, находящейся в центральной точке выбранного фрагмента. Тем самым, фильтрующая аппаратная функция строилась индивидуально для каждого фильтруемого фрагмента. Более детально, суть фрагментарной пространственной фильтрации описана в [А 2 (§ 5.4.1); А 13; 216]. В результате фрагментарной пространственной фильтрации качество изображения улучшается. В частности, флуктуации модуля оценки $|\hat{V}|$ в местах расположения букв существенно уменьшаются (рис. 2.6д в сравнении с рис. 2.6в).

Хорошая помехоустойчивость двухшагового алгоритма подтверждается результатами восстановления на основе реальных экспериментальных данных, полученных в опытном образце ультразвукового томографа (см. ниже раздел 2.3).

Использование прямолинейного лучевого приближения не является обязательным. Уравнение эйконала [175] позволяет перейти к более адекватному описанию лучевых траекторий, но требует применения внутренних итераций для их нахождения. Трассировка и оценка времени распространения, необходимые для второго шага, также резко усложняются.

Раздел 2.3. Реализация в ультразвуковой томографической установке

В настоящем разделе внимание сконцентрировано на прикладных аспектах, связанных с медицинской акустической томографией мягких биологических тканей для ранней диагностики новообразований [А 15; А 16; А 38]. Используемые при томографировании интенсивности импульсных первичных волн невелики, – до 0.1 Вт/см^2 . Поэтому нелинейные эффекты взаимодействия волн достаточно слабы, и на приемниках регистрируются сигналы, многократно рассеянные без изменения частоты (т.е. линейно, в этом смысле) на акустических неоднородностях, присутствующих внутри исследуемого объекта. Итогом томографии такого типа являются количественные пространственные распределения скорости звука и коэффициента поглощения, восстановленные на основе всей совокупности измеренных полей при разных ракурсах облучения и приема. Эти пространственные распределения обладают высоким разрешением, что позволяет врачу-диагносту сделать заключение о наличии и характере патологии. Так, значения скорости звука и коэффициента поглощения заметно увеличены в онкологически пораженных тканях, по сравнению со здоровыми тканями [239; 240; 246; 293], и эта информация отчасти подтверждается и в более ранних работах [219; 220]. Дополнительной возможностью процесса томографирования является получение пространственного распределения вектора скорости кровотока [А 38; А 52], что будет обсуждаться в разделе 4.4.

Все этапы, а также конкретные алгоритмы и приемы, которые используются при практической реализации двухшагового метода в целях томографирования мягких биоло-

гических тканей, собраны воедино и подробно описаны в [А 2 (глава 8)]. Ниже результаты излагаются в сжатом виде (по сути, в виде аннотации), в силу ограничений на допустимый объем представляемой диссертационной работы.

Предлагаемые в [А 2 (глава 8)] алгоритмы предназначены для обработки данных, которые поступают с разработанного опытного образца ультразвукового томографа [А 38; А 62; А 79; 216; 221]. Используется двумерная круговая томографическая схема, в которой приемоизлучающие преобразователи располагаются на окружности; внутри окружности находится томографируемый объект. Рабочие частоты применяемого импульсного режима зондирования объекта лежат в мегагерцовом диапазоне. Преобразователи работают как в режиме излучения, так и в режиме приема. Каждый преобразователь представляет собой сектор пьезокерамического тонкостенного цилиндра с центральной рабочей частотой около 1.25 МГц при ширине рабочей полосы около 300 кГц. Выпуклая рабочая поверхность преобразователя согласована по импедансу с водой (используемой в качестве иммерсионной жидкости) через четвертьволновой слой. Поскольку исследуемый объект имеет линейные размеры $10 \div 20$ см, для восстановления значений скорости звука и коэффициента поглощения в нем нужно иметь экспериментальные данные рассеяния от нескольких сотен приемоизлучающих преобразователей. В томографе реально установлены только 26 преобразователей, однако антенная решетка разрежена специальным образом, т.е. преобразователи расположены на окружности неравномерно, в предварительно рассчитанных геометрических положениях. Разреженная решетка позволяет работать с преобразователями, имеющими значительные волновые размеры и большую рабочую поверхность, за счет чего обеспечивается их низкий электрический импеданс. Такие преобразователи в режиме излучения возбуждаются электрическими импульсами малого напряжения, а их малый импеданс снижает уровень наводок в режиме приема. Кроме того, антенная решетка может вращаться, и за один полный оборот она занимает последовательно 256 дискретных угловых позиций с равномерным угловым шагом дискретизации $2\pi/256$. В каждой фиксированной угловой позиции антенной решетки осуществляется сбор экспериментальных данных, когда один из преобразователей излучает, после чего все 26 преобразователей принимают. Подобным образом используются все 26 излучателей, после чего антенная решетка поворачивается на один угловой шаг, и процесс измерения повторяется.

Благодаря сочетанию разреженной кольцевой решетки и вращения, получаемый полный объем экспериментальных данных оказывается эквивалентным объему данных, который был бы получен с неподвижной кольцевой антенной решеткой, содержащей 256 приемоизлучающих преобразователей. Поскольку при вращении одно и то же геометрическое положение пары преобразователей “излучатель–приемник” реализуется неоднократно, то возникает дублирование данных. Среднее количество экземпляров данных, соответствующих фиксированному положению “излучатель–приемник”, оценивается следующим образом. Для неподвижной решетки, состоящей из 256-ти эффективных приемоизлучающих преобразователей, полное количество принятых импульсов равно 256^2 . В то же время, для разреженной решетки с вращением, состоящей из 26-ти преобразователей, полное количество принятых импульсов при 256-ти углах поворота составляет 256×26^2 ,

т.е. примерно в 2.5 раза больше, по сравнению с неподвижной решеткой. Таким образом, средний коэффициент дублирования данных составляет ≈ 2.5 .

Процедура обработки экспериментальных данных и получение, в итоге, пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения в томографируемом объекте (органе пациента) состоит из нескольких этапов, которые далее условно будут называться нулевым, первым и вторым шагом. Ввиду аппаратных погрешностей и возможной зависимости характеристик иммерсионной жидкости от температуры окружающей среды, процессу собственно реконструкции изображения должны предшествовать некоторые процессы вспомогательных измерений, позволяющие компенсировать влияние упомянутых факторов на качество реконструкции.

На нулевом шаге определяются параметры томографической установки, которые не связаны с присутствием исследуемого органа. Поэтому в медицинском учреждении они могут определяться предварительно, до начала работы с пациентами. К таким параметрам относятся, во-первых, скорость звука и коэффициент поглощения в иммерсионной жидкости при данной температуре в отсутствие пациента. Во-вторых, оцениваются геометрические поправки (характеризующие радиальные и угловые отклонения положений преобразователей от их идеальных положений на окружности) и фазовые поправки (которые привносятся в сигналы, прежде всего, самими преобразователями в режиме излучения и приема). В-третьих, на основе разработанного алгоритма корреляционного типа предварительно определяется смещение положения геометрического центра антенной решетки от положения центра вращения антенны в целом. Перечисленные поправки могут давать вклад в момент прихода сигнала на приемник, сравнимый со временем прохождения звуком расстояния от нескольких десятых долей длины волны до одной-двух длин волн. Поскольку это значение близко к величине желаемого итогового разрешения, то поправки должны быть учтены в процессе восстановления.

Скорость звука, геометрические и фазовые поправки оцениваются по времени распространения импульсных сигналов в иммерсионной жидкости в отсутствие исследуемого объекта. Для этого *разработан алгоритм определения времени распространения импульсного сигнала в иммерсионной жидкости*, обладающий высокой точностью и основанный на оценке момента прихода на приемник линейно нарастающей части огибающей сигнала [А 16; 216]. Экспериментально установлено, что линейное нарастание свойственно первым двум-трем периодам сигнала при используемых в томографе приемоизлучающих преобразователях (дальнейшее нарастание огибающей, вплоть до насыщения, носит уже существенно нелинейный характер). Алгоритм использует также тот факт, что шаг дискретизации по времени Δt равен четверти периода на круговой несущей частоте ω_0 .

Разработан *алгоритм определения скорости звука и коэффициента поглощения* (в случае его присутствия) *иммерсионной жидкости, а также геометрических и фазовых поправок для преобразователей*. Значения скорости звука c_0 и амплитудного коэффициента поглощения α_0 в однородной иммерсионной среде без исследуемого объекта находятся по данным от 26-ти приемоизлучающих преобразователей при единственной угловой позиции антенной решетки – исходном положении [А 39]. Рабочая поверхность каждого пьезокерамического приемоизлучающего преобразователя представляет собой вы-

пуклый сектор цилиндрической формы с углом раскрыва около 100° и радиусом $R_{\text{trans}} = 0.0095$ м. Поле, излученное или принятое таким преобразователем, эквивалентно полю от квазиточечного преобразователя, который находится в центре окружности радиуса R_{trans} , соответствующей круговому сечению цилиндрической поверхности. Пусть \tilde{S} – номер излучателя, \tilde{R} – номер приемника; $\tilde{S}, \tilde{R} = \overline{1, 26}$. Для каждого фиксированного излучателя \tilde{S} , создающего сигнал в иммерсионной жидкости $u_0(t)$, предварительно определяются времена распространения $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ от излучателя \tilde{S} до приемника \tilde{R} , согласно вышеупомянутой методике. Кроме того, регистрируется максимальная амплитуда сигнала на приемнике $A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$. При каждом фиксированном излучателе $\tilde{S} = \overline{1, 26}$ измерения осуществляются только теми приемниками \tilde{R} , которые лежат на “рабочей дуге” $\mathcal{Y}_{\tilde{S}}$, противоположной данному излучателю \tilde{S} , в пределах центральной части главного лепестка диаграммы направленности этого излучателя. Такая центральная часть, используемая на нулевом шаге, имеет угловую ширину около 70° . Тогда медленность $1/c_0$ определяется как

$$\frac{1}{c_0} = \frac{\sum_{\tilde{S}=1}^{26} \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}} t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0}{\sum_{\tilde{S}=1}^{26} \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}} (|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}| - 2R_{\text{trans}})}, \quad (2.16)$$

где $\mathbf{r}_{\tilde{S}}$ и $\mathbf{r}_{\tilde{R}}$ – радиус-векторы квазиточечного излучателя и квазиточечного приемника. Значения $\mathbf{r}_{\tilde{S}}$ и $\mathbf{r}_{\tilde{R}}$ соответствуют идеальным положениям квазиточечных преобразователей на окружности радиуса R_0 , имеющей центр в точке O' . Центр O' такой идеальной окружности, характеризующей геометрию собственно кольцевой антенной решетки, далее будет называться *геометрическим центром*.

Подобным образом определяется амплитудный коэффициент поглощения α_0 в иммерсионной жидкости, если эта жидкость является поглощающей:

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{\tilde{S}=1}^{26} \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}} \ln \left(\frac{A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 \sqrt{|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}|}}{A_{\tilde{S}}^{\min} \sqrt{R_{\tilde{S}}^{\max}}} \right)}{\sum_{\tilde{S}=1}^{26} \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}} (R_{\tilde{S}}^{\max} - |\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}|)}. \quad (2.17)$$

Здесь $R_{\tilde{S}}^{\max}$ – расстояние от фиксированного \tilde{S} -го квазиточечного излучателя до максимально удаленного от него квазиточечного приемника. Такой приемник лежит в центре диаграммы направленности данного излучателя, и поэтому данные от него наиболее достоверны; $A_{\tilde{S}}^{\min}$ – амплитуда сигнала, приходящего на этот удаленный приемник (ампли-

туда $A_{\tilde{S}}^{\min}$ будет наименьшей среди значений $A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ при фиксированном \tilde{S}). Множители $\sqrt{|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}|}$ и $\sqrt{R_{\tilde{S}}^{\max}}$ введены для компенсации геометрической расходимости волны, – в данном случае, цилиндрической расходимости (расстояния $|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}|$ значительно превосходят длину волны). Использование в (2.17) значений амплитуд импульсного сигнала приводит к оценке $\overline{\alpha_0^{\Delta\omega}}$ – среднего значения коэффициента поглощения в рабочей полосе частот с шириной $\Delta\omega$. На практике в значениях $A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ и $A_{\tilde{S}}^{\min}$ должны учитываться возможные различия чувствительности преобразователей по излучению и приему.

В условиях реального эксперимента положения квазиточечных преобразователей могут отклоняться от их идеальных положений на окружности радиуса R_0 (с центром в точке O') на расстояние до $\cong 1$ мм. Поскольку возможная величина отклонений соизмерима с характерной длиной волны, то эти отклонения (геометрические поправки), так же как и фазовые поправки преобразователей по излучению и по приему (т.е. фазовые сдвиги, возникающие в излучающем и приемном трактах), необходимо предварительно определять и далее учитывать при восстановлении тонкой структуры объекта на втором шаге.

Пусть идеальное положение каждого из 26-ти квазиточечных преобразователей на антенном кольце задается радиус-вектором $\mathbf{r}_{\tilde{d}} = \{R_0, \varphi_{\tilde{d}}^0\}$ в полярной системе координат с центром O' . Этот центр совпадает с геометрическим центром O' , понятие которого было введено выше. Номер преобразователя принимает значения $\tilde{d} = \overline{1, 26}$. Если преобразователь работает в режиме излучения, то $\tilde{d} = \tilde{S}$; если в режиме приема, то $\tilde{d} = \tilde{R}$. Истинные положения преобразователей при проведении эксперимента имеют полярные координаты $\mathbf{r}_{\tilde{d}}^{\text{ex}} = \{R_0 + \delta r_{\tilde{d}}, \varphi_{\tilde{d}}^0 + \delta\varphi_{\tilde{d}}\}$. Тем самым, геометрические поправки к идеальным положениям преобразователей подразделяются на радиальные $\delta r_{\tilde{d}}$ и угловые $\delta\varphi_{\tilde{d}}$. Фазовые поправки для каждого преобразователя будут обозначаться как $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{tr}}$ в режиме излучения и $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{rec}}$ в режиме приема.

Неизвестные $\delta r_{\tilde{d}}$, $\delta\varphi_{\tilde{d}}$, $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{tr}}$, $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{rec}}$ могут быть оценены из тех соображений, что они формируют временной сдвиг $\Delta t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ между реальным $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ (определяемым из эксперимента) и идеальным $\frac{1}{c_0}(|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}| - 2R_{\text{trans}})$ временем распространения сигнала от излучателя \tilde{S} до приемника \tilde{R} [А 39; А 76]:

$$\begin{aligned} \Delta t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 &\equiv t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 - \frac{1}{c_0}(|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}| - 2R_{\text{trans}}) = \\ &= \frac{1}{c_0}(|\mathbf{r}_{\tilde{S}}^{\text{ex}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}^{\text{ex}}| - |\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}|) + \frac{1}{\omega_0}(\delta\Phi_{\tilde{S}}^{\text{tr}} + \delta\Phi_{\tilde{R}}^{\text{rec}}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь влияние фазовых поправок $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{tr}}$ и $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{rec}}$ на несущей частоте ω_0 отражено в виде эффективных сдвигов момента излучения и момента приема сигнала. Близкий по логике подход, имеющий целью калибровку антенной решетки, используется в работе [222]. Однако вместо поправок к идеальным положениям преобразователей в этой работе используются взаимные расстояния между преобразователями. Эти расстояния, наряду с аналогами фазовых поправок по излучению и приему, а также с неизвестной скоростью звука в иммерсионной жидкости, находятся на основе времен распространения сигналов, измеряемых томографическим прибором.

В правой части соотношения (2.18) разность расстояний $\left(\left| \mathbf{r}_{\tilde{S}}^{\text{ex}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}^{\text{ex}} \right| - \left| \mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}} \right| \right)$ выражается через полярные координаты соответствующих радиус-векторов и линеаризуется по малым поправкам $\delta r_{\tilde{S}}/R_0$, $\delta r_{\tilde{R}}/R_0$, $\delta\varphi_{\tilde{S}}$, $\delta\varphi_{\tilde{R}}$. В итоге получается система линейных уравнений относительно неизвестных поправок $\delta r_{\tilde{d}}/R_0$, $\delta\varphi_{\tilde{d}}$, $\frac{c_0}{R_0\omega_0}\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{tr}}$,

$\frac{c_0}{R_0\omega_0}\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{rec}}$ в количестве $26 \times 4 = 104$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta r_{\tilde{S}}}{R_0} + \frac{\delta r_{\tilde{R}}}{R_0} \right) \cdot \left| \sin \left(\frac{\varphi_{\tilde{S}}^0 - \varphi_{\tilde{R}}^0}{2} \right) \right| + \\ & + (\delta\varphi_{\tilde{S}} - \delta\varphi_{\tilde{R}}) \cos \left(\frac{\varphi_{\tilde{S}}^0 - \varphi_{\tilde{R}}^0}{2} \right) \cdot \text{sgn} \left[\sin \left(\frac{\varphi_{\tilde{S}}^0 - \varphi_{\tilde{R}}^0}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{c_0}{R_0\omega_0} (\delta\Phi_{\tilde{S}}^{\text{tr}} + \delta\Phi_{\tilde{R}}^{\text{rec}}) = \frac{c_0}{R_0} \Delta t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Правая часть в (2.19) известна:

$$\Delta t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 \equiv t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 - \frac{1}{c_0} \left(\left| \mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}} \right| - 2R_{\text{trans}} \right). \quad (2.20)$$

Система формируется перебором всех излучателей $\tilde{S} = \overline{1, 26}$ и приемников $\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}$, лежащих в пределах центральной части главного лепестка диаграммы направленности данного излучателя \tilde{S} . Количество уравнений системы (2.19) составляет около 250 при ширине главного лепестка диаграммы направленности преобразователей около 70° (тогда, как упоминалось, для каждого излучателя используются $9 \div 10$ противоположащих приемников). Несмотря на то, что это количество больше, чем количество неизвестных (их 104), система (2.19) не только не является избыточной, но оказывается недостаточной: из ≈ 250 уравнений лишь $95 \div 100$ уравнений будут линейно независимыми. Таким образом, система плохо обусловлена и не позволяет определить поправки однозначным образом. Физическая причина этого явления заключается в наличии таких смещений преобразователей и таких искажений фазовых характеристик (или комбинаций смещений и

фазовых искажений), которые не проявляются вовсе в экспериментальных данных – временах распространения $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$.

Поскольку полученная система (2.19) является недостаточной, решение методом наименьших квадратов [А 1 (раздел 1.3); 223 (§ 6.3); 224 (гл. 2, § 4, § 7); 225 (§ 3.2.2)], – здесь применять неправомерно. Нужно использовать решение с минимальной нормой самого решения [А 1 (раздел 1.3); 223 (§ 6.3); 224 (гл. 2, § 5, § 11)]. В этом подходе на искомое решение накладывается дополнительное условие: получаемое решение (т.е. искомые геометрические и фазовые поправки) должно обладать минимальной нормой, что обеспечивает единственность решения.

Неидеальность расположения квазиточечных преобразователей излишне учитывать при нахождении амплитудного коэффициента поглощения иммерсионной жидкости α_0 с помощью выражения (2.17), поскольку влияние поправок на используемые значения расстояний и амплитуд сигналов пренебрежимо мало (поглощение пренебрежимо мало на расстоянии около длины волны). В то же время, выражение (2.16) для определения медленности $1/c_0$ может быть уточнено с учетом найденных геометрических и фазовых поправок. Так, в выражении (2.16) вместо идеальных расстояний $|\mathbf{r}_{\tilde{S}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}|$ будут входить

$|\mathbf{r}_{\tilde{S}}^{\text{ex}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}^{\text{ex}}|$ (т.е. учитываются геометрические поправки к положениям преобразователей),

и тогда вместо измеренных времен распространения $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ будут входить

$t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 - \frac{1}{\omega_0} (\delta\Phi_{\tilde{S}}^{\text{tr}} + \delta\Phi_{\tilde{R}}^{\text{rec}})$ (т.е. компенсируется влияние фазовых поправок):

$$\frac{1}{c_0} = \frac{\sum_{\tilde{S}=1}^{26} \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}} \left\{ t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 - \frac{1}{\omega_0} (\delta\Phi_{\tilde{S}}^{\text{tr}} + \delta\Phi_{\tilde{R}}^{\text{rec}}) \right\}}{\sum_{\tilde{S}=1}^{26} \sum_{\tilde{R} \in \mathcal{Y}_{\tilde{S}}} \left(|\mathbf{r}_{\tilde{S}}^{\text{ex}} - \mathbf{r}_{\tilde{R}}^{\text{ex}}| - 2R_{\text{trans}} \right)}. \quad (2.21)$$

В соотношении (2.21) участвуют поправки; в то же время, в исходных уравнениях для поправок (2.19) участвует значение скорости звука c_0 . Поэтому реализуется итерационная схема, предназначенная для взаимно-уточняющего попеременного нахождения скорости звука в иммерсионной жидкости, геометрических и фазовых поправок. Вначале из (2.16) оценивается c_0 без учета поправок, и далее с помощью (2.19) оцениваются поправки. Далее по оцененным значениям поправок уточняется значение c_0 из (2.21), и при участии этого значения c_0 , в свою очередь, формируются входные данные в виде (2.20), и уточняются поправки $\delta r_{\tilde{d}}$, $\delta\varphi_{\tilde{d}}$, $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{tr}}$, $\delta\Phi_{\tilde{d}}^{\text{rec}}$ на основе системы (2.19). Работа как с модельными, так и с экспериментальными данными показала, что такой итерационный процесс (2.19), (2.21) сходится и обеспечивает, в итоге, достоверное значение c_0 и приемлемые эффективные значения поправок.

Кроме того, разработана методика *определения смещения положения геометрического центра антенной решетки от центра вращения*. Дело в том, что помимо геометрических поправок, связанных с отклонением положений преобразователей от идеальных, и фазовых поправок по излучению и приему, существует еще один вид поправок, связанный с возможным смещением всей кольцевой антенной решетки, как целой, относительно ее идеального положения. Этот вид поправок играет роль в силу того, что в процессе съема экспериментальных данных используемая кольцевая антенная решетка совершает вращение относительно неподвижной точки O – так называемого *центра вращения*. С другой стороны, выше было введено понятие геометрического центра O' – это центр симметрии антенной решетки, относительно которого находились геометрические поправки. Из-за неточного позиционирования антенного кольца геометрический центр O' может, в общем случае, отличаться от центра вращения O . Тогда геометрический центр O' будет перемещаться при вращении антенной решетки и описывать окружность с радиусом $|\overline{OO'}|$.

Тем самым, именно неподвижный центр вращения O принимается за начало координат на этапе восстановления рассеивателя на первом шаге и на втором шаге (см. ниже). Величина смещения – расстояние между точками O и O' – может достигать одного-двух миллиметров, что соизмеримо с величиной отклонения квазиточечных преобразователей от их идеального положения. Поэтому смещение точки O' относительно точки O также необходимо предварительно определять и далее учитывать, совместно с геометрическими и фазовыми поправками, при восстановлении тонкой структуры объекта на втором шаге. Таким образом, требуется определить две декартовы координаты (X_0, Y_0) вектора смещения $\overline{OO'} = \{X_0, Y_0\}$ геометрического центра O' относительно центра вращения O в исходном положении антенной решетки, и затем учесть влияние такого смещения на положения преобразователей при каждой угловой позиции антенной решетки. Рассматриваемый в [А 2 (§ 8.2.3)] алгоритм основывается на том обстоятельстве, что за счет смещения геометрического центра кольцевой антенной решетки от центра вращения у каждого преобразователя будет свой индивидуальный радиус вращения при смене угловых позиций антенной решетки. Это обстоятельство приводит к тому, что для разных преобразователей, помещенных в одну и ту же угловую позицию, время распространения излученного сигнала, идущего от данного преобразователя до отражающего объекта (выбираемого специальным образом) и обратно, будет разным. Рассмотрение разных пар преобразователей и разных фиксированных угловых позиций позволяет определить искомые координаты (X_0, Y_0) .

Первый и второй шаги посвящены непосредственному восстановлению пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения в исследуемом объекте. Для этого используется двухшаговый алгоритм, подробно изложенный в разделах 2.1 и 2.2 и адаптированный под обработку экспериментальных данных. А именно, *первый шаг* посвящен восстановлению крупномасштабных деталей рассеивателя, т.е. крупномасштабных неоднородностей скорости звука и коэффициента поглощения. Характерный размер таких деталей определяется диаметром лучевой трубки $\sqrt{L\lambda_0}$, где λ_0 –

средняя длина волны, L – линейный размер рассеивателя. Этот размер составляет не менее нескольких длин волн, т.е. $5 \div 10$ мм при работе в мегагерцовом диапазоне частот и $L \cong (10 \div 20)$ см. Первый шаг необходим, поскольку значения скорости звука и коэффициента поглощения могут изменяться в широких пределах не только для биотканей различного типа, но и для однотипных биотканей различных пациентов. Как следствие, первое приближение Борна (приближение однократного рассеяния) для восстановления рассеивателя в отсутствие первого шага реконструкции оказывается неработоспособным.

Входными данными первого шага являются значения разности времен распространения сигнала в присутствии исследуемого объекта $t_{\tilde{R}\tilde{S}}$ и в его отсутствие $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ (для восстановления крупномасштабного пространственного распределения скорости звука), а также отношение эффективных амплитуд соответствующих сигналов $A_{\tilde{R}\tilde{S}}$, $A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ (для восстановления крупномасштабного пространственного распределения коэффициента поглощения) при всестороннем озвучивании объекта и использовании всех угловых позиций антенной решетки, характеризуемых номером $n = \overline{0, 255}$. Такие данные предварительно формируются по разработанному алгоритму *определения временного сдвига корреляционным методом при мешающем воздействии сигналов от боковых лучевых трубок* [А 15; А 16]. Этот алгоритм основан на корреляционном сравнении сигналов, регистрируемых приемниками в отсутствие исследуемого объекта и в его присутствии. При этом важно, что сравнивать сигналы необходимо не на протяжении их основной части, а на протяжении только первых полутора-двух периодов после момента прихода сигнала на приемник, пока еще отсутствует вступление сильных рассеянных сигналов от объекта (т.е. отсутствует влияние сигналов от боковых лучевых трубок на форму принимаемого сигнала). Дело в том, что область томографирования в присутствии исследуемого объекта становится неоднородной, в общем случае. Тогда следует иметь в виду эффекты, связанные с рефракцией, что приводит к деформации и “расщеплению” лучевой трубки. За счет рефракции полный сигнал, приходящий на фиксированный приемник \tilde{R} от фиксированного излучателя \tilde{S} , формируется, с точки зрения лучевого подхода, из полей, приходящих по разным лучевым трубкам, в первую очередь – по основной лучевой трубке и примыкающим к ней боковым трубкам. Сигналы от боковых лучевых трубок приводят, в общем случае, как к изменению фазы полного сигнала на приемнике, так и к искажению поведения его амплитуды. Поэтому линейный характер нарастания огибающей принимаемого сигнала (см. выше описание нулевого шага) будет иметь место только до тех пор, пока к сигналу от основной трубки не будут примешиваться сигналы от непосредственно примыкающих к ней боковых лучевых трубок, т.е. от сигналов, рассеянных вперед.

В связи со сложившейся ситуацией, ниже кратко излагается суть алгоритма определения сдвига во времени распространения двух сигналов на основе корреляционного метода. Один из сигналов $u_0(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t) \equiv u_0(t)$ регистрируется в отсутствие объекта, а другой сигнал $u(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t) \equiv u(t)$ – в присутствии объекта, причем для всех 256-ти возможных угловых позиций n антенной решетки. С помощью методики использования адаптивного порога и функции временного окна в исходных действительных сигналах

$u_0(t)$ и $u(t)$ предварительно выделяются только первые полтора-два периода, пока еще не наступило существенное вмешательство сильных рассеянных сигналов. Такие “обрезанные” сигналы обозначаются как $u_0^{\text{cut}}(t)$ и $u^{\text{cut}}(t)$. Строится взаимная корреляционная функция этих двух “обрезанных” действительных сигналов (в отсутствие и в присутствии исследуемого объекта):

$$K(\tau) \equiv \int u^{\text{cut}}(t) u_0^{\text{cut}}(t + \tau) dt, \quad K(\tau^{\text{max}}) = \max_{\tau} K(\tau). \quad (2.22)$$

Ставится задача найти такой временной сдвиг $\tau = \tau^{\text{max}}$, при котором достигается максимум функции $K(\tau)$. Полагается, что этот временной сдвиг связан с разностью времен распространения сигнала в присутствии и отсутствие объекта как

$$\tau^{\text{max}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}) = -(t_{\tilde{R}\tilde{S}} - t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0) \quad (2.23)$$

(индекс n в обозначениях величин $t_{\tilde{R}\tilde{S}}$ и $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ для краткости опущен). Определяемый корреляционным алгоритмом по первым периодам (2.22) временной сдвиг τ^{max} позволяет далее оценить, помимо разности времен распространения (2.23), коэффициент изменения амплитуды сигнала в присутствии объекта κ^{bg} :

$$\kappa^{\text{bg}} \approx \frac{\int u^{\text{cut}}(t) u_0^{\text{cut}}(t + \tau^{\text{max}}) dt}{\int [u_0^{\text{cut}}(t)]^2 dt}. \quad (2.24)$$

На заключительном этапе корреляционного алгоритма формируется рассеянное поле на неоднородном фоне $u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(t)$, используемое для восстановления тонкой структуры рассеивателя на втором шаге процедуры обработки в томографе. С этой целью в качестве падающего поля $u_0^{\text{bg}}(t)$, однако на неоднородном крупномасштабном фоне, принимается сигнал $u_0(t + \tau^{\text{max}})$, прошедший через воду, но сдвинутый sinc-интерполяцией на τ^{max} и умноженный на амплитудный коэффициент κ^{bg} из (2.24). Оцененный сигнал $u_0^{\text{bg}}(t)$ вычитается из полного сигнала $u(t)$, прошедшего через объект и зарегистрированного на приемнике:

$$u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(t) = u(t) - u_0^{\text{bg}}(t), \quad (2.25)$$

$$\text{где } u_0^{\text{bg}}(t) \approx \kappa^{\text{bg}} u_0(t + \tau^{\text{max}}), \quad \kappa^{\text{bg}} \approx \frac{\int u^{\text{cut}}(t) u_0^{\text{cut}}(t + \tau^{\text{max}}) dt}{\int [u_0^{\text{cut}}(t)]^2 dt}.$$

Подобная оценка $u_0^{\text{bg}}(t)$ оправдана тем, что фон, для которого строится падающее поле, является крупномасштабным. Тем самым, $u_0^{\text{bg}}(t)$ отличается от $u_0(t)$ только временной задержкой, вызванной неоднородностями фазовой скорости звука, и амплитудой, из-за поглощения (последствия влияния на эту амплитуду эффектов рефракции, имеющих место на крупномасштабном фоне, будут обсуждаться). Сформированный таким образом сигнал $u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(t)$ получается из-за рассеяния исходного сигнала на мелкомасштабных деталях (тонкой структуре) томографируемого объекта и, тем самым, несет информацию об этих деталях.

Таким образом, алгоритм, основанный на линейном характере нарастания огибающей сигнала, нужно использовать на нулевом шаге алгоритма томографирования, где необходимо знать абсолютные времена распространения сигналов для определения фазовой скорости звука в иммерсионной жидкости, а также для определения геометрических и фазовых поправок преобразователей. Поскольку на нулевом шаге сигналы измеряются в отсутствие исследуемого объекта, то, во-первых, сигнал не искажается рассеянными полями (рассеяние отсутствует) и, во-вторых, отношение сигнал/помеха достаточно большое даже для первых периодов сигнала, где еще наблюдается линейный характер нарастания огибающей. В присутствии исследуемого органа пациента возможное уменьшение сигнала за счет поглощения составляет от -15 дБ до -20 дБ, т.е. в $6 \div 10$ раз по амплитуде. Как следствие, отношение сигнал/помеха для первых периодов сигнала заметно уменьшается, по сравнению со случаем иммерсионной жидкости без объекта. По этой причине, а также вследствие влияния рассеянных вперед сигналов, возникают ощутимые погрешности в алгоритме, основанном на линейном характере нарастания огибающей; в то же время алгоритм, основанный на коррелировании первых периодов сигналов, оказывается более точным. Тем не менее, очень раннее влияние полей, рассеянных вперед на крупномасштабных неоднородностях, может все же приводить к ошибке при определении временного сдвига сигнала даже корреляционным алгоритмом и, следовательно, при формировании рассеянного поля для данной пары “излучатель–приемник”. Однако каждая точка восстанавливаемого изображения на втором шаге восстанавливается по значениям рассеянного поля от очень большого числа пар “излучатель–приемник” (около 256^2). Благодаря этому, возможные ошибки в определении рассеянного поля для некоторых из таких пар не будут заметно влиять на качество итоговой картины пространственного распределения скорости звука и коэффициента поглощения в исследуемом объекте.

Рассмотренный корреляционный алгоритм позволяет сформировать данные рассеяния, являющиеся входными для первого шага процедуры восстановления акустических характеристик объекта. Кроме того, он позволяет получить оценку падающего поля на неоднородном крупномасштабном фоне (оцененном на первом шаге), что необходимо для формирования рассеянного поля на таком фоне. Полученная оценка рассеянного поля и сам крупномасштабный фон используются в качестве входных данных для второго шага процедуры восстановления.

Значения $\tau^{\max} = \tau^{\max}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}})$ и $\kappa^{\text{bg}} = \kappa^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}})$ выступают в качестве входных данных для первого шага томографической процедуры восстановления акустических характеристик рассеивателя. А именно, разность времен распространения сигналов в присутствии объекта $t_{\tilde{R}\tilde{S}}$ и в его отсутствие $t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ составляет, согласно (2.23), $t_{\tilde{R}\tilde{S}} - t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0 = -\tau^{\max}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}})$. Коэффициент $\kappa^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}})$ трактуется на первом шаге как отношение эффективных амплитуд $A_{\tilde{R}\tilde{S}}$ и $A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ соответствующих сигналов в присутствии и в отсутствие объекта, т.е. $\kappa^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}) \cong A_{\tilde{R}\tilde{S}} / A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$. Здесь индекс n в обозначениях величин $t_{\tilde{R}\tilde{S}} - t_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ и $A_{\tilde{R}\tilde{S}} / A_{\tilde{R}\tilde{S}}^0$ для краткости опущен. Упомянутые входные данные первого шага для удобства последующей обработки подвергаются пересортировке, т.е. переходу от индексов $(n, \tilde{R}, \tilde{S})$ к объединенному номеру (R, S) в абсолютной нумерации преобразователей $S, R = \overline{1, 256}$, соответствующей неподвижной антенной решетке. Процедура пересортировки подробно описана в [А 2 (раздел 8.1); 216].

Значения $t_{RS} - t_{RS}^0$ и $-\ln(A_{RS} / A_{RS}^0)$, приводимые далее в терминах номеров $S, R = \overline{1, 256}$, подаются на вход алгоритма первого шага для оценки крупномасштабных пространственных распределений скорости звука и амплитудного коэффициента поглощения. Дублированные входные данные $t_{RS} - t_{RS}^0$ и $-\ln(A_{RS} / A_{RS}^0)$, соответствующие одной и той же паре номеров (R, S) , но полученные при разных угловых позициях антенной решетки n , в простейшем варианте (использованном ниже) усредняются по n . Такое усреднение здесь возможно, поскольку влияние геометрических и фазовых поправок для преобразователей и смещение центра антенной решетки от центра ее вращения на первом шаге учитывать не имеет смысла. Это связано с тем, что влияние поправок практически компенсируется в силу вида входных данных $t_{RS} - t_{RS}^0$ и $-\ln(A_{RS} / A_{RS}^0)$; к тому же, разрешающая способность первого шага алгоритма восстановления низкая.

По полученным данным на первом шаге восстанавливаются крупномасштабные пространственные распределения скорости звука $c_0(\mathbf{r})$ и амплитудного коэффициента поглощения на каждой из рабочих частот $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$ или же амплитудного коэффициента поглощения $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$, усредненного по частоте ω в рабочем частотном диапазоне с шириной $\Delta\omega$. Восстановление осуществлялось, для сравнения, двумя алгоритмами. Один из них является переложением алгоритма рентгеновского томографирования в расходящихся пучках для акустических данных. Этот алгоритм, описанный в разделе 2.1 и называемый квазирентгеновским, – см. (2.1) и (2.2), – не учитывает эффекты рефракции акустических полей. Другой (альтернативный) алгоритм представляет собой решение методом наименьших квадратов системы линейных уравнений, формируемой путем рассмотрения временных сдвигов сигналов при восстановлении $c_0(\mathbf{r})$ и рассмотрения изменения амплитуды сигнала при восстановлении $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$ или $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ [А 15]. Этот алгоритм

будет условно называться МНК-алгоритмом. В его основе лежат следующие соотношения, имеющие место в лучевом приближении:

$$\int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_R} \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} dl_{\mathbf{r}} - \frac{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_S|}{c_0} = t_{RS} - t_{RS}^0 ;$$

$$\int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_R} \overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega} dl_{\mathbf{r}} - \overline{\alpha_0}^{\Delta\omega} |\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_S| = -\ln(A_{RS}/A_{RS}^0) .$$
(2.26)

Здесь и далее соотношения для коэффициента поглощения приводятся, для определенности, в терминах $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$; при рассмотрении $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$ вид соотношений не изменяется, но под A_{RS}^0 и A_{RS} понимаются значения, полученные из монохроматических составляющих сигналов. Значения скорости звука c_0 и коэффициента поглощения $\overline{\alpha_0}^{\Delta\omega}$ в иммерсионной жидкости в отсутствие пациента уже известны. Интегрирование в (2.26) осуществляется вдоль оси лучевой трубки $\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_R$, которая соединяет точки S и R , характеризующиеся радиус-векторами квазиточечного излучателя \mathbf{r}_S и квазиточечного приемника \mathbf{r}_R , соответственно (здесь точки S и R обозначаются так же, как и соответствующие индексы преобразователей); $dl_{\mathbf{r}}$ – длина элемента траектории в окрестности точки \mathbf{r} . Переход к дискретному аналогу уравнений (2.26) и рассмотрение различных пар “излучатель S – приемник R ” приводит к системе уравнений относительно неизвестных $c_0(\mathbf{r})$ и $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$.

Ниже рассматривается упрощенный вариант соотношений (2.26), в котором эффекты рефракции не учитываются, так же как и в квази рентгеновском алгоритме. В этом случае интегралы $\int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_R} \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} dl_{\mathbf{r}}$ и $\int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_R} \overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega} dl_{\mathbf{r}}$ рассматриваются вдоль *прямолинейных* трасс, соединяющих различные пары “излучатель–приемник”. Тогда обоим соотношениям (2.26) можно придать единообразный вид:

$$\int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}_R} \mathfrak{Z}(\mathbf{r}) dl_{\mathbf{r}} = \mathcal{D}_{RS} ,$$
(2.27)

где $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} - \frac{1}{c_0}$, $\mathcal{D}_{RS} = t_{RS} - t_{RS}^0$ при восстановлении скорости звука;

$\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega} - \overline{\alpha_0}^{\Delta\omega}$, $\mathcal{D}_{RS} \equiv -\ln(A_{RS}/A_{RS}^0)$ при восстановлении коэффициента поглощения.

При дискретизации соотношений (2.27) учитывается геометрия используемой томографической установки. Поскольку на первом и втором шагах происходит восстановле-

ние акустических характеристик непосредственно томографируемого объекта, то здесь за начало координат принимается неподвижный центр вращения антенной решетки O . Идеальные положения квазиточечных преобразователей соответствуют окружности радиуса $R_0 = 0.1536$ м с центром в начале координат O . Томографируемое двумерное сечение объекта полностью находится внутри круга меньшего радиуса $R_{\text{grid}} = 0.128$ м с тем же центром O . Вводимые ниже дискретизованные сетки в декартовой системе координат, которые используются на первом и втором шагах процедуры восстановления рассеивателя, задаются именно на основе значения R_{grid} . Поскольку на первом шаге ищутся крупномасштабные (с размерами не менее нескольких длин волн) пространственные распределения скорости звука и коэффициента поглощения, то достаточно найти *независимые* дискретизованные значения $\{\mathfrak{Z}(\mathbf{r}_m)\}$ соответствующей функции $\mathfrak{Z}(\mathbf{r})$. Дискретизованные значения $\{\mathbf{r}_m\}$ являются центрами грубой сетки, получаемой разбиением квадрата со стороной $2R_{\text{grid}} = 0.256$ м на 32×32 квадратные ячейки со стороной $q_1 = 2R_{\text{grid}}/32 = 32\Delta x = 8$ мм. Размер q_1 задается примерно равным разрешающей способности, ожидаемой на первом шаге процедуры восстановления рассеивателя. Приведенный для сопоставления масштаб $\Delta x = 2R_{\text{grid}}/1024 = 0.25$ мм соответствует тому мелкому шагу дискретизации координатной сетки, при котором получается итоговое изображение на втором шаге. Детали процедуры дискретизации подробно описаны в [А 2 (§ 8.3.2); А 15; 216].

При решении дискретизованного варианта системы (2.27) предполагается, что вся область томографирования (круг радиуса R_{grid}) попадает внутрь основной части главного лепестка диаграммы направленности каждого излучателя. Как и на нулевом шаге процедуры восстановления (при определении параметров иммерсионной жидкости, геометрических и фазовых поправок для преобразователей) при каждом фиксированном излучателе измерения данных первого шага осуществляются только теми приемниками, которые лежат в пределах центральной части главного лепестка диаграммы направленности данного излучателя. На первом шаге использовался сектор с угловой шириной около 80° , что намного больше, чем на нулевом шаге. Такая схема, в сочетании с определенным выше шагом дискретизации ячеек грубой сетки q_1 , обеспечивает количество независимых экспериментальных данных, которое больше, чем количество неизвестных. Для приведенных выше параметров задачи количество неизвестных не превышает $\cong 32^2$; общее количество данных для первого шага (с учетом их дублирования) составляет $N_{\text{tot}} \cong 256 \times K_{\tilde{\zeta}} K_{\tilde{R}}$, где $K_{\tilde{\zeta}} = 26$ – количество излучателей при каждой (из 256-ти) фиксированной угловой позиции антенной решетки, $K_{\tilde{R}} \cong 26 \times 80^\circ / 180^\circ \cong 11$ – количество приемников, попадающих в угловой сектор эффективного озвучивания при фиксированном излучателе. Не все N_{tot} данных являются независимыми из-за присутствия дублированных данных, однако количество независимых данных $N_{\text{indep}} \cong 256^2 \times 80^\circ / 180^\circ$ в $K'_{\text{redund}} \cong 30$ раз

больше количества неизвестных. Тем самым, система линейных уравнений (2.27) избыточна, и искомые пространственные распределения получаются в виде МНК-решения.

Значения $\{\mathfrak{S}(\mathbf{r}_m)\}$ в грубой сетке, оцененные МНК-способом, далее интерполируются на две более мелкие сетки, уже упоминавшиеся выше. Одна из них – промежуточная сетка со стороной ячейки дискретизации $q_{II} = 4\Delta x = 1$ мм и форматом 256×256 или менее – нужна для выполнения трассировки (по уже оцененному крупномасштабному фону) на втором шаге процедуры восстановления рассеивателя. Другая сетка – еще более мелкая, со стороной ячейки дискретизации $\Delta x = 0.25$ мм и форматом 1024×1024 или менее. Она нужна для объединения результатов восстановления, полученных на первом шаге (крупномасштабные детали) и втором шаге (тонкая структура), т.е. для формирования итогового изображения.

Погрешность δc в определении скорости звука c на первом шаге, вызванная погрешностями в определении изменения времени распространения сигнала в присутствии объекта, оценивается как

$$\frac{\delta c}{c} \cong \frac{1}{\sqrt{K'_{\text{redund}}}} \frac{\delta \tau}{L/c}. \quad (2.28)$$

Здесь $\delta \tau$ – значение погрешности в определении разности времен распространения сигнала $(t_{RS} - t_{RS}^0)$ корреляционным методом; L/c – характерное время распространения сигнала через объект с линейным размером L ; K'_{redund} – коэффициент избыточности независимых данных при восстановлении c на первом шаге. При $L \approx 0.2$ м, $c \approx 1500$ м/с, $K'_{\text{redund}} \cong 30$ и мажорантном значении погрешности в определении временного сдвига корреляционным методом $\delta \tau \cong 0.3 \Delta t \cong 0.06$ мкс (Δt – шаг дискретизации во времени, равный четверти периода на несущей частоте) оценка (2.28) дает $\frac{\delta c}{c} \cong 10^{-4}$, т.е. влияние

неточностей знания $(t_{RS} - t_{RS}^0)$ невелико. Гораздо существеннее ошибка, возникающая при оценке крупномасштабных пространственных распределений в связи с тем, что эффекты рефракции не учитываются. Однако эта ошибка в определенной мере компенсируется на втором шаге процедуры обработки.

Изложенные выше методики были реализованы в вышеупомянутой томографической установке научным сотрудником кафедры акустики Д.И.Зотовым [216]. В качестве иммерсионной жидкости использовалась вода (поглощение в ней пренебрежимо мало). Излучаемый импульс имел несущую частоту 1.25 МГц. Изначально с задающего генератора на усилитель подавался импульс в виде отрезка меандра длительности $5T_0$, где T_0 – период меандра, равный периоду на несущей частоте. При этом преобразователь, подключенный к выходу усилителя, за счет процесса начального нарастания сигнала и дальнейшего его затухания в колебательном контуре усилителя, излучал в иммерсионную жидкость зондирующий акустический сигнал длительности $\approx 15T_0$, т.е. около 12 мкс при несущей частоте 1.25 МГц. Ширина полосы частот излучаемого сигнала составляла пример-

но 300 кГц по уровню 0.7. Мощность сигнала, излучаемого в воду, составляла примерно 30 мВт/см^2 на расстоянии 1 см от поверхности излучателя. Чувствительность преобразователей по приему составляла примерно 10 мкВ/Па. Каждый регистрируемый сигнал содержал 2048 временных отсчетов при шаге дискретизации $\Delta t = T_0/4$. Характерное отношение сигнал/помеха для сигналов, рассеянных вперед, составляло около 50 дБ.

Скорость звука в воде в отсутствие исследуемого объекта, оцененная из (2.21) путем итерационного уточнения значения этой скорости и всех видов поправок, составляла $1480 \div 1495 \text{ м/с}$ (в зависимости от температуры воды на момент измерения), что согласуется с теоретически ожидаемым значением. В [А 2 (§ 8.3.2); А 15; 216] представлены результаты восстановления на первом шаге двумерных сечений (плоскостью томографирования) для различных объектов, имитирующих присутствие биологической ткани. Восстановление осуществляется по экспериментальным данным, зарегистрированным упомянутым ультразвуковым томографом. Например, на рис. 2.7 представлены сечения двух яиц, сваренных вкрутую и очищенных от скорлупы; бóльшая ось правого яйца располагалась перпендикулярно плоскости томографирования, а бóльшая ось левого яйца – горизонтально.

Сначала для восстановления использовался МНК-алгоритм (2.27). Как и ожидалось, полученные изображения объектов имеют низкое пространственное разрешение, соответствующее толщине лучевой трубки $0.5 \div 1 \text{ см}$. Тем не менее, на оцененном пространственном распределении скорости звука $c_0(\mathbf{r})$ в вареных яйцах (рис. 2.7а) четко различимы оболочка из белка и отличающийся от нее по акустическим характеристикам желток. Оценка $c_0(\mathbf{r})$ для яиц показывает, что скорость звука в них больше, чем в воде (рис. 2.7а); численные значения оцененного пространственного распределения $c_0(\mathbf{r})$ близки к истинным.

Восстановление пространственного распределения амплитудного коэффициента поглощения оказалось более проблематичным (рис. 2.7б). Дело в том, что амплитуда сигнала, проходящего через объект, изменяется не только за счет поглощения, но и за счет эффектов рефракции, которые особенно сильны на границе объекта [226]. Эффекты рефракции могут приводить даже к усилению амплитуды принятого сигнала для некоторых пар “излучатель–приемник”, по сравнению со случаем отсутствия объекта. Как следствие, значения коэффициента поглощения, оцененные без учета рефракции, получаются отрицательными для некоторых пространственных областей, т.е. как бы соответствующими коэффициенту усиления $\alpha_0(\mathbf{r}) < 0$, а не поглощения. В работе [246] отмечается другой важный артефакт, который, напротив, может приводить к завышенным значениям коэффициента поглощения. А именно, при решении обратной *двумерной* задачи возможная утечка энергии волны в третьем измерении, присутствующая в реальном эксперименте, не учитывается и, тем самым, трактуется как повышенное поглощение в плоскости томографирования.

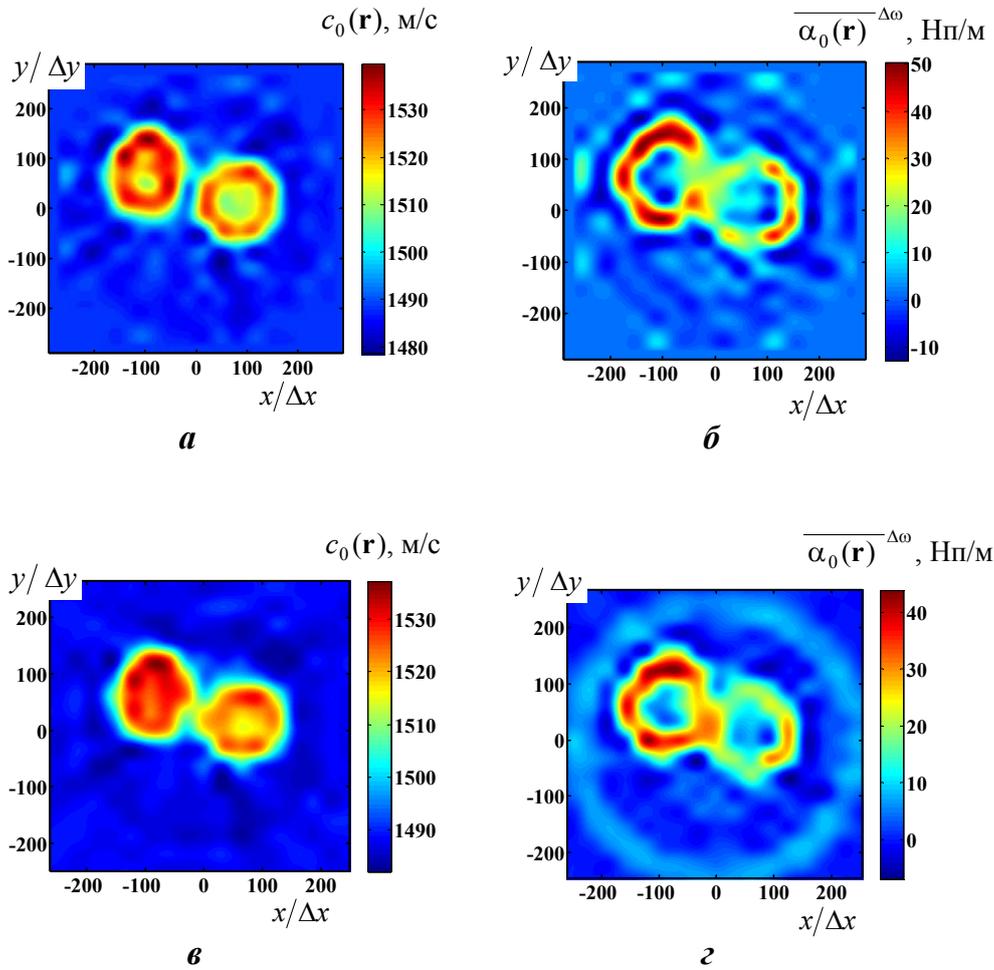


Рис. 2.7. Двумерные томограммы, восстановленные с грубым разрешением на первом шаге по реальным экспериментальным данным; один пространственный отсчет составляет $\Delta x = \Delta y = 0.25$ мм. В качестве имитатора биологической ткани взяты два вареных яйца; большая ось правого яйца располагалась перпендикулярно плоскости томографирования, а левого яйца – горизонтально:

- скорость звука (*a*) и амплитудный коэффициент поглощения (*б*), восстановленные МНК-алгоритмом без привлечения дополнительных требований на решение;
- скорость звука (*в*) и коэффициент поглощения (*г*), восстановленные квази рентгеновским алгоритмом.

Итак, при восстановлении возможно возникновение ложных зон усиления и поглощения. По этой причине, пространственное распределение $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$, восстанавливаемое в результате первого шага, не является, в общем случае, распределением только амплитудного коэффициента поглощения. Оно характеризует некоторое эффективное изменение амплитуды волны не только за счет поглощения, но и за счет эффектов рефракции. На втором шаге, т.е. при восстановлении тонкой структуры рассеивателя, действия с этим пространственным распределением соответствует операциям, описанным в (2.9), поскольку эти операции предназначены для корректировки как раз амплитуды рассеянного сигнала.

Для сравнения, восстановление пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения осуществлялось также квази рентгеновским алгоритмом (2.1), (2.2). Как МНК-алгоритм (рис. 2.7а, б), так и квази рентгеновский алгоритм (рис. 2.7в, г) дают близкие результаты, учитывая низкую разрешающую способность первого шага. Тем не менее, МНК-алгоритм, основанный на системе линейных уравнений, имеет преимущество над квази рентгеновским алгоритмом при работе с пациентами, поскольку обследуемый орган человека, опущенный в иммерсионную жидкость, может изменять температуру этой жидкости. В свою очередь, изменится скорость звука в иммерсионной жидкости. Эту новую скорость нельзя определить достаточно точно квази рентгеновским алгоритмом, поскольку из-за ограниченной ширины основного лепестка диаграммы направленности приемоизлучающих преобразователей не удастся получить достоверные входные данные, используемые на первом шаге, для тех пар “излучатель–приемник”, в которых излучатель и приемник расположены близко друг к другу. Однако данные от таких пар несут информацию о характеристиках иммерсионной жидкости, так как прямой сигнал от излучателя до приемника проходит только через иммерсионную жидкость, минуя исследуемый орган пациента. Квази рентгеновский алгоритм трактует данные, отсутствующие по упомянутой причине, как будто соответствующие одинаковым сигналам и, следовательно, неизменной скорости звука иммерсионной жидкости в присутствии и в отсутствие органа пациента. Это искажает результат восстановления, если скорость, на самом деле, изменялась. Напротив, МНК-алгоритм лишен этого недостатка, поскольку используемая в нем система линейных уравнений формируется только на основе реально измеренных данных; одновременно учитывается, что непосредственно к приемоизлучающим преобразователям примыкает слой иммерсионной жидкости с примерно постоянными, но подлежащими определению значениями скорости звука и коэффициента поглощения. Это позволяет найти скорость звука и коэффициент поглощения (если поглощение не является пренебрежимо малым, и требуется его определение) в иммерсионной жидкости уже в присутствии органа пациента. Кроме того, МНК-алгоритм строится на основе того же самого принципа трассировки, который далее используется на втором шаге процедуры восстановления. Тем самым, МНК-алгоритм лучше сочетается, по логике нахождения оценки крупномасштабных фоновых пространственных распределений, с процедурой обработки второго шага, что в итоге должно обеспечить хорошее качество восстановления тонкой структуры рассеивателя.

Второй шаг посвящен восстановлению тонкой структуры рассеивателя на неоднородном крупномасштабном фоне. На втором шаге процедуры восстановления найденные крупномасштабные пространственные распределения скорости звука $c_0(\mathbf{r})$ и коэффициента поглощения $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ играют роль уже известного неоднородного фона. Теперь стоит задача восстановления с высокой точностью и высоким разрешением (в идеале – вплоть до одной трети или даже одной четверти характерной длины волны) тонкой структуры объекта – деталей с размером от нескольких десятых долей длины волны до нескольких длин волн. А именно, решается обратная скалярная волновая задача по восстановлению характеристик рассеивателя на неоднородном фоне. Алгоритм восстановления второго шага подробно изложен при описании двухшагового алгоритма в разделе 2.1.

Кроме того, в [А 2 (раздел 8.4)] подробно описаны особенности практической реализации этого алгоритма для используемой разреженной антенной решетки с вращением, и приведены соответствующие математические выражения. Поэтому ниже кратко упоминаются только некоторые моменты второго шага.

При импульсном режиме, используемом в томографической установке, восстанавливается функция $V(\mathbf{r})$, приведенная в (2.5). Такая тонкая структура $V(\mathbf{r})$ восстанавливается на втором шаге в приближении однократного рассеяния, но с учетом неоднородного фона. При этом входные данные этого шага – рассеянные сигналы – формируются согласно (2.25) как разность измеренных волновых полей u (с учетом их амплитуды и фазы) и первичных полей u_0^{bg} , однако рассчитанных в присутствии крупномасштабного неоднородного фона:

$$u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t) = u(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t) - u_0^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t),$$

где $u_0^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t) \approx \kappa^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}) u_0(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t + \tau^{\text{max}})$; $u_0(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t)$ – первичное зондирующее поле в иммерсионной жидкости. Здесь аргументы полей написаны в терминах угловой позиции кольцевой антенной решетки $n = \overline{0, 255}$, а также реальных номеров излучателя и приемника $\tilde{S}, \tilde{R} = \overline{1, 26}$. В терминах абсолютных номеров эффективных 256-ти приемоизлучающих преобразователей $S, R = \overline{1, 256}$ при неподвижной решетке индексам $(n, \tilde{R}, \tilde{S})$ сопоставляется объединенный номер ($R = R_n, S = S_n$), как упоминалось выше.

Поскольку речь идет не об идеальных модельных данных, а о реальных томографических измерениях, то для обеспечения высокого разрешения изображения, восстановленного на втором шаге, необходимо учитывать и компенсировать при обработке сигналов не только неоднородности фона, но и все факторы, которые могут нарушать точную фазировку антенной решетки. К ним относятся геометрические и фазовые поправки для приемоизлучающих преобразователей, а также смещение $\overline{OO'}$ геометрического центра антенной решетки O' от неподвижного центра ее вращения O . Эти корректирующие поправки находятся предварительно на нулевом шаге процедуры восстановления. Важно, что входные дублированные данные второго шага $u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(R_n, S_n, t)$ усреднять по n нельзя, так как они несут информацию не только об амплитуде волны, но и о фазе. При этом дублированные данные для фиксированной пары абсолютных номеров (R, S) получаются за счет разных пар реальных преобразователей (\tilde{R}, \tilde{S}) , и, следовательно, им соответствуют *разные* корректирующие поправки. Это обстоятельство исключает возможность усреднения входных данных второго шага, поскольку разные поправки по-разному будут влиять на фазу рассеянных сигналов на этапе их фазирования.

Алгоритм, используемый на втором шаге и предназначенный для восстановления тонкой структуры объекта, предполагает обработку рассеянных сигналов в комплексном аналитическом представлении. В связи с этим, после формирования действительного рассеянного сигнала при неоднородном фоне $u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(n, \mathbf{r}_{\tilde{R}}, \mathbf{r}_{\tilde{S}}, t)$ следует перейти к его ком-

плексной аналитической версии путем добавления гильбертово сопряженной и инвертированной по знаку мнимой части.

Все виды корректирующих поправок необходимо учитывать только при формировании фазирующего момента времени $t_{RS}(\mathbf{r})$, который задается выражением типа (2.8) и является ответственным, фактически, за фазу рассеянного сигнала. Другой вариант учета уже найденных поправок, который основан на предварительной коррекции (пересчете) рассеянных полей, предложен в [А 40; А 80]. В этом случае поля, измеренные в присутствии поправок, пересчитываются на идеальный случай нулевых поправок. Принципиальная роль корректирующих поправок в обеспечении хорошего качества восстановления тонкой структуры рассеивателя иллюстрируется в [А 2 (раздел 8.4); А 39; 216].

Проведенные отладочные эксперименты показали необходимость обеспечения высокой степени идентичности всех преобразователей. Это является принципиальным моментом как для получения итоговых изображений с высокой разрешающей способностью (не хуже 0.5 мм при работе в мегагерцовом диапазоне частот), так и для возможности восстановления правильных количественных характеристик различных участков органа.

Для обработки экспериментальных данных использовались, в качестве математических сопроцессоров, две видеокарты NVidia GeForce GTX 590 и GTX 560, обладающие в сумме примерно 1400 параллельно работающими ядрами. Привлечение технологии параллельного программирования CUDA на видеокартах позволило восстанавливать итоговое изображение форматом 1024×1024 отсчетов всего за несколько минут. Для сравнения, полная процедура аналогичных расчетов на двухядерной ЭВМ с помощью программы на языке C++ с привнесением элементов программирования на языке Ассемблер занимает около 18 часов.

В эксперименте по восстановлению двухшаговым алгоритмом тонкой структуры на неоднородном фоне имитатором биологической ткани служило сваренное вкрутую и очищенное от скорлупы куриное яйцо. Тонкая структура создавалась с помощью медной проволоки диаметром 0.3 мм, которой в двух местах прокалывалось яйцо [А 15; 216]. При проколах проволока располагалась перпендикулярно плоскости томографирования. После прокола в первом месте проволока была вынута из яйца, за счет чего образовавшаяся полость стала заполненной водой; после прокола во втором месте проволока оставалась внутри яйца в процессе снятия экспериментальных данных. Как и ожидалось, двумерная томограмма, получаемая на первом шаге процедуры восстановления (рис. 2.8а), имеет низкое пространственное разрешение, в соответствии с толщиной лучевой трубки 0.5 ÷ 1 см. Однако на изображении, полученном на втором шаге (рис. 2.8б), видны оба места проколов яйца медной проволокой, причем размеры проколов близки к ожидаемому разрешению второго шага (около одного дискретного отсчета итоговой мелкой сетки, равного 0.25 мм), что соответствует действительности. Амплитуды оценки $|\hat{V}|$ в местах проколов разные, поскольку один прокол был заполнен водой, а в другом оставалась проволока.

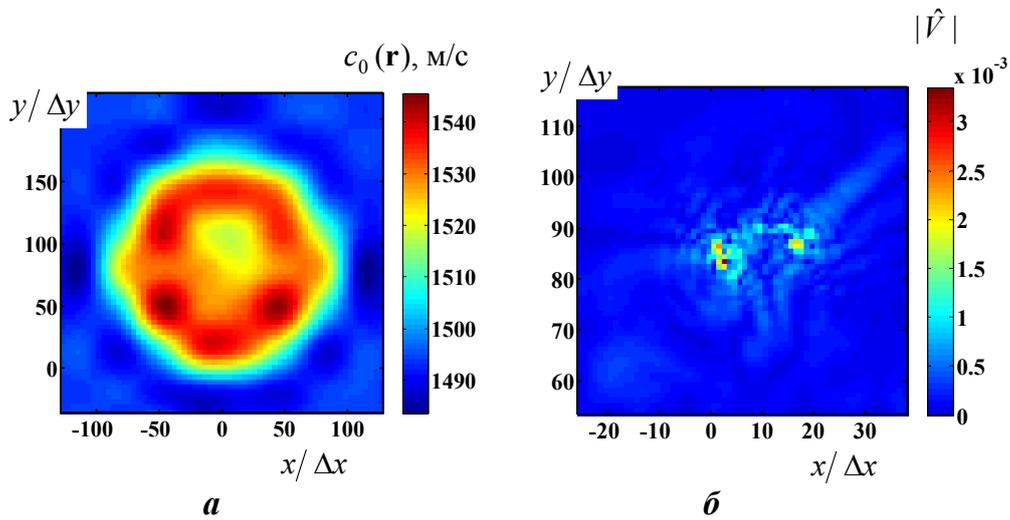
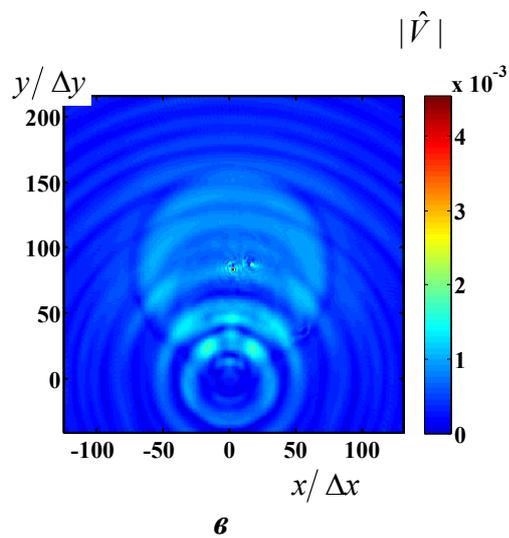


Рис. 2.8. Двумерные томограммы для рассеивателя в виде куриного яйца, проткнутого в двух местах медной проволокой; $\Delta x = \Delta y = 0.25$ мм: пространственное распределение скорости звука, восстановленное на первом шаге с низким разрешением (а); модуль функции, восстановленной на втором шаге и описывающей тонкую структуру рассеивателя (б); восстановление в приближении однократного рассеяния на однородном фоне (в).



Привнесение в фантом металлической проволоки не является вполне адекватной моделью для мелкомасштабных неоднородностей биологической среды. В данном случае, полученные с помощью таких неоднородностей результаты показывают принципиальную возможность восстановления акустических характеристик с высоким разрешением. В то же время, восстановление в приближении однократного рассеяния в предположении однородного фона, т.е. без первого шага, дает неудовлетворительный по качеству результат (рис. 2.8в).

В отличие от первого шага алгоритма, на котором фоновые значения медленности и коэффициента поглощения восстанавливаются непосредственно в абсолютных единицах, мелкомасштабные поправки к фону на втором шаге восстанавливаются в виде оценки $\hat{V}(\mathbf{r})$ комплексной функции $V(\mathbf{r})$, согласно (2.5). Поскольку экспериментальные данные обрабатываются, на настоящем этапе исследования, только в одном частотном диапазоне, то при разделении вкладов в полученную оценку $\hat{V}(\mathbf{r})$ от различных компонент рассеивателя наличие плотностного члена в (2.5), содержащего $\rho(\mathbf{r})$, не учитывается. Тем самым, исходя из выражения (2.12) для $\hat{V}(\mathbf{r})$ и принимая во внимание уже оцененные фоновые

значения скорости звука $c_0(\mathbf{r})$ и эффективного амплитудного коэффициента $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$, находятся, согласно (2.13), только неоднородности скорости звука и коэффициента поглощения по отношению к крупномасштабному неоднородному фону. Далее рассчитываются итоговые значения скорости $c(\mathbf{r})$ и коэффициента поглощения $\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$. Фактически, эти итоговые значения являются результатом объединения фоновых значений, полученных на первом шаге процедуры восстановления, и поправок к ним, полученных на втором шаге.

Итак, можно еще раз обратить внимание на прием использования прямолинейных трасс. Он заключается в том, что на первом шаге процедуры восстановления неоднородный крупномасштабный фон оценивается в приближении *прямолинейного* распространения лучей, а на втором шаге фазировка рассеянных сигналов делается опять же по *прямолинейным* траекториям на восстановленном фоне. В итоге, качество восстановления оказывается приемлемым. Этот прием привлекателен для практики, поскольку он не требует введения дополнительных процедур по расчетам многочисленных траекторий с учетом рефракции.

Тем не менее, качество восстановленных пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения будет улучшено, если при трассировке на первом и втором шагах алгоритма восстановления учитывать, во-первых, искривление траекторий лучей из-за рефракции. Во-вторых, на первом шаге алгоритма можно принять во внимание, что изменение амплитуды поля по мере его распространения вызывается не только присутствием поглощения в области томографирования, но и эффектами рефракции. Учет этого позволяет восстановить значения $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$, характеризующие именно амплитудный коэффициент поглощения, а не эффективный амплитудный коэффициент (как это было в случае прямолинейных трасс). В такой ситуации на первом шаге возможно, например, итерационное уточнение искомым крупномасштабных пространственных распределений $c_0(\mathbf{r})$ и $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ по схеме, кратко изложенной в [А 2 (раздел 8.4)].

Глава 3. Статистические оценки в обратных задачах рассеяния

Область применения алгоритмов типа двухшаговых (см. главу 2) ограничена тем условием, что поправки к грубо оцененным на первом шаге характеристикам рассеивателя должны носить борновский характер. Пути расширения области применения этих алгоритмов требуют, прежде всего, отказа от использования лучевых методов и перехода к последовательному волновому рассмотрению на всех этапах многошаговой итерационной процедуры.

Обзор многошаговых итерационных методов дан в [А 17; 141; 142 (главы VI, VII); 227]. Исходными в этих итерационных подходах являются уравнения Липпмана–Швингера в различных формах их написания: например, (1.28) и (1.30) в координатном представлении или (1.32) и (1.34) в пространственно-спектральном представлении, называемом также “импульсным” представлением, или **К**-представлением. В обоих представлениях имеются два семейства уравнений. Первое семейство связывает данные рассеяния с характеристиками рассеивателя, но при этом использует неизвестные функции, играющие “внутреннюю” роль. Для таких “внутренних” неизвестных рассматривается второе семейство уравнений. Сама по себе возможность рассмотрения либо двух семейств уравнений, либо, после исключения внутренних неизвестных, единого семейства, но резко возросшей сложности, позволяет разделить итерационные процедуры на несколько классов. С точки зрения использования внутренних неизвестных – это одноэтапные и двухэтапные процедуры. Каждая из них может реализоваться в координатном или пространственно-спектральном (“импульсном”) представлении.

Во всех таких итерационных схемах видна общая черта – необходимость восстановления *полной* полевой картины рассеяния (т.е. восстановления поля внутри области рассеяния или восстановления вторичных источников, порождающих рассеянное поле) для каждой из используемых частот и каждого вида используемого первичного поля (направления падения плоской волны или положения излучателя волны и т.д.). Это необходимо осуществлять даже в том случае, если лишь часть полевой информации использовалась в качестве “данных рассеяния”.

Положительная черта итерационного подхода состоит в том, что в нем можно использовать фрагментарные данные, полученные при различной геометрии эксперимента и различных частотах. В этих методах не накладывается жестких требований на полноту данных рассеяния отдельно для каждой из частот или каждой конфигурации падающего поля в эксперименте, а любая априорная и апостериорная информация может быть также использована. Объединение всех доступных в эксперименте данных рассеяния в процессе итерационного решения часто дает положительный результат – приемлемое качество восстановления характеристик рассеивателя. Однако для использования итерационных методов имеется существенное ограничение: итерации сходятся (причем достаточно быстро) для рассеивателей средней силы. В случае же сильных рассеивателей, с которыми, как правило, приходится иметь дело в задачах медицинского профиля, дефектоскопии, океанологии, физики атмосферы, обеспечение сходимости итераций является серьезной проблемой. Сходимость может быть обеспечена ценой значительного усложнения итераци-

онной схемы, существенно увеличивающего вычислительные затраты. Кроме того, даже в случае использования неполных данных, впоследствии возникает необходимость решения полного множества вспомогательных задач (с целью нахождения внутреннего поля или вторичных источников) для каждого из положений излучателя или каждой из частот облучения, использовавшихся при получении исходных данных. При этом размерность и сложность вычислений вспомогательных задач сокращаются незначительно, по сравнению со случаем полных данных.

В монографии [А 2] итерационным методам решения посвящен раздел 5.4. Вначале рассматривается одноэтапный “наивный”, т.е. простой, алгоритм в координатном представлении [А 17; 141; 227–231] и в **К**-представлении [А 17]. Вторым видом простых итерационных схем являются двухэтапные итерационные схемы. В этих схемах каждый итерационный шаг выполняется в два этапа. В координатном представлении такие схемы описаны в [143; 146; 227; 230–232], а в **К**-представлении – в [141; 185; 227; 230; 231]. Область сходимости таких алгоритмов ограничена рассеивателями средней силы (1.43). Улучшение процедуры и расширение связанных с ней возможностей достигается за счет привлечения градиентно-итерационных методов, т.е. за счет *одновременной* оценки поправок к функции рассеивателя и к внутреннему полю (или вторичным источникам), хотя бы с точностью, не включающей эффекты второго порядка малости. Один из простейших алгоритмов этого типа рассмотрен в [141; 233]. Отмечается, что попеременное решение уравнений относительно поправок [234] приводит, фактически, к уже упоминавшейся двухэтапной процедуре. В то же время, в случае одновременной оценки дополнительное расширение области сходимости градиентно-итерационных алгоритмов достигается умножением поправок на весовые коэффициенты. Вопрос о выборе таких коэффициентов обсуждался в ряде работ по итерационным методам [227; 235 (гл. 7); 236].

Размер области сходимости градиентно-итерационных процедур относительно поправок или простых процедур относительно полных значений неизвестных может быть существенно расширен путем постепенного “включения” эффектов перерасеяния. Для этого необходимо в уравнения рассеяния ввести коэффициент, регулирующий роль процессов многократного рассеяния [А 17; 227; 230; 234; 237].

Другой тип градиентно-итерационных схем, основанный на использовании квадрата нормы невязки (т.е. некоторой единой количественной характеристики точности решения) между экспериментально измеренными полями и итерационно оцененными полями, предложен в [238]. Использование данных путем процедуры обратного распространения сигнала невязки из области наблюдения в какую-либо другую область при многолучевом облучении широкополосными сигналами с существенным успехом используется в цикле работ [239–243], обсуждаемых ниже в разделе 4.1. Развитие этого подхода используется также в обширных текстах патентов [244; 245], полученных S. A. Johnson с соавторами. В последние годы этот подход был реализован в виде конкретных технических прототипов [246–254], краткое описание которых будет дано в разделе 4.1.

Большое количество вычислительных операций, которые связаны с решением конкретных, имеющих перспективы дальнейшего практического приложения, обратных задач томографического восстановления неоднородностей в целях медицинского диагностирования, заставило авторов работы [255] прийти к выводу, что решение таких задач требует

применения суперкомпьютерных технологий. В этой работе применяется градиентно-итерационный метод поиска решения на основе минимизации квадратичной невязки.

На важность вопросов сходимости обращено внимание в работе [256]. Расширению размеров области сходимости выбранной итерационной схемы способствует, как упоминалось, введение взвешивающих коэффициентов перед искомыми поправками, а также метод постепенного “включения” эффектов перерасеяния. Этой же цели служит и метод постепенного “включения” рассеянного поля. В основе данного метода [140; 141; 142 (§ 7.1); 230] лежит идея восстановления функции рассеивателя по частям. В [142 (§ 7.1); 257] предложены несколько вариантов алгоритмов, основанных на методе постепенного включения рассеянного поля, но упрощенных, с вычислительной точки зрения, ценой тех или иных приближений.

Раздел 3.1. Оценка характеристик рассеивателя методом максимальной апостериорной вероятности

Упомянутые выше итерационные методы оценки неизвестных характеристик рассеивателя были получены без принятия во внимание фактически статистического характера процесса такого рассеяния. Действительно, используемые данные рассеяния с неизбежностью содержат ошибки измерения, статистические свойства которых в той или иной степени известны; относительно вида рассеивателя обычно также имеется та или иная информация. Эта априорная информация может быть эффективно использована при последовательном рассмотрении обратной задачи рассеяния как статистической задачи оценивания.

Обратные задачи рассеяния являются, как и большинство обратных задач, некорректными, т.е. их решения могут быть весьма критичными к ошибкам в измерениях. Нелинейность обратных задач рассеяния относительно неизвестных характеристик рассеивателя усугубляет положение, делая проблему регуляризации значительно более многогранной. Подход к решению обратных задач как к статистической оценке является традиционным в статистической радиофизике.

В настоящем разделе рассматривается статистический подход к задаче восстановления акустических характеристик рассеивающих неоднородностей среды (например, фазовой скорости и коэффициента поглощения) на основе измеренных в эксперименте зашумленных данных рассеяния. Поскольку анализируемая обратная задача рассеяния принадлежит к классу некорректных задач, то для обеспечения устойчивости решения требуется привлечение методов регуляризации. К настоящему времени детально разработаны методы решения линейных некорректных задач. К ним, в частности, относятся статистические линейные задачи, оптимальная регуляризация в которых основана на использовании априорной статистической информации [258; 259] и сводится к тому или иному виду фильтрации. Вместе с тем, методы решения нелинейных некорректных задач исследованы с меньшей степенью полноты и продолжают активно развиваться [260; 261]. Упомянутая нелинейность решения относительно входных данных рассеяния и, возможно, одновременная нелинейность самих данных относительно искомым неизвестных функций (эти

функции описывают рассеиватель и его вторичные источники или внутренние поля) делают задачу весьма трудной и многоплановой.

Ниже используется общая статистическая постановка решения обратной задачи рассеяния, как задачи оптимального (в смысле использования метода максимальной апостериорной вероятности) оценивания функции рассеивателя $v(\mathbf{r})$. Алгоритм решения строится путем минимизации функционала. При построении функционала используется невязка между экспериментальными данными рассеяния и их оценками, следующими из уравнений типа Липпмана–Швингера, а также априорная информация о корреляционных свойствах помех и искомым характеристикам рассеивателя. Кроме того, привлекаются уравнения связи, которые включаются непосредственно в функционал или, в упрощенном варианте, используются как отдельные дополнительные уравнения.

Надо отметить, что в [262] рассматривается подобная постановка задачи. Однако при этом делается очень серьезное упрощение – предполагается отсутствие неизлучающих конфигураций вторичных источников [А 1 (раздел 1.1)], и, как следствие, обратимость оператора распространения с ядром в виде функции Грина. К сожалению, такое предположение справедливо только для некоторых моделей рассеивателей, когда имеется существенная априорная информация о виде функции, описывающей конкретный рассеиватель [А 1 (раздел 1.2)]. Например, это имеет место для модели рассеивателя, состоящего из совокупности неизвестных по силе точечных неоднородностей, местоположение которых известно. Напротив, алгоритмы, излагаемые далее в настоящем разделе, не содержат подобных сужающих предположений, а процессы перерассеяния учитываются в максимально строгой математической постановке. В итоге получаются регуляризованные оценки пространственного распределения скорости звука и коэффициента поглощения в пространственно-локализованном рассеивателе. Платой за оптимальность подхода является усложнение результирующей системы нелинейных уравнений и сравнительно большой (однако, как показало численное моделирование, приемлемый для современных вычислительных мощностей) объем вычислительных затрат.

§ 3.1.1. Оценки в координатном представлении и в пространственно-спектральном представлении

В большинстве подходов определяющую роль играет система уравнений Липпмана–Швингера. В \mathbf{r} -пространстве, т.е. в координатном представлении, эта система в случае зашумленных монохроматических данных рассеяния имеет следующий вид:

$$u(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{y} - \mathbf{r}) v(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} + n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) , \quad (3.1)$$

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}', \mathbf{x}) d\mathbf{r}' ; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \quad \mathbf{r}' \in \mathfrak{R} .$$

Здесь, как и выше, \mathcal{X} – область локализации источников первичного излучения u_0 ; \mathcal{R} – область рассеяния; \mathcal{Y} – область приема; G_0 – функция Грина для фоновой среды, считающейся однородной, изотропной и непоглощающей; $n(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – шумовая добавка, т.е. собственно шумы и ошибки измерений. В качестве параметра $\alpha \in \mathcal{A}$ излучаемого поля $u_0(\mathbf{r}, \alpha)$ и $u_0(\mathbf{y}, \alpha)$, для определенности, но без ограничения общности, здесь фигурирует точка \mathbf{x} , характеризующая положение излучателя, т.е. $u_0(\mathbf{r}, \alpha) \equiv u_0(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ и $u_0(\mathbf{y}, \alpha) \equiv u_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. При написании аргументов функций зависимость от частоты ω опускается, поскольку будет рассматриваться монохроматический режим. Для простоты изложения в [А 2 (п. 5.4.3.1); А 18; 263] предполагается, что функция рассеивателя $v(\mathbf{r}) = \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right)$ представлена только неоднородностью фазовой скорости звука $c(\mathbf{r})$ относительно фоновой скорости c_0 . Уравнения (3.2) – это вспомогательные интегральные уравнения для определения полей внутри области рассеяния.

Статистическая оценка функции $v(\mathbf{r})$ методом максимальной апостериорной вероятности основана на минимизации, в данном случае, неквадратичного функционала $\mathcal{F}_{\text{func}}$ [А 2 (п. 5.4.3.1); А 18; 263]. Он включает в себя, во-первых, квадратичную форму $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ от невязки с экспериментальными данными. Ядром этого функционала $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$ является обратная корреляционная функция помехи. Во-вторых, ограничительные соотношения на внутренние поля, вытекающие из уравнений связи (3.2), включены в функциональное слагаемое $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$. Оно снабжено функциональными множителями Лагранжа $\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{x})$. В-третьих, априорная статистическая информация о рассеивателе, добавляющаяся с весовым множителем β , отражена в функциональном слагаемом $\mathcal{F}_{\text{apг}}$.

Пусть помеха $n(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ и искомая случайная неоднородность $v(\mathbf{r})$ являются реализациями нормальных процессов с нулевыми средними и корреляционными функциями $N(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1)$ и $\mathcal{V}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, соответственно. Корреляционная функция (строго говоря, это функция когерентности при комплекснозначном представлении полей [А 1 – глава 2]) для помехи $n(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ определяется как $N(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) \equiv \langle n(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) n^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) \rangle$; символ $\langle \bullet \rangle$ обозначает усреднение по заданному множеству. Если аргументы $(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2)$ рассматривать как объединенный первый аргумент, а $(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1)$ – как объединенный второй аргумент, то значения $n(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2)$ при переборе $(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2)$ формируют функцию-столбец, а значения $n^+(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1)$ – функцию-строку; здесь верхний символ “+” обозначает операцию эрмитова сопряжения. Тогда корреляционная функция в “матричной” записи имеет вид $N(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) = \langle n(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) n^+(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) \rangle$. Аналогично, корреляционная функция для рассеивателя $\mathcal{V}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \equiv \langle v(\mathbf{r}_2) v^*(\mathbf{r}_1) \rangle$, содержащая информацию о характере рассеива-

теля, в “матричной” записи $\mathcal{V}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \langle v(\mathbf{r}_2) v^+(\mathbf{r}_1) \rangle$ предполагает трактовку $v(\mathbf{r}_2)$ как функции-столбца и $v^+(\mathbf{r}_1)$ – как функции-строки. Обратные корреляционные функции $N^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1; \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2)$ и $\mathcal{V}^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеют другой порядок объединенных аргументов, по сравнению с исходными для них функциями $N(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1)$ и $\mathcal{V}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$.

Задача оценивания методом максимальной апостериорной вероятности сводится к минимизации функционала

$$\mathcal{F}_{\text{func}} \equiv \mathcal{F}_{\mathcal{Y}} + \mathcal{F}_{\mathfrak{R}} + \mathcal{F}_{\text{apr}}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{Y}} = & \iint_{\mathcal{X}} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \iint_{\mathcal{Y}} d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \times \\ & \times \left[u(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) - u_0(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) - \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{y}_1 - \mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_1, \mathbf{x}_1) d\mathbf{r}_1 \right]^+ \\ & \times N^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1; \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \left[u(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) - u_0(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) - \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{y}_2 - \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_2) u(\mathbf{r}_2, \mathbf{x}_2) d\mathbf{r}_2 \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathfrak{R}} = & \int_{\mathcal{X}} d\mathbf{x}' \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{r}' \lambda^+(\mathbf{r}', \mathbf{x}') \times \\ & \times \left[u(\mathbf{r}', \mathbf{x}') - u_0(\mathbf{r}', \mathbf{x}') - \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') v(\mathbf{r}'') u(\mathbf{r}'', \mathbf{x}') d\mathbf{r}'' \right]^+ \\ & + \int_{\mathcal{X}} d\mathbf{x}' \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{r}' \left[u(\mathbf{r}', \mathbf{x}') - u_0(\mathbf{r}', \mathbf{x}') - \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') v(\mathbf{r}'') u(\mathbf{r}'', \mathbf{x}') d\mathbf{r}'' \right]^+ \lambda(\mathbf{r}', \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}_{\text{apr}} = \beta \iint_{\mathfrak{R}} v^+(\mathbf{r}_1) \mathcal{V}^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (3.6)$$

Надо отметить, что в работе [264] используются ограничения, основанные непосредственно на волновом уравнении для наблюдаемых полей.

В приведенных выражениях (3.4)–(3.6) используется операция эрмитова сопряжения (верхний символ “+”), поскольку имеется в виду возможная матричная форма записи уравнений, удобная при организации численных расчетов. Однако при применении этой операции к конкретным функциям требуется аккуратность в написании порядка аргументов. Здесь надо обратить внимание, что в результате применения операции эрмитова сопряжения к функции-столбцу аргументы у получающейся функции-строки не должны меняться. В результате же применения операции эрмитова сопряжения к функции-матрице порядок аргументов (или объединенных аргументов), отвечающих за формирование строк

и столбцов функции-матрицы, меняется на противоположный. В уравнениях Липпмана–Швингера (3.4) и (3.5) поля $u(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ и $u(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, стоящие как вне знака интеграла, так и под знаком интеграла, а также функциональные множители $\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ выступают в роли функций-столбцов с соответствующими объединенными аргументами (\mathbf{y}, \mathbf{x}) и (\mathbf{r}, \mathbf{x}) . Тем самым, эрмитово сопряженные к ним функции-строки $u^+(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $u^+(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, $\lambda^+(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ имеют такой же порядок аргументов. В то же время, функция $v(\mathbf{r})$, стоящая в тех же уравнениях Липпмана–Швингера (3.4) и (3.5) под знаком интеграла, ведет себя иным образом: функции $v(\mathbf{r})$ в “матричной” записи сопоставляется диагональный оператор-матрица $\text{Diag}\{v(\mathbf{r})\}$, и тогда эрмитово сопряженный к нему оператор имеет комплексно сопряженные элементы $\text{Diag}\{v^*(\mathbf{r})\}$, поскольку функции $v(\mathbf{r})$ могут быть комплексны по их физическому смыслу, в случае рассеивающей неоднородности с поглощением. Эрмитово сопряжение функций-матриц $G_0(\mathbf{y} - \mathbf{r})$ и $G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$ дает функции-матрицы с элементами $G_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{y}) = \{G_0^*(\mathbf{y} - \mathbf{r})\}$ и $G_0^+(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') = \{G_0^*(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\}$. Наконец, в слагаемом $F_{\text{apг}}$ (3.6), несущем априорную статистическую информацию о рассеивателе, $v(\mathbf{r})$ рассматривается уже как функция-столбец, и $v^+(\mathbf{r})$ рассматривается как функция-строка, в сочетании с обратной корреляционной функцией-матрицей $\mathcal{V}^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

Функционал F_{func} (3.3) варьируется по функциональным неизвестным $v^*(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, где \mathbf{r} – произвольный, но фиксированный при вариации вектор; $d\mathbf{r}$ – элементарный объем с центром в точке \mathbf{r} . Эта вариация приводит к интегральному уравнению (при каждом фиксированном \mathbf{r})

$$\frac{\delta F_{\text{func}}}{\delta[v^*(\mathbf{r})d\mathbf{r}]} = 0, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned} & - \iint_{\mathcal{X}} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \iint_{\mathcal{Y}} d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 u^+(\mathbf{r}, \mathbf{x}_1) G_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{y}_1) N^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1; \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \times \\ & \times \left[u(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) - u_0(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) - \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{y}_2 - \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_2) u(\mathbf{r}_2, \mathbf{x}_2) d\mathbf{r}_2 \right] - \\ & - \int_{\mathcal{X}} d\mathbf{x}' \int_{\mathfrak{R}} d\mathbf{r}' u^+(\mathbf{r}, \mathbf{x}') G_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda(\mathbf{r}', \mathbf{x}') + \beta \int_{\mathfrak{R}} \mathcal{V}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 = 0 . \end{aligned} \quad (3.7)$$

При учете процессов перерасеяния волн, уравнение (3.7) необходимо дополнить результатом варьирования функционала F_{func} (3.3) по значениям вспомогательных неизвестных – функциональных коэффициентов $\lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{x})d\mathbf{r}d\mathbf{x}$ и внутреннего поля

$u^*(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} d\mathbf{x}$. Тогда условие экстремума $\frac{\delta F_{\text{func}}}{\delta [\lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} d\mathbf{x}]} = 0$ приводит к уравнению

Липпмана–Швингера (3.2), а условие $\frac{\delta F_{\text{func}}}{\delta [u^*(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} d\mathbf{x}]} = 0$ приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
& -v^+(\mathbf{r}) \int_{\mathcal{X}} d\mathbf{x}_2 \iint_{\mathcal{Y}} d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 G_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{y}_1) N^{-1}(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}; \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \times \\
& \times \left[u(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) - u_0(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) - \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{y}_2 - \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_2) u(\mathbf{r}_2, \mathbf{x}_2) d\mathbf{r}_2 \right] + \quad (3.8) \\
& + \lambda(\mathbf{r}, \mathbf{x}) - v^+(\mathbf{r}) \int_{\mathfrak{R}} G_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda(\mathbf{r}', \mathbf{x}) d\mathbf{r}' = 0 .
\end{aligned}$$

Полученная система нелинейных уравнений (3.7), (3.2), (3.8) может быть решена методом последовательных итераций. Схема решения обратной задачи рассеяния в статистической постановке подробно обсуждается в [А 2 (п. 5.4.3.1); А 18; 263]. Эта схема приводит к регуляризованной оценке рассеивателя $v(\mathbf{r})$, учитывающей процессы многократного рассеяния. Начальной оценкой рассеивателя в итерационной процедуре может служить сглаженная борновская оценка [А 2 (п. 5.4.3.1); А 18; 263]. Тогда из (3.2) находится оценка поля $u(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, и далее из (3.8) на основе полученных текущих значений $v(\mathbf{r})$ и $u(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ оцениваются значения $\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{x})$. После этого из (3.7) уточняется оценка $v(\mathbf{r})$, и описанный итерационный цикл повторяется.

Ниже гораздо более детально излагается и иллюстрируется численным моделированием подобный подход, но в *пространственно-спектральном представлении*, т.е. в \mathbf{K} -пространстве, фурье-сопряженном к \mathbf{r} -пространству. Пространственно-спектральное представление удобно в случае однородной изотропной непоглощающей фоновой среды, использования плоских зондирующих волн и разложения рассеянных полей по плоским волнам, что и предполагается далее. Однако такие предположения не ограничивают общности обсуждаемого ниже, в соответствии с [А 2 (п. 5.4.3.2); А 19; А 66; 263], метода построения оптимального решения и выводов, следующих из результатов его модельной реализации.

В координатном представлении оценке подлежат непосредственно функции рассеивателя $v(\mathbf{r})$ и полного внутреннего поля $u(\mathbf{r}, \alpha)$. В качестве параметра $\alpha \in \mathcal{A}$ излучаемого поля будет рассматриваться волновой вектор $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_\alpha$ (нижний индекс α далее опускается) падающей монохроматической плоской волны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. В пространственно-спектральном представлении оцениваются пространственный спектр рассеивателя

$\tilde{v}(\xi) \equiv \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \exp(-i \xi \mathbf{r}) d\mathbf{r}$ и пространственный спектр $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ вторичных источников

$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv v(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, возникающих в области рассеяния:

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) \equiv \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i \xi \mathbf{r}) d\mathbf{r} ; \quad \xi \in K, \quad \mathbf{k} \in K_0 .$$

Вектор пространственной частоты ξ принадлежит D -мерному пространству K , т.е. \mathbf{K} -пространству векторов пространственной частоты со всевозможными направлениями и длиной. Вектор \mathbf{k} принадлежит пространству K_0 волновых векторов с фиксированной длиной $|\mathbf{k}| = k_0$, где k_0 – волновое число в фоновой однородной среде.

Экспериментальными данными рассеяния $\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{I}, \mathbf{k})$ выступают комплексные значения амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$, причем в присутствии помех, возникающих в процессе измерений:

$$\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{I}, \mathbf{k}) = (2\pi)^D f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) + n(\mathbf{I}, \mathbf{k}) , \quad \text{где } \mathbf{I}, \mathbf{k} \in K_0 .$$

Член $n(\mathbf{I}, \mathbf{k})$ описывает помехи в случае приема волн в направлении рассеяния \mathbf{I} при излучении первичной плоской волны в направлении \mathbf{k} ; $|\mathbf{I}| = |\mathbf{k}| = k_0$. Понятие амплитуды рассеяния обсуждалось ранее, например, в связи с ее определением (1.33). Значения \tilde{I}_{ex} связаны с искомыми значениями \tilde{v} уравнениями типа (1.34), представляющими собой уравнения “наблюдений”:

$$\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{I}, \mathbf{k}) = \tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\mathbf{I} - \xi') \tilde{G}_0(\xi', k_0) \tilde{I}(\xi', \mathbf{k}) d\xi' + n(\mathbf{I}, \mathbf{k}) , \quad (3.9)$$

$$\mathbf{I}, \mathbf{k} \in K_0; \quad \xi' \in K ,$$

где $\tilde{G}_0(\xi, k_0)$ – пространственный спектр функции Грина однородной изотропной безграничной среды (здесь зависимость \tilde{G}_0 от k_0 обозначена в аргументе).

Предполагается, что функции $n(\mathbf{I}, \mathbf{k})$ и $\tilde{v}(\xi)$ являются реализациями нормально распределенных случайных процессов с нулевым средним и корреляционными функциями $N(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1)$ и $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1)$, соответственно. По аналогии с координатным представлением (см. выше), корреляционная функция (точнее говоря, функция когерентности при комплекснозначном представлении полей) для помехи $n(\mathbf{I}, \mathbf{k})$ определяется как $N(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1) \equiv \langle n(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2) n^*(\mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1) \rangle$; символ $\langle \bullet \rangle$ обозначает усреднение по заданному множеству. Если аргументы $(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2)$ рассматривать как объединенный первый аргумент, а $(\mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1)$ – как объединенный второй аргумент, то значения $n(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2)$ при пере-

боре $(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2)$ формируют функцию-столбец, а значения $n^+(\mathbf{I}_1, \mathbf{x}_1)$ – функцию-строку; здесь верхний символ “+” обозначает операцию эрмитова сопряжения. Тогда в “матричной” записи $N(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1) = \langle n(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2) n^+(\mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1) \rangle$. Аналогично, корреляционная функция для пространственного спектра рассеивателя $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1) \equiv \langle \tilde{v}(\xi_2) \tilde{v}^*(\xi_1) \rangle$ в “матричной” записи $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1) = \langle \tilde{v}(\xi_2) \tilde{v}^+(\xi_1) \rangle$ предполагает трактовку $\tilde{v}(\xi_2)$ как функции-столбца и $\tilde{v}^+(\xi_1)$ – как функции-строки. Обратные корреляционные функции $N^{-1}(\mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2)$ и $\mathcal{V}^{-1}(\xi_1, \xi_2)$ имеют другой порядок аргументов, по сравнению с исходными $N(\mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1)$ и $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1)$. При этом $N^{-1}(\mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2)$ и $\mathcal{V}^{-1}(\xi_1, \xi_2)$ отличаются от аналогичных функций в координатном представлении.

Рассматриваемый подход к решению обратных задач рассеяния с учетом помех базируется на системе уравнений (3.9), которая дополняется ограничительными уравнениями связи (1.32) типа уравнений Липпмана–Швингера для неизвестных значений $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$:

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) = \tilde{v}(\xi - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\xi - \xi') \tilde{G}_0(\xi', k_0) \tilde{I}(\xi', \mathbf{k}) d\xi'; \quad \xi, \xi' \in K. \quad (3.10)$$

Действительно, в подынтегральный член соотношения (3.9) входят точные значения пространственного спектра $\tilde{I}(\xi', \mathbf{k})$ для всех $\xi' \in K$, в то время как из эксперимента известны лишь его зашумленные значения при $\xi' = \mathbf{I}$, т.е. $|\xi'| = k_0$. В координатном представлении подобные уравнения связи рассматривались в (3.2) для волновых полей внутри области рассеяния.

На основе зашумленных данных рассеяния $\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{I}, \mathbf{k})$, известных из эксперимента для всех векторов $\mathbf{I}, \mathbf{k} \in K_0$ или только для части этих векторов, а также на основе априорной информации о статистических свойствах помех и характеристик рассеивателя, требуется получить оценку функции, описывающей искомую рассеивающую неоднородность. Ниже, пока не оговорено особо, рассматривается случай однокомпонентного рассеивателя, представленного, например, неоднородностями фазовой скорости звука

$$v(\mathbf{r}) = \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right), \quad (3.11)$$

где c_0 и $c(\mathbf{r})$ – скорость звука в фоновой непоглощающей среде и в области рассеяния \mathcal{R} , соответственно. Статистическая оценка пространственного спектра рассеивателя $\tilde{v}(\xi)$ методом максимальной апостериорной вероятности основана на минимизации неквадратичного функционала

$$\mathcal{F}_{\text{func}} = \mathcal{F}_{K_0} + \mathcal{F}_K + \mathcal{F}_{\text{apr}} . \quad (3.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{K_0} \equiv \mathcal{F}_{K_0}(\tilde{v}, \tilde{v}^+, \tilde{I}, \tilde{I}^+; N^{-1}) &= \iint_{K_0} \iint_{K_0} \left[\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1) - \tilde{v}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{k}_1) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\mathbf{l}_1 - \xi_1) \tilde{G}_0(\xi_1, k_0) \tilde{I}(\xi_1, \mathbf{k}_1) d\xi_1 \right]^+ \times \\ &\times N^{-1}(\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2) \left[\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2) - \tilde{v}(\mathbf{l}_2 - \mathbf{k}_2) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\mathbf{l}_2 - \xi_2) \tilde{G}_0(\xi_2, k_0) \tilde{I}(\xi_2, \mathbf{k}_2) d\xi_2 \right] d\mathbf{l}_1 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{l}_2 d\mathbf{k}_2 ; \\ &\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2 \in K_0 ; \quad \xi_1, \xi_2 \in K . \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_K \equiv \mathcal{F}_K(\tilde{v}, \tilde{v}^+, \tilde{I}, \tilde{I}^+, \lambda, \lambda^+) &= \int_{K_0} d\mathbf{k} \int_K d\xi' \lambda^+(\xi', \mathbf{k}) \left[I(\xi', \mathbf{k}) - \tilde{v}(\xi' - \mathbf{k}) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\xi' - \xi'') \tilde{G}_0(\xi'', k_0) \tilde{I}(\xi'', \mathbf{k}) d\xi'' \right]^+ + \\ &+ \int_{K_0} d\mathbf{k} \int_K d\xi' \left[\tilde{I}(\xi', \mathbf{k}) - \tilde{v}(\xi' - \mathbf{k}) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{v}(\xi' - \xi'') \tilde{G}_0(\xi'', k_0) \tilde{I}(\xi'', \mathbf{k}) d\xi'' \right]^+ \lambda(\xi', \mathbf{k}) ; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F}_{\text{apr}} \equiv \mathcal{F}_{\text{apr}}(\tilde{v}, \tilde{v}^+; \mathcal{V}^{-1}) = \iint_K \tilde{v}^+(\xi_1) \beta(\xi_1, \xi_2) \mathcal{V}^{-1}(\xi_1, \xi_2) \tilde{v}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 . \quad (3.15)$$

По физическому смыслу, член \mathcal{F}_{K_0} , определяемый выражением (3.13), представляет собой квадратичную форму от невязки между значениями амплитуды рассеяния (по аналогии со значениями волновых полей в координатном представлении). Эти значения, с одной стороны, измерены экспериментально (\tilde{I}_{ex}), а с другой стороны – оценены из (3.9) при $n(\mathbf{l}, \mathbf{k}) \equiv 0$. В неквадратичный член \mathcal{F}_K , представленный в (3.14), включены ограничительные соотношения, вытекающие из уравнений Липпмана–Швингера (3.10). Эти ог-

раничительные соотношения снабжены функциональными множителями Лагранжа $\lambda(\xi', \mathbf{k})$. Второе интегральное слагаемое в выражении (3.14) для F_K , комплексно сопряженное к первому интегральному слагаемому, введено для обеспечения действительного значения итогового функционала F_{func} . В квадратичном члене F_{arg} , приведенном в (3.15), отражена априорная статистическая информация о характеристиках рассеивателя, входящая с весовым функциональным множителем $\beta(\xi_1, \xi_2)$. Матрицы N^{-1} и \mathcal{V}^{-1} в (3.13) и (3.15) выступают в качестве известных параметров, и поэтому в аргументах членов функционала F_{K_0} и F_{arg} они отделены точкой с запятой от подлежащих оценке величин \tilde{v} , \tilde{v}^+ , \tilde{I} , \tilde{I}^+ . Выражение (3.15) приведено для случая однокомпонентного рассеивателя типа (3.11). Кроме того, без ограничения общности метода, в (3.15) полагается также, что $\langle \tilde{v}(\xi) \rangle = 0$, $\forall \xi \in K$, где символ $\langle \bullet \rangle$ обозначает усреднение по ансамблю рассеивателей рассматриваемого класса. Если это последнее условие не выполняется, то в (3.15) функцию $\tilde{v}(\xi)$ следует заменить на ее отклонения от статистически оцененного среднего значения пространственного спектра рассеивателя. Соответственно, $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1)$ формируется как ковариационная функция.

Подобно координатному представлению, в выражениях (3.13)–(3.15) используется операция эрмитова сопряжения (верхний символ “+”), имея в виду возможную “матричную” форму записи уравнений. Как уже отмечалось, применение этой операции к конкретным функциям нуждается во внимательном написании порядка аргументов. Так, в результате применения операции эрмитова сопряжения к функции-столбцу аргументы у эрмитово сопряженной функции в виде функции-строки не должны меняться. В результате же применения этой операции к функции-матрице порядок аргументов (или объединенных аргументов), отвечающих за формирование строк и столбцов функции-матрицы, меняется на противоположный. Причем в уравнениях (3.9) и (3.10) функции $\tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k})$ и $\tilde{v}(\xi - \mathbf{k})$, присутствующие в качестве отдельных слагаемых, выступают в роли функций-столбцов, в то время как стоящие под знаком интеграла функциональные сомножители $\tilde{v}(\mathbf{I} - \xi')$ и $\tilde{v}(\xi - \xi')$ – в роли функций-матриц. Таким образом, в выражениях (3.9) и (3.10) и, соответственно, в (3.13)–(3.15) для функций-столбцов с объединенными аргументами типа $\tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k})$, $\tilde{v}(\xi' - \mathbf{k})$, $\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{I}, \mathbf{k})$, $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$, $\tilde{I}(\xi', \mathbf{k})$, $\lambda(\xi, \mathbf{k})$ их эрмитово сопряженные величины следует писать с тем же порядком аргументов $\tilde{v}^+(\mathbf{I} - \mathbf{k})$, $\tilde{v}^+(\xi' - \mathbf{k})$, $\tilde{I}_{\text{ex}}^+(\mathbf{I}, \mathbf{k})$, $\tilde{I}^+(\xi, \mathbf{k})$, $\tilde{I}^+(\xi', \mathbf{k})$, $\lambda^+(\xi, \mathbf{k})$. Для функций-матриц $\tilde{v}(\mathbf{I} - \xi')$ и $\tilde{v}(\xi - \xi')$ порядок аргументов при эрмитовом сопряжении меняется: $\tilde{v}^+(\xi' - \mathbf{I}) = \{\tilde{v}^*(\mathbf{I} - \xi')\}$, $\tilde{v}^+(\xi' - \xi) = \{\tilde{v}^*(\xi - \xi')\}$. Функции $\tilde{G}_0(\xi', k_0)$ в “матричной” записи сопоставляется диагональный оператор $\text{Diag}\{\tilde{G}_0(\xi', k_0)\}$, и эрмитово сопряженный к нему оператор имеет комплексно сопряженные элементы $\text{Diag}\{\tilde{G}_0^*(\xi', k_0)\}$. В (3.15) $\tilde{v}(\xi_2)$ рассматривается как функция-столбец, а $\tilde{v}^+(\xi_1)$ – как функция-строка.

Ставится задача строгого поиска условного экстремума на связях исходного функционала $\mathcal{F}_{\text{func}}$ (3.12)–(3.15) путем варьирования $\mathcal{F}_{\text{func}}$ по функциональным неизвестным $\tilde{\mathbf{v}}^*$, $\tilde{\lambda}^*$ и \tilde{I}^* . Это приводит к полной системе нелинейных уравнений для оценки искомым значений $\tilde{\mathbf{v}}$ и неизвестных вспомогательных величин \tilde{I} , $\tilde{\lambda}$. Варьирование и последующее преобразование получающихся соотношений могут быть выполнены как для двумерной, так и трехмерной задачи при произвольных корреляционных функциях N и \mathcal{V} . Последовательность соответствующих математических преобразований подробно обсуждается в [А 2 (п. 5.4.3.2); 263] на примере двумерного пространства. При этом решение полной итоговой системы уравнений для получения оценки пространственного спектра функции рассеивателя представляется достаточно сложной в вычислительном плане задачей. Поэтому целесообразно рассмотреть *решение обратной задачи в более простой постановке* [А 2 (п. 5.4.3.2); А 19; А 66; 263]. Следует вернуться к исходному функционалу, однако вместо полного функционала $\mathcal{F}_{\text{func}}$ (3.12)–(3.15) теперь будут рассматриваться только два его квадратичных члена:

$$\mathcal{F}_{\text{func}2}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}^+, \tilde{I}, \tilde{I}^+; N^{-1}, \mathcal{V}^{-1}) = \mathcal{F}_{K_0}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}^+, \tilde{I}, \tilde{I}^+; N^{-1}) + \mathcal{F}_{\text{apг}}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}^+; \mathcal{V}^{-1}), \quad (3.16)$$

где выражения для \mathcal{F}_{K_0} , $\mathcal{F}_{\text{apг}}$ приведены в (3.13), (3.15). Неквадратичный функциональный член \mathcal{F}_K (3.14), снабженный множителями Лагранжа, теперь в функционал $\mathcal{F}_{\text{func}2}$ (3.16) не включается. Вместо этого, функционал $\mathcal{F}_{\text{func}2}$ дополняется ограничительными уравнениями связи (3.10) типа интегрального уравнения Липпмана–Швингера для неизвестных значений пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}(\xi', \mathbf{k})$, которое приводится здесь, для удобства, еще раз:

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{v}}(\xi - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^D} \int_K \tilde{\mathbf{v}}(\xi - \xi') \tilde{G}_0(\xi', k_0) \tilde{I}(\xi', \mathbf{k}) d\xi'; \quad \xi, \xi' \in K. \quad (3.17)$$

В этом случае задача строгого поиска условного экстремума на связях функционала $\mathcal{F}_{\text{func}}$ (3.12)–(3.15) заменяется на более простую – поиск экстремума функционала $\mathcal{F}_{\text{func}2}$ (3.16) при строгом удовлетворении решения уравнениям связи (3.17).

Квадратичный функционал $\mathcal{F}_{\text{func}2}$ минимизируется только по неизвестным $\tilde{\mathbf{v}}^*$. А именно, при варьировании $\mathcal{F}_{\text{func}2}$ по функциональным неизвестным $\tilde{\mathbf{v}}^*(\chi) dV_\chi$ вводится величина dV_χ – элементарный объем с центром в точке $\chi \in K$ в декартовой системе координат; здесь χ – произвольный (в остальном) фиксированный вектор:

$$\frac{\delta \mathcal{F}_{\text{func}2}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}^+, \tilde{I}, \tilde{I}^+; N^{-1}, \mathcal{V}^{-1})}{\delta [\tilde{\mathbf{v}}^*(\chi) dV_\chi]} = 0. \quad (3.18)$$

В результате получается уравнение для $\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{I}, \tilde{I}^+; N^{-1}, \mathcal{V}^{-1})$, которое хотя и громоздко, но, по сути, несложно [А 2 (п. 5.4.3.2)]. Преобразованные уравнения (3.18), совместно с уравнениями (3.17) для всех $\mathbf{k} \in K_0$, образуют полную систему уравнений для оценки искомых значений \tilde{v} и неизвестных вспомогательных величин \tilde{I} . В алгоритмической схеме (3.18), (3.17) учитывается априорная статистическая информация о шумах и искомом рассеивателе, позволяющая регуляризовать решение.

Преобразование выражений итерационной схемы (3.18), (3.17) удобно проводить с учетом процедуры дискретизации. При переходе от непрерывных величин к дискретным задается M направлений падения вектора $\mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}$ облучающего поля и M направлений приема рассеянного поля с вектором $\mathbf{l} = \{k_0, \varphi'\}$, которым соответствует шаг дискретизации по углу $\Delta\varphi = 2\pi/M$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_m &= \{k_0, \varphi = \varphi_m\}, & \varphi_m &= \Delta\varphi (m - 1); & m &= \overline{1, M}; \\ \mathbf{l}_n &= \{k_0, \varphi' = \varphi'_n\}, & \varphi'_n &= \Delta\varphi (n - 1); & n &= \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В окрестности нулевых ($\chi = 0$) и предельно допустимых в задаче пространственных частот ($|\chi| = 2k_0$) требуется особая осторожность при переходе к дискретному представлению. В рассматриваемых схемах предполагается, что пространственный спектр рассеивателя $\tilde{v}(\xi)$ хорошо локализован внутри круга радиуса $2k_0$, за счет чего можно ограничиться оценкой значений $\tilde{v}(\xi)$ только при $|\xi| \leq 2k_0$. Поэтому фиксированный вектор χ , где $|\chi| \leq 2k_0$, удобно задать в виде разности двух фиксированных векторов \mathbf{l}_β и \mathbf{k}_α длины $|\mathbf{k}_\alpha| = |\mathbf{l}_\beta| = k_0$:

$$\chi = \mathbf{l}_\beta - \mathbf{k}_\alpha, \quad \mathbf{k}_\alpha = \{k_0, \varphi_\alpha\}, \quad \mathbf{l}_\beta = \{k_0, \varphi'_\beta\}.$$

Далее множество значений \mathbf{k}_α и \mathbf{l}_β выбирается таким, что вектор χ определяется однозначно, о чем подробнее будет сказано далее, – см. (3.23). С физической точки зрения, значение спектра рассеивателя $\tilde{v}^*(\chi)$ на фиксированной пространственной частоте $\chi = \mathbf{l}_\beta - \mathbf{k}_\alpha$ формируется (в двумерном пространстве) в случае $|\chi| \neq 0, 2k_0$ двумя парами векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{l}_1 , таких, что $\mathbf{l}_1 - \mathbf{k}_1 = \chi$: $\{\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_\alpha; \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_\beta\}$ и $\{\mathbf{k}_1 = -\mathbf{l}_\beta; \mathbf{l}_1 = -\mathbf{k}_\alpha\}$. При $\chi = -2\mathbf{k}_\alpha$ (т.е. $\mathbf{l}_\beta = -\mathbf{k}_\alpha$) эти две пары вырождаются в одну; а при $\chi = 0$ (т.е. $\mathbf{l}_\beta = \mathbf{k}_\alpha$) имеются M дискретных пар $\{\mathbf{k}_m; \mathbf{k}_m\}$, $m = \overline{1, M}$.

Для двумерной задачи в предположении некоррелированных по различным направлениям ошибок измерения имеем:

$$N^{-1}(\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2) \approx \frac{1}{n_0} \delta(\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1); \quad \mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2 \in K_0. \quad (3.20)$$

Аналог соотношения (3.20) в дискретном представлении для M направлений падающего поля и M направлений рассеянного поля (3.19) имеет вид:

$$N^{-1}(\mathbf{I}_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{I}_2, \mathbf{k}_2) \approx \frac{1}{P_0} \delta_{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2} \cdot \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2},$$

где

$$\Delta\varphi = 2\pi/M, \quad \Delta k = k_0 \Delta\varphi, \quad P_0 \equiv n_0 (\Delta k)^2, \quad \delta_{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2} = \{1 \text{ при } \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2; \quad 0 \text{ при } \mathbf{I}_1 \neq \mathbf{I}_2\},$$

т.е. здесь $\delta_{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2}$ – символ Кронекера, определенный на дискретизованном векторном аргументе. В принятых обозначениях величина $n_0 (\Delta k)^2$ является безразмерной для двумерной задачи. С физической точки зрения, это мощность помехи $n(\mathbf{I}, \mathbf{k})$ в пространстве используемых при измерениях пар волновых векторов $\mathbf{I}, \mathbf{k} \in K_0$, содержащаяся в секторе телесного угла $(\Delta k)^2$ при $k_0 = 1$. Размерностный коэффициент n_0 является, по физическому смыслу, плотностью мощности помехи в этом пространстве: это мощность помехи, приведенная к единице телесного угла.

С учетом (3.20), уравнения (3.18) приобретают в дискретном представлении следующий вид:

$$\sum_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{v}(\boldsymbol{\eta}) = \tilde{I}_{\text{ex}}^{\text{mean}}(\boldsymbol{\chi}) + \mathfrak{I}_1(\boldsymbol{\chi}) + \mathfrak{I}_2(\boldsymbol{\chi}). \quad (3.21)$$

Система, состоящая из уравнений (3.21) и (3.17), предполагает, что пространственный спектр рассеивателя хорошо локализован внутри круга радиуса $2k_0$, за счет чего можно ограничиться оценкой значений $\tilde{v}(\boldsymbol{\eta})$ только при $|\boldsymbol{\eta}| \leq 2k_0$. Независимые дискретные отсчеты для $\boldsymbol{\eta}$ задаются в нерегулярной координатной сетке. Нерегулярность связана с равномерным угловым шагом дискретизации направлений векторов $\mathbf{I}, \mathbf{k} \in K_0$, обычно используемых при измерениях. Здесь надо отметить следующее. Экспериментальные данные могут измеряться для всех дискретных значений векторов падающего и рассеянного полей, как это определено в (3.19) для случая полных данных. Однако при этом подлежащие определению компоненты пространственного спектра рассеивателя $\tilde{v}(\boldsymbol{\eta})$ рассматриваются на множестве дискретных независимых значений аргумента $\boldsymbol{\eta}$, формируемого как разность двух векторов:

$$\boldsymbol{\eta} \in \left\{ 0 \cup (\mathbf{I}_{\mu_2} - \mathbf{k}_{\mu_1}) \right\}, \quad \left| \mathbf{k}_{\mu_1} \right| = \left| \mathbf{I}_{\mu_2} \right| = k_0, \quad (3.22)$$

где вектор \mathbf{k}_{μ_1} принимает все дискретные угловые положения (соответствующий индекс μ_1), а вектор \mathbf{I}_{μ_2} , в силу теоремы взаимности, – только половину угловых положений (индекс μ_2):

$$\mathbf{k}_{\mu_1} = \{k_0, \varphi_{\mu_1}\}, \quad \varphi_{\mu_1} = \Delta\varphi (\mu_1 - 1); \quad \Delta\varphi = 2\pi/M, \quad \mu_1 = \overline{1, M};$$

$$\mathbf{l}_{\mu_2} = \{k_0, \varphi'_{\mu_2}\}, \quad \varphi'_{\mu_2} = \Delta\varphi (\mu_2 - 1); \quad \mu_2 = \overline{(\mu_1 + 1), (\mu_1 + M/2)}.$$

Подобным образом выбираются и независимые дискретные значения χ , являющиеся параметрами уравнений (3.18) и, следовательно, (3.21):

$$\chi \in \{0 \cup (\mathbf{l}_\beta - \mathbf{k}_\alpha)\}, \quad (3.23)$$

где

$$\mathbf{k}_\alpha = \{k_0, \varphi_\alpha\}, \quad \varphi_\alpha = \Delta\varphi (\alpha - 1); \quad \Delta\varphi = 2\pi/M, \quad \alpha = \overline{1, M};$$

$$\mathbf{l}_\beta = \{k_0, \varphi'_\beta\}, \quad \varphi'_\beta = \Delta\varphi (\beta - 1); \quad \beta = \overline{(\alpha + 1), (\alpha + M/2)};$$

здесь α и β выступают в роли индексов. Значения индексов μ_2 и β следует понимать с учетом периода их изменения M .

Матрицей, действующей в (3.21) на неизвестные $\tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\eta})$, является:

$$A(\chi, \boldsymbol{\eta}) = E(\chi, \boldsymbol{\eta}) + \beta(\chi, \boldsymbol{\eta}) \kappa(\chi, \boldsymbol{\eta}) P_0 \mathcal{V}^{-1}(\chi, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.24)$$

где $E(\chi, \boldsymbol{\eta})$ – единичная матрица, $\kappa(\chi, \boldsymbol{\eta}) = \frac{S(\chi) S(\boldsymbol{\eta}) C(\boldsymbol{\eta})}{2C(\chi)}$. Коэффициенты S тако-

вы:

$$S(\chi) = \left\{ \begin{array}{l} |\sin(\varphi_\alpha - \varphi'_\beta)| \quad \text{при } |\chi| \neq 0 \text{ и } |\chi| \neq 2k_0; \\ \Delta\varphi/3 \quad \text{при } \chi = 0 \text{ или } |\chi| = 2k_0. \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

Для $S(\boldsymbol{\eta})$ вектор χ заменяется вектором $\boldsymbol{\eta}$, и аргумент $(\varphi_\alpha - \varphi'_\beta)$ заменяется аргументом $(\varphi_{\mu_1} - \varphi'_{\mu_2})$. Происхождение коэффициентов S связано с различием в описании пространств K_0 и K векторов пространственной частоты, участвующих в выражениях (3.13)–(3.15). Это является следствием различия в физическом смысле корреляционных матриц \mathcal{V} и N , возникающего также и в координатном представлении. Так, для $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1) \equiv \langle \tilde{\mathbf{v}}(\xi_2) \tilde{\mathbf{v}}^+(\xi_1) \rangle$ векторы $\xi_1, \xi_2 \in K$ принимают все возможные дискретные значения в пределах рассматриваемой области пространственных частот, в то время как для $N(\mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1) \equiv \langle n(\mathbf{l}_2, \mathbf{k}_2) n^+(\mathbf{l}_1, \mathbf{k}_1) \rangle$ векторы $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \in K_0$ изменяются только по направлению.

Коэффициент $C(\boldsymbol{\eta})$ – это количество возможных вариантов формирования фиксированного вектора $\boldsymbol{\eta}$ с помощью пары векторов $\mathbf{l}, \mathbf{k} \in K_0$ в виде $\mathbf{l} - \mathbf{k} = \boldsymbol{\eta}$, когда каждый из векторов \mathbf{l}, \mathbf{k} принимает M дискретных значений (3.19):

$$C(\boldsymbol{\eta}) = \left\{ M \text{ при } \boldsymbol{\eta} = 0; \quad 2 \text{ при } |\boldsymbol{\eta}| \neq 0 \text{ и } |\boldsymbol{\eta}| \neq 2k_0; \quad 1 \text{ при } |\boldsymbol{\eta}| = 2k_0 \right\};$$

аналогично определяется $C(\boldsymbol{\chi})$.

Величины $\tilde{I}_{\text{ex}}^{\text{mean}}(\boldsymbol{\chi})$ являются данными рассеяния (содержащими шум и ошибки измерений), усредненными по этим ситуациям:

$$\tilde{I}_{\text{ex}}^{\text{mean}}(\boldsymbol{\chi}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_m) \text{ при } \boldsymbol{\chi} = 0; \\ \\ \frac{1}{2} [\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{l}_\beta, \mathbf{k}_\alpha) + \tilde{I}_{\text{ex}}(-\mathbf{k}_\alpha, -\mathbf{l}_\beta)] \text{ при } \boldsymbol{\chi} = \mathbf{l}_\beta - \mathbf{k}_\alpha, \\ \\ \text{где } |\boldsymbol{\chi}| \neq 0 \text{ и } |\boldsymbol{\chi}| \neq 2k_0; \\ \\ \tilde{I}_{\text{ex}}(-\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha) \text{ при } \boldsymbol{\chi} = -2\mathbf{k}_\alpha \text{ (т.е. } \mathbf{l}_\beta = -\mathbf{k}_\alpha \text{)}. \end{array} \right\}$$

Член $\mathfrak{I}_1(\boldsymbol{\chi})$ имеет такую же структуру, но \tilde{I}_{ex} в правой части заменяется значениями $(\tilde{v}(\boldsymbol{\chi}) - \tilde{I})$:

$$\mathfrak{I}_1(\boldsymbol{\chi}) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}(\boldsymbol{\chi}) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{I}(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_m) \text{ при } \boldsymbol{\chi} = 0; \\ \\ \tilde{v}(\boldsymbol{\chi}) - \frac{1}{2} [\tilde{I}(\mathbf{l}_\beta, \mathbf{k}_\alpha) + \tilde{I}(-\mathbf{k}_\alpha, -\mathbf{l}_\beta)] \text{ при } \boldsymbol{\chi} = \mathbf{l}_\beta - \mathbf{k}_\alpha, \\ \\ \text{где } |\boldsymbol{\chi}| \neq 0 \text{ и } |\boldsymbol{\chi}| \neq 2k_0; \\ \\ \tilde{v}(\boldsymbol{\chi}) - \tilde{I}(-\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha) \text{ при } \boldsymbol{\chi} = -2\mathbf{k}_\alpha \text{ (т.е. } \mathbf{l}_\beta = -\mathbf{k}_\alpha \text{)}. \end{array} \right\}$$

Последний член $\mathfrak{I}_2(\boldsymbol{\chi})$ в (3.21) таков:

$$\mathfrak{I}_2(\boldsymbol{\chi}) = \frac{(\Delta k)^2 S(\boldsymbol{\chi})}{(2\pi)^2 C(\boldsymbol{\chi})} \sum_{m=1}^M \sum_{n=m+1}^{m+M} [\tilde{G}_0(\mathbf{l}_n - \boldsymbol{\chi}, k_0) \tilde{I}(\mathbf{l}_n - \boldsymbol{\chi}, \mathbf{k}_m)]^+ \times \\ \times [\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{l}_n, \mathbf{k}_m) - \tilde{I}(\mathbf{l}_n, \mathbf{k}_m)]; \quad (3.26)$$

$$\Delta k = 2\pi k_0 / M; \quad |\mathbf{k}_m| = |\mathbf{l}_n| = k_0.$$

Количество $(M^2/2 + 1)$ алгебраических уравнений (3.21) совпадает с количеством искомых значений $\tilde{v}(\boldsymbol{\eta})$. Эти уравнения дополняются дискретизованными уравнениями (3.17), что позволяет оценить неизвестные значения $\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}', \mathbf{k})$ для использующихся в (3.26) значений аргумента $\boldsymbol{\xi}' = \mathbf{I}_1 - \boldsymbol{\chi}$ (в частности, для $|\boldsymbol{\xi}'| = k_0$).

В более общем, чем (3.11), случае рассеиватель состоит, согласно (1.10), одновременно из скоростной c - компоненты и поглощающей α - компоненты:

$$v(\mathbf{r}) = v_c(\mathbf{r}) + iv_\alpha(\mathbf{r}) \equiv \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c(\mathbf{r})} \quad (3.27)$$

при временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$; здесь $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ – амплитудный коэффициент поглощения в области рассеяния \mathfrak{R} . Следовательно, $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{v}_c(\boldsymbol{\xi}) + i\tilde{v}_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in K$; функции $v_c(\mathbf{r})$ и $v_\alpha(\mathbf{r})$ действительны, однако их пространственные фурье-образы таковыми могут не являться. Тогда оптимальна *раздельная* оценка каждой из этих компонент, учитывающая априорную информацию о корреляционных свойствах отдельных компонент рассеивателя. При этом корреляционная функция $\mathcal{V}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1)$ пространственного спектра двухкомпонентного рассеивателя имеет блочную структуру:

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{cc}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1); & \mathcal{V}_{c\alpha}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \mathcal{V}_{\alpha c}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1); & \mathcal{V}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{V}_{cc}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) = \langle \tilde{v}_c(\boldsymbol{\xi}_2) \tilde{v}_c^+(\boldsymbol{\xi}_1) \rangle$, $\mathcal{V}_{c\alpha}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) = \langle \tilde{v}_c(\boldsymbol{\xi}_2) \tilde{v}_\alpha^+(\boldsymbol{\xi}_1) \rangle$,
 $\mathcal{V}_{\alpha c}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) = \langle \tilde{v}_\alpha(\boldsymbol{\xi}_2) \tilde{v}_c^+(\boldsymbol{\xi}_1) \rangle$, $\mathcal{V}_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) = \langle \tilde{v}_\alpha(\boldsymbol{\xi}_2) \tilde{v}_\alpha^+(\boldsymbol{\xi}_1) \rangle$.

При построении обратной корреляционной функции

$$\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{pmatrix} (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{cc}; & (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{c\alpha} \\ (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{\alpha c}; & (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

надо учитывать, что \mathcal{V} обращается как целое, и поэтому, в общем случае, $(\mathcal{V}^{-1})_{cc} \neq (\mathcal{V}_{cc})^{-1}$, $(\mathcal{V}^{-1})_{\alpha\alpha} \neq (\mathcal{V}_{\alpha\alpha})^{-1}$, $(\mathcal{V}^{-1})_{c\alpha} \neq (\mathcal{V}_{c\alpha})^{-1}$, $(\mathcal{V}^{-1})_{\alpha c} \neq (\mathcal{V}_{\alpha c})^{-1}$.

Выражение (3.15) для функционала $\mathcal{F}_{\text{appr}}$ заменяется более общим:

$$\mathcal{F}_{\text{appr}}(\tilde{v}, \tilde{v}^+; \mathcal{V}^{-1}) = \iint_K \left(\tilde{v}_c^+(\boldsymbol{\xi}_1); -i\tilde{v}_\alpha^+(\boldsymbol{\xi}_1) \right) \beta(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \times \\ \times \begin{pmatrix} (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{cc}; & (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{c\alpha} \\ (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{\alpha c}; & (\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2))_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_c(\boldsymbol{\xi}_2) \\ i\tilde{v}_\alpha(\boldsymbol{\xi}_2) \end{pmatrix} d\boldsymbol{\xi}_1 d\boldsymbol{\xi}_2,$$

где $\begin{pmatrix} \tilde{v}_c(\xi_2) \\ i\tilde{v}_\alpha(\xi_2) \end{pmatrix}$ и $(\tilde{v}_c^+(\xi_1); -i\tilde{v}_\alpha^+(\xi_1))$ – функция-столбец и функция-строка, соответственно; полагается, что $\langle \tilde{v}_c \rangle = 0$, $\langle \tilde{v}_\alpha \rangle = 0$.

Поскольку излагаемый строгий подход предполагает отдельную оценку c - и α -компонент функции $\tilde{v} = \tilde{v}_c + i\tilde{v}_\alpha$, то полный функционал F_{func} (3.12) или F_{func2} (3.16) варьируется независимо по обеим искомым функциям \tilde{v}_c^* и $(i\tilde{v}_\alpha)^* = -i\tilde{v}_\alpha^*$. При этом результат дифференцирования всех, кроме $F_{\text{apг}}$, членов функционала F_{func} или F_{func2} , полностью совпадает с результатом дифференцирования этих членов по полной функции \tilde{v}^* . Отличие будет только за счет дифференцирования члена $F_{\text{apг}}$, что более подробно изложено в [А 2 (п. 5.4.3.2)].

Априорная оценка величины \mathcal{V}^{-1} может быть достаточно приближенной, не сильно влияя при этом на решение обратной задачи, что позволяет, в ряде случаев, использовать при формировании функционала $F_{\text{apг}}$ для модели рефракционно-поглощающего рассеивателя (3.27) упрощенный подход. В нем оценивается полная функция пространственного спектра $\tilde{v}(\xi) = \tilde{v}_c(\xi) + i\tilde{v}_\alpha(\xi)$, $\xi \in K$, без разделения ее на c - и α -компоненты. Тогда описание априорной информации о двухкомпонентном рассеивателе предполагает ту же структуру априорного члена $F_{\text{apг}}$ (3.15) и, формально, тот же принцип формирования корреляционной функции \mathcal{V} , как и в случае рассеивателя, состоящего только из одной компоненты:

$$\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1) \equiv \langle \tilde{v}(\xi_2) \tilde{v}^+(\xi_1) \rangle = \mathcal{V}_{cc} + \mathcal{V}_{\alpha\alpha} - i\mathcal{V}_{c\alpha} + i\mathcal{V}_{\alpha c}.$$

При этом в $\mathcal{V}(\xi_2, \xi_1)$ индивидуальные особенности отдельных компонент рассеивателя утрачиваются. В случае одинаковых корреляционных функций c - и α -компонент ($\mathcal{V}_{cc} = \mathcal{V}_{\alpha\alpha}$, $\mathcal{V}_{c\alpha} \equiv 0$, $\mathcal{V}_{\alpha c} \equiv 0$) этот подход перестает быть приближенным.

Для повышения качества восстановления c - и α -компонент рассеивателя можно дополнительно использовать априорную информацию о том, что функции $v_c(\mathbf{r})$ и $v_\alpha(\mathbf{r})$ являются действительными функциями в координатном пространстве. Кроме того, возможно также учитывать, что активные среды не рассматриваются: функция, ответственная в координатном пространстве за полное поглощение (т.е. с учетом фонового поглощения, если таковое имеется), должна быть знакоопределенной. В частности, если фоновая среда непоглощающая, то знакоопределенной должна быть функция $v_\alpha(\mathbf{r})$: $v_\alpha(\mathbf{r}) \leq 0$, $\forall \mathbf{r}$, при временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$.

Построение корреляционной функции пространственного спектра рассеивателя $\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi}) = \langle \tilde{v}(\boldsymbol{\eta}) \tilde{v}^+(\boldsymbol{\chi}) \rangle$, где $\langle \tilde{v}(\xi) \rangle = 0$, $\forall \xi$, требует либо априорного знания соответствующих характеристик рассматриваемого класса рассеивателей, либо заранее най-

денной аналитической оценки функции $\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi})$ для заданной модели рассеивателей. При численном моделировании полагалось, что каждая реализация случайного рассеивателя представлена в виде уединенной неоднородности или совокупности однопипных неоднородностей, среднее количество которых равно Q . Предполагается также, что пространственная область, в которой могут появляться неоднородности, имеет эффективный линейный размер L . Эта область статистически равномерно заполнена элементарными неоднородностями, случайными по знаку и амплитуде. Ансамблю случайных одиночных неоднородностей сопоставляются характерные статистические параметры: среднеквадратичная амплитуда, эффективный линейный пространственный размер ℓ и характерная ширина пространственного спектра $\cong 2\pi / \ell$. Эта модель имитирует “кластерный” рассеиватель со средними размерами кластеров $\approx \ell$. Для нее $\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi}) \approx \mathcal{V}_{\text{спец}} \left(\frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\chi}}{2} \right) \Gamma(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi})$.

Функция $\mathcal{V}_{\text{спец}}$ – среднестатистическая пространственно-спектральная плотность “энергии” рассеивателя. Она определяет ту область пространственных частот, в которой существенен учет пространственно-спектральных компонент рассеивателя; линейная ширина этой области $\cong 2\pi / \ell$. Функция $\Gamma(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi})$ определяет область существенной корреляции пространственно-спектральных компонент $\tilde{v}(\boldsymbol{\eta})$ и $\tilde{v}^+(\boldsymbol{\chi})$; эта функция связана с эффективным размером L : корреляция имеет место при $|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi}| \leq 2\pi / L$. В рассмотренной далее модели полагается $\Gamma(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi}) \approx \exp \left[-\frac{(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi})^2 L^2}{\pi^2} \right]$. Способ получения оценки для функции $\mathcal{V}_{\text{спец}}(\boldsymbol{\xi})$ обсуждается в [А 2 (п. 5.4.3.2)].

Построение матрицы $\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$ может потребовать при ее обращении регуляризации: $\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) = [\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi}) + \varepsilon_{\nu} E]^{-1}$, где E – единичная матрица, ε_{ν} – коэффициент регуляризации, тем или иным образом согласованный со спектром собственных значений матрицы $\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi})$. С физической точки зрения, это означает предположение о “белой” компоненте со средней пространственно-спектральной плотностью энергии ε_{ν} в пространственном спектре рассеивателя $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi})$. Таким образом, допускается неопределенность в знании статистических характеристик $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi})$.

§ 3.1.2. Численная модель реконструкции рассеивателей

Экспериментальные данные рассеяния в отсутствие помехи $\tilde{I}_{\text{ex}}^0(\mathbf{I}, \mathbf{k}) \equiv \tilde{I}_{\text{ex}}^0(\varphi', \varphi)$, т.е. $\tilde{I}_{\text{ex}}^0 \equiv \tilde{I}_{\text{ex}}$ при $n(\mathbf{I}, \mathbf{k}) \equiv 0$, моделировались на этапе решения прямой задачи для заданной функции рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ в двумерном пространстве; $\mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}$, $\mathbf{I} = \{k_0, \varphi'\}$. Использовалось итерационное решение уравнений типа Липпмана–Швингера (3.17) с по-

следующей интерполяцией найденных значений $\tilde{I}(\xi', \mathbf{k})$ ($\xi' \in K$) на окружность Эвальда $|\xi'| = k_0$ при каждом фиксированном \mathbf{k} [А 2 (раздел 5.3); А 9]. В полученные значения $\tilde{I}_{\text{ex}}^0(\varphi', \varphi)$ привносилась ошибка $n(\mathbf{l}, \mathbf{k}) \equiv n(\varphi', \varphi)$, некоррелированная по различным направлениям, – см. (3.20). Ошибка $n(\varphi', \varphi)$ представляла собой случайную нормально распределенную последовательность с нулевым средним значением и среднеквадратичным амплитудным отклонением σ_{ns} независимо для $\text{Re}n(\varphi', \varphi)$ и $\text{Im}n(\varphi', \varphi)$. Численно полагалось $\sigma_{\text{ns}} = q \tilde{I}_{\text{max}}$, где коэффициент $q \geq 0$, $\tilde{I}_{\text{max}} \equiv \max_{\varphi', \varphi} |\tilde{I}_{\text{ex}}^0(\varphi', \varphi)|$.

Входное амплитудное отношение “помеха/сигнал” $\|n\| / \|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\|$ характеризовалось отношением нормы помехи $\|n\|$ к норме незашумленных данных рассеяния $\|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\|$. Здесь

$$\|n\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |n(\varphi', \varphi)|^2 d\varphi d\varphi'}, \quad \|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{I}_{\text{ex}}^0(\varphi', \varphi)|^2 d\varphi d\varphi'}, \quad \text{или, в тер-}$$

минах дискретизованных величин,
$$\|n\| = \Delta\varphi \sqrt{\sum_{\varphi', \varphi} |n(\varphi', \varphi)|^2},$$

$$\|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\| = \Delta\varphi \sqrt{\sum_{\varphi', \varphi} |\tilde{I}_{\text{ex}}^0(\varphi', \varphi)|^2}. \quad \text{При численном моделировании одновременно ис-}$$

пользовались два независимых набора ошибок с одинаковым отклонением σ_{ns} . Этим наборам соответствовали две независимые по помехе реализации экспериментальных данных $\tilde{I}_{\text{ex}}(\varphi', \varphi) = \tilde{I}_{\text{ex}}^0(\varphi', \varphi) + n(\varphi', \varphi)$, т.е. эффективное входное отношение “поме-

ха /сигнал” составляло
$$\left(\frac{\|n\|}{\|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\|} \right)_{\text{eff}} = \frac{\|n\|}{\sqrt{2} \|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\|}.$$

На этапе решения обратной задачи значения пространственного спектра рассеивателя $\tilde{v}(\boldsymbol{\eta})$ оценивались из системы (3.21), (3.17). Решение интерполировалось с неравномерной сетки (3.22) на равномерную декартову сетку, и обратным пространственным фурье-преобразованием формировалась окончательная оценка рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r})$ в \mathbf{r} -пространстве. Относительная среднеквадратичная погрешность для $\hat{v}(\mathbf{r})$ рассчитывалась как отношение невязки между оценкой $\hat{v}(\mathbf{r})$ и истинной функцией $v(\mathbf{r})$ к норме функции

$$v(\mathbf{r}): \quad \delta_v = \frac{\sqrt{\sum_{\mathbf{r}} |\hat{v}(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r})|^2}}{\sqrt{\sum_{\mathbf{r}} |v(\mathbf{r})|^2}}.$$

Рассмотрение вначале приближения однократного рассеяния, т.е. *первого приближения Борна*, позволяет далее провести сравнение с ним эффективности оптимальной об-

работки в случае сильных рассеивателей. В первом приближении Борна члены $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{\chi})$ и $\mathfrak{S}_2(\boldsymbol{\chi})$ в правой части (3.21), ответственные за учет перерассеяний, опускаются. Не требуются и дополнительные уравнения связи (3.17). Тогда борновская оценка $\tilde{v}_{\text{born}}(\boldsymbol{\eta})$, согласованная с априорной информацией о корреляционных свойствах пространственных спектров помехи и рассеивателя, находится для $(M^2/2 + 1)$ значений векторов пространственной частоты $\boldsymbol{\eta}$ (3.22) из системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{\boldsymbol{\eta}} A(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{v}_{\text{born}}(\boldsymbol{\eta}) = \tilde{I}_{\text{ex}}^{\text{mean}}(\boldsymbol{\chi}). \quad (3.28)$$

Надо отметить, что в приближении малых помех $P_0 \rightarrow 0$, матрица при неизвестных (3.24) $A(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) \rightarrow E(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$, и получается очевидный для слабых рассеивателей результат: $\tilde{v}_{\text{born}}(\boldsymbol{\chi}) = \tilde{I}_{\text{ex}}^{\text{mean}}(\boldsymbol{\chi})$. Для дальнейшего сопоставления с более сильными рассеивателями использовались, как уже упоминалось, две реализации экспериментальных данных. Получаемая избыточная система (3.28) решалась МНК-способом. В первом приближении Борна МНК-решение избыточной задачи равносильно решению безыбыточной задачи с данными рассеяния, усредненными по реализациям.

Регуляризирующая фильтрация в первом приближении Борна подобна классической фильтрации винеровского типа. Действительно, в (3.28) роль “фильтра” играет матрица $[A(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})]^{-1}$. При этом, согласно (3.24), энергетическому отношению “помеха / сигнал” сопоставляется величина $P_0 \mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$, входящая в (3.24) с функциональным весовым коэффициентом $\beta(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) \kappa(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$. Выбор весового множителя $\beta(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$ в виде

$$\beta(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\kappa(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})} \quad (3.29)$$

приводит процедуру фильтрации в (3.28) в соответствие с винеровской схемой, обеспечивающей оптимальное решение линейной обратной задачи. Фильтрация заключается в подавлении в пространственно-спектральной оценке $\tilde{v}_{\text{born}}(\boldsymbol{\eta})$ высоких пространственных частот. В то же время, на низких пространственных частотах влияние помехи сохраняется.

В численном эксперименте восстанавливался слабый рассеиватель гауссовской формы с максимальным контрастом фазовой скорости $\Delta c/c_0 = 0.01$ и полушириной $d_{1/2}/\lambda_0 \approx 0.82$ по уровню $1/e$. Дополнительный набег фазы при распространении вдоль центрального сечения рассеивателя составляет $\Delta\psi \cong 0.03\pi$. Каждая из двух независимых по помехе реализаций данных $\tilde{I}_{\text{ex}}(\mathbf{l}, \mathbf{k})$ содержала помеху с $\sigma_{\text{ns}} = 0.15 \tilde{I}_{\text{max}}$ и $\|n\| / \|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\| \approx 0.75$, т.е. уровень входного отношения “помеха / сигнал” был высок. Результаты численного моделирования приведены в [А 2 (п. 5.4.3.3); А 66; 263]. При восстановлении без регуляризирующей фильтрации априорная информация о рассеивателе и присутствующей в действительности помехе не учитывается, поскольку в (3.24) полагает-

ся $P_0 = 0$. В этом случае относительная погрешность оценки $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ составила $\delta_v \approx 0.5$, практически совпадая с величиной эффективного входного амплитудного отношения “помеха / сигнал” $\left(\|n\| / \left\| \tilde{I}_{\text{ex}}^0 \right\| \right)_{\text{eff}} \approx 0.53$. При восстановлении с использованием регулирующей фильтрации корреляционная матрица N формируется для истинного уровня помехи, при котором $P_0 = (\sigma_{\text{ns}})^2$; множитель $\beta(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$ задается оптимальным – в виде (3.29). Качество оценки $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ в присутствии тех же двух наборов ошибок заметно улучшается: $\delta_v \approx 0.09$.

Как в случае применения фильтрации, так и при ее отсутствии, для достаточно высоких уровней помехи наблюдается линейная зависимость погрешности δ_v от $\left(\|n\| / \left\| \tilde{I}_{\text{ex}}^0 \right\| \right)_{\text{eff}}$. При низких уровнях помехи величина δ_v уменьшается медленнее из-за погрешностей дискретизации. Важно также, что в случае использования регулирующей фильтрации наблюдается достаточно слабая зависимость оценки рассеивателя $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ от конкретного вида параметров регуляризации.

Для оценки *рассеивателей средней силы и сильных рассеивателей* требуется учет процессов многократного рассеяния, и при численном моделировании использовалось решение объединенной системы (3.21), (3.17). В силу нелинейности системы относительно неизвестных $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{I})$, ее приходится решать методом последовательных итераций. При численном моделировании была реализована итерационная схема с попеременной оценкой $\tilde{\mathbf{v}}$ и \tilde{I} , наподобие схем, рассмотренных в [А 2 (п. 5.4.2.2, п. 5.4.2.3)]. В каждом фиксированном итерационном цикле с номером j оценка $\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}(\boldsymbol{\eta})$ является решением подсистемы (3.21), в которой члены правой части $\mathfrak{S}_1(\boldsymbol{\chi})$ и $\mathfrak{S}_2(\boldsymbol{\chi})$ формируются с помощью оценок $\tilde{\mathbf{v}}_{(j-1)}$ и $\tilde{I}_{(j-1)}$, полученных в предыдущем цикле. Начальной оценкой ($j = 1$) в итерационной цепи служит сглаженная борновская оценка $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{born}}(\boldsymbol{\eta})$, – см. (3.28). Использование двух реализаций зашумленных данных рассеяния \tilde{I}_{ex} делает подсистему (3.21) избыточной и предполагает ее МНК-решение, что дополнительно стабилизирует сходимость итерационной схемы. Надо отметить, что за счет учета перерассеяний правая часть (3.21) неявным образом нелинейно зависит от \tilde{I}_{ex} . Поэтому МНК-решение подсистемы (3.21) с избыточными данными \tilde{I}_{ex} от всех реализаций не равносильно, в отличие от случая первого приближения Борна, решению безыбыточной подсистемы с усредненными по реализациям исходными данными.

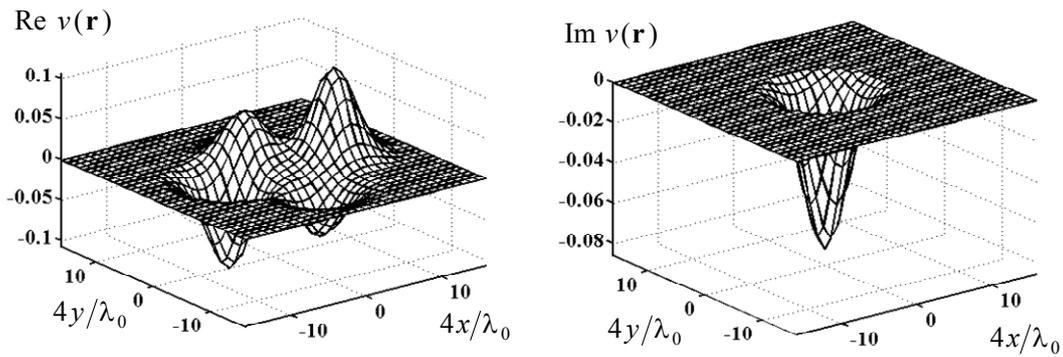
Во избежание возможной “раскачки” итерационного решения вводится частичный (“релаксационный”) учет поправки: $\tilde{\mathbf{v}}'_{(j)} = (1 - \varepsilon)\tilde{\mathbf{v}}_{(j-1)} + \varepsilon\tilde{\mathbf{v}}_{(j)}$, где $\tilde{\mathbf{v}}'_{(j)}$ – окончательная пространственно-спектральная оценка j -го цикла; $0 < \varepsilon \leq 1$, для описанных ниже численных примеров $\varepsilon = 1/8$. Далее решается подсистема (3.17) для оценки $\tilde{I}_{(j)}(\boldsymbol{\xi}', \mathbf{k})$ на основе фиксированных значений $\tilde{\mathbf{v}}'_{(j)}$, и итерационный цикл повторяется. Как известно,

в силу присутствия в уравнениях (3.17) операции свертки, техника решения этих уравнений требует предварительного внесения вокруг носителя функции $\hat{v}_{(j)}(\mathbf{r})$ ($\tilde{v}'_{(j)}$ – пространственный спектр этой функции) дополнительной пространственной области с нулевыми значениями, что подробно излагалось в [А 2 (раздел 5.3)].

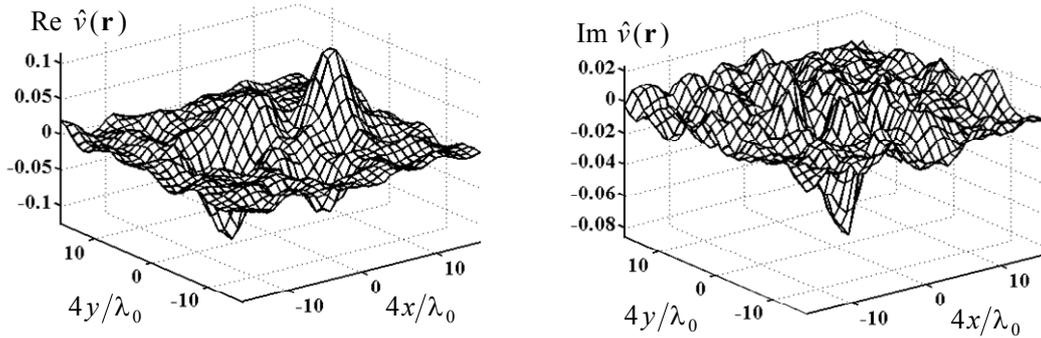
Сходимость итерационной процедуры контролировалась с помощью текущего значения невязки $\|\tilde{I}_{(j)} - \tilde{I}_{\text{ex}}\| = \Delta\varphi \sqrt{\sum_{\varphi', \varphi} |\tilde{I}_{(j)}(\varphi', \varphi) - \tilde{I}_{\text{ex}}(\varphi', \varphi)|^2}$, рассчитываемой после интерполяции найденных значений $\tilde{I}_{(j)}(\xi', \mathbf{k})$ ($\xi' \in K$) на значения $\tilde{I}_{(j)}(\mathbf{I}, \mathbf{k})$, соответствующие окружности Эвальда $|\xi'| = k_0$. Окончанию итераций соответствовало уменьшение $\|\tilde{I}_{(j)} - \tilde{I}_{\text{ex}}\|$ до величины, сравнимой с нормой $\|n\|$ вносимой ошибки. Надо отметить, что предлагаемый метод восстановления сохраняет работоспособность, в принципе, при любой рабочей частоте. Однако поскольку рассеивающая способность акустического рассеивателя увеличивается с ростом частоты в общем случае присутствия частотно-зависимых компонент (3.27), то для сильных рассеивателей требуется усложнение итерационной процедуры для обеспечения ее сходимости [А 2 (п. 5.4.2.4, п. 5.4.2.5)]. В задачах медицинской диагностики мягких тканей, для которых, в первую очередь, предназначается настоящий алгоритм, рабочий диапазон частот лежит в мегагерцовой области.

Результаты численного моделирования приводятся ниже для модели (3.27) рефракционно-поглощающего (комплекснозначного) рассеивателя $v(\mathbf{r}) = v_c(\mathbf{r}) + iv_\alpha(\mathbf{r})$ средней силы. Для него функция $\text{Re} v(\mathbf{r})$ представлена четырьмя неоднородностями, расположенными несимметрично относительно начала координат, а функция $\text{Im} v(\mathbf{r})$ – одной неоднородностью (рис. 3.1а). Две неоднородности функции $\text{Re} v(\mathbf{r})$ имеют равные амплитуды, соответствующие, согласно (3.27), близкому, но противоположному по знаку, контрасту скорости: $\Delta c/c_0 = 0.1$ и $\Delta c/c_0 = -0.077$. Дополнительные фазовые набегивы вдоль центральных сечений этих неоднородностей составляют $\Delta\psi \cong 0.27\pi$ и $\Delta\psi \cong -0.24\pi$, соответственно. Две другие неоднородности имеют меньшие равные амплитуды при противоположном контрасте: $\Delta c/c_0 \approx \pm 0.05$ ($\Delta\psi \cong \pm 0.13\pi$). Амплитуда функции $-\text{Im} v(\mathbf{r})$ соответствует ослаблению ≈ 0.4 Нп / λ_0 , а общее поглощение вдоль центрального сечения составляет ≈ 0.58 Нп (т.е. затухание по амплитуде – в 1.78 раз).

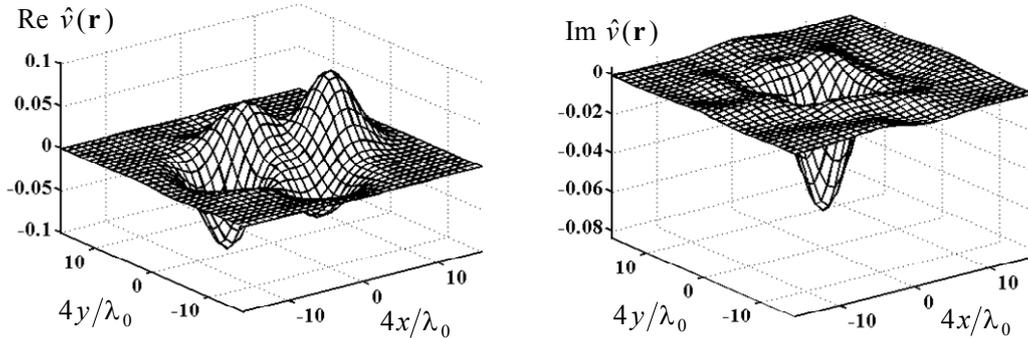
То обстоятельство, что форма и ширина рефракционных и поглощающих неоднородностей были выбраны одинаковыми, позволило восстановить функцию $v(\mathbf{r})$ “как целое”, не прибегая к схеме отдельной оценки c - и α -компонент, описанной после выражения (3.27). Количество направлений излучения и приема полагалось $M = 64$. Обратная корреляционная матрица $\mathcal{V}^{-1}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$ формировалась при $L = \ell = 2d_{1/2}$ для простого рассеивателя и при $\ell = 2d_{1/2}$, $L = 2\ell = 4d_{1/2}$ для сложного. Коэффициент регуляризации при обращении $\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi})$ составлял $\varepsilon_{\mathcal{V}} = 10^{-6} \max_{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi})} |\mathcal{V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi})|$ в обоих случаях.



a

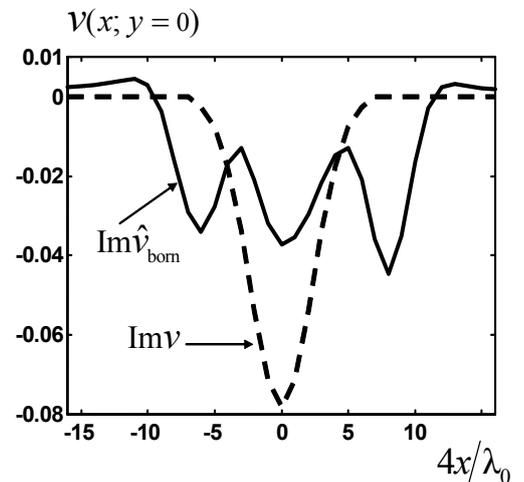


б



в

Рис. 3.1. Рефракционно-поглощающий рассеиватель средней силы с более сложной структурой (контраст минимальной скорости $\Delta c/c_0 = -0.077$ при дополнительном фазовом набеге $\Delta\psi \cong -0.24\pi$; контраст максимальной скорости $\Delta c/c_0 = 0.1$ при набеге $\Delta\psi \cong 0.27\pi$; амплитудное поглощение в рассеивателе – в 1.78 раз): (а) – общий вид действительной и мнимой частей истинного рассеивателя; (б, в) – рассеиватель, восстановленный по зашумленным данным при $\sigma_{ns} = 0.15 \tilde{I}_{max}$ в случае “слабой” регуляризующей фильтрации (б) и в случае согласованной фильтрации (в); (г) – центральные сечения мнимой части истинного рассеивателя (пунктирная линия) и рассеивателя, восстановленного в приближении однократного рассеяния по незашумленным данным (сплошная линия).



г

Результаты восстановления описанного рассеивателя (рис. 3.1б, в, з) иллюстрируют как необходимость учета процессов перерасеяния, так и принципиальную роль нелинейной фильтрации при регуляризации решения. Так, первого приближения Борна для качественного восстановления уже недостаточно. Даже в отсутствие помех борновская оценка $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$, полученная из (3.28), существенно отличается от истинной функции рассеивателя: относительная погрешность восстановления составляет $\delta_v \approx 0.42$ (рис. 3.1з).

Для исследования влияния регуляризирующей фильтрации на качество оценки рассеивателя при сильной шумовой помехе, восстановление осуществлялось с учетом перерасеяний из полной системы (3.21), (3.17). Две реализации данных рассеяния соответствовали, как и в случае слабого рассеивателя, независимым ошибкам с отклонением $\sigma_{\text{ns}} = 0.15 \tilde{I}_{\text{max}}$. Тогда $\left(\|n\| / \|\tilde{I}_{\text{ex}}^0\| \right)_{\text{eff}} \approx 1.08$, что свидетельствует о сильной зашумленности.

При восстановлении последовательно использовалась корреляционная матрица шума N , построенная в предположении двух разных уровней помехи. Так, при регуляризирующей фильтрации, согласованной с уровнем помехи, предполагается истинный уровень ошибок, при котором $P_0 = (\sigma_{\text{ns}})^2 = (0.15 \tilde{I}_{\text{max}})^2$. При “слабой” регуляризирующей фильтрации предполагается уровень, ослабленный в 150^2 раз: $P_0 = (10^{-3} \tilde{I}_{\text{max}})^2$. Восстановление с использованием “слабой” фильтрации, необходимой для обеспечения сходимости итерационной процедуры вообще, приводит к очень низкому качеству восстановления: $\delta_v \approx 0.55$ (рис. 3.1б). Таким образом, после “слабой” фильтрации погрешность восстановления δ_v остается, по порядку величины, на уровне относительной входной ошибки в данных.

Использование согласованной регуляризирующей фильтрации приводит к достаточно высокому качеству восстановления. Даже при обозначенной сильной зашумленности данных рассеяния получается $\delta_v \approx 0.17$ (рис. 3.1в). Это значение δ_v свидетельствует, что при необходимости учета перерасеяний возникают, по сравнению с результатом восстановления слабого рассеивателя, дополнительные погрешности.

Важно подчеркнуть, что механизм пространственно-спектральной регуляризирующей фильтрации всегда однотипен, независимо от номера итерационного цикла j . Это связано с тем, что в соотношениях (3.21), (3.24) матрица $A(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta})$ остается неизменной для всех итерационных циклов. Именно эта матрица содержит информацию о корреляционных свойствах помехи и рассеивателя. Поэтому в каждом итерационном цикле регуляризирующая фильтрация сводится к фильтрации винеровского типа, аналогичной фильтрации в случае слабых рассеивателей. При этом решение $\tilde{v}_{(j)}(\boldsymbol{\eta})$ на основе (3.21) подобно борновской оценке (3.28), но с коррекцией (по результатам предшествующего цикла) правой части на эффекты перерасеяния. Тем самым, для восстановления достаточно сильных рассеивателей получено нелинейное обобщение метода винеровской фильтрации, обеспечивающее итоговое регуляризованное решение, близкое к оптимальному. Можно отметить, что в [265] предлагался простейший вариант фильтрации в виде ограничения (“обре-

зания”) пространственного спектра рассеивателя на каждом итерационном шаге, что, в то же время, ускоряло сходимость итераций.

Наконец, при численном моделировании было обнаружено, что согласованную регуляризующую фильтрацию достаточно применить только в заключительном цикле итерационной процедуры. Действительно, получив предварительно решение задачи при “слабой” регуляризующей фильтрации (рис. рис. 3.1б), можно сделать еще один дополнительный итерационный цикл, однако уже с согласованной фильтрацией. Результат такой “однократно-согласованной” фильтрации практически совпадает, по качеству восстановления, со случаем многошаговой согласованной фильтрации. Это интересный в прикладном отношении факт. Он позволяет сначала восстановить рассеиватель с использованием фильтрации, предполагающей некоторый уровень шума, заведомо ниже истинного, после чего результат восстановления дополнительно однократно обработать новым, более сильным “фильтром”. Меняя параметры этого дополнительного “фильтра”, можно подобрать, даже не зная точных характеристик помехи, вариант, оптимальный для данного типа рассеивателя и ошибок измерения. Однако теоретически обосновать такой упрощенный подход не удалось. Возможно, он эффективен только для не слишком сильных рассеивателей с достаточно простой формой.

Итак, при реализации статистической обратной задачи можно работать как в пространственно-спектральном, так и в координатном представлении. Пространственно-спектральное представление удобно, прежде всего, при работе с данными рассеяния, представленными в терминах плоских падающих полей и рассеянных полей в дальней зоне. Работа в координатном представлении обладает некоторыми преимуществами. В этом случае удастся избежать серьезной технической проблемы и основного источника погрешностей в вычислениях – многочисленных громоздких процедур интерполяции с декартовой сетки на нерегулярную полярную сетку (“виньетку”) и наоборот. Кроме того, с технической точки зрения, построение корреляционной функции рассеивателя проще в координатном пространстве, поскольку связь амплитуды корреляционной функции и ее характерной ширины со среднестатистическими параметрами рассеивателя более наглядна в \mathbf{r} -пространстве, чем в \mathbf{K} -пространстве. Наконец, при восстановлении поглощающих рассеивателей контроль знакоопределенности функции, ответственной за полное поглощение в каждой пространственной точке, наиболее просто организовать в \mathbf{r} -пространстве. В случае же работы в \mathbf{K} -пространстве такой контроль потребует (при получении оценки пространственного спектра рассеивателя на каждом итерационном шаге) перехода в \mathbf{r} -пространство, что будет сопровождаться дополнительными вычислительными погрешностями. Что касается введенного при работе в \mathbf{K} -пространстве ограничения пространственного спектра рассеивателя и, фактически, пространственного спектра вторичных источников кругом радиуса $2k_0$, то в \mathbf{r} -пространстве это ограничение также проявляется в неявном виде – через неустойчивость задачи. Так, расширение пространственного спектра вторичных источников (по сравнению с пространственным спектром рассеивателя) сопровождается необходимостью введения более мелких отсчетов в \mathbf{r} -пространстве и, при выходе спектра вторичных источников за пределы круга радиуса $2k_0$, приводит к неустойчивости решения (см. § 3.2.3).

Раздел 3.2. Влияние объема экспериментальных данных на единственность и устойчивость решения обратной задачи рассеяния томографического типа

Обратная задача рассеяния является нелинейной некорректной задачей. Это сочетание свойств делает особенно сложным и, вместе с тем, актуальным анализ возможностей ее устойчивого и единственного решения. Действительно, некорректность задачи естественным образом приводит к неустойчивости решения. Вместе с тем, нелинейность решения обратной задачи относительно экспериментально измеряемых данных рассеяния означает, что характер единственности и устойчивости решения может существенным образом изменяться с ростом силы рассеивателя. Цель настоящего раздела – обсудить проблему взаимосвязи неединственности и неустойчивости решения обратной акустической задачи рассеяния для рассеивателей произвольной силы, а также роль избыточности экспериментальных данных. Нетривиальность вопроса и важность учета этих факторов при решении прикладных задач обусловлены нелинейностью задачи относительно характеристик рассеивателя.

Подробный анализ проблемы единственности решения обратной задачи рассеяния в приложении к ее квантово-механической и классической волновой постановкам может быть основан на результатах многочисленных работ, выполненных на протяжении десятков лет, и не входит в задачу настоящего раздела. Весьма содержательное и, вместе с тем, краткое изложение этой проблемы приводится в работе [367]. В данной работе, содержащей обширную библиографию, рассматривается задача восстановления рассеивающего потенциала в более сложной, нежели в большинстве такого рода работ, форме. В потенциал $U - E_0 w$ входят два члена; один из них (U) – энергонезависимый, а другой ($- E_0 w$) линейно растет с энергией E_0 . В этом смысле постановка сближается с задачами акустического профиля, в которых рассеяние может быть вызвано неоднородностью плотности и фазовой скорости звука в изотропной жидкой среде без дисперсии. Данные рассеяния задаются в виде оператора $\hat{F}(E_0)$, связывающего значения волновой функции $\psi(\mathbf{y})$ на границе \mathcal{Y} достаточно гладкой области $V_{\mathcal{Y}}$, содержащей рассеиватель, и значения нор-

мальной к границе производной этой функции: $\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\mathcal{Y}} = \hat{F}(E_0)(\psi|_{\mathcal{Y}})$. Здесь граница \mathcal{Y}

выполняет роль области наблюдения, а внутри области $V_{\mathcal{Y}}$ рассматриваемые волновые функции должны удовлетворять уравнению $\nabla^2 \psi + E_0 \psi = (U - E_0 w)\psi$. Оператор $\hat{F}(E_0)$ строится из экспериментальных данных. Например, в [266; 367] предлагается и в [А 33; А 34; А 86; А 88–А 91] моделируется функционально-аналитический алгоритм построения этого оператора, исходя из знания полей $\psi|_{\mathcal{Y}}$, которые излучаются и принимаются точечными преобразователями, располагающимися на границе \mathcal{Y} .

До недавнего времени представления о единственности решения монохроматической обратной задачи рассеяния заключались в следующем. В работе [367] и в ряде цитируемых в ней статей отмечалось принципиальное различие в свойствах единственности

решения монохроматической ($E_0 = \text{const}$) обратной задачи рассеяния в двумерном и трехмерном случаях ($D = 2, 3$). Для акустической обратной задачи это обстоятельство имело столь же принципиальное значение. Суть упомянутого отличия состояла в том, что единственность двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния удавалось доказать лишь для достаточно слабых рассеивающих потенциалов: $\|U - E_0 w\| \ll |E_0|$, где $\|U - E_0 w\|$ – некоторая норма рассеивающего потенциала. В акустической интерпретации подобное требование получалось сформулировать несколько более физично: рассеиватель не должен создавать рассеянных полей, превосходящих падающее поле хотя бы в сколь угодно малой окрестности одной точки внутри рассеивателя, – см. (1.43). Полная эквивалентность приведенных условий, по-видимому, нигде не обсуждалась и не доказывалась, но правдоподобность этой связи представляется разумной.

В то же время, удавалось доказать, что решение монохроматической трехмерной обратной задачи обладает (при полных данных рассеяния и определенных требованиях на характер локализации рассеивателя) единственностью вне зависимости от нормы рассеивающего потенциала [129 (гл. 1.2.3, § 4); 267]. Такое различие вполне очевидным образом связывалось с размерностной безызбыточностью монохроматических данных рассеяния в двумерном случае (размерности координатного пространства рассеивателя и параметризованного пространства независимых данных рассеяния совпадают и равны 2) и размерностной избыточностью данных для трехмерной монохроматической задачи (размерность параметризованного пространства данных рассеяния может составлять 4 против трехмерного координатного пространства рассеивателя). Существенность факта размерностной безызбыточности монохроматических данных рассеяния для теоремы единственности в двумерном случае становится еще более очевидной, поскольку в [268] показано следующее. Данные рассеяния для *любой*, сколь угодно узкой, полосы энергий (частот) снимают ограничение на силу рассеивателя, и в этом случае двумерная обратная задача обладает безусловной единственностью своего решения для рассеивателей с компактным носителем или с достаточно быстрым характером спадающего потенциала. Аналогичный факт отмечается и доказывается в книге [129 (гл. 1.2.3, § 5)].

В последние годы были получены результаты, существенно уточняющие понимание вопроса о единственности решения монохроматической обратной задачи рассеяния, в первую очередь, в двумерном случае. Так, в работе [269] была доказана единственность решения обратной квантово-механической двумерной обратной задачи рассеяния при нулевой энергии (данные рассеяния предполагаются в виде значений волнового поля и его нормальной производной на границе области томографирования). Несколько иной вариант рассмотрения этого же вопроса дан в работе [270], которой предшествовала публикация [271]. Полученные результаты были обобщены на случай ненулевой энергии в [272], причем единственность решения обратной двумерной монохроматической задачи при полных данных удалось показать без ограничений на силу рассеивателя. В упомянутых работах (в особенности, в [272]) факт единственности был показан совместно с логарифмической “глобальной устойчивостью” решения (в терминологии авторов), означающую монотонную, но нелинейную связь между нормой невязки двух потенциалов и нормой невязки соответствующих данных рассеяния, порожденных этими потенциалами. В связи с такими результатами естественно возникает вопрос о связи глобальной устойчивости с

помехоустойчивостью решения обратной задачи рассеяния в обычном для прикладных задач понимании этого слова. Как правило, по мере роста силы рассеивателя или по мере стремления к повышению разрешающей способности получаемого решения наблюдается быстрое повышение чувствительности к ошибкам в данных рассеяния, что обычно связывается с некорректностью обратной задачи рассеяния. Доказанная глобальная устойчивость не устраняет некорректность и, тем самым, не гарантирует хорошую помехоустойчивость решения в критических условиях. Это обстоятельство особенно актуально при решении обратных монохроматических задач рассеяния.

Вопрос точности восстановления эргодонезависимого потенциала (характерного для квантовой механики), с точки зрения устойчивости по Липшицу, рассмотрен в [266]. В этой работе показано, что с ростом энергии излучения, т.е. частоты в акустическом варианте, точность оценки потенциала (но именно эргодонезависимого!) растет. Понятие устойчивости по Липшицу близко к понятию помехоустойчивости, поскольку гарантирует малые ошибки восстановления при малых ошибках в данных рассеяния.

В контексте прикладных акустических задач результаты строгого математического рассмотрения принципиальной стороны проблемы единственности нуждаются в дополнительном анализе, связанном с рядом особенностей этих прикладных задач:

1. Данные рассеяния в акустических системах томографического типа (как и в ряде других реальных устройств) носят дискретный характер и имеют конечный объем. Характер их дискретизации во многом определяется чисто техническими соображениями и должен максимальным образом быть увязан с характеристиками исследуемого рассеивателя или класса рассеивателей.

2. Полнота данных рассеяния даже в монохроматическом случае не всегда может быть обеспечена. Например, в медицинских, геофизических и дефектоскопических задачах на возможность размещения излучателей и приемников накладывается ряд труднопреодолимых ограничений.

3. Данные рассеяния неизбежно обладают ограниченной точностью. Алгоритмы решения обратной задачи, не учитывающие это обстоятельство и, как следствие, нередко обладающие практически неизбежной неустойчивостью получаемого решения, должны быть тщательно рассмотрены с точки зрения их помехоустойчивости. В основе явлений неустойчивости лежит, конечно, некорректность обратных задач такого рода, уже отмечавшаяся выше.

По перечисленным причинам, проблемы единственности и устойчивости решения подобных прикладных задач нуждаются в дополнительном обсуждении и исследовании, учитывающем отмеченные выше особенности. Такое рассмотрение показало [А 11], что основное влияние на устойчивость решения обратной задачи рассеяния имеет пространственный спектр вторичных источников, инициируемых в рассеивателе. Решение обратной задачи на основе принятого рассеянного поля приводит, в той или иной форме, к оценке характера этих вторичных источников. Если ширина их пространственного спектра столь велика, что мелкие, но существенные детали пространственного распределения вторичных источников не воспроизводятся при решении обратной задачи достаточно надежно, то решение теряет устойчивость. Анализ этих вопросов и посвящен настоящий раздел. Рассмотрение изложенной проблемы начато в [А 67], и ниже излагается его дальнейшее развитие, основанное на работах [А 2 (глава 6); А 10; А 11].

Акустический рассеиватель, образуемый, в общем случае, неоднородностями фазовой скорости звука, коэффициента поглощения и плотности среды, описывается функцией $v(\mathbf{r})$. Для восстановления $v(\mathbf{r})$ рассеиватель облучается падающим полем $u_0(\mathbf{r}, \alpha)$, параметры которого (в том числе, конфигурация поля, направление падения и частота) описываются единым индексом α . В результате взаимодействия u_0 с рассеивателем, в области рассеяния \mathfrak{R} возникают вторичные источники

$$I(\mathbf{r}, \alpha) \equiv v(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, \alpha), \quad (3.30)$$

где $u(\mathbf{r}, \alpha)$ – полное поле.

В общем случае пространственно-распределенного рассеивателя необходимо функциональное описание, при котором функция $v(\mathbf{r})$ задается и должна быть восстановлена для всего континуального множества значений $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$. Если рассеиватель достаточно сильный (так что процессы перерассеяния волновых полей внутри \mathfrak{R} существенны), то область локализации для основной части пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \alpha) \equiv \int I(\mathbf{r}, \alpha) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ оказывается шире, чем для спектра рассеивателя $\tilde{v}(\xi) \equiv \int v(\mathbf{r}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ [А 23; А 69; А 131 (§ 16.3.2); 141; 233; 273]. Чем сильнее рассеиватель, тем существеннее может быть расширение области локализации функции $\tilde{I}(\xi, \alpha)$ по сравнению с $\tilde{v}(\xi)$. Этот эффект необходимо иметь в виду при обеспечении адекватности дискретного математического описания процесса рассеяния. Так, часто бывает удобно представить функции $v(\mathbf{r})$ и $I(\mathbf{r}, \alpha)$ в виде разложения по функциональным базисам $\{\zeta_s(\mathbf{r})\}$ и $\{\chi_k^\alpha(\mathbf{r})\}$:

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^S v_s \zeta_s(\mathbf{r}), \quad I(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{k=1}^{N_\alpha} I_k^\alpha \chi_k^\alpha(\mathbf{r}), \quad (3.31)$$

где v_s , I_k^α – коэффициенты разложения. В (3.31) предполагается, что нужная точность описания обеспечивается конечным числом членов разложения. Базисы $\{\zeta_s(\mathbf{r})\}$ и $\{\chi_k^\alpha(\mathbf{r})\}$, а также их размерности S и N_α , должны быть согласованы с ожидаемой шириной пространственных спектров рассеивателя и вторичных источников (соответственно), а также с линейным размером области рассеяния \mathfrak{R} . Эти величины могут быть оценены на основании априорной информации о статистическом классе восстанавливаемых рассеивателей. Литература, посвященная методу таких оценок, приведена в конце настоящего раздела 3.2.

Выбрать базисы можно “экономичным” и “неэкономичным” способами. При “экономичном” способе количество функций $\{\zeta_s(\mathbf{r})\}$ в (3.31) совпадает с количеством S независимых степеней свободы рассеивателя. Количество же функций $\{\chi_k^\alpha(\mathbf{r})\}$ совпадает

с количеством N_α независимых степеней свободы, характеризующих $I(\mathbf{r}, \alpha)$ при каждом фиксированном α . Под независимыми степенями свободы понимается такой набор параметров (в данном случае, достаточно полно описывающих рассеиватель или вторичные источники), что коэффициент взаимной ковариации значений этих параметров при усреднении по множеству рассеивателей данного класса существенно меньше единицы; тогда ни один из этих параметров не может быть восстановлен по остальным. Следовательно, для описания вторичных источников необходимо, в общем случае, более полный базис, соответствующий их расширенному пространственному спектру. При “неэкономичном” способе может быть выбран *единый* базис для описания как $v(\mathbf{r})$, так и $I(\mathbf{r}, \alpha)$ при всех α , используемых в рассматриваемых экспериментах (т.е. $\forall \alpha \in \mathcal{A}$) [143].

Пространственная дискретизация функций $v(\mathbf{r})$ и $I(\mathbf{r}, \alpha)$ (или внутренних полей), согласованная с теоремой отсчетов, также может быть выполнена двояко. Первый путь – дискретизация обеих функций в соответствии с суммарной (получающейся при переборе α) шириной пространственных спектров $\tilde{I}(\xi, \alpha)$. Второй путь – введение двух пространственных сеток с разным шагом дискретизации; одна из них дискретизирует $v(\mathbf{r})$, а другая (более густая) дискретизирует $I(\mathbf{r}, \alpha)$ [274]. Однако в обоих случаях количество *независимых* пространственных дискретных отсчетов составляет S для $v(\mathbf{r})$ и N_α для $I(\mathbf{r}, \alpha)$ при каждом фиксированном α .

В простейшем случае сложный рассеиватель представляется в виде совокупности S точечных рассеивателей, локализованных в заданных точках \mathbf{r}_s , $s = \overline{1, S}$:

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^S v_s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) . \quad (3.32)$$

Рассеивающая способность v_s включает в себя все внутренние процессы рассеяния на этих исчезающе малых рассеивателях. В силу вида (3.32), вторичные источники (3.30) возникают только в точках \mathbf{r}_s . Поэтому все базисы в (3.31) заведомо совпадают между собой, определяясь линейными комбинациями функций $\{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)\}$. Тогда количество степеней свободы, описывающих как рассеиватель, так и вторичные источники, одинаково и не зависит от силы рассеивателя: $N_\alpha = S$, $\forall \alpha$.

§ 3.2.1. Условия единственности и устойчивости восстановления

Напомним, что *слабым* можно назвать рассеиватель, для которого $|u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)| \ll |u_0(\mathbf{r}, \alpha)|$, $\forall \mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ – см. (1.42); тогда $N_\alpha = S$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$. Для рассеивателя *средней силы* рассеянное поле не превосходит падающее ни в одной точке области рассеяния: $|u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)| < |u_0(\mathbf{r}, \alpha)|$, $\forall \mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, – см. (1.43). Наконец, для *сильного* рассеивателя среди рассматриваемого множества падающих полей

найдется поле, при котором $|u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)| > |u_0(\mathbf{r}, \alpha)|$ в сколь угодно малой окрестности хотя бы одной точки $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, – см. (1.44). Важно, что для рассеивателя, состоящего из совокупности точечных рассеивателей, под $u_{sc}(\mathbf{r}, \alpha)$ здесь подразумевается рассеянное поле в точках их расположения $\{\mathbf{r}_s\}$, создаваемое всеми точечными рассеивателями, кроме находящегося в рассматриваемой точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s \in \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R} \equiv \bigcup_s \mathbf{r}_s$.

Пусть проводится *конечное* число A экспериментов. Каждый эксперимент соответствует фиксированному падающему полю $u_0(\mathbf{r}, \alpha)$, зондирующему рассеиватель (т.е. параметр $\alpha \in \mathcal{A}$ фиксирован), и совокупности *конечного* числа различных способов наблюдения рассеянного поля – данных рассеяния. Всего параметр α может принимать конечное число A различных значений, по числу экспериментов: $\alpha = \overline{1, A}$. При каждом фиксированном эксперименте в дискретном наборе точек \mathbf{y}_b (или дискретном наборе приемных конфигураций) в области \mathcal{Y} , лежащей вне области рассеяния \mathfrak{R} , регистрируются B значений рассеянного поля $u_{sc}(\mathbf{y}_b, \alpha)$, $\mathbf{y}_b \in \mathcal{Y}$, $b = \overline{1, B}$; каждый фиксированный индекс b описывает фиксированный набор параметров приемника, например, положение приемника или угол его поворота. Общее количество данных рассеяния, полученное из всех экспериментов, составляет конечное число AB .

Конечность имеющегося объема данных является принципиальным моментом для дальнейшего рассмотрения, цель которого – выяснить возможность *неединственности решения обратной задачи рассеяния* на основе фиксированного объема *дискретизованных* данных $u_{sc}(\mathbf{y}_b, \alpha)$. Неединственность решения означает, что существуют рассеиватели, которые не совпадают друг с другом, но являются неразличимыми по регистрируемому экспериментальным данным, т.е. они создают одни и те же данные $u_{sc}(\mathbf{y}_b, \alpha)$, $\alpha = \overline{1, A}$, $b = \overline{1, B}$. Нужно еще раз отметить, что в настоящем разделе речь идет именно о конечном числе (а не о континуальном наборе) нулевых данных. Действительно, рассеиватель в виде совокупности точечных рассеивателей даже при одном фиксированном падающем поле $u_0(\mathbf{r}, \alpha)$ не может вовсе не излучать за пределы области \mathfrak{R} (по определению, рассеиватель называется неизлучающим при фиксированном α , если $u_{sc}(\mathbf{y}, \alpha) \equiv 0$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}$). В то же время, пространственно-распределенный рассеиватель при одном фиксированном поле $u_0(\mathbf{r}, \alpha)$ может быть неизлучающим [275]; для континуального же множества падающих полей неизлучающим может быть только рассеиватель, функция $v(\mathbf{r})$ которого спадает на периферии не быстрее, чем по определенному закону [268].

Анализ вопроса о неединственности решения обратной задачи рассеяния, выполненный в [А 2 (глава 6); А 11; 142 (§ 7.3)], основан на общих соотношениях для наблюдаемого рассеянного поля и не связан с тем или иным конкретным методом решения обратной задачи. Показано, что *необходимым условием* для обеспечения *единственности* решения обратной задачи рассеяния является

$$AB > N. \quad (3.33)$$

Здесь и далее без ограничения общности итоговых выводов полагается $N_\alpha \approx N$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

Условие (3.33) связывает объем AB экспериментальных данных рассеяния с количеством степеней свободы N вторичных источников. Здесь важно, во-первых, что величины A и B входят симметрично, что согласуется с теоремой взаимности. Во-вторых, в (3.33) входит количество независимых параметров N , описывающих функцию $I(\mathbf{r}, \alpha)$ только при *одном* падающем поле, поскольку знание $I(\mathbf{r}, \alpha_1)$ только для одного $\alpha = \alpha_1$ позволяет найти $I(\mathbf{r}, \alpha)$ для произвольного α . Так, из (1.28) находится

$$u(\mathbf{r}, \alpha_1) = u_0(\mathbf{r}, \alpha_1) + \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \alpha_1) d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R}.$$

Тогда $v(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, \alpha_1)/u(\mathbf{r}, \alpha_1)$; многообразие точек $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$, в которых выполняется $u(\mathbf{r}, \alpha_1) = 0$, имеет меру 0, поэтому процедура дискретизации может быть задана так, чтобы эти точки были исключены. Наконец, из соотношения (1.28), умноженного на функцию рассеивателя v , т.е. из

$$I(\mathbf{r}, \alpha) = v(\mathbf{r})u_0(\mathbf{r}, \alpha) + v(\mathbf{r}) \int_{\mathfrak{R}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \alpha) d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R},$$

находится $I(\mathbf{r}, \alpha), \forall \alpha$. В-третьих, если при решении обратной задачи учитывается та или иная априорная информация о рассеивателе, то требование (3.33) может быть ослаблено.

В случае если объем данных рассеяния AB , требуемый для обеспечения единственности восстановления рассеивателя, достигим в совокупности проводимых экспериментов, и для его достижения схема съема дискретных данных не требует превышения рэлеевского предела для “классической” угловой разрешающей способности, решение обратной задачи обладает как единственностью, так и *устойчивостью*. А именно, для обеспечения устойчивости угловое расстояние между соседними приемоизлучающими элементами антенной решетки (или соседними углами как падающих, так и рассеянных волн) должно быть не менее, чем угол рэлеевского разрешения $\Delta\varphi_{\text{Rayl}}$ в двумерной задаче и $\Delta\Omega_{\text{Rayl}}$ в трехмерной задаче ($\Delta\Omega_{\text{Rayl}}$ имеет смысл среднего телесного угла, приходящегося на один приемоизлучающий элемент):

$$\Delta\varphi_{\text{Rayl}} \cong \frac{\lambda_0/2}{L/2} = \frac{2\pi}{k_0 L}; \quad \Delta\Omega_{\text{Rayl}} \cong \left(\frac{\lambda_0/2}{L/2} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{k_0 L} \right)^2; \quad (3.34)$$

λ_0 – характерная длина волны, L – линейный размер области рассеяния \mathfrak{R} . Следовательно, в случае кольцевой схемы съема данных, максимальное количество элементов решетки, удовлетворяющее условию устойчивости, составляет $M_{\text{Rayl}}^{(2)}$ для двумерной схемы и $M_{\text{Rayl}}^{(3)}$ для трехмерной схемы:

$$M_{\text{Rayl}}^{(2)} \cong 2\pi / \Delta\varphi_{\text{Rayl}} \cong k_0 L ; \quad M_{\text{Rayl}}^{(3)} \cong 4\pi / \Delta\Omega_{\text{Rayl}} \cong (k_0 L)^2 / \pi . \quad (3.35)$$

Соотношения (3.35) определяют максимальную сложность пространственной структуры вторичных источников, допускающую устойчивое численное решение обратной задачи (см. ниже § 3.2.3), при котором малые относительные ошибки в данных рассеяния приводят к относительно малым ошибкам восстановленной функции рассеивателя.

Причина возможной неединственности восстановления рассеивателей в дискретизованной задаче заключается в том, что внутри области, занятой рассеивателем, возможно существование ненаблюдаемых конфигураций вторичных источников (возмущений), не создающих волнового поля вне этой области во всем множестве экспериментов. В случае пространственно-распределенных рассеивателей механизм возникновения неединственности следующий. В процессе многократного рассеяния волн ширина пространственного спектра вторичных источников увеличивается. Это расширение приводит к увеличению количества независимых степеней свободы, описывающих вторичные источники. В свою очередь, такое увеличение приводит к возможности возбуждения последовательности конфигураций, ненаблюдаемых во всей последовательности экспериментов.

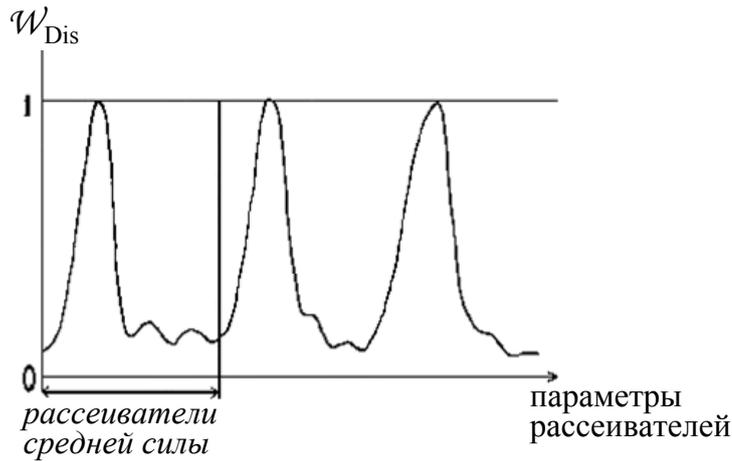
§ 3.2.2. Восстановление сильного рассеивателя как совокупности точечных рассеивателей

Для рассеивателя в виде совокупности точечных рассеивателей (3.32) количество независимых параметров, описывающих как рассеиватель, так и вторичные источники, одинаково ($N = S$). Рассуждения, проводимые далее на примере точечных рассеивателей, позволяют понять ситуацию, характерную в общих чертах для обратной задачи рассеяния также и в случае пространственно-распределенных рассеивателей. В случае *безызыбыточного конечного набора дискретизованных данных* рассеяния имеем $AB = S$. При безызыбыточном наборе дискретизованных данных сильный рассеиватель в точечном представлении восстанавливается неединственным образом [276]. Ситуация с единственностью решения может быть наглядно представлена, используя понятие невязки Dis . На-

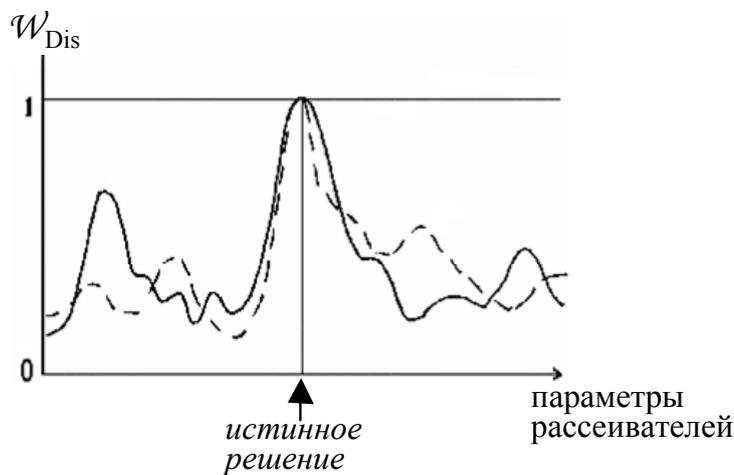
пример, $\text{Dis} = \sum_{d, d'=1}^{AB} (u_{\text{sc}}^d - \bar{u}_{\text{sc}}^d)^+ K_{dd'}^{-1} (u_{\text{sc}}^{d'} - \bar{u}_{\text{sc}}^{d'})$, где u_{sc}^d – фиксированные эксперимен-

тально наблюдаемые данные рассеяния; \bar{u}_{sc}^d – данные рассеяния для варьируемого рассеивателя с перебираемыми параметрами; $K_{d'd}$ – матрица ковариаций оценок рассеянных полей; d – объединенный индекс для параметра падающего поля и точки наблюдения (\mathbf{y}_b, α) . Пусть на рис. 3.2 горизонтальная ось условно изображает многомерное пространство параметров всех физически реализуемых рассеивателей (каждая точка на горизонтальной оси соответствует некоторому рассеивателю); состояние “0” соответствует однородной нерассеивающей среде. По вертикальной оси откладывается величина

$$\mathcal{W}_{\text{Dis}} = \frac{1}{1 + \text{Dis}} ; \quad \mathcal{W}_{\text{Dis}} = 1 \text{ при } \text{Dis} = 0 .$$



a



б

Рис. 3.2. Поведение невязки при безызыточных данных рассеяния (*a*) и при различных наборах избыточных данных рассеяния (*б*).

Картина невязок, соответствующая восстановлению рассеивателя в точечном представлении по безызыточным данным, изображена на рис. 3.2*a*. Для всех решений-рассеивателей (истинного и ложных, соответствующих неразличимым рассеивателям), строго удовлетворяющих экспериментальным данным ($Dis = 0$), имеет место значение $W_{Dis} = 1$. Среди рассеивателей средней силы относительно однородной среды такое решение одно, ближайшее к состоянию “0”; тем самым, единственность решения обратной задачи имеет место только в классе рассеивателей средней силы.

Для рассеивателя в точечном представлении условие избыточности данных рассеяния $AB > S$ равносильно выполнению условия (3.33), поскольку $N = S$. Поэтому роль избыточности данных рассеяния заключается в том, что решение обратной задачи рассеяния становится единственным. Однако для практики весьма важно, каков характер устранения неединственности по мере роста избыточности данных. Так, добавление дополни-

тельных измерений к безызбыточным данным приводит к тому, что выполнение $\text{Dis} = 0$ гарантировано только для истинного рассеивателя. Ложные же рассеиватели, которые имели $\text{Dis} = 0$ при безызбыточном наборе данных, теперь приобретают ненулевую невязку $\text{Dis} \neq 0$ (сплошная линия на рис. 3.2б или пунктирная линия для другого набора избыточных данных). Следовательно, единственность решения формально обеспечена. Однако если объем и характер данных рассеяния близки к безызбыточным, то ложные “пики” величины $\mathcal{W}'_{\text{Dis}}$ становятся лишь незначительно ниже, чем истинный “пик” (соответствующий истинному рассеивателю). Поэтому даже небольшие ошибки в экспериментальных данных могут легко вызвать “перескок” с истинного решения на ложное. Такой “перескок” – свидетельство сильнейшей неустойчивости решения – приводит к так называемой “аномальной ошибке” восстановления рассеивателя, т.е. практически к неединственности. В случае “аномальной ошибки” параметры ложного восстановленного рассеивателя могут отличаться сколь угодно сильно от параметров истинного рассеивателя; при этом незашумленные рассеянные поля, порождаемые истинным и ложным рассеивателями, отличаются друг от друга в пределах погрешности измерений.

Естественным способом борьбы с явлениями неединственности и неустойчивости является увеличение коэффициента избыточности данных рассеяния. Если это увеличение достигается при угловом расстоянии между приемоизлучающими элементами не менее рэлеевского (3.34), то ложные “пики” величины $\mathcal{W}'_{\text{Dis}}$ распределяются все более равномерно, а их амплитуды уменьшаются (рис. 3.2б). Поэтому истинное решение ($\mathcal{W}'_{\text{Dis}} = 1$) становится на этом фоне все более контрастным, т.е. устойчивость решения повышается. Однако как только угловое расстояние становится меньше рэлеевского, дальнейшее увеличение объема данных не приводит к повышению устойчивости решения, хотя при некоррелированных ошибках в данных приводит, в случае отсутствия “перескока”, к уменьшению ошибок в оценке характеристик истинного рассеивателя.

Можно оценить, при каком среднем расстоянии Δx между соседними точечными рассеивателями возможно одновременное выполнение условий единственности (3.33) и устойчивости (3.34) решения в случае кольцевой схемы съема данных. В двумерной монохроматической задаче максимально достижимое независимое количество данных рассеяния, удовлетворяющее условию устойчивости, составляет, согласно (3.35): $A = A_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(2)}$, $B = B_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(2)} / 2$. Здесь значение B_{Rayl} полагается в два раза меньше, чем A_{Rayl} в силу теоремы взаимности. Тогда из условия $A_{\text{Rayl}} B_{\text{Rayl}} > S$ (необходимого для обеспечения единственности решения при одновременном соблюдении его устойчивости), где $S \cong (L / \Delta x)^2$, следует оценка

$$\Delta x > \lambda_0 / (\sqrt{2}\pi) \approx \lambda_0 / 4 . \quad (3.36)$$

Такая же оценка получается и в трехмерной задаче, где $S \cong (L / \Delta x)^3$, если объем данных рассеяния близок к безызбыточному. Имеется в виду, что размерность параметризованного пространства данных и размерность пространства, в котором расположены точечные рассеиватели, одинаковы и равны трем: например, излучающие элементы располагаются на сфере вокруг области рассеяния \mathfrak{R} и, тем самым, образуют двумерное параметризо-

ванное многообразие, а приемные элементы располагаются только на окружности вокруг \mathcal{R} и образуют одномерное параметризованное многообразие. Ситуация изменяется, если в трехмерной монохроматической задаче используется весь избыточный объем данных, т.е. размерность параметризованного пространства данных равна четырем (и излучатели, и приемники располагаются, например, на сфере), а размерность координатного пространства рассеивателя равна трем. Тогда $A = A_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(3)}$, $B = B_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(3)} / 2$, и из условия $A_{\text{Rayl}} B_{\text{Rayl}} > S$ следует оценка $\Delta x > \frac{\lambda_0}{4} \sqrt[3]{\frac{\lambda_0}{L}}$. Тем самым, в трехмерном случае допустимо существенное, но не безграничное сгущение точек рассеяния без потери устойчивости решения.

§ 3.2.3. Обратная задача рассеяния для пространственно-распределенных рассеивателей

Как обсуждалось выше, функциональное описание задачи не эквивалентно по физической сущности ситуации в случае точечных рассеивателей. Анализ дискретизованных соотношений в случае пространственно-распределенных рассеивателей позволяет установить связь явлений неединственности и неустойчивости с размерностью задачи, силой рассеивателя и степенью сложности его пространственной структуры, отражающейся на ширине его пространственного спектра. При функциональном описании понятие избыточности данных рассеяния тесно связано с размерностью координатного пространства, в котором локализован восстанавливаемый пространственно-распределенный рассеиватель, т.е. с размерностью области определения функции рассеивателя. Впервые на важность этой взаимосвязи обратил внимание А. J. Devaney, – см., например, [139; 277; 278]. Как упоминалось в начале раздела 3.2, двумерная монохроматическая задача является безызыточной в размерностном плане в том смысле, что координатное пространство и параметризованное пространство независимых данных рассеяния имеют одинаковую размерность, равную двум. Трехмерная же монохроматическая задача избыточна в размерностном плане, – параметризованное пространство данных рассеяния может иметь размерность четыре, а размерность координатного пространства рассеивателя равна трем. Однако по числу дискретных отсчетов, описывающих всю совокупность данных наблюдения, требуется избыточность (по сравнению с числом дискретных отсчетов, описывающих рассеиватель) как в двумерной, так и в трехмерной задачах. Так, при отсутствии априорной информации о рассеивателе, минимальное количество независимых дискретизованных данных рассеяния, необходимое для того, чтобы заведомо не потерять информацию о рассеивателе, составляет $[A \ 23; A \ 131 (\S \ 16.3.3)] \ AB \cong N$, что согласуется с (3.33). Это количество превосходит безызыточное количество $(AB \cong S)$, кроме случая слабых рассеивателей, для которых $N = S$. Необходимость отсчетной избыточности связана с тем, что для восстановления функции пространственно-распределенного рассеивателя всегда требуется (в явном или неявном виде) восстановление вторичных источников или внутренних полей, пространственный спектр которых шире, чем спектр рассеивателя.

Численные оценки количества независимых параметров для рассеивателя и его вторичных источников зависят от площадей (при $D = 2$) или объемов (при $D = 3$) $\Gamma_{\tilde{\nu}}$ и $\Gamma_{\tilde{I}}$ тех областей пространственных частот, в которых еще существенны (при требуемой точности описания) компоненты пространственного спектра рассеивателя $\tilde{\nu}(\xi)$ и пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \alpha)$, соответственно:

$$S \cong \frac{\Gamma_{\tilde{\nu}}}{(2\pi/L)^D}, \quad N \cong \frac{\Gamma_{\tilde{I}}}{(2\pi/L)^D} \quad (D = 2, 3).$$

Пусть ℓ – линейный размер характерных пространственных деталей рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ и Ξ – радиус области локализации его пространственного спектра $\tilde{\nu}(\xi)$. Тогда

$$2\Xi \cong 2\pi/\ell, \quad \Gamma_{\tilde{\nu}} \cong (2\Xi)^D, \quad S \cong (\Xi L/\pi)^D; \quad D = 2, 3. \quad (3.37)$$

Если приближенно предполагается, что пространственный спектр $\tilde{I}(\xi, \alpha)$ расширяется достаточно равномерно во всех направлениях в пространстве векторов пространственной частоты ξ и хорошо локализован в области с линейной полушириной $m_0\Xi$ (коэффициент $m_0 \geq 1$), то

$$\Gamma_{\tilde{I}} \cong (2m_0\Xi)^D, \quad N \cong (m_0\Xi L/\pi)^D \cong m_0^D S; \quad D = 2, 3. \quad (3.38)$$

Двумерная обратная задача рассеяния

Ряд теорем утверждает, что двумерная монохроматическая задача рассеяния допускает единственное решение для слабых и средней силы рассеивателей. Например, в работе [367] данное обстоятельство сформулировано в виде ограничения на норму рассеивателя. Для сильных рассеивателей эта задача разрешима неоднозначно для анализируемого случая конечного объема монохроматических дискретизованных данных, что не противоречит результатам работы [272], где вопросы дискретизации не затрагиваются. Следовательно, в области рассеивателей средней силы нулевая невязка возникает в единственном случае, и поведение величины \mathcal{W}_{Dis} аналогично ситуации с безызбыточными данными при точечном представлении рассеивателя (рис. 3.2a). Аналогия объясняется безызбыточностью двумерной монохроматической задачи в размерностном плане.

Необходимое условие единственности решения обратной задачи (3.33) и условие устойчивости решения (3.34) накладывают ограничения (которые существенно различаются в двумерной и трехмерной задачах) на допустимую силу рассеивателя и сложность его пространственной структуры. Можно оценить, при какой степени расширения пространственного спектра вторичных источников возможно одновременное выполнение

(3.33) и (3.34) в двумерной монохроматической задаче при кольцевой схеме съема данных. Максимально достижимое независимое количество данных рассеяния, удовлетворяющее условию устойчивости получаемого из них решения, составляет, согласно (3.35), $A = A_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(2)}$, $B = B_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(2)} / 2$. Тогда при использовании для N оценки (3.38) при $D = 2$ с учетом (3.37), из условия $A_{\text{Rayl}} B_{\text{Rayl}} > N$ следует:

$$m_0 < 2k_0 / \Xi, \quad \text{т.е.} \quad \ell > m_0 \lambda_0 / 4. \quad (3.39)$$

Оценка (3.39) означает, что в обратной двумерной монохроматической задаче отсчетная избыточность данных эффективна, в общем случае, до тех пор, пока пространственный спектр вторичных источников хорошо локализован внутри круга радиуса $2k_0$; в частности, должно отсутствовать рассеяние назад. Центр локализации спектра вторичных источников, т.е. центр упомянутого круга, зависит от типа падающего поля и его направления. Например, для плоской падающей волны с волновым вектором \mathbf{k} , этот центр расположен в точке \mathbf{k} , изменяясь при изменении направления падения. При нарушении требования (3.39) решение становится неустойчивым. Чем существеннее пространственный спектр вторичных источников выходит за круг радиуса $2k_0$, тем сильнее неустойчивость восстановления рассеивателя [А 69; А 131 (§ 16.3.2)]. Однако для слабых рассеивателей, имеющих $\Xi > 2k_0$, устойчивость решения будет обеспечена, если ограничиться восстановлением $\tilde{v}(\xi)$ только при $|\xi| < 2k_0$, отфильтровывая более высокие пространственные частоты. Именно восстановление высокочастотной области пространственного спектра рассеивателя связано с неустойчивостью операций типа аналитического продолжения.

При учете процессов перерассеяния волн ситуация с неустойчивостью существенно усложняется. Дело в том, что при этом поле внутри области рассеяния становится зависящим от функции рассеивателя, и это приводит к возникновению мелкомасштабной структуры вторичных источников и волнового поля внутри области рассеяния. Именно эта мелкомасштабная структура усиливает неустойчивость процесса восстановления сложной структуры вторичных источников и внутреннего волнового поля. Чем выше порядок играющих роль перерассеяний, и чем сложнее пространственная структура самого рассеивателя, тем сложнее структура вторичных источников и внутреннего поля, и, следовательно, тем сильнее проявляется неустойчивость. Поэтому в двумерной монохроматической задаче устойчивое восстановление обеспечивается только для узкополосных по пространственному спектру рассеивателей, и с ростом силы рассеивателя ограничения на ширину его пространственного спектра становятся жестче. Более того, корректное восстановление рассеивателя ценой снижения пространственной разрешающей способности, т.е. путем фильтрации высокочастотных пространственных компонент получаемой оценки $\tilde{v}(\xi)$, становится уже невозможным. Теперь, в отличие от случая слабых рассеивателей, для корректного восстановления рассеивателя требуется восстановить значения спектра вторичных источников на всех пространственных частотах [А 2 (глава 6); А 11; А 131 (§ 16.3.2)].

Из ограничения (3.39) следуют характерные для томографических задач численные оценки. Так, при $\Xi/k_0 \cong (1 \div 2)$, т.е. при $\ell \cong (0.25 \div 0.5)\lambda_0$, имеем $m_0 \leq (1 \div 2)$, – допустимо незначительное расширение пространственного спектра вторичных источников. Для рассеивателей с более крупными характерными пространственными деталями допустимое расширение увеличивается: при $\Xi/k_0 \cong (0.1 \div 0.2)$, т.е. при $\ell \cong (2.5 \div 5)\lambda_0$, имеем $m_0 \leq (10 \div 20)$.

Итак, единственность решения обратной двумерной монохроматической задачи гарантируется лишь в классе рассеивателей средней силы. Однако для рассеивателей как средней силы, так и сильных, обладающих столь сложной пространственной структурой, что пространственный спектр вторичных источников выходит за пределы круга радиуса $2k_0$, решение является неустойчивым. Для сравнения, в пространственном спектре *точечных* рассеивателей в равной мере присутствуют все пространственные частоты. Тем не менее, если выполнено условие (3.36), то устойчивость восстановления может быть обеспечена за счет геометрического расположения излучателей и приемников, соответствующего данной конкретной сетке точечных излучателей, в сочетании с жестким априорным условием о точечном характере рассеивателя и его вторичных источников.

Таким образом, в двумерной монохроматической задаче наилучшим образом поддаются восстановлению два класса рассеивателей. Первый класс представлен слабыми рассеивателями, которые могут обладать достаточно широким пространственным спектром; второй – рассеивателями средней силы, пространственный спектр которых локализован, в основном, в узком частотном диапазоне. Попытка восстановления других рассеивателей сталкивается с проблемами неединственности или неустойчивости. Разрешить эти проблемы можно только за счет перехода к импульсному или многочастотному режиму зондирования, который в двумерной задаче является единственным источником получения избыточных, в размерностном плане, данных рассеяния [129 (гл. 1.2.3, § 5); 268].

Трехмерная обратная задача рассеяния

Трехмерная задача рассеяния как в монохроматическом, так и в импульсном режимах имеет единственное решение для пространственно-распределенных рассеивателей любой силы, если данные рассеяния являются избыточными в размерностном плане, причем степень их избыточности имеет ненулевую меру [150; 279; 280]. Для дискретизованного объема данных это означает, что такие данные избыточны, с точки зрения содержащейся в них информации. В трехмерной монохроматической задаче уже имеется резерв размерностной избыточности [129 (гл. 1.2.3, § 4)]. При импульсном режиме возможность получения избыточных данных возрастает за счет частотной степени свободы.

При решении монохроматической трехмерной обратной задачи можно ограничиться размерностно-безыбыточными данными рассеяния – трехмерно параметризованное пространство данных и трехмерное же координатное пространство для области определения рассеивателя. Такие данные соответствуют, например, двумерному многообразию всех направлений падения зондирующей волны в сочетании с одномерным многообразием данных о рассеянном поле на некоторой окружности (или дуге, обеспечивающей такой

же объем независимых данных рассеяния). Тогда ситуация с невязкой аналогична двумерной монохроматической задаче (рис. 3.2а). Если рассеянные поля измерить на другой окружности (или же на другой рабочей частоте зондирования), далекой от первой, то для новых данных ложные пики величины $\mathcal{W}'_{\text{Dis}}$ возникают при других параметрах рассеивателей. Для получения размерностно-избыточных данных рассеяния достаточно превратить окружность в узкую ленточную полосу в окрестности этой окружности или же перейти от монохроматического режима к импульсному, однако, возможно, с очень узкой относительной полосой частот. Картина невязок будет соответствовать рис. 3.2б. Единственность решения формально восстанавливается, однако вероятность “аномальной ошибки” велика. С увеличением степени избыточности независимых данных помехоустойчивость решения повышается.

Для размерностно-безыбыточных данных рассеяния имеет место та же оценка (3.39), что и в двумерной задаче. Максимально достижимое количество размерностно-избыточных монохроматических данных рассеяния, удовлетворяющих условию устойчивости получаемого решения, составляет, в соответствии с (3.35): $A = A_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(3)}$, $B = B_{\text{Rayl}} \cong M_{\text{Rayl}}^{(3)} / 2$. Тогда из условия $A_{\text{Rayl}} B_{\text{Rayl}} > N$ с учетом (3.37) и (3.38) при $D = 3$ следует:

$$m_0 < \frac{2k_0 \sqrt[3]{k_0 L}}{\Xi} \frac{2}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \ell > m_0 \frac{\lambda_0}{4} \frac{2}{\sqrt[3]{k_0 L}}. \quad (3.40)$$

Требования (3.40) означают, что, благодаря размерностной избыточности данных, предельно допустимое расширение пространственного спектра вторичных источников может быть в $\sqrt[3]{k_0 L} / 2$ раз больше, чем в двумерной задаче (3.39). Чем больше волновой размер рассеивателя, тем больше доступное количество данных рассеяния, удовлетворяющих условию устойчивости решения, по сравнению с количеством независимых параметров самого рассеивателя; следовательно, тем больше допустимое расширение (3.40). Характерные для томографических задач оценки зависят теперь не только от Ξ / k_0 , но и от $k_0 L$. Так, для рассеивателей с небольшими волновыми размерами, оценки близки к случаю двумерной задачи. Например, при $\lambda_0 \cong 1 \text{ мм}$ и $L \cong 0.5 \text{ см} \cong 5\lambda_0$ в случае $\Xi / k_0 \cong (1 \div 2)$, т.е. $\ell \cong (0.25 \div 0.5)\lambda_0$, имеем $m_0 \leq (1.6 \div 3.2)$; в случае же $\Xi / k_0 \cong (0.1 \div 0.2)$, т.е. $\ell \cong (2.5 \div 5)\lambda_0$, имеем $m_0 \leq (16 \div 32)$. По мере увеличения волновых размеров рассеивателя оценки изменяются. Так, при $\lambda_0 \cong 1 \text{ мм}$ и $L \cong 10 \text{ см} \cong 100\lambda_0$ в случае $\Xi / k_0 \cong (1 \div 2)$ будет $m_0 \leq (4 \div 8)$, а в случае $\Xi / k_0 \cong (0.1 \div 0.2)$ будет $m_0 \leq (40 \div 80)$.

Таким образом, размерностная избыточность дискретизованных экспериментальных данных устраняет ограничение на силу пространственно-распределенного рассеивателя в формулировке теоремы единственности. Этот факт находит отражение в самых разных вариантах теоремы единственности. Однако в каждом конкретном случае числен-

ные значения параметров стабилизации решения обратной задачи различны и нуждаются в специальном анализе.

В заключение надо отметить следующее. Определяющей для единственности и устойчивости решения обратных задач рассеяния, в первую очередь прикладного характера, является *ширина пространственного спектра вторичных источников*. Знание этого параметра весьма желательно перед началом процедуры съема данных и последующего численного решения обратной томографической задачи. Так, знание размеров области локализации пространственного спектра вторичных источников позволяет оценить количество степеней свободы этих источников. Тем самым можно, во-первых, проанализировать вопросы о принципиальной возможности обеспечения единственности и устойчивости процесса восстановления рассеивателя определенной силы и о минимально необходимом для этой цели объеме дискретизованных экспериментальных данных рассеяния. Во-вторых, можно выбрать и организовать наиболее целесообразную томографическую схему, предоставляющую оптимальный (среди доступных) объем данных в монохроматическом или импульсном режимах. Для этого, в частности, следует оценить максимально допустимый угловой шаг дискретизации при съеме данных. Например, в случае кольцевой схемы съема данных в двумерной монохроматической системе, такой шаг составляет, согласно [А 131 (§ 16.3.3)], $\Delta\varphi_{\max} \cong 2\pi/(\Xi_I L)$, где L – линейный размер области рассеяния \mathfrak{R} , Ξ_I – линейная полуширина области локализации пространственного спектра вторичных источников при фиксированном падающем поле. Превышение углового шага над допустимым приводит к потере информации о рассеивателе (невосполнимой на этапе численного восстановления рассеивателя) и имеет следствием неадекватность восстановленной картины [170]. Наконец, исходя из имеющегося объема данных, можно выбрать наиболее подходящие методы решения обратной задачи.

Итак, получение априорной оценки ширины пространственного спектра, даже в существенной степени завышенной, исходящей из самых общих сведений о характере оцениваемого рассеивателя, играет существенную роль при разработке технических средств томографирования, алгоритмов и цифровых систем обработки данных. В связи с этим, в [А 2 (раздел 6.5); А 10; А 68; А 70] поставлена и решена задача о статистической оценке формы и максимально возможной ширины энергетического пространственного спектра вторичных источников, характерных для класса рассеивателей с заданными среднестатистическими параметрами. Приводятся результаты компьютерного моделирования, и среднестатистический ожидаемый спектр сравнивается с частной реализацией спектра. Показано, что в случае сильно выраженных эффектов перерассеяния, среднестатистическая ширина пространственного спектра определяется, главным образом, эффективным контрастом скорости в ансамбле рассеивателей и слабо зависит от масштаба пространственных флуктуаций характеристик этих рассеивателей. Подробное изложение данного материала, достаточно подробно изложенного в [А 2 (раздел 6.5); А 10], не приводится в представляемой диссертационной работе в силу ограничений на ее допустимый объем.

Глава 4. Перспективы развития методов томографирования линейных акустических параметров среды

Раздел 4.1. Состояние акустических томографических систем (разработки последних лет)

Текст настоящей вводной части приводится ниже в соответствии с публикациями [А 2 (раздел 7.1) ; А 15; 216].

Переход от томографических систем, дающих описание двумерных сечений (конечной толщины) различных рассеивателей, к непосредственному восстановлению характеристик трехмерного объекта связано с решением ряда серьезных проблем как принципиального (теоретического и математического) характера, так и технического. “Технический” характер проблем отнюдь не означает их второстепенность и относительную простоту [А 15; А 57].

Решение трехмерных обратных задач требует очень мощных вычислительных средств [211; 281]. Так, результаты практической реализации монохроматических алгоритмов Р. Г. Новикова, предназначенных для восстановления трехмерных акустических неоднородностей конечного объема (см. ниже главу 9, а также [А 131 – глава 19]), показали, что помимо большой чисто математической сложности таких алгоритмов возникают серьезные трудности их программной и вычислительной реализации, связанные с очень большим объемом вычислительных операций. Алгоритм, основанный на подходе, названном его автором М. И. Белишевым “методом граничного управления (Boundary Control method – the BC method)”, о котором кратко говорится ниже в главе 5 [А 131 – глава 14], также встретился с аналогичными трудностями. По свидетельству Л. Н. Пестова, развившего этот подход вплоть до программной его реализации, объем вычислений даже при решении задачи восстановления сравнительно простого рассеивателя становится чрезвычайно большим. На необходимость использования суперкомпьютерных технологий для решения прикладных томографических задач обращено внимание в работе [255].

Следующая проблема, носящая не только технический, но и более фундаментальный характер, состоит в создании достаточно высокого входного отношения сигнал/помеха в системе. Получение изображения трехмерного рассеивателя значительных волновых размеров требует окружения его приемоизлучающими преобразователями малых размеров (около $\frac{\lambda_0}{2} \times \frac{\lambda_0}{2}$, где λ_0 – характерная длина волны), площадью в доли мм². Эти преобразователи должны создавать достаточно интенсивную первичную волну во всем объеме рассеивателя (обычно, несколько литров, т.е. до 10⁴ см³), а приемники, имеющие такую же малую площадь и высокий импеданс, должны обеспечить хорошее соотношение “сигнал рассеянной волны / помеха”. Кроме того, большое количество преобразователей связано с применением многошаговой системы мультиплексирования, так-

же набирающей шумы и различного рода помехи. Тем не менее, практическая необходимость создания систем трехмерной интроскопии (особенно медико-диагностического назначения) настоятельно требует рассмотрения перспектив практической реализации подобных устройств и детального анализа принципов их построения.

Разработка непосредственно трехмерной системы была начата и продолжается, вплоть до настоящего времени, группой, работающей в Германии, г. Карлсруэ [282–292]. После предварительной разработки [282] очевидные сложности создания такой системы привели авторов первоначально к отказу от учета неоднородностей среды в процессе обработки сигналов, и среда полагалась однородной с некоторыми средними значениями скорости. Это, в свою очередь, вынудило на первом этапе разработки ограничиться лишь отраженными сигналами, так как добавление просветных сигналов привело бы к их дефазировке относительно сигналов отражения. Кроме того, слабость зондирующего поля вынудила сузить диаграмму направленности преобразователей (т.е. увеличить их апертуру) до 30° вместо желательных $90^\circ \div 100^\circ$, уменьшив размер области качественного восстановления до нескольких сантиметров. Тем не менее, многие характеристики созданного данной группой прототипа весьма совершенны:

- широкая полоса частот (рабочий диапазон $2.5 \div 3.5$ МГц);
- большое число $\cong 1600$ преобразователей, организованных в приемные группы (48 шагов мультиплексирования);
- высокая частота опроса (10 МГц, а позднее и 20 МГц).

Эти параметры ясно продемонстрировали основную сложность, – оперативный сбор информации и ее обработка в описываемом прототипе томографа [282] занимали несколько часов.

Следующий вариант прототипа [283], разработанный этой же группой, решал ряд проблем, связанных со сложностью создания трехмерных систем. Так, антенная решетка не была сплошной, а состояла из трех “этажей” кольцевых разреженных антенн, каждая из которых включала в себя 16 блоков; каждый блок объединял в себя 24 излучающих и 96 приемных преобразователей. Кольцевая система в процессе съема данных (требовавшего 8 часов!) занимала 6 угловых положений. Таким образом, итоговая, отчасти синтезированная, апертура заменяла собой приемоизлучающую систему из 2304 излучателей и 9216 приемников. Работа томографа проводилась в режиме “на отражение” на частоте 2.7 МГц, но при этом в процессе обработки сигналов учитывалась неоднородность фазовой скорости, оцениваемой из данных о временах пролета. Тем самым, применялся своего рода двухшаговый метод. Как и в первом варианте, излучатели обеспечивали высокое отношение сигнал/помеха лишь в небольшом объеме в центре антенной решетки. Прототип был испытан на различных фантомных образцах. Другой вариант томографа предполагал расположение преобразователей по внутренней поверхности половины эллипсоида [284]. В целом, приведенные результаты четко говорят обо всем наборе сложных проблем, связанных с реализацией полноразмерной системы трехмерного акустического томографирования.

Наиболее продвинутый прототип трехмерной системы [285; 286] содержал 628 излучателей и 1413 приемников, объединенных в 480 параллельных каналов с частотой опроса 20 МГц и оцифровкой 12 бит. Полное заполнение приемоизлучающей апертуры осуществлялось за 4 положения эллиптической антенны. Синтезированная аппаратная функ-

ция такой системы была близка к сферически изотропной с диаметром около 0.25 мм (на частоте 2.5 МГц). Общее время съема данных не превышало двух минут. Обращает на себя внимание широкая полоса используемых частот (до 1.5 МГц), а также хорошая отдача по излучению – до 6 кПа на расстоянии 12 см при амплитуде возбуждения около 50 В (ширина диаграммы до 40°). Для построения трехмерного изображения привлекается техника синтезированной апертуры (SAFT) [283; 286–290].

Большая сложность полной трехмерной волновой томографии является основной причиной поисков более простых решений. Простейшим выходом представляется прямой синтез трехмерного изображения из множества двумерных томограмм [213–215]. Однако этот путь также связан с рядом сложностей. Главная из них заключается в том, что двумерная томограмма, полученная путем ультразвукового облучения, неизбежно имеет конечную толщину. Причиной этого является то, что изображение биологического объекта с линейными размерами в десятки сантиметров требует применения ультразвуковых полей с частотой в один или несколько мегагерц и с длиной волны в один миллиметр или доли миллиметра. Более высокие частоты слишком сильно поглощаются. Ближняя зона излучателей и приемников, тем не менее, должна простираться на все сечение органа, т.е. толщина h озвученного слоя не может быть меньше значения $h \geq \sqrt{L\lambda_0}$, где L – протяженность требуемой зоны, равная диаметру томографируемой области. Это соотношение означает, что $h \geq 1$ см. Тем самым, томография в одной плоскости ограничивает разрешение в направлении, перпендикулярном к этой плоскости, диаметром лучевой трубки, т.е. значением $\sqrt{L\lambda_0}$. В результате, получаемое трехмерное изображение имеет резко различное разрешение в плоскости исходных томограмм (доли миллиметра) и в перпендикулярном направлении. Повышение разрешения, хотя бы частичное, позволяет затем синтезировать трехмерный образ объекта. Такой синтез не является строгим решением трехмерной обратной задачи, так как в этом случае обычно пренебрегается волновым обменом между слоями, который может быть существенным в случае контрастных рассеивателей сравнительно малых волновых размеров, присутствующих в слоях. Помимо этого, градиенты фазовой скорости в направлении, перпендикулярном плоскости томографирования, приводят к выходу излучения (и зоны чувствительности) из слоя и к искажению исходных двумерных томограмм. Таким образом, вторая существенная проблема состоит в том, что исходные двумерные томограммы не вполне независимы. Они связаны рассеянными полями, которые переходят из слоя в слой, по крайней мере, во втором приближении Борна, и создают взаимные искажения.

Выход в том и другом случаях состоит в хотя бы частичном учете волнового характера процесса формирования ультразвукового томографического изображения. При этом не удастся полностью сгладить различие в разрешающей способности в плоскости первичных томограмм и в ортогональном к ней направлении, но удастся сблизить их значения. Такие методы получили название “ $2\frac{1}{2}$ -мерная томография”. К ним относятся и методы, описанные как в [243; 245; 293], так и далее в разделе 4.2. Информативные достоинства трехмерных образов диагностируемого объекта побуждают к попыткам посте-

пенного совершенствования $2\frac{1}{2}$ -мерных систем томографии. Одними из наиболее успешных представляются системы, которые разработаны группой исследователей, объединенных двумя институтами США: Karmanos Cancer Institute, Detroit, United States и Alfred E. Mann Institute for Biomedical Engineering, Los Angeles, United States. Одним из разработанных прототипов, основанных на принципах лучевой томографии, был томограф [213]. Две линейные решетки, которые состояли из широкополосных преобразователей, способных работать в полосе от единиц до 30 МГц и имеющих малые размеры (0.4 мм × 0.4 мм), располагались напротив друг друга и совершали вращение вокруг томографируемой области. Измерялось время распространения сигнала и затухание сигнала, по сравнению с водой. Обработка, аналогичная преобразованию Радона и использующая алгоритм обратного проектирования (Filtered backprojection) Деванея (A. J. Devaney), давала изображение органа на различных частотах. Увеличение помехоустойчивости и сокращение времени съема данных достигалось путем применения фазоманипулированных сигналов и согласованной фильтрации, что позволяло проводить излучение несколькими преобразователями одновременно. Применение высоких частот сужало диаметр лучевой трубки до единиц миллиметров, но, вместе с тем, создавало дополнительные трудности, связанные с высоким поглощением в ткани и отклонением оси лучевой трубки от прямой линии. Это искажало изображение, снижало разрешающую способность и уменьшало амплитуду принимаемого сигнала, приводя к ошибке в оценке поглощения. Такие отклонения в оценках принципиальны, так как классификация новообразований, т.е. их злокачественность, проводилась по характеру частотной зависимости коэффициента поглощения. Видимо, эти проблемы привели к тому, что основные исследования велись на частотах ниже 8 МГц. Тестирование на фантомах молочной железы не могло вызвать подобные искажения, так как фоновой средой фантома являлся агар-агар, в который были внесены малые включения из пластика, имитирующие новообразования.

Вторым источником ухудшения изображения являлись ошибки в оценке времени распространения. Усовершенствование метода оценки этого параметра [214] потребовало разработки достаточно изощренных алгоритмов, давших заметное улучшение получаемых изображений слоев. Использовалась кольцевая антенная решетка из 256-ти преобразователей. Синтез трехмерного изображения осуществлялся на основе объединения нескольких десятков двумерных томограмм. При этом анализ изменения характера изображения, по мере изменения координаты, перпендикулярной к слою, позволяет несколько повысить разрешение в этом направлении по сравнению с диаметром лучевой трубки. Тем не менее, достичь разрешения, обеспечиваемого решением обратной волновой задачи, по-видимому, не представляется возможным.

Очевидно, подобные соображения побудили исследователей, работавших в разное время и в разном составе над усовершенствованием прототипов томографов, использовать не только лучевые, но и волновые методы. Весьма успешной была попытка, предпринятая в рамках совместной работы нескольких исследовательских центров, в том числе, и Karmanos Cancer Institute [239]. Здесь рабочая частота прототипа была снижена до значений $0.4 \div 1.5$ МГц, а алгоритм итерационного типа, аналогичный упомянутому в связи с работами [239–242], использовал, в качестве исходной оценки, пространственные распределения параметров в исследуемой области, полученные в лучевом режиме. Дальнейшие ите-

рации велись после разделения данных о рассеянном поле на частотные компоненты с шагом 20 кГц (определяется величиной, обратной к длительности временного интервала анализируемого рассеянного сигнала $\cong 35$ мкс). Для каждой из частот методом конечных разностей вычислялось рассеянное поле (исходя из результата оценки рассеивателя на предыдущей итерации), и находился сигнал невязки с наблюдаемым полем. Этот сигнал “переизлучался” (алгоритмом типа backpropagation) в сторону восстанавливаемого рассеивателя, причем в сигнале невязки “снималась” несущая волна с помощью сигнала первичного падающего поля. Фактически, итерационная поправка вносилась в каждый пространственный отсчет предыдущей оценки объекта. Таким образом, находились картины пространственного распределения фазовой скорости и поглощения [239; 240] для каждого значения дискретизованной частоты, что позволяло проводить классификацию ткани по характеру этих зависимостей, выделяя участки, которые соответствуют частотному поведению, свойственному злокачественным новообразованиям.

Приведенные результаты позволяют говорить о несомненном успехе этого метода. Как и в других разработках, перемещение плоскости томографирования вдоль направления, ортогонального к этой плоскости, с шагом 1 мм позволяет синтезировать трехмерный образ объекта. При этом разрешение вдоль данного направления составляет $3 \div 5$ мм, что несколько хуже разрешающей способности в плоскости томографирования ($\cong 2$ мм). Результаты исследований в рамках развития ультразвуковых способов диагностики в институте Karmanos приведены в [241]. Место и информативная важность ультразвуковых методов в системах комплексного диагностирования подробно обсуждаются в работе [242]. В ней показано, что эти методы предоставляют очень важную и отчасти незаменимую информацию для принятия правильного диагностического решения.

В работах [207; 208] для построения картины пространственного распределения акустических характеристик предлагается другой метод обработки – двухшаговый алгоритм. На первом шаге оцениваются, тем или иным образом, пространственные распределения скорости звука и коэффициента поглощения с невысоким разрешением. На втором шаге эти пространственные распределения учитываются при обработке поля, которое порождается за счет рассеяния назад (в определенном секторе углов) и измеряется на некоторой поверхности, окружающей область томографирования. Процедура обработки, основанная на уравнении Кирхгофа, эквивалентна продлению измеренного поля внутрь объекта. Пространственное распределение амплитуды такого внутреннего поля принимается за характеристику мелких деталей томографируемого объекта. В алгоритмах [209; 210] предлагается опять же сперва из измеренных времен распространения сигналов оценить пространственное распределение скорости звука с грубым разрешением, причем учет эффектов рефракции улучшает качество такой оценки. После этого, для получения итогового изображения используется волновая обработка, которая делается в приближении однократного рассеяния на неоднородном фоне с привлечением техники синтезированной апертуры и пространственной фильтрации.

Более поздняя работа [182] имеет, в определенном смысле, программное значение. Авторы отдают предпочтение времяпролетным (а не волновым) методам, поставив своей главной целью создание быстро работающей и приемлемой по цене сети ранних диагностических учреждений. В связи с этим, предлагается серьезное улучшение точности определения времени распространения путем введения данных не только об *абсолютных* вре-

менах распространения (что требует точных методов оценки момента вступления сигналов), но и об *относительных* временах, т.е. о разности времен распространения между одним излучателем и двумя близко расположенными приемниками [182; 183]. Эта разность времен распространения оценивается корреляционными методами для большого количества “троек” преобразователей (один излучатель и два приемника). Вся совокупность таких данных объединяется в единой большой системе линейных уравнений, решение которой (например, МНК-методом) позволяет снизить ошибку оценок времен распространения. Тогда процесс томографирования ограничивается только этими просветными данными, а также данными по поглощению.

Авторы работы [294] полагают, что качество времяпролетной томографии определяется не только размером первой зоны Френеля, но и рядом других факторов. К ним относятся точность измерения времени распространения сигнала, плотность лучевого покрытия (зависящая от количества используемых приемоизлучающих элементов), отношение сигнал/помеха. Кроме того, показано, что использование при обработке времяпролетной томографии на основе изогнутых лучей (*bent-ray travel-time tomography*) дает заметное улучшение разрешения, по сравнению с времяпролетной томографией на основе прямолинейных лучей, не учитывающих эффекты рефракции. Это важно иметь в виду для достижения хороших характеристик. Дело в том, что предельная разрешающая способность времяпролетной томографии обычно связывается с размером первой зоны Френеля. Однако лучевая теория игнорирует влияние околоручевой структуры, определяемой конечной шириной частотной полосы сигнала. В то же время, учет всех вышеперечисленных факторов дает возможность видеть на томограмме включения с размерами, которые меньше первой зоны Френеля до трех-четырех раз.

Работы [295; 296] дают представление о возможностях томографа нового типа, в котором центральная рабочая частота повышена до 3 МГц, а вместо 256-ти приемоизлучающих элементов антенной решетки используются 2048. В результате, получаемое двумерное изображение томографируемого слоя молочной железы становится более контрастным, уменьшаются артефакты, и повышается разрешающая способность. В настоящее время продолжается исследование возможностей различных алгоритмов получения изображений [297–304], в том числе, на основе кодированных сигналов [297; 298]. Отмечается высокая степень информативности ультразвуковых изображений, получаемых волновыми методами, а их качество оказывается сопоставимым с качеством изображений при магнитно-резонансной томографии [299; 304–306]. В то же время, дальнейшее улучшение качества изображений и достоверности получаемых количественных значений искомых характеристик связано с проблемой перехода к строгим трехмерным волновым алгоритмам восстановления [302].

Другой работоспособный алгоритм и образец $2\frac{1}{2}$ -мерного ультразвукового маммографа были разработаны [246] группой авторов, на протяжении многих лет занимающихся исследованиями в этой области. Так, работы S. A. Johnson, относящиеся к итерационным методам решения обратных задач рассеяния, появились в печати в начале 80-х годов [143; 146; 232]. В дальнейшем, авторы этой разработки в разных публикациях выступали в различных составах, но вышедшая в 2012 году статья [246] содержит как описание

устройства, так и результаты его испытаний с реальными пациентами. В устройстве используются многоэлементные линейные антенные решетки (каждая состоит из 512 преобразователей), работающие как в режиме излучения (излучается квазиплоская волна), так и в режиме приема (раздельно каждым преобразователем с поперечным размером 0.325 мм) в широкой полосе частот $0.3 \div 2.5$ МГц. Такие две параллельные решетки находятся на расстоянии около 20 см друг от друга и совершают дискретное вращение (180 положений с шагом в 2°) вокруг исследуемой молочной железы, находящейся между этими решетками. Съём данных в одной горизонтальной плоскости занимает около 20 минут, а обработка на персональном компьютере Pentium 2.4 ГГц требует 24 минуты процессорного времени.

Таким образом, используются данные о рассеянии в направлении “вперед” под углами менее 60° . Этот режим позволяет рассчитывать прямые опорные задачи в параболическом приближении для набора частот, лежащих в рабочей полосе. На этапе решения обратной задачи минимизируется функционал, – вычислительная программа осуществляет поиск минимума невязки между экспериментальными данными на множестве частот и текущей теоретической оценкой соответствующих данных, которая получается для текущих оцененных значений характеристик исследуемого органа. Процедура многоракурсного и многочастотного режима позволяет избежать ложных решений, соответствующих локальным (побочным) минимумам невязки. Градиентно-итерационный поиск начинается с низких частот, а начальные параметры берутся из данных, получаемых на основе времени распространения звукового импульса. Затем для каждой более высокой частоты результат предыдущей оценки используется для вычисления сопряженного градиента, дающего значения текущих поправок. Используется априорное ограничение, – рассматривается именно поглощение (а не усиление) в ткани. Ценным результатом являются полученные оценки скорости ультразвука в различных патологических тканях, включая злокачественные образования. В злокачественных образованиях такие оценки заметно выше обычных значений и достигают величин вплоть до 1600 м/с при одновременном росте поглощения до 3 дБ/см на частоте около 2 МГц. Эти результаты согласуются с данными других исследований. Однако процедура оценки поглощения встретила с трудностью, отмечавшейся и другими авторами, – ложное завышение поглощения за счет рефракции падающего излучения в направлении, перпендикулярном к плоскости томографирования.

В образце ультразвукового маммографа [246] используется принцип озвучивания фиксированного слоя томографируемого органа и приема сигнала, усредненного по толщине этого слоя. Соответственно, на этапе обработки экспериментальных данных при построении минимизируемого функционала используются двумерные уравнения Липпмана–Швингера. В следующей модификации ультразвукового маммографа [247–251], по-прежнему, имеются две параллельные линейные антенные решетки, с помощью одной из которых озвучивается фиксированный слой. При этом приемная решетка состоит из преобразователей, расположенных уже в несколько рядов внутри озвученного слоя, вместо одного ряда в [246]. Например, в [247–249] высота излучающих преобразователей составляет около 20 мм, а в приемной решетке общей высотой 16 мм имеется 6 рядов, в каждом из которых 160 приемников, т.е. всего 960 приемников. В [250–253] общее количество приемников увеличено до 1536, а в [254] – до 2048; при этом количество рядов увеличено до 8 [250; 253; 254]. Процесс дискретного вращения параллельных решеток и по-

следующего подъема всей системы по вертикали для получения данных рассеяния от следующего слоя, частично перекрывающего предыдущий слой, аналогичен используемому в [246]. Характерное время съема данных для всех слоев составляет $\cong 8$ минут [251].

Прием размещения нескольких рядов приемников внутри озвученного слоя позволяет использовать прежнюю логику процедуры обработки, однако уже на основе трехмерных уравнений. В качестве начального приближения для пространственных распределений скорости звука и поглощения используются оценки, полученные в каждом слое при двумерной обработке. Учет процесса перерасеяния волн между различными вертикальными уровнями внутри озвученного слоя устраняет ложные оценки значений скорости звука и поглощения, которые могут возникать при двумерной обработке. Итоговое пространственное распределение скорости звука имеет разрешение не хуже 1.5 мм при использовании данных на шести частотах в интервале от 0.8 МГц до 1.25 МГц; пространственное распределение поглощения восстанавливается хуже [251]. Кроме того, в рассматриваемой модификации томографической системы имеются три дополнительных приемоизлучающих массива, предназначенные для сбора данных в режиме отражения. Обработка таких данных на основе лучевого алгоритма, но с учетом уже полученных пространственных распределений скорости звука и поглощения, позволяет увидеть мелкоструктурные образования с размером менее 1 мм.

Раздел 4.2. Повышение разрешения в направлении, перпендикулярном плоскости двумерного томографирования

Информативность практических методов акустической томографии можно повысить за счет формирования трехмерных или “почти” трехмерных (так называемых $2\frac{1}{2}$ -мерных) изображений вместо двумерных (этой теме посвящен настоящий раздел 4.2), а также за счет одновременной реконструкции фазовой скорости звука $c(\mathbf{r})$, плотности среды $\rho(\mathbf{r})$ и зависящего от частоты ω амплитудного коэффициента поглощения $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ (см. следующий раздел 4.3). Повышение информативности томографических схем сталкивается с проблемой неполноты доступных данных рассеяния. Дело в том, что полные данные рассеяния, являющиеся избыточными в многочастотном случае или в трехмерной задаче, в полном объеме не всегда доступны по техническим либо другим причинам (рассматриваемые далее в настоящем разделе 4.2 схемы с наклонными преобразователями являются примером таких систем). В медицинских диагностических системах, дефектоскопических устройствах и т.п. “проникновение” зондирующего поля в определенные области невозможно либо чрезвычайно затруднено. Вместе с тем, доступный объем данных достаточно богат и может быть использован для решения важных проблем диагностики, но требует дополнительного анализа путей такого использования. Раздел 4.2 посвящен проблеме оценки характеристик различных систем в подобных случаях, в том числе, и при использовании наклонных преобразователей. Новые возможности ультразвуковой диагностики, предоставляемые за счет расширения объема пространственного и частотного массива данных, обсуждаются в разделе 4.3.

В большинстве прикладных задач оцениваемые неоднородности среды относятся к классу сильных рассеивателей, существенно искажающих внутреннее поле по сравнению с полем падающим. Для их реконструкции могут использоваться различные итерационные методы [А 2 (раздел 5.4)], являющиеся наиболее целесообразными в случае неполных экспериментальных данных. Однако в основе каждого итерационного подхода лежит решение обратной задачи в приближении однократного рассеяния со скорректированным по результатам предшествующих итераций значением внутреннего поля. Поэтому в разделах 4.2 и 4.3 приближение однократного рассеяния (первое приближение Борна) рассматривается как отправной момент для организации итерационного цикла. Проведенный в данном приближении анализ основных вопросов можно обобщить на весь итерационный процесс.

Функция рассеивателя $v(\mathbf{r}, \omega)$, характеризующая неоднородности пространственных распределений скорости звука, плотности среды и коэффициента поглощения, обсуждалась выше в связи с выражениями (1.6), (1.9), (1.10), (1.13), (1.16)–(1.18). Для дальнейшего рассмотрения вначале нужно дать определение и построить аппаратные функции в монохроматическом режиме $\hat{v}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \omega)$, поскольку знание аппаратной функции позволяет оценить разрешающую способность анализируемой томографической схемы. Аппаратная функция является реакцией $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{v}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \omega)$ того или иного рассматриваемого алгоритма обработки на рассеянный сигнал от “точечной” неоднородности с единичной нормировкой $v(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, находящейся в точке \mathbf{r}_0 области томографирования. Эту тестовую неоднородность (по скорости, плотности или поглощению) с очень малыми волновыми размерами и большим контрастом следует рассматривать как идеализацию, служащую для целей построения аппаратной функции. Функция $\hat{v}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}', \omega)$ является ядром интегрального уравнения типа свертки, описывающего процесс воспроизведения внутренней структуры произвольного рассеивателя $v(\mathbf{r}, \omega)$ томографическим прибором:

$$\hat{v}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{\mathfrak{R}} \hat{v}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}', \omega) v(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' ,$$

где \mathfrak{R} – область рассеяния. В используемом ниже первом приближении Борна такой идеализированный δ -образный рассеиватель имеет, однако, право на существование. Размерность аппаратной функции определяется обратной размерностью ее аргумента, и поэтому пробному δ -образному возмущению по скорости, плотности или поглощению не приписывается размерность возмущения соответствующего типа. Все эти вопросы достаточно очевидны, однако в ряде случаев они ускользают от внимания и приводят к некоторым размерностным “недоразумениям”.

Дальнейшее рассмотрение ведется в приближении плоских волн. Это оправдано тем, что данные, получаемые от кольцевой антенной решетки, легко пересчитываются в амплитуду рассеяния плоских волн. Однако даже без использования этой операции, в пределах области, где аппаратная функция существенно отлична от нуля (эти размеры составляют $1 \div 2$ длины волны), кривизна фронта проявляется достаточно слабо, и он может рассматриваться как плоский.

Системы двумерного акустического томографирования в частотном диапазоне от одного до нескольких МГц предполагают излучение зондирующей волны с пренебрежимо малой кривизной фронта вдоль третьей координаты (т.е. в направлении, перпендикулярном плоскости томографирования) в пределах прожекторной зоны соответствующей протяженности. Обычная протяженность области зондирования $10 \div 20$ см и длина волны в мягких биотканях $0.5 \div 1$ мм определяют толщину прожекторной зоны около $1 \div 2$ см, за счет чего разрешающая способность по третьей координате более чем на порядок уступает разрешающей способности в плоскости томографирования [171; 184]. Реализация схемы полного трехмерного томографирования (см. ниже главу 9 или [А 131 – глава 19]), обеспечивающей высокую разрешающую способность изображения по всем трем измерениям, требует существенного усложнения как самого томографического устройства, так и алгоритмической стороны. В связи с этим ниже рассматривается компромиссный вариант усовершенствования двумерного томографа, не требующий, в целом, принципиального усложнения приемоизлучающей антенной решетки и алгоритма обработки, но повышающий в несколько раз (по сравнению с чисто двумерным вариантом томографирования) разрешение по третьей координате за счет наклона преобразователей [А 2 (раздел 7.2); А 3; А 71; 180].

В этом исследовании за основу принята схема разработанного акустического ультразвукового томографа [А 4; А 62; 221], кратко описанного выше в разделе 2.3. Каждый из преобразователей с рабочей поверхностью выпуклой цилиндрической формы может работать как излучатель и как приемник. Далее вертикальная ось соответствующего цилиндра (она параллельна образующим цилиндрической поверхности) будет называться вертикальной осью преобразователя, или просто осью. Расположение преобразователей на кольце существенно отличается от расположения, предложенного в [171; 184]. В рассматриваемом ниже случае антенная решетка разрежена специальным образом, и преобразователи расположены на кольце неравномерно. Используются всего 26 преобразователей, однако антенная решетка может вращаться с угловым шагом дискретизации $\Delta\varphi = 2\pi/256$. Благодаря этим особенностям – разреженной решетке и вращению – получаемый объем экспериментальных данных рассеяния эквивалентен объему данных, которые могут быть получены в случае неподвижной антенной решетки, содержащей 256 приемоизлучающих преобразователей. При облучении используется импульсный режим. Разреженная решетка позволяет работать с преобразователями, имеющими значительные волновые размеры и большую рабочую поверхность и, следовательно, низкий электрический импеданс. Такие преобразователи в режиме излучения возбуждаются электрическими импульсами малого напряжения, а их малый импеданс снижает уровень электрических наводок в режиме приема.

Для восстановления картины пространственного распределения неоднородностей используется двухшаговый алгоритм, изложенный выше в главе 2. На первом шаге реконструируется пространственное распределение по объекту крупномасштабных неоднородностей. На втором шаге реконструируется “тонкая структура” рассеивателя, т.е. его мелкомасштабные детали, на фоне крупномасштабного распределения. Поскольку фон уже известен из первого шага, то для второго шага восстановления достаточно использовать первое приближение Борна.

В исходном варианте двумерной томографической схемы преобразователи круговой антенной решетки установлены так, что их рабочая поверхность перпендикулярна плоскости томографирования, т.е. вертикальные оси преобразователей составляют с этой плоскостью угол 90° . В модифицированном варианте томографа при минимальном усложнении конструкции антенной решетки и минимальном увеличении времени съема данных удастся повысить разрешающую способность по третьей координате, т.е. вдоль z -направления. Для этого рабочая поверхность различных преобразователей наклоняется на разные углы по отношению к плоскости томографирования. Технически это обеспечивается использованием преобразователей с конической поверхностью при разных углах конусности или преобразователей с цилиндрической поверхностью, ось которых наклоняется на различные углы. Наклоны позволяют получить информацию о пространственном спектре рассеивателя вдоль третьей координаты в сравнительно низкочастотной области, диапазон которой пропорционален диапазону углов наклона преобразователей. В то же время, в [307] повышение разрешения достигается путем размещения в z -направлении дополнительных преобразователей на четырех горизонтальных уровнях.

Вертикальная ось каждого преобразователя с номером i наклоняется в радиальном (относительно центра кольцевой антенной решетки) направлении на угол α_i по отношению к вертикали. Принимается, что $\alpha_i > 0$, если верхняя часть преобразователя наклонена внутрь антенной решетки, и $\alpha_i < 0$, если наклонена наружу. При восстановлении рассеивателя, в пределах размера ячейки разрешения в горизонтальной плоскости (x, y) , поля, излучаемые и принимаемые цилиндрическими преобразователями, могут быть заменены эффективными плоскими волнами, поскольку преобразователи расположены на некотором удалении от объекта [А 2 (раздел 5.2); А 6; А 177]. Волновые векторы $\mathbf{k}_0, \mathbf{l}_0$ падающей и рассеянной плоских волн параллельны перпендикулярам, проведенным из фиксированной точки $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ трехмерного объекта на ось излучающего и, соответственно, принимающего преобразователей. Сигнал для каждой пары $(\mathbf{k}_0, \mathbf{l}_0)$ содержит информацию о векторе пространственной частоты $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{l}_0 - \mathbf{k}_0$ в пространственном спектре рассеивателя и, в частности, о z -составляющей этого вектора $\xi_z = (\mathbf{l}_0 - \mathbf{k}_0)_z$, поскольку на втором шаге реконструкции используется приближение однократного рассеяния, – см. (1.40). Множество дискретных значений наклонов $\{\alpha_i\}$, порождающее дискретные значения $\{\xi_z\}$, определяется количеством используемых преобразователей и угловым шагом дискретизации их наклонов. Угловая ширина диаграммы рассеяния в z -направлении для озвученного слоя с линейными размерами L в горизонтальной плоскости (x, y) и высотой h составляет $\delta\vartheta \approx \min\{\lambda_0/L; 2\arccos(1 - \lambda_0/(2h))\}$, где λ_0 – длина волны и $h, L \gg \lambda_0$. Частота 1.5 МГц, средняя скорость $c_0 = 1500$ м/с и $L \cong 0.1$ м, $h \cong (0.015 \div 0.02)$ м приводят к значению $\delta\vartheta \approx \lambda_0/L \approx 1^\circ$. Максимально допустимый угловой шаг дискретизации наклонов должен быть в $2 \div 3$ раза меньше чем $\delta\vartheta$, т.е. он очень мелкий в монохроматическом режиме. Однако используемый импульсный режим существенно ограничивает объем элемента пространственной области, в которой надо

обеспечить однозначное восстановление объекта в каждый момент времени. Линейный размер этого элемента в плоскости (x, y) составляет $L \cong c_0 T_0 / 2 \cong 0.01 \text{ м}$ (T_0 – длительность зондирующего импульса) при прежней высоте h ; тогда $\delta\vartheta \approx \lambda_0 / L \approx 12^\circ$. Тогда приемлем достаточно крупный угловой шаг дискретизации наклонов преобразователей, если при этом обеспечивается взаимное перекрытие диаграмм направленности различных преобразователей антенны.

Для формирования изображения предлагается квазитрехмерный алгоритм реконструкции, который далее излагается в монохроматическом варианте, хотя обобщение его на импульсный режим несложно [А 2 (§ 5.2.2, § 5.2.3); А 6]. Предполагается, что рассеиватель находится в фоновой однородной непоглощающей среде, характеризуемой волновым числом k_0 . За основу берется алгоритм, позволяющий получить оценку двумерного рассеивателя $\hat{v}^{(2)}(x, y, \omega)$ на основе амплитуды рассеяния $f^{(2)}(\varphi, \varphi', \omega)$:

$$\hat{v}^{(2)}(x, y, \omega) = \frac{k_0^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' f^{(2)}(\varphi, \varphi', \omega) |\sin(\varphi - \varphi')| \times \quad (4.1)$$

$$\times \exp\{ik_0[x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)]\};$$

верхний индекс “(2)” обозначает двумерность задачи; φ, φ' – углы падения и рассеяния плоских волн. Начало координат O совпадает с центром антенной решетки. Функция $f^{(2)}$ связана с рассеянным полем $u_{sc}^{(2)}(\varphi, \varphi', \omega)$, измеряемым в дальней зоне на расстоянии R_0 от объекта, соотношением (1.38):

$$f^{(2)}(\varphi, \varphi', \omega) = -\frac{\sqrt{k_0}}{(1+i)\pi^{3/2}} \sqrt{R_0} \exp(-ik_0 R_0) u_{sc}^{(2)}(\varphi, \varphi', \omega). \quad (4.2)$$

При получении оценки трехмерной структуры рассеивателя $\hat{v}^{(3)}(x, y, z, \omega) \equiv \hat{v}(\mathbf{r}, \omega)$ в точке $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, под углами $\varphi = \varphi(x, y)$, $\varphi' = \varphi'(x, y)$ понимаются полярные углы для векторов-компонент $(\mathbf{k}_0)_{x,y}$ и $(\mathbf{l}_0)_{x,y}$ в плоскости (x, y) падающей и рассеянной (локально) плоских волн. Значения этих углов зависят от текущих геометрических положений излучателя и приемника, а также от координат точки $\mathbf{r}' = \{x, y, 0\}$ – проекции точки \mathbf{r} на плоскость (x, y) , делящую толщину озвученного слоя объекта пополам. Квазитрехмерная амплитуда рассеяния $f^{(3)}(\varphi, \varphi', \omega)$ формируется на основе соотношения (4.2), в которое вместо $u_{sc}^{(2)}$ входит рассеянное поле $u_{sc}^{(3)}$ для исследуемого трехмерного объекта, а в качестве R_0 берется расстояние от точки \mathbf{r}' до оси принимающего преобразователя (т.е. расстояние от точки \mathbf{r}' до ее проекции на вертикальную ось преобразователя). Таким образом, выражения для φ, φ' и принцип формирования $u_{sc}^{(3)}$ те же, что и в двумерной задаче в ближнем поле [А 2 (§ 5.2.3); А 6]. Однако за счет наклонов преобра-

зователей приобретает фазовое рассогласование между сигналами, формируемыми для точки изображения \mathbf{r} и для ее проекции \mathbf{r}' . Поэтому в (4.1) вносятся дополнительные фазовые поправки, связанные с коррекцией времени распространения:

$$\begin{aligned} \hat{v}(\mathbf{r}, \omega) = & \frac{k_0^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi(x, y) \int_0^{2\pi} d\varphi'(x, y) \times \\ & \times f^{(3)}(\varphi(x, y), \varphi'(x, y), \omega) |\sin(\varphi(x, y) - \varphi'(x, y))| \times \\ & \times \exp\left\{ i\omega \frac{x}{c_0} (\cos \varphi'(x, y) - \cos \varphi(x, y)) \right\} \times \\ & \times \exp\left\{ i\omega \left[\frac{y}{c_0} (\sin \varphi'(x, y) - \sin \varphi(x, y)) + \Delta t_{SR}(\mathbf{r}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\Delta t_{SR}(\mathbf{r}) = \Delta t_S(\mathbf{r}) + \Delta t_R(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}.$$

Слагаемое Δt_S (или Δt_R) – это разность между временами распространения сигнала от точки \mathbf{r} и от точки \mathbf{r}' до текущей позиции излучателя S (или до текущей позиции приемника R). Выражение (4.3) приведено для однородной непоглощающей среды. В реальном томографе значение $1/c_0$ в показателе экспоненты заменяется локальным значением медленности вдоль соответствующей трассы в плоскости (x, y) , а ослабление волн за счет поглощения должно компенсироваться [А 2 (§ 5.2.4, § 5.4.1)]. Расчет величины $\Delta t_{SR}(\mathbf{r})$ основан на стереометрических соотношениях, поясняемых в [А 2 (§ 7.2.1); А 3; 180].

Для оценки разрешающей способности томографа в z -направлении исследовались аппаратные функции квазитрехмерного алгоритма (4.3) для различных комбинаций углов наклона преобразователей. Для этого “пробный” точечный рассеиватель рефракционного типа с единичной нормировкой $v(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ помещался в фиксированную точку $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, 0\}$ в плоскости (x, y) , и в соответствии с (4.3) строилось его изображение, т.е. аппаратная функция $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{v}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \omega)$. Если $\mathbf{r}_0 = 0$, и все преобразователи расположены на одинаковом расстоянии от начала координат, то $f^{(3)}(\varphi, \varphi', \omega) \equiv \text{const}$, и для точек вдоль z -сечения ($x = 0, y = 0$) временная коррекция $\Delta t_{SR}(x = 0, y = 0, z) \approx -z(\sin \alpha_S + \sin \alpha_R)/c_0$, где α_S, α_R – углы наклонов для текущих номеров позиций излучателя и приемника. Это же выражение для $\Delta t_{SR}(x = x_0, y = y_0)$ справедливо при произвольном \mathbf{r}_0 , если излучающая поверхность преобразователей имеет коническую форму, т.е. каждый из преобразователей озвучивает всю исследуемую область под одним и тем же углом к плоскости томографирования (но этот угол индивидуален для разных преобразователей). Однако поверхность каждого из

таких преобразователей должна иметь свой индивидуальный угол конусности α_i , что технически затрудняет их изготовление.

Благодаря высокой угловой плотности данных в плоскости (x, y) , структура аппаратной функции $\text{Re} \hat{v}_\delta(x, y, z | \mathbf{r}_0)$ задачи (4.3) практически не зависит от точки $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, 0\}$. При перемещении \mathbf{r}_0 изменяются только детали ее вида вдоль координаты z , хотя площадь, определяемая зависимостью от z функции $\text{Re} \hat{v}_\delta(x, y, z | \mathbf{r}_0)$, остается почти постоянной. Тогда отношение объемов, занимаемых $\text{Re} \hat{v}_\delta(x, y, z | \mathbf{r}_0)$ и аппаратной функцией $\hat{v}_\delta^{(2)}(x, y | \mathbf{r}_0)$ двумерной задачи (4.1), составляет

$$h_{\text{eff}} \approx \frac{\iiint \text{Re} \hat{v}_\delta(x, y, z | \mathbf{r}_0) dx dy dz}{\iint \hat{v}_\delta^{(2)}(x, y | \mathbf{r}_0) dx dy}.$$

При использовании алгоритма (4.3) нужна дополнительная нормировка восстановленных значений $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega)$ путем деления их на h_{eff} , что дает значения $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega)$, усредненные по толщине “тонкого слоя”, которая определяет разрешающую способность вдоль z -направления.

В схемах с совмещенными приемоизлучающими преобразователями каждый преобразователь работает и как излучатель, и как приемник. Численное моделирование показало, что способ задания наклонов (случайным образом или по определенному закону) практически не влияет на вид аппаратной функции. Далее полагается, что при переходе от одного преобразователя к соседнему наклон изменяется на 0.5° . В случае более крупного шага наклонов возможна ситуация, когда прожекторная зона одного преобразователя не перекрывается с прожекторной зоной другого, что уменьшает количество данных о рассеивателе. При односторонних наклонах вертикальные оси всех преобразователей наклонены внутрь антенной решетки. Аппаратная функция (АФ) $\hat{v}_\delta(x, y, z | \mathbf{r}_0 = 0)$ вдоль z -сечения ($x = 0, y = 0$) является комплексной, и величина ее мнимой части сопоставима с действительной (рис. 4.1а). Это связано с тем, что при односторонних наклонах фиксированной паре векторов $(\mathbf{k}_0, \mathbf{l}_0)$ нельзя сопоставить пару $(-\mathbf{k}_0, -\mathbf{l}_0)$. Как следствие, данные рассеяния содержат информацию только о $\xi_z = k_0(\sin \alpha_S + \sin \alpha_R)$ одного знака. Пространственный спектр z -сечения АФ действителен, сосредоточен в подобласти $\xi_z > 0$, и его форма близка к треугольной. Эффективная полуширина пространственного спектра определяет разрешающую способность томографической схемы вдоль z -направления. При диапазоне наклонов $\alpha_i \in [0.5^\circ; 13^\circ]$ ширина функции $\text{Re} \hat{v}_\delta$ по уровню 0.7 составляет $\approx \lambda_0$, а ширина модуля АФ $|\hat{v}_\delta|$ составляет $\approx 2.5\lambda_0$, т.е. разрешение сравнительно высоко. Однако комплексный характер аппаратной функции приводит к “перемешиванию” восстановленных скоростной и поглощающей компонент рассеивателя и, в этом смысле, ухудшает информативность изображения. При необходимости разделения компонент требуется или привлечение методики, изложенной далее в § 4.3.1 и

предполагающей многочастотный режим, или использование схем с двусторонними наклонами преобразователей, приводящих к практически действительной АФ.

Двусторонние наклоны позволяют получить информацию о пространственном спектре рассеивателя как в подобласти $\xi_z < 0$, так и в подобласти $\xi_z > 0$. Для обеспечения симметрии z -компонент восстановленного пространственного спектра относительно точки $\xi_z = 0$, картины распределения положительных и отрицательных наклонов должны быть симметричны. Форма пространственно-спектрального распределения z -сечения остается практически той же, что и в случае односторонних наклонов, но теперь его симметричность приводит к важному достоинству АФ – она становится близкой к действительной (рис. 4.1б). При использованном диапазоне $\alpha_i \in [-6.5^\circ; 6.5^\circ]$ ширина функции $\text{Re} \hat{v}_\delta$ по уровню 0.7 вдоль z -направления составляет $\approx 2.5\lambda_0$. Повысить разрешающую способность можно увеличением количества преобразователей для расширения диапазона их наклонов. Однако при слишком сильном наклоне прожекторные зоны части приемоизлучающих преобразователей становятся слабо перекрывающимися в вертикальном направлении. Кроме того, дополнительные ограничения могут быть связаны и с видом томографируемого органа.

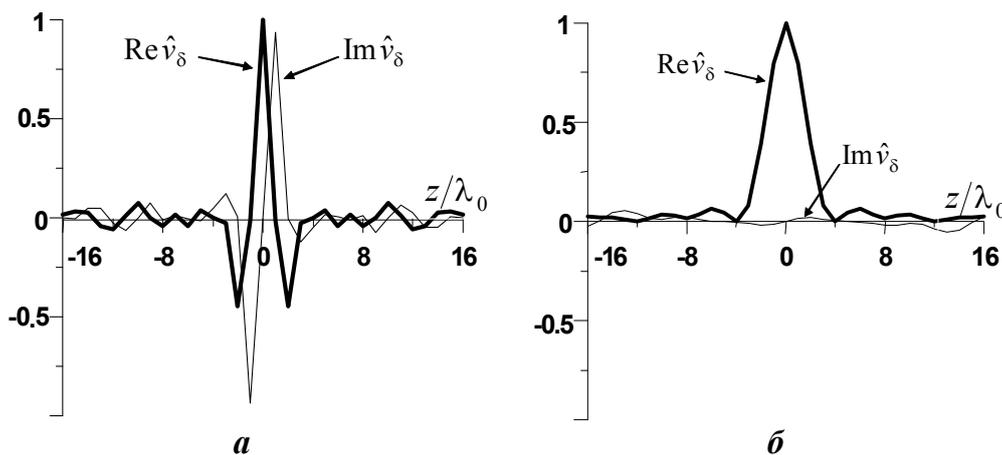


Рис. 4.1. Томографическая схема с совмещенными приемоизлучающими преобразователями. Действительная (толстая линия) и мнимая (тонкая линия) части аппаратной функции данной схемы, нормированные на максимальное значение ее действительной части, вдоль вертикального направления:

- (а) – наклоны вертикальных осей всех преобразователей ориентированы к центру антенной решетки (односторонне ориентированные наклоны);
- (б) – наклоны вертикальных осей преобразователей ориентированы как к центру, так и от центра антенной решетки (двусторонне ориентированные наклоны).

В схемах с *разделенными группами приемных и излучающих преобразователей* преобразователи разделяются на две независимые группы: излучающую и приемную. Углы наклона в обеих группах задаются независимо друг от друга. В частности, возможны схемы, в которых все излучатели не наклонены ($\alpha_S = 0$), а наклоны приемников различны. Тогда все излучатели имеют в вертикальном направлении единую прожекторную зону, и

остается обеспечить принадлежность этой зоны к прожекторным зонам всех приемников. Это важное преимущество подобных схем, достигаемое именно за счет разделения приемных и излучающих преобразователей. При односторонних наклонах приемников ($\alpha_R \in [0^\circ; 12.5^\circ]$, $\alpha_S = 0$) АФ комплексна (это недостаток), и ширина для $\text{Re} \hat{v}_\delta$ и $|\hat{v}_\delta|$ составляет, соответственно, $\approx 2\lambda_0$ и $\approx 3.3\lambda_0$ (рис. 4.2а). Достоинства схемы – отсутствие проблемы перекрытия прожекторных зон и возможность обеспечить нужную высокую разрешающую способность в вертикальном направлении, поскольку углы односторонних наклонов могут быть большими.

При двусторонних наклонах приемников ($\alpha_R \in [-6.5^\circ; 6.5^\circ]$, $\alpha_S = 0$), пространственно-спектральное распределение в подобластях $\xi_z < 0$ и $\xi_z > 0$ симметрично, за счет чего АФ практически действительна; ее ширина $\approx 3.3\lambda_0$ (рис. 4.2б). Схема с разделенными приемниками и излучателями, АФ которой действительна, может быть реализована еще одним способом. Все излучатели имеют одинаковый радиальный, например, “внешний” наклон $\alpha_S = \text{const}$; при этом приемники имеют различные радиальные “внутренние” углы наклона в диапазоне, симметричном относительно угла $(-\alpha_S)$. Таким образом, наклоны всех приемников являются односторонними относительно вертикального z - направления, но двусторонними относительно наклоненной оси каждого излучателя. АФ этой схемы близка к предыдущей (рис. 4.2б). Преимущество данной схемы над рассмотренными выше – возможность обеспечить принадлежность прожекторных зон всех излучателей к прожекторным зонам всех приемников, поскольку ориентация наклонов приемников только “внутрь” позволяет увеличить их высоту по сравнению с высотой излучателей. Плата – необходимость наклона излучателей, т.е. их прожекторные зоны, в отличие от предыдущей схемы, перестают полностью совпадать.

Аппаратные функции одного из алгоритмов восстановления борновских *трехмерных* рассеивателей при использовании неполных данных исследовались в [А 2 (§ 7.2.2); А 7; А 65; 180], где проанализированы некоторые варианты ограничений на множество используемых направлений падения и приема акустических волн.

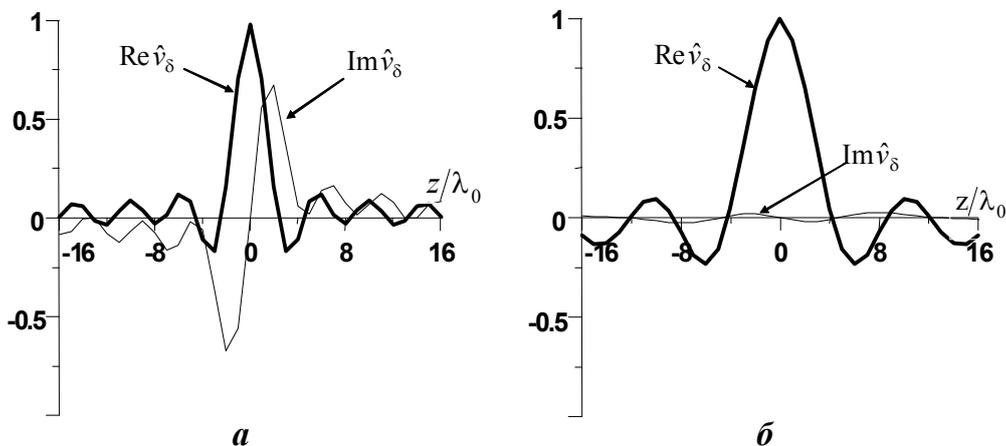


Рис. 4.2. Томографическая схема с отдельными приемноизлучающими преобразователями. Наклоны вертикальных осей присутствуют только у приемников. Нормированные действительная (толстая линия) и мнимая (тонкая линия) части аппаратной функции данной схемы вдоль вертикального направления при односторонне (а) и двусторонне (б) ориентированных наклонах.

Раздел 4.3. Раздельное восстановление упругих и вязких характеристик рассеивателя при неполных данных

Функция рассеивателя $v(\mathbf{r}, \omega)$ характеризует отклонения фазовой скорости звука $c(\mathbf{r})$, плотности среды $\rho(\mathbf{r})$ и амплитудного коэффициента поглощения $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ от соответствующих значений в однородной фоновой непоглощающей среде со скоростью звука c_0 и плотностью ρ_0 . В случае комплексного представления монохроматических волновых полей эта функция имеет, согласно (1.17), вид

$$v(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right) + \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c(\mathbf{r})} \quad (4.4)$$

при временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$. Данное выражение справедливо как при $\omega > 0$, так и при $\omega < 0$ с учетом знака круговой частоты ω и того, что $\alpha(\mathbf{r}, -\omega) = \alpha(\mathbf{r}, \omega)$. Частотная зависимость коэффициента поглощения предполагается степенной и характеризуется показателем степени $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$:

$$\alpha(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{|\omega|}{\omega_2} \right)^\zeta \alpha(\mathbf{r}, \omega_2); \quad (4.5)$$

далее в качестве $\omega_2 > 0$ выбирается средняя частота в рабочем частотном диапазоне $|\omega| \in [\omega_1, \omega_3]$. Тогда

$$v(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} W(\mathbf{r}, \omega),$$

где

$$W(\mathbf{r}, \omega) = g_c(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 \left(\frac{g_\rho(\mathbf{r})}{\omega_2^2} \right) + i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \left(\frac{|\omega|}{\omega_2} \right)^{\zeta-1} \left(\omega_2^{\zeta-1} g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) \right). \quad (4.6)$$

Три слагаемых в (4.6), соответствующие скоростной, плотностной и поглощающей компонентам рассеивателя, описываются частотно-независимыми функциями

$$g_c(\mathbf{r}) = 1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})}; \quad g_\rho(\mathbf{r}) = c_0^2 \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right); \quad (4.7)$$

$$g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) = -2 \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_2)}{\omega_2^\zeta} \frac{c_0^2}{c(\mathbf{r})}.$$

В импульсном режиме падающее поле

$$u_0(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp\left(i \frac{\omega}{c_0} \mathbf{e}_k \mathbf{r} - i\omega t\right) d\omega \quad (4.8)$$

является суперпозицией плоских монохроматических волн, распространяющихся в направлении единичного вектора \mathbf{e}_k . Зондирование рассеивателя плоскими импульсами с амплитудным спектром $A(\omega)$ позволяет получить оценку $\hat{V}(\mathbf{r}, A)$ функции $V(\mathbf{r}, A)$, связанной с функцией рассеивателя в монохроматическом режиме $v(\mathbf{r}, \omega)$ соотношением (2.3) при $\alpha_0(\mathbf{r}, |\omega|) \equiv 0$:

$$V(\mathbf{r}, A) = c_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\mathbf{r}, \omega)}{\omega^2} B(\omega, t_0) d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{r}, \omega) B(\omega, t_0) d\omega . \quad (4.9)$$

В двумерной задаче, согласно (2.4), $B(\omega, t_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\omega|}} A(\omega) (1 + i \operatorname{sgn}(\omega)) \exp(-i\omega t_0)$;

в трехмерной задаче $B(\omega, t_0) = \frac{c_0}{2\pi|\omega|} A(\omega) \exp(-i\omega t_0)$. Фиксированный момент времени t_0 ориентировочно определяется из условия максимума величины $|\mathcal{B}_{\text{int}}|$, где

$\mathcal{B}_{\text{int}} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega$. Тогда в импульсном режиме аналогом функции $W(\mathbf{r}, \omega)$ является

функция $W(\mathbf{r}, A) \equiv V(\mathbf{r}, A)/\mathcal{B}_{\text{int}}$, которая с учетом (4.6) и (4.9) приводится к виду:

$$W(\mathbf{r}, A) = g_c(\mathbf{r}) + I_\rho(A) g_\rho(\mathbf{r}) + i I_{\alpha(\zeta)}(A) g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) , \quad (4.10)$$

где

$$I_\rho(A) = \frac{1}{\mathcal{B}_{\text{int}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} B(\omega, t_0) d\omega; \quad I_{\alpha(\zeta)}(A) = \frac{1}{\mathcal{B}_{\text{int}}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(\omega) \cdot |\omega|^{\zeta-1} B(\omega, t_0) d\omega \quad (4.11)$$

– числовые коэффициенты (возможно комплексные), зависящие от спектра зондирующего сигнала. Таким образом, в функциях $W(\mathbf{r}, \omega)$ и $W(\mathbf{r}, A)$ информация об упругих (c, ρ) и вязких (α, ζ) характеристиках рассеивателя “смешана”. Поэтому после получения оценок этих функций путем обработки экспериментальных данных возникает необходимость разделения вкладов от c -, ρ -, $\alpha(\omega)$ -компонент рассеивателя. Процедура разделения, предложенная в работах [А 2 (раздел 7.3); А 3; А 7; А 65; А 71; 180] обсуждается в настоящем разделе. Другой важный для диагностики вопрос, уже рассмотренный в разделе 4.2, – разрешающая способность предлагаемой томографической схемы, тесно связанная с понятием аппаратной функции (см. начало раздела 4.2).

При восстановлении характеристик рассеивателя, в выражении (4.8) для $u_0(\mathbf{r}, \mathbf{e}_k, t)$ и, следовательно, в последующих выражениях, содержащих интегрирование по частоте, вплоть до выражения (4.11), нужно рассматривать частоты ω только одного знака. Это означает, что при обработке используется комплексное аналитическое представление сигналов. Такое представление получается добавлением к измеряемому в эксперименте действительному сигналу мнимой части, которая является, с точностью до знака, гильбертово сопряженной (по переменной времени t) к действительному сигналу [А 1 (Введение)].

§ 4.3.1. Разделение рассеивающих компонент в многочастотном или импульсном режимах в условиях неточно известной частотной зависимости коэффициента поглощения

В разделе 4.2 было показано, что, в зависимости от требований к получаемому изображению, можно подобрать наиболее целесообразную схему для восстановления с высокой точностью диагностических характеристик биоткани: скорости звука, плотности и коэффициента поглощения, т.е. компонент функции рассеивателя (4.6). Технические или анатомические ограничения на возможное расположение преобразователей характерны для медицинских задач [308]. Тогда необходимые экспериментальные данные рассеяния не доступны в полном объеме, и аппаратная функция (АФ), обсуждавшаяся в разделе 4.2, может приобрести мнимую часть. Это осложняет задачу разделения c -, ρ - и α -компонент, формирующих действительную и мнимую части функции рассеивателя, и приходится использовать различия в показателе степени частотной зависимости рассеивающей способности каждой из трех компонент [А 2 (раздел 7.2); А 3; А 71; 180]. Разделение компонент в условиях комплексной АФ предполагает знание показателя степени ζ частотной зависимости коэффициента поглощения. Классическая стоксовая зависимость $\zeta = 2$ характерна для ряда жидкостей и некоторых пластмасс. В медицинских задачах ζ различается не только для биотканей различных органов, но даже для биотканей одного и того же органа, а также для одинаковых участков органа у разных пациентов [219; 220]. Для мягких тканей ζ лежит в диапазоне $1 \div 2$ [309 (§ 4.5)]. Таким образом, значения ζ для биологических тканей могут лежать в широких пределах, и часто недостаточно полно изучены. В связи с этим метод разделения, описываемый ниже, далее обобщается на случай отклонения частотной зависимости от ожидаемой.

Алгоритм отдельного восстановления оценок функций (4.7) использует различное частотное поведение соответствующих рассеивающих компонент в выражении (4.6). Разделение осуществляется на основе оценок $\hat{W}(\mathbf{r}, A) \equiv \hat{V}(\mathbf{r}, A)/\mathcal{B}_{\text{int}}$, получаемых с помощью трехмерного алгоритма (см. далее п. 4.3.1.1) или квазитрехмерного алгоритма (4.3), рассматриваемых в многочастотном или импульсном режимах. Используется представление

$$\hat{W}(\mathbf{r}, A) = \int_{\mathfrak{R}} \hat{g}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}', A) W(\mathbf{r}', A) d\mathbf{r}' ,$$

где $\hat{g}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}', A)$ – АФ рассматриваемого алгоритма (комплексная, в общем случае), т.е. его реакция $\hat{W}(\mathbf{r}, A) = \hat{g}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}', A)$ на присутствие точечного рассеивателя с единичной нормировкой вида $g_c(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $g_\rho(\mathbf{r}) = g_\alpha(\mathbf{r}) \equiv 0$.

Вся область рассеяния \mathfrak{R} представляется в виде объединения подобластей $\mathfrak{R}^{(m)}$, внутри каждой из которых АФ квазиоднородна: $\hat{g}_\delta(\mathbf{r} | \mathbf{r}', A) \approx \hat{g}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', A)$ при $\mathbf{r}' \in \mathfrak{R}^{(m)}$. Тогда операция формирования \hat{W} близка к пространственной свертке (далее – символ \otimes):

$$\hat{W}(\mathbf{r}, A) \approx \sum_m \int_{\mathfrak{R}^{(m)}} \hat{g}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', A) W(\mathbf{r}', A) d\mathbf{r}' .$$

Если характерная ширина АФ меньше линейного размера подобласти $\mathfrak{R}^{(m)}$, то

$$\hat{W}(\mathbf{r}, A) \approx \int_{\mathfrak{R}^{(m)}} \hat{g}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', A) W(\mathbf{r}', A) d\mathbf{r}' \text{ при } \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^{(m)} . \quad (4.12)$$

Далее используется представление (4.12), но верхний индекс (m) для краткости будет опускаться. Подстановка выражения (4.10) в (4.12) дает в пределах однородности функции отклика:

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{r}, A) &\approx \hat{g}_\delta(\mathbf{r}, A) \otimes W(\mathbf{r}, A) = \\ &= \hat{g}_\delta(\mathbf{r}, A) \otimes g_c(\mathbf{r}) + I_\rho(A) \hat{g}_\delta(\mathbf{r}, A) \otimes g_\rho(\mathbf{r}) + i I_{\alpha(\zeta)}(A) \hat{g}_\delta(\mathbf{r}, A) \otimes g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Разделение действительной и мнимой частей соотношения (4.13) при фиксированных \mathbf{r} и A приводит к двум уравнениям, линейным относительно шести действительных неизвестных $\text{Re } \hat{g}_\delta \otimes g_{c, \rho, \alpha(\zeta)}$, $\text{Im } \hat{g}_\delta \otimes g_{c, \rho, \alpha(\zeta)}$. Для их определения необходимо иметь, в общем случае, три независимых набора данных рассеяния, соответствующих амплитудным спектрам падающего поля $A = A_j(\omega)$, $j = 1, 2, 3$; индексом $j = 1$ будет обозначаться самый низкочастотный набор. Чем более низкочастотен спектр, тем шире главный лепесток соответствующей аппаратной функции. Поэтому для обеспечения независимости искомых величин от частоты заранее определяется эталонная аппаратная функция $g_\delta^0(\mathbf{r}, A_{\text{low}})$. Ее пространственный спектр $\tilde{g}_\delta^0(\xi, A_{\text{low}})$ должен обеспечивать низкий уровень боковых лепестков функции $g_\delta^0(\mathbf{r}, A_{\text{low}})$ и, в то же время, не превышать по своей ширине пространственный спектр $\tilde{g}_\delta(\xi, A_j)$ аппаратной функции $\hat{g}_\delta(\mathbf{r}, A_j)$, соответствующей самому низкочастотному набору $A_j(\omega)$, т.е. при $j = 1$. При этом полученные оценки $\hat{W}(\mathbf{r}, A_j) \equiv \hat{W}_j(\mathbf{r})$ необходимо коррекцией привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}) \approx & g_\delta^0(\mathbf{r}, A_{\text{low}}) \otimes g_c(\mathbf{r}) + I_\rho(A_j) \cdot g_\delta^0(\mathbf{r}, A_{\text{low}}) \otimes g_\rho(\mathbf{r}) + \\ & + i I_{\alpha(\zeta)}(A_j) \cdot g_\delta^0(\mathbf{r}, A_{\text{low}}) \otimes g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}); \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Коррекцию удобно осуществлять через пространственные спектры соответствующих функций, рассматриваемых на выделенном участке изображения, в пределах которого АФ квазиоднородна и ее вид практически не изменяется. Из (4.13), (4.14) следует:

$$\hat{W}_j^{\text{cor}}(\xi) = \hat{W}_j(\xi) \tilde{g}_\delta^0(\xi, A_{\text{low}}) / \tilde{g}_\delta(\xi, A_j). \quad (4.15)$$

Разделение действительной и мнимой частей соотношений (4.14) приводит к линейной системе уравнений относительно шести действительных неизвестных $S_{c,\rho,\alpha(\zeta)} \equiv \text{Re } g_\delta^0 \otimes g_{c,\rho,\alpha(\zeta)}$, $N_{c,\rho,\alpha(\zeta)} \equiv \text{Im } g_\delta^0 \otimes g_{c,\rho,\alpha(\zeta)}$ в каждой точке \mathbf{r} :

$$\left\{ \begin{aligned} S_c + (\text{Re } I_\rho) S_\rho - (\text{Im } I_{\alpha(\zeta)}) S_{\alpha(\zeta)} - (\text{Im } I_\rho) N_\rho - (\text{Re } I_{\alpha(\zeta)}) N_{\alpha(\zeta)} &= \text{Re } \hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}); \\ (\text{Im } I_\rho) S_\rho + (\text{Re } I_{\alpha(\zeta)}) S_{\alpha(\zeta)} + N_c + (\text{Re } I_\rho) N_\rho - (\text{Im } I_{\alpha(\zeta)}) N_{\alpha(\zeta)} &= \text{Im } \hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}); \end{aligned} \right. \quad (4.16)$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Члены S_c , S_ρ , $S_{\alpha(\zeta)}$ являются информативными, выступая в качестве оценок истинных характеристик рассеивателя g_c , g_ρ , $g_{\alpha(\zeta)}$, которые подвергаются одинаковому пространственному сглаживанию. Члены N_c , N_ρ , $N_{\alpha(\zeta)}$ неинформативны и подлежат исключению, так как содержащаяся в них информация о рассеивателе невозстановимо “перемешана” из-за имеющейся у аппаратной функции мнимой части. От индекса спектра j в (4.16) зависят только числовые коэффициенты I_ρ , $I_{\alpha(\zeta)}$ и откорректированные правые части $\hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r})$.

В случае полных данных $\text{Im } g_\delta^0 \equiv 0$, слагаемые $N_{c,\rho,\alpha(\zeta)}$ отсутствуют, и для нахождения $S_{c,\rho,\alpha(\zeta)}$ достаточно двух независимых наборов данных рассеяния [А 8; А 78; 142 (§ 8.1); 164]. Метод выделения плотностной компоненты за счет использования двух иммерсионных сред при полном наборе данных предложен в [310].

Уравнения (4.16) приобретают наиболее простой вид в случае облучения рассеивателя плоскими монохроматическими волнами со спектром $A_j(\omega) = \delta(\omega - \omega_j)$ на трех разных частотах $\omega_j > 0$; тогда $I_\rho = 1/\omega_j^2$, $I_{\alpha(\zeta)} = \omega_j^{\zeta-1}$:

$$\begin{cases} S_c + S_\rho / \omega_j^2 - N_{\alpha(\zeta)} \omega_j^{\zeta-1} = \operatorname{Re} \hat{W}_j^{\operatorname{cor}}(\mathbf{r}); \\ S_{\alpha(\zeta)} \omega_j^{\zeta-1} + N_c + N_\rho / \omega_j^2 = \operatorname{Im} \hat{W}_j^{\operatorname{cor}}(\mathbf{r}); \quad j=1,2,3. \end{cases} \quad (4.17)$$

В [А 7; А 65] подобная система приведена для $\zeta = 2$. Целесообразно восстанавливать безразмерные информативные величины S_c , S_ρ / ω_2^2 , $S_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1}$, где ω_2 – каким-либо образом выбранная средняя частота. Это связано с тем, что именно данные величины определяют эффективность рассеяния и обычно бывают численно соизмеримыми между собой для биологических структур на частотах в мегагерцовом диапазоне. В случае (4.16) восстанавливаются S_c , $S_\rho \cdot \operatorname{Re} I_\rho \Big|_{j=2}$, $S_{\alpha(\zeta)} \cdot \operatorname{Re} I_{\alpha(\zeta)} \Big|_{j=2}$.

Из (4.17) следует:

$$\begin{aligned} S_c &= [K_1(\zeta) H_1(\zeta) - K_2(\zeta) H_2(\zeta)] / \mathcal{D}_1(\zeta); \\ S_\rho / \omega_2^2 &= -[K_1(\zeta) H_3(\zeta) - K_2(\zeta) H_4(\zeta)] / \mathcal{D}_1(\zeta); \\ S_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1} &= [-\operatorname{Im} \hat{W}_1^{\operatorname{cor}} B_1 + \operatorname{Im} \hat{W}_2^{\operatorname{cor}} B_2 + \operatorname{Im} \hat{W}_3^{\operatorname{cor}} B_3] / \mathcal{D}_2(\zeta); \\ \zeta &\neq \pm 1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(\zeta) &= \operatorname{Re} \hat{W}_2^{\operatorname{cor}} - \operatorname{Re} \hat{W}_1^{\operatorname{cor}} (\omega_2 / \omega_1)^{\zeta-1}; \quad K_2(\zeta) = \operatorname{Re} \hat{W}_3^{\operatorname{cor}} - \operatorname{Re} \hat{W}_1^{\operatorname{cor}} (\omega_3 / \omega_1)^{\zeta-1}; \\ H_1(\zeta) &= (\omega_2 / \omega_3)^2 [1 - (\omega_3 / \omega_1)^{\zeta+1}]; \quad H_2(\zeta) = 1 - (\omega_2 / \omega_1)^{\zeta+1}; \\ H_3(\zeta) &= 1 - (\omega_3 / \omega_1)^{\zeta-1}; \quad H_4(\zeta) = 1 - (\omega_2 / \omega_1)^{\zeta-1}; \\ B_1 &= 1 - (\omega_2 / \omega_3)^2; \quad B_2 = (\omega_2 / \omega_1)^2 [1 - (\omega_1 / \omega_3)^2]; \quad B_3 = 1 - (\omega_2 / \omega_1)^2; \\ \mathcal{D}_1(\zeta) &= (\omega_2 / \omega_1)^{\zeta-1} \mathcal{D}_2(\zeta) = H_1(\zeta) H_4(\zeta) - H_2(\zeta) H_3(\zeta). \end{aligned}$$

Итак, соотношения (4.16) или (4.17) позволяют разделить c -, ρ -, α -компоненты рассеивателя для произвольного, заранее заданного значения $\zeta \neq 1$; ситуация $\zeta = 1$ далее обсуждается особо. В случае неборновских рассеивателей для разделения нужна организация итерационного процесса. Значения $\hat{c}(\mathbf{r})$, $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ и $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega)$, оцененные на предыдущем итерационном шаге, рассматриваются в качестве характеристик неоднородной фоновой среды. На их основе уточняются функции $\hat{W}_j(\mathbf{r})$, и осуществляемое затем разделение вкладов уточняет оценки $\hat{c}(\mathbf{r})$, $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ и $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega)$. При этом для коррекции (4.15), вообще говоря, нужно использовать аппаратные функции рассматриваемого неоднородного фона. Однако в п. 2.2 было показано, что аппаратные функции однородной и неоднородной среды близки в силу высокой угловой плотности данных рассеяния в рассматриваемой томо-

графической установке, и поэтому их отличием при итерациях можно пренебречь (с определенной степенью точности).

4.3.1.1. Моделирование алгоритма разделения рассеивающих компонент в трехчастотном режиме при известной частотной зависимости коэффициента поглощения

Компьютерное моделирование проводилось для полихроматического режима на трех частотах $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. При каждой фиксированной частоте ω_j имеется своя аппаратная функция $\hat{g}_\delta(\mathbf{r}, A_j) \equiv \hat{g}_\delta(\mathbf{r}, \omega_j)$. Для иллюстрации разработанной методики разделения рассеивающих компонент была выбрана схема трехмерной акустической томографии [159], обобщенная на случай неполных данных, при которых аппаратная функция комплексна. В качестве данных рассматривалась амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \omega_j) \equiv f(\varphi, \theta, \varphi', \theta', \omega_j)$, где φ, θ – азимутальный и полярный углы для волнового вектора \mathbf{k} падающей волны в сферической системе координат; φ', θ' – для вектора \mathbf{l} рассеянной волны; $k_j = \omega_j / c_0$. В случае полных данных и слабого рассеивателя:

$$\begin{aligned} \hat{W}(\mathbf{r}, \omega_j) = & \frac{k_j}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta' f(\varphi, \theta, \varphi', \theta', \omega_j) \sin \theta \sin \theta' \times \\ & \times \sqrt{1 - \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') - \cos \theta' \cos \theta} \times \\ & \times \exp\{ik_j x (\sin \theta' \cos \varphi' - \sin \theta \cos \varphi)\} \times \\ & \times \exp\{ik_j [y (\sin \theta' \sin \varphi' - \sin \theta \sin \varphi) + z (\cos \theta' - \cos \theta)]\}; \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Трудности реализации алгоритма разделения обсуждались в [А 2 (§7.3.1); А 3; 180]. Использовалась “полусферическая” трехмерная схема сбора данных: облучение – в горизонтальной плоскости, прием рассеянных волн – на части верхней полусферы, т.е. $\theta = \pi/2$; $\theta' \in [\pi/4, \pi/2]$. Для фиксированных θ и θ' присутствуют все значения $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$ в горизонтальной плоскости (x, y) . Тогда модуль аппаратной функции в плоскости (x, y) имеет полуширину по уровню 0.7 около $\lambda_j/8$ и около $0.35\lambda_j$ вдоль z -направления из-за неполноты данных; $\lambda_j = 2\pi/k_j$. Модельные данные рассеяния формировались на частотах 400 кГц, 600 кГц, 800 кГц для нескольких типов неоднородностей. Шаг дискретизации в координатном пространстве \mathbf{r} всегда составлял $\lambda_3/4$, где длина волны λ_3 соответствует высшей частоте ω_3 .

При раздельном воспроизведении аппаратных функций томографической схемы, безразмерным функциям g_c , g_ρ/ω_2^2 , $g_{\alpha(\zeta)}\omega_2^{\zeta-1}$ соответствуют пробные воздействия

с единичной нормировкой $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c,\rho,\alpha}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_{c,\rho,\alpha})$, характеризующие точечные неоднородности фазовой скорости, плотности и поглощения с соответствующей вертикальной координатой $z_c = 0$, $z_\rho = -4\lambda_3$, $z_\alpha = 4\lambda_3$. Надо еще раз отметить, что представление рассеивателя в виде δ -образных неоднородностей является идеализацией, далекой от физической реальности, и необходимо лишь для изучения свойств и взаимосвязей между аппаратными функциями алгоритма восстановления реальных физических объектов. В этом и последующих модельных примерах местоположение c -, ρ -, α -неоднородностей задавалось в плоскости (x, y) координатами $x = y = 0$. Действительная и мнимая части эталонной аппаратной функции $g_\delta^0(\mathbf{r}, \omega_1)$ на низшей частоте ω_1 приведены на рис. 4.3 в масштабе длины волны $\lambda_3 = \lambda_1/2$. Оценки S_c , S_ρ/ω_2^2 , $\omega_2^{\zeta-1} S_\alpha$ “точечных” рассеивателей (рис. 4.4; $x = y = 0$), разделенные согласно (4.18) при точно известном показателе ζ , являются действительными частями аппаратных функций восстановления неоднородностей соответствующего типа. В трехмерной задаче они имеют размерность M^{-3} .

Рис. 4.3. Нормированные действительная (толстая линия) и мнимая (тонкая линия) части эталонной аппаратной функции g_δ^0 вдоль z -направления. Функция g_δ^0 задается на низшей рабочей частоте ω_1 ; пространственный масштаб соотнесен с длиной волны на высшей рабочей частоте $\omega_3 = 2\omega_1$.

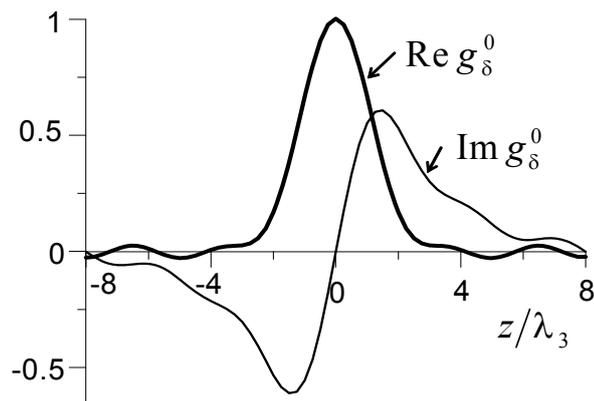
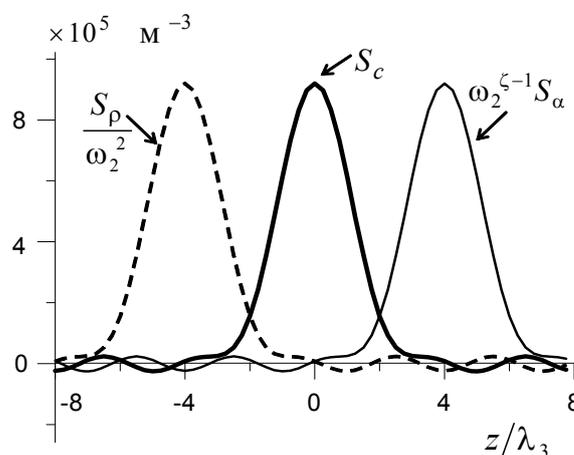


Рис. 4.4. Аппаратные функции восстановления скоростной (толстая линия), поглощающей (тонкая линия) и плотностной (пунктир) компонент трехмерного рассеивателя.



В следующей модели в качестве функций $\Delta c(\mathbf{r}) \equiv c(\mathbf{r}) - c_0$, $\mathcal{P}(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right)$ и $\alpha(\mathbf{r}, \omega_2)$ использовались пробные функции $\Delta c_\delta(\mathbf{r})$, $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{r})$ и $\alpha_\delta(\mathbf{r})$ “игольчатого” характера, т.е. “точечные” в плоскости (x, y) и протяженные вдоль z -направления. Такая идеализированная модель позволяет исследовать качество восстановления структуры рассеивающих компонент, протяженных в z -направлении, при исключении влияния структуры рассеивателя в плоскости (x, y) . Функция

$$\Delta c(\mathbf{r}) \sim \Delta c_\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y) \left[\Delta c_1 \exp \left\{ -\frac{(z - 4\lambda_3)^2}{(d_{1/2}^{(c)})^2} \right\} + \Delta c_2 \Psi(z) \right], \quad d_{1/2}^{(c)} = \lambda_3,$$

состоит из прямоугольного пьедестала $\Psi(z) = \{1 \text{ при } |z| \leq 6\lambda_3; 0 \text{ при } |z| > 6\lambda_3\}$ и “всплеска” гауссовской формы на одном из краев пьедестала. Две другие функции определяются как $\mathcal{P}(\mathbf{r}) \sim \mathcal{P}_\delta(\mathbf{r}) = \mathcal{P}_0 \delta(x)\delta(y) \exp \left\{ -\frac{z^2}{(d_{1/2}^{(\rho)})^2} \right\}$;

$$\alpha(\mathbf{r}, \omega_2) \sim \alpha_\delta(\mathbf{r}) = \alpha_1 \delta(x)\delta(y) \exp \left\{ -\frac{(z + 4\lambda_3)^2}{(d_{1/2}^{(\alpha)})^2} \right\}; \quad d_{1/2}^{(\rho)} = d_{1/2}^{(\alpha)} = \lambda_3.$$

Амплитудно-нормировочные множители полагались равными типичным отклонениям от фоновых значений физических величин соответствующего типа в мягких тканях: $\Delta c_1 = 10 \text{ м/с}$, $\Delta c_2 = 5 \text{ м/с}$, $\alpha_1 = 11.5 \text{ Нп/м} \approx 1 \text{ дБ/см}$. Эффективный параметр $\mathcal{P}_0 = 10^5 \text{ м}^{-2}$ оценивался на основе ожидаемого максимального значения относительных флуктуаций плотности [А 2 (§7.3.1); А 3; 180]: в биологических мягких тканях плотностной контраст тканей с патологией на фоне здоровой ткани может достигать $(20 \div 30)\%$ [311; 312]. В то же время, выбор таких параметров обеспечивает для рабочих частот в мегагерцовом диапазоне приблизительно равный вклад c -, ρ -, α -неоднородностей в абсолютное значение рассеянного поля. Для контраста $\Delta c_1 = 1 \text{ м/с}$, еще различимого при акустической томографии, “равноценное” значение плотностного параметра составляет $\mathcal{P}_0 \approx 10^4 \text{ м}^{-2}$. На рис. 4.5 (толстая линия) представлен результат отдельной реконструкции величин $\Delta c_\delta(\mathbf{r})$, $\alpha_\delta(\mathbf{r})$, $\mathcal{P}_\delta(\mathbf{r})$ в сечении $x = y = 0$. В силу “игольчатого” характера пробных рассеивателей, их размерность относится к размерности соответствующих функций Δc , α , \mathcal{P} как м^{-2} и составляет: $[\Delta c_\delta] = (\text{с} \times \text{м})^{-1}$, $[\alpha_\delta] = \text{Нп/м}^{-3}$, $[\mathcal{P}_\delta] = \text{м}^{-4}$. Ширина восстановленных функций в z -направлении больше их исходной ширины на величину, сравнимую с шириной аппаратной функции.

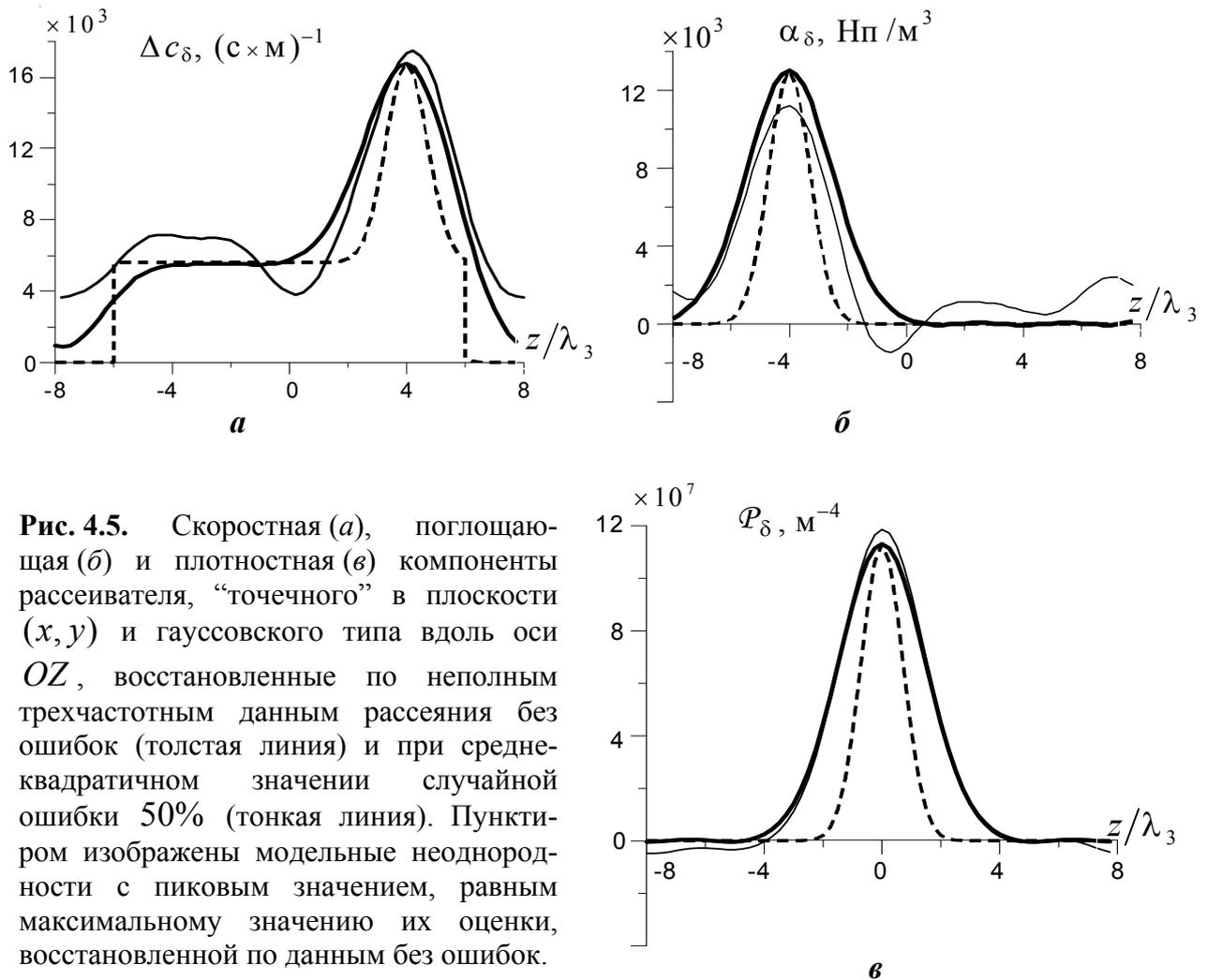


Рис. 4.5. Скоростная (а), поглощающая (б) и плотностная (в) компоненты рассеивателя, “точечного” в плоскости (x, y) и гауссовского типа вдоль оси OZ , восстановленные по неполным трехчастотным данным рассеяния без ошибок (толстая линия) и при среднеквадратичном значении случайной ошибки 50% (тонкая линия). Пунктиром изображены модельные неоднородности с пиковым значением, равным максимальному значению их оценки, восстановленной по данным без ошибок.

При проверке устойчивости решения к случайным ошибкам в данных рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \omega_j)$, шумовое поле имело нормальное распределение с нулевым средним и значением стандартного отклонения $\sigma_{\text{ns}}(\omega_j) = \varepsilon_{\text{ns}} \times \max_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} |f(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \omega_j)|$ независимо для мнимой и для действительной частей шумового поля; ε_{ns} – коэффициент зашумления. Даже при 50% ошибках (коэффициент $\varepsilon_{\text{ns}} = 0.5$) возможно адекватное разделение трех компонент (рис. 4.5, тонкая линия). Допустимость столь большой погрешности в данных объясняется квазиточечным характером рассеивателя в плоскости (x, y) , за счет чего возникает эффект концентрации энергии рассеянного сигнала при реконструкции рассеивателя, более узкого или сравнимого по ширине с длиной волны [А 2 (§5.2.5); 180]. Для произвольных трехмерных рассеивателей с характерными размерами не менее λ_3 , уровень допустимых случайных ошибок падает до $(3 \div 5)\%$, что достижимо в реальном эксперименте.

Вопросы выделения непосредственно плотности среды $\rho(\mathbf{r})$ из плотностной составляющей рассеивателя, которая восстанавливается, согласно (4.4), в виде оценки функции $\mathcal{P}(\mathbf{r}) \equiv \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{r})}{\rho_0}} \nabla^2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{r})}} \right)$, обсуждались, например, в [А 2 (§7.3.1); А 3; 142 (§ 8.1); 180].

Итак, применение трехчастотного режима позволяет восстановить полную пространственную структуру неоднородностей скорости, плотности и поглощения даже в случае неполных данных. Однако помехоустойчивость восстановления крупномасштабных составляющих неоднородностей существенно ниже, чем высокочастотных компонент пространственных структур. Использование многочастотного или импульсного режима является единственным способом, позволяющим разделить все три типа неоднородностей в случае комплексной аппаратной функции томографа. Математическая обусловленность алгоритмов рассматриваемого метода сильно зависит от отношения между рабочими частотами ω_j , ухудшаясь при сближении этих частот, а также от степени различия в частотном поведении рассеивающих компонент.

4.3.1.2. Влияние отклонения частотной зависимости коэффициента поглощения от предполагаемой

Дополнительную проблему составляет априорное незнание характера частотной зависимости коэффициента поглощения, т.е. точного значения ζ . Тогда, при разделении компонент из системы (4.16) или (4.17), истинное значение ζ заменяется средним ожидаемым значением ζ_0 . Например, вместо (4.17) будет:

$$\begin{cases} \hat{S}_c + \hat{S}_\rho / \omega_j^2 - \hat{N}_{\alpha(\zeta_0)} \omega_j^{\zeta_0-1} = \text{Re} \hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}); \\ \hat{S}_{\alpha(\zeta_0)} \omega_j^{\zeta_0-1} + \hat{N}_c + \hat{N}_\rho / \omega_j^2 = \text{Im} \hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}); \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (4.20)$$

Выражения для оценок \hat{S}_c , $\hat{S}_\rho / \omega_2^2$, $\hat{S}_{\alpha(\zeta_0)} \omega_2^{\zeta_0-1}$, получаемых вместо истинных значений S_c , S_ρ / ω_2^2 , $S_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1}$, аналогичны (4.18) при замене ζ на ζ_0 :

$$\begin{aligned} \hat{S}_c &= [K_1(\zeta_0) H_1(\zeta_0) - K_2(\zeta_0) H_2(\zeta_0)] / \mathcal{D}_1(\zeta_0); \\ \hat{S}_\rho / \omega_2^2 &= -[K_1(\zeta_0) H_3(\zeta_0) - K_2(\zeta_0) H_4(\zeta_0)] / \mathcal{D}_1(\zeta_0); \\ \hat{S}_{\alpha(\zeta_0)} \omega_2^{\zeta_0-1} &= [-\text{Im} \hat{W}_1^{\text{cor}} B_1 + \text{Im} \hat{W}_2^{\text{cor}} B_2 + \text{Im} \hat{W}_3^{\text{cor}} B_3] / \mathcal{D}_2(\zeta_0); \\ \zeta_0 &\neq \pm 1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Погрешности, вносимые в оценки c -, ρ -, α -компонент за счет отличия ζ_0 от ζ при разделении с помощью (4.20), оцениваются приравниванием левых частей (4.17) и (4.20), поскольку $\hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r})$ получаются из экспериментальных данных и не зависят от ζ_0 . В итоге:

$$\hat{S}_c - S_c = -N_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1} K_c(\zeta, \zeta_0); \quad (4.22)$$

$$\hat{S}_{\alpha(\zeta_0)} \omega_2^{\zeta_0-1} - S_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1} = S_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1} K_\alpha(\zeta, \zeta_0); \quad (4.23)$$

$$\hat{S}_\rho / \omega_2^2 - S_\rho / \omega_2^2 = -N_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1} K_\rho(\zeta, \zeta_0), \quad (4.24)$$

где

$$K_c(\zeta, \zeta_0) = \frac{\left[1 - (\omega_2/\omega_1)^{\zeta_0-\zeta}\right] H_1(\zeta_0) - (\omega_3/\omega_2)^{\zeta-1} \left[1 - (\omega_3/\omega_1)^{\zeta_0-\zeta}\right] H_2(\zeta_0)}{\mathcal{D}_1(\zeta_0)};$$

$$K_\rho(\zeta, \zeta_0) = -\frac{\left[1 - (\omega_2/\omega_1)^{\zeta_0-\zeta}\right] H_3(\zeta_0) - (\omega_3/\omega_2)^{\zeta-1} \left[1 - (\omega_3/\omega_1)^{\zeta_0-\zeta}\right] H_4(\zeta_0)}{\mathcal{D}_2(\zeta_0)};$$

$$K'_\alpha(\zeta, \zeta_0) \equiv 1 + K_\alpha(\zeta, \zeta_0) = \frac{-(\omega_1/\omega_2)^{\zeta-1} B_1 + B_2 + (\omega_3/\omega_2)^{\zeta-1} B_3}{\mathcal{D}_2(\zeta_0)}. \quad (4.25)$$

Правые части соотношений (4.22)–(4.24) являются погрешностями разделения c -, ρ -, α -компонент. Весовые коэффициенты $K_{c,\rho,\alpha}(\zeta, \zeta_0)$, являющиеся мерой погрешностей, равны нулю при $\zeta = \zeta_0$ и принимают независимые от ζ_0 значения при $\zeta = 1$. Из (4.23) следует:

$$1 + K_\alpha(\zeta, \zeta_0) = \frac{\hat{S}_{\alpha(\zeta_0)} \omega_2^{\zeta_0-1}}{S_{\alpha(\zeta)} \omega_2^{\zeta-1}},$$

т.е. величина $1 + K_\alpha$ является отношением оценки коэффициента поглощения (на частоте ω_2) в предположении показателя ζ_0 , к истинной оценке.

Численные значения $K_c(\zeta, \zeta_0)$ и $K_\rho(\zeta, \zeta_0)$ приведены на рис. 4.6 для разных фиксированных ζ_0 и истинного показателя ζ , меняющегося в интервале $\zeta \in [1; 2]$ (значения частот 400 кГц, 600 кГц, 800 кГц). Зависимость близка к линейной для K_c и K_α и к квадратичной для K_ρ , причем оказалось, что $K_\alpha(\zeta, \zeta_0) \approx -K_c(\zeta, \zeta_0)$, хотя это и не строгое равенство. При $\zeta \neq \zeta_0$ значение $|K_\rho|$ более чем на порядок меньше значений

$|K_c|$ и $|K_\alpha|$, за счет чего абсолютная погрешность в оценке ρ -компоненты значительно меньше, чем в c - и α -компонентах. Это обстоятельство подтверждается на рис. 4.7 результатом разделения c -, ρ -, α -компонент в трехчастотном режиме при $\zeta_0 = \zeta = 1.75$ (пунктирная линия), а также при $\zeta = 1.75, \zeta_0 = 2$ (толстая линия); для ρ -компоненты эти линии практически совпадают.

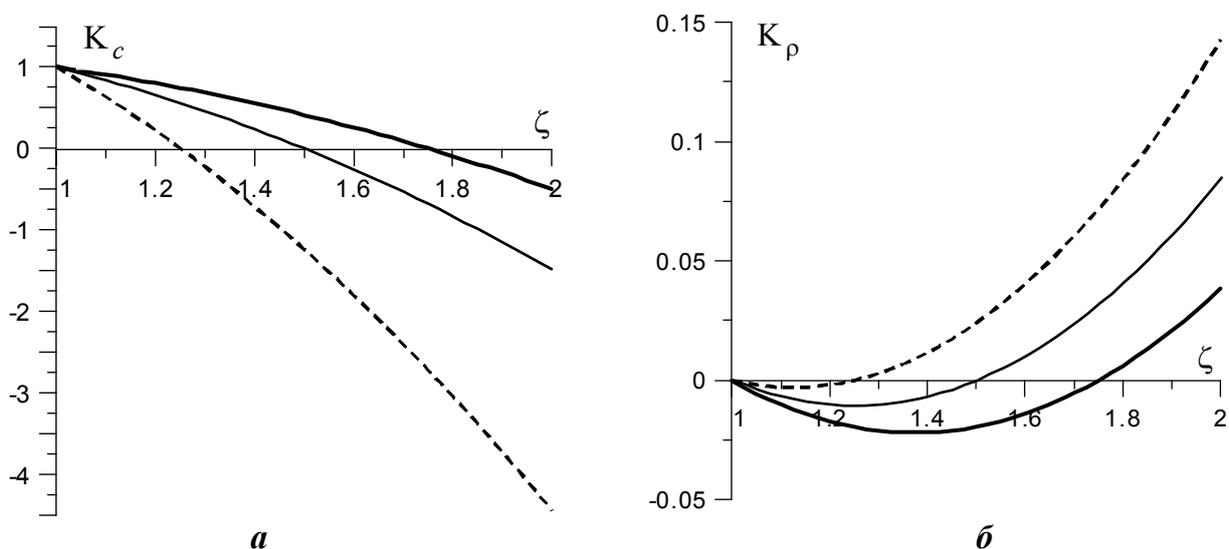


Рис. 4.6. Весовые коэффициенты при погрешностях, вносимых в оценки скоростной (а) и плотностной (б) компонент рассеивателя, когда истинная степень ζ частотной зависимости коэффициента поглощения отличается от степени ζ_0 , предполагаемой при разделении этих компонент: $\zeta_0 = 1.25$ (пунктирная линия), $\zeta_0 = 1.5$ (тонкая линия), $\zeta_0 = 1.75$ (толстая линия).

Относительное систематическое отклонение, обусловленное отклонением ζ от ζ_0 , оценивается как $\delta_{\text{syst}} = \left| 1 - (|\omega|/\omega_2)^{\zeta_0 - \zeta} \right|$, т.е. $\delta_{\text{syst}} \approx |\zeta_0 - \zeta| \Delta\omega/\omega_2$ при $|\zeta_0 - \zeta| < 1$ и $\Delta\omega/\omega_2 < 1$; $\Delta\omega$ – максимальное отклонение рабочей частоты от ω_2 . Влияние такого рода ошибки на результат разделения практически одинаково для разных моделей рассеивателей. В связи с этим мера устойчивости схемы разделения иллюстрируется рис. 4.7 на примере описанной модели неоднородностей “игольчатого” типа. По мере отклонения ζ_0 от ζ искажения нарастают достаточно медленно, причем ρ -компонента, как и ожидалось, подвергается влиянию систематических ошибок в наименьшей степени. Устойчивость же к случайным ошибкам в данных рассеяния остается той же, что и в идеальном случае $\zeta_0 = \zeta$, и зависит от модели рассеивателя.

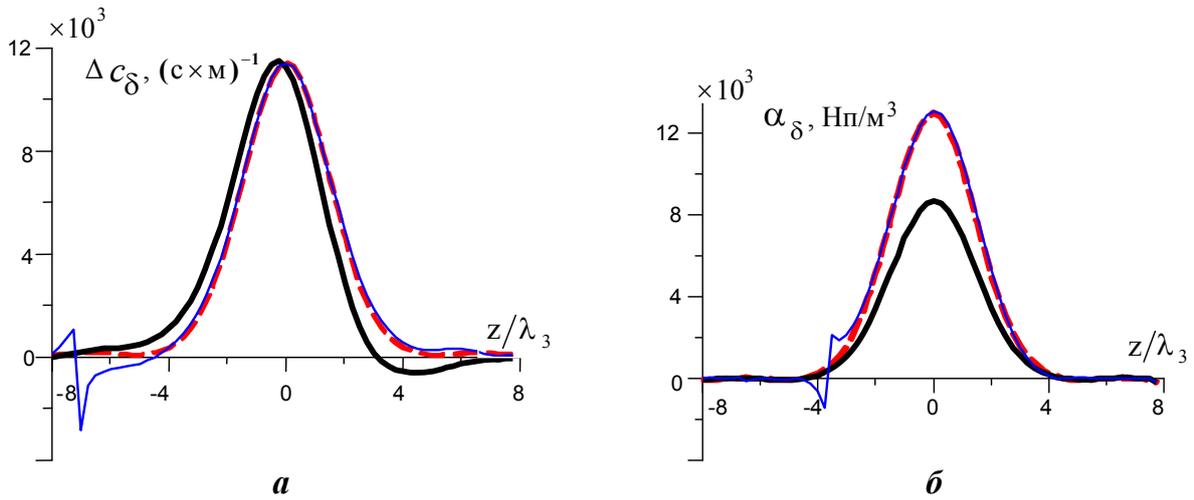
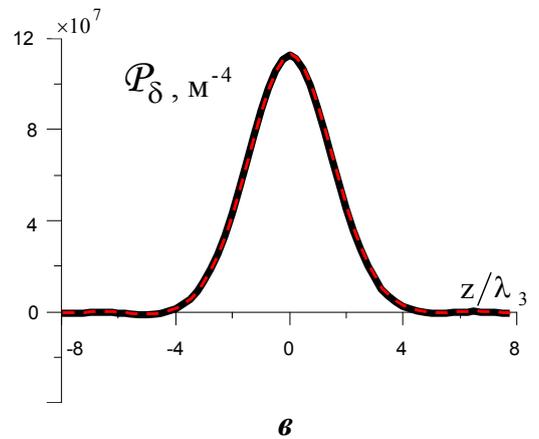


Рис. 4.7. Скоростная (а), поглощающая (б) и плотностная (в) компоненты рассеивателя, восстановленные по неполным данным рассеяния с шумом: — истинная степень $\zeta = 1.75$ частотной зависимости коэффициента поглощения известна (пунктирная линия); — изначально при восстановлении предполагается показатель степени $\zeta_0 = 2$ вместо истинного $\zeta = 1.75$, и восстановленные компоненты (толстая линия) являются исходными данными для итераций; уровень шумовых помех приводит к ошибке в этих данных не более 1%; — результат итераций в четырехчастотном режиме при неизвестном ζ (тонкая линия).



Линейная зависимость коэффициента поглощения от частоты ($\zeta = 1$) возможна в некоторых биологических тканях, например, в печени [309 (§ 4.5)]. Тогда коэффициенты при скоростной $g_c(\mathbf{r})$ и поглощающей $g_{\alpha(\zeta=1)}(\mathbf{r})$ компонентах в (4.6) не отличаются по частотной зависимости:

$$W(\mathbf{r}, \omega) = g_c(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 \left(\frac{g_p(\mathbf{r})}{\omega_2^2}\right) + i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot g_{\alpha(\zeta=1)}(\mathbf{r}).$$

Поэтому при неполных данных рассеяния присутствие мнимой части у аппаратных функций $\hat{g}_\delta(\mathbf{r}, \omega_j)$, $g_\delta^0(\mathbf{r}, \omega_1)$ приводит к неразделимому “перемешиванию” оценок скоростного и поглощающего членов, согласно (4.14) и (4.17):

$$\hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}) = (S_c - N_{\alpha(\zeta=1)}) + S_\rho / \omega_j^2 + i \left[(S_{\alpha(\zeta=1)} + N_c) + N_\rho / \omega_j^2 \right],$$

где

$$S_{c,\rho,\alpha(\zeta=1)} \equiv \text{Re } \mathbf{g}_\delta^0 \otimes \mathbf{g}_{c,\rho,\alpha(\zeta=1)}, \quad N_{c,\rho,\alpha(\zeta=1)} \equiv \text{Im } \mathbf{g}_\delta^0 \otimes \mathbf{g}_{c,\rho,\alpha(\zeta=1)}.$$

Выделить вклад от плотностной компоненты в $\hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r})$ по-прежнему возможно за счет частотного коэффициента $\sim 1/\omega_j^2$ при ρ -члене. Поэтому ρ -компонента воспроизводится без искажений. Таким образом, при приближении частотной зависимости коэффициента поглощения к линейной, частотное разделение c - и α -компонент принципиально невозможно. Применение трехчастотной схемы (4.20) становится излишним, поскольку возможности частотного разделения исчерпываются уже двухчастотным режимом.

Аналогично, если $\zeta = -1$ (хотя для биологических тканей $\zeta > 0$), и у аппаратных функций присутствует мнимая часть, то происходит неразделимое “перемешивание” оценок плотностного и поглощающего членов.

Если же доступные данные рассеяния позволяют формировать *действительную* эталонную аппаратную функцию, т.е. $\text{Im } \mathbf{g}_\delta^0(\mathbf{r}) \equiv 0$, то для выделения S_c , S_ρ , $S_{\alpha(\zeta)}$ из оценки $\hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}) = S_c(\mathbf{r}) + S_\rho(\mathbf{r})/\omega_j^2 + i \omega_j^{\zeta-1} S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ достаточно двух частот ω_j , независимо от значения ζ , поскольку α -компонента соответствует мнимой части:

$$S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) = \text{Im } \hat{W}_j^{\text{cor}}(\mathbf{r}) / \omega_j^{\zeta-1}, \quad \forall j. \quad (4.26)$$

Кроме того, открывается дополнительная диагностическая возможность, связанная с определением значения ζ , если оно заранее неизвестно или же непостоянно, т.е. $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$.

Поскольку функция $S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$, как оценка величины $\mathbf{g}_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ в (4.7), не должна зависеть

от ω_j , то из (4.26) следует: $\frac{1}{\omega_1^{\zeta-1}} \text{Im } \hat{W}^{\text{cor}}(\mathbf{r}, \omega_1) = \frac{1}{\omega_2^{\zeta-1}} \text{Im } \hat{W}^{\text{cor}}(\mathbf{r}, \omega_2)$, т.е.

$$\zeta(\mathbf{r}) = 1 + \frac{\lg \left(\frac{\text{Im } \hat{W}^{\text{cor}}(\mathbf{r}, \omega_1)}{\text{Im } \hat{W}^{\text{cor}}(\mathbf{r}, \omega_2)} \right)}{\lg \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)}$$

для всех точек \mathbf{r} , где коэффициент поглощения не равен нулю. Мнимая часть эталонной аппаратной функции томографической схемы отсутствует при полных данных рассеяния, а при неполных данных ее отсутствие, в ряде случаев, может быть обеспечено организацией эксперимента. Для этого эталонная аппаратная функция должна иметь полностью симметричный пространственный спектр. Это достигается в томографической схеме, ес-

ли, например, у каждой пары волновых векторов падения и рассеяния (\mathbf{k}, \mathbf{l}) есть пара с противоположным направлением $(-\mathbf{k}, -\mathbf{l})$.

Подробно процедура разделения c -, ρ - и α -компонент, а также определения показателя степени частотной зависимости коэффициента поглощения ζ в условиях полных данных рассеяния рассмотрена в [А 14; А 77].

§ 4.3.2. Выделение истинных оценок скорости звука и коэффициента поглощения. Определение неизвестной частотной зависимости коэффициента поглощения

Если при разделении c -, ρ -, α -компонент (4.21) оценка α -компоненты при фиксированном \mathbf{r} получается нулевой $\hat{S}_{\alpha(\zeta_0)} = 0$ независимо от ζ_0 , и оценки \hat{S}_c и \hat{S}_ρ при этом также не зависят от ζ_0 , то это означает либо равенство нулю коэффициента поглощения в данной точке, либо его линейную частотную зависимость $\zeta = 1$. Отличить эти два случая при ненулевой мнимой части аппаратной функции нельзя; также нельзя улучшить оценки $\hat{S}_{c,\rho,\alpha(\zeta_0)}$.

Если же такая ситуация не имеет места, то в каждой точке \mathbf{r} оказывается возможным итерационное выделение из оценок $\hat{S}_{c,\rho,\alpha(\zeta_0)}$ истинных оценок $\hat{S}_{c,\rho,\alpha(\zeta)}$ с параллельным определением неизвестной степени частотной зависимости $\zeta(\mathbf{r})$, служащей дополнительным диагностическим параметром при медицинских исследованиях. При этом предполагается, что если у аппаратных функций присутствует мнимая часть, то $\zeta(\mathbf{r}) \neq \pm 1$ (см. конец п. 4.3.1.2).

Далее рассматриваются только c - и α -компоненты (погрешность в оценке ρ -компоненты за счет отличия ζ_0 от ζ пренебрежимо мала, – см. п. 4.3.1.2). Предполагаются два набора, каждый из трех частот: $\{\omega_j^{[1]}\}, \{\omega_j^{[2]}\}, j = 1, 2, 3$. Эталонная аппаратная функция должна быть единой для них, чтобы истинные оценки $S_{c,\rho,\alpha(\zeta)}$ не зависели от набора частот. Требуются различные средние частоты $\omega_2^{[1]} \equiv \omega_{21}$ и $\omega_2^{[2]} \equiv \omega_{22}$, т.е. $\omega_{21} \neq \omega_{22}$, в то время как нижние и высшие частоты могут быть произвольными, в том числе одинаковыми. Итерационный процесс основывается на соотношениях (4.22) и (4.23). Используется факт независимости истинных величин $S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ и $N_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ от набора частот: из (4.7) и (4.5) следует, что $g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) = -2 \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_2)}{\omega_2^\zeta} \frac{c_0^2}{c(\mathbf{r})}$ вообще не зависит

от ω , а $S_{\alpha(\zeta)} + iN_{\alpha(\zeta)} = g_\delta^0(\mathbf{r}, \omega_1) \otimes g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ зависит только от частоты ω_1 , задающей эталонную аппаратную функцию g_δ^0 .

В наиболее простом случае построения итерационного алгоритма соотношения (4.22) и (4.23) для c - и α -компонент рассматриваются независимо друг от друга. При нахождении коэффициента поглощения и степени $\zeta(\mathbf{r})$ начальными данными являются оценки

$$F_{\alpha}^{[1]}(\mathbf{r}, \zeta_0) \equiv \hat{S}_{\alpha(\zeta_0)}^{[1]}(\mathbf{r}, \zeta_0) \omega_{21}^{\zeta_0-1}, \quad F_{\alpha}^{[2]}(\mathbf{r}, \zeta_0) \equiv \hat{S}_{\alpha(\zeta_0)}^{[2]}(\mathbf{r}, \zeta_0) \omega_{22}^{\zeta_0-1},$$

полученные из (4.21) для каждого набора частот и единственного значения ζ_0 . В дальнейшем эти данные не меняются с номером n итерационного шага. Искомые величины $Q_1(\mathbf{r}) \equiv S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) \omega_{21}^{\zeta-1}$ и $Q_2(\mathbf{r}) \equiv S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) \omega_{22}^{\zeta-1}$ оцениваются, согласно (4.23), при каждом n в виде:

$$Q_1^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{F_{\alpha}^{[1]}(\mathbf{r}, \zeta_0)}{K_{\alpha}^{\prime[1]}(\zeta^{(n-1)}, \zeta_0)}; \quad Q_2^{(n)}(\mathbf{r}) = \frac{F_{\alpha}^{[2]}(\mathbf{r}, \zeta_0)}{K_{\alpha}^{\prime[2]}(\zeta^{(n-1)}, \zeta_0)}. \quad (4.27)$$

Коэффициенты $K_{\alpha}^{\prime[1]}$, $K_{\alpha}^{\prime[2]}$ вычисляются для данной точки \mathbf{r} из (4.25) при замене истинного (неизвестного) значения $\zeta(\mathbf{r})$ его предыдущей оценкой $\zeta^{(n-1)}(\mathbf{r})$. Если полученные на n -й итерации величины $Q_1^{(n)}(\mathbf{r})$, $Q_2^{(n)}(\mathbf{r})$ не слишком малы, так что можно говорить о присутствии поглощения в данной точке \mathbf{r} , то $\zeta^{(n)}(\mathbf{r})$ уточняется из соотношения $(\omega_{21}/\omega_{22})^{\zeta^{(n)}(\mathbf{r})-1} = Q_1^{(n)}(\mathbf{r})/Q_2^{(n)}(\mathbf{r})$ (в силу независимости $S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ от частоты), т.е.

$$\zeta^{(n)}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{\lg[Q_1^{(n)}(\mathbf{r})/Q_2^{(n)}(\mathbf{r})]}{\lg(\omega_{21}/\omega_{22})}. \quad (4.28)$$

Именно условие $\omega_{21} \neq \omega_{22}$ делает возможным оценку $\zeta(\mathbf{r})$. Начальным приближением для итераций (4.27), (4.28) может служить $\zeta^{(n=0)}(\mathbf{r}) = \zeta_0, \forall \mathbf{r}$; тогда $K_{\alpha}^{\prime[1]}(\zeta_0, \zeta_0) = K_{\alpha}^{\prime[2]}(\zeta_0, \zeta_0) = 1$. Итоговая оценка $S_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ величины $g_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ связана с оценкой коэффициента поглощения $\hat{\alpha}(\mathbf{r}, \omega_2)$ на каждой из частот ω_2 (или на другой частоте) соотношениями (4.7), (4.5). Найденное $\zeta(\mathbf{r})$ является средней (внутри рабочего частотного диапазона) степенью частотной зависимости для $\hat{\alpha}$.

Скорость звука и степень $\zeta(\mathbf{r})$ могут быть найдены независимо на основе (4.22). При этом неизвестны $S_c(\mathbf{r})$, $P_1(\mathbf{r}) \equiv N_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) \omega_{21}^{\zeta-1}$, $P_2(\mathbf{r}) \equiv N_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) \omega_{22}^{\zeta-1}$. Поэтому соотношения (4.22) рассматриваются для двух значений $\zeta_0 = \zeta_{0p}$ ($p = 1, 2$) при каждом

из двух наборов частот. Начальные данные, вычисленные из (4.21) и неизменные при итерациях, – это

$$\mathcal{F}_c^{[1]}(\mathbf{r}, \zeta_{0p}) \equiv \hat{S}_c^{[1]}(\mathbf{r}, \zeta_{0p}), \quad \mathcal{F}_c^{[2]}(\mathbf{r}, \zeta_{0p}) \equiv \hat{S}_c^{[2]}(\mathbf{r}, \zeta_{0p}).$$

На каждой итерации три обозначенных неизвестных можно оценить как МНК-решение следующей системы из четырех уравнений:

$$\begin{cases} S_c^{(n)}(\mathbf{r}) - \mathbf{K}_c^{[1]}(\zeta^{(n-1)}, \zeta_{0p}) P_1^{(n)}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_c^{[1]}(\mathbf{r}, \zeta_{0p}); \\ S_c^{(n)}(\mathbf{r}) - \mathbf{K}_c^{[2]}(\zeta^{(n-1)}, \zeta_{0p}) P_2^{(n)}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_c^{[2]}(\mathbf{r}, \zeta_{0p}); \end{cases} \quad p = 1, 2; \quad (4.29)$$

$\zeta^{(n=0)}(\mathbf{r})$ равно, например, полусумме величин ζ_{0p} . Выражение для $\zeta^{(n)}(\mathbf{r})$ подобно (4.28):

$$\zeta^{(n)}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{\lg[P_1^{(n)}(\mathbf{r})/P_2^{(n)}(\mathbf{r})]}{\lg(\omega_{21}/\omega_{22})}. \quad (4.30)$$

Соотношение (4.30) предполагает, что величина $N_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r})$ в данной точке не слишком мала. Множество точек $\{\mathbf{r}\}$, где $N_{\alpha(\zeta)}(\mathbf{r}) \cong 0$ (за счет малого поглощения или близкой к нулю свертки коэффициента поглощения и мнимой части аппаратной функции), составляет “мертвую зону”, в которой определить $\zeta(\mathbf{r})$ из схемы для c -компоненты (4.29), (4.30) невозможно. Тогда $\zeta(\mathbf{r})$ оценивается только из (4.27), (4.28) для α -компоненты.

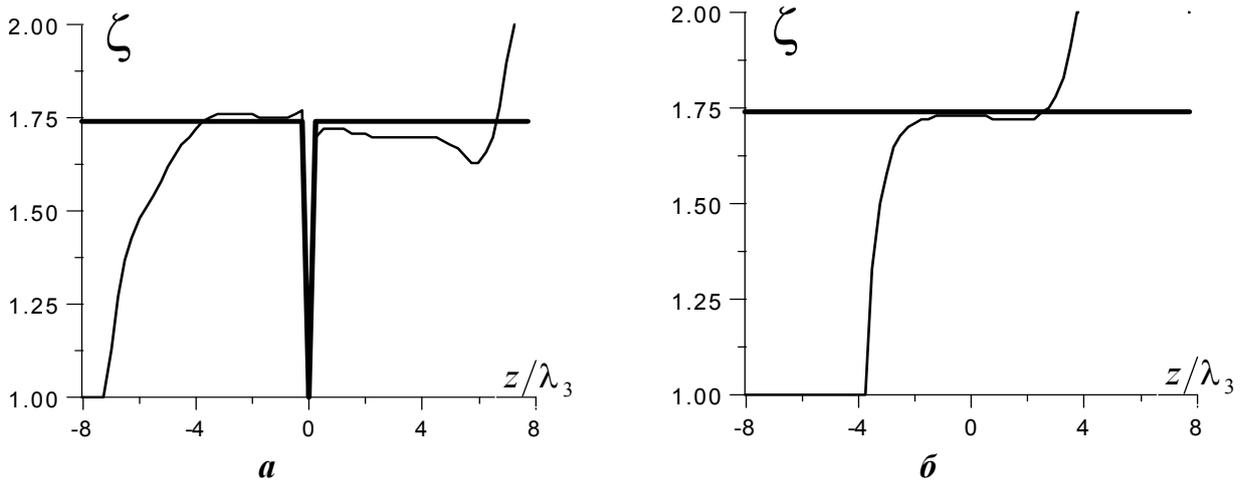


Рис. 4.8. Показатель степени при частотной зависимости коэффициента поглощения, восстановленный по итерационной схеме для скоростной (*a*) и для поглощающей (*б*) компонент:

- шумовые помехи отсутствуют (толстая линия);
- шумовые помехи приводят к ошибке не более 1% в исходных данных для итерационной схемы (тонкая линия). Размер области рассеяния $|z| \leq 4\lambda_3$.

При численном моделировании описанных схем использовались наборы частот $\{400 \text{ кГц}, 600 \text{ кГц}, 1000 \text{ кГц}\}$ и $\{400 \text{ кГц}, 800 \text{ кГц}, 1000 \text{ кГц}\}$. В схеме (4.27), (4.28) для α -компоненты полагалось $\zeta_0 = 2$, $\zeta^{(n=0)} = \zeta_0$; в схеме (4.29), (4.30) для c -компоненты полагалось $\zeta_{01} = 2$, $\zeta_{02} = 1.25$, $\zeta^{(n=0)} = \zeta_{01}$ при истинном значении $\zeta = 1.75$, $\forall \mathbf{r}$. Итоговое решение потребовало $7 \div 10$ итераций в обеих схемах. Результаты восстановления вдоль z -сечения представлены на рис. 4.7, рис. 4.8 для предыдущей модели рассеивателя (рис. 4.7). При отсутствии шумовых помех итоговое итерационное решение совпадает с точным (пунктирная линия на рис. 4.7а, б), и ζ восстанавливается также идеально (рис. 4.8, толстая линия). Точка $z = 0$ на рис. 4.8а соответствует “мертвой зоне” в схеме для c -компоненты. Присутствие случайных шумовых помех в данных, исходных для итерационной схемы, с относительной ошибкой до 1% (в каждой точке \mathbf{r}) приводит к искажению итоговых оценок c - и α -компонент (тонкая линия на рис. 4.7а, б) и восстановленного значения ζ (рис. 4.8, тонкая линия). Как видно, помехоустойчивость итерационного процесса падает в области малых значений рассеивающих компонент.

В [А 2 (§7.3.2); 180] описан итерационный МНК-алгоритм совместного оценивания рассеивающих компонент и степени частотной зависимости, который является наиболее общим. Дело в том, что в (4.22) и (4.23) фигурирует одна и та же степень $\zeta(\mathbf{r})$, и, тем самым, оптимальным методом ее оценивания является *одновременное* рассмотрение этих соотношений. По сравнению с предыдущими описанными алгоритмами, МНК-алгоритм заметно сложнее в вычислительном плане, однако обладает более высокой помехоустойчивостью решения и позволяет определить $\zeta(\mathbf{r})$ во всех точках \mathbf{r} , в которых происходит поглощение, обеспечивая отсутствие “мертвой зоны” у алгоритмической схемы.

Раздел 4.4. Восстановление пространственного распределения вектора скорости кровотока в процессе акустического томографирования

В когерентных системах, применяемых для диагностирования состояния кровеносной системы исследуемого органа, используется доплеровский эффект. Их развитие шло от одноканальных систем [313; 314] к многоканальным [315], на которых, в частности, основаны классические УЗИ-системы. В то же время, использование некогерентных пространственно-корреляционных методов в томографических системах позволяет расширить возможности восстановления картины кровоснабжения. Это связано с тем, что такая многокурсовая томографическая схема допускает накопление данных от движущейся крови (содержащей или не содержащей акустически контрастный агент) при разных положениях приемопередатчиков преобразователей, т.е. некогерентное пространственное накопление.

В традиционных схемах при одностороннем озвучивании лишь отчасти удается получить оценку полного вектора скорости [316; 317]. Более развитые томографические системы предполагают не только всесторонний прием, но и всестороннее облучение. Подобные полноракурсные многоканальные системы [А 62; 171; 316] представляются наиболее информативными для диагностических целей [А 20]. Тем не менее, в классических томографических системах (как доплеровских, так и корреляционных) возникают свои сложности. За время последовательного возбуждения сотен излучателей (порядка нескольких секунд) сердце успевает сделать несколько сокращений, и понятие значения скорости кровотока теряет точный смысл. Тонкая микроструктура кластеров рассеивателей, которые создают отраженный сигнал от крови, заполняющей сосуда, успевает при этом переместиться на большое расстояние и, возможно, разрушиться. Следовательно, значение этого перемещения измерить уже невозможно.

В то же время, чисто аддитивные способы обработки принимаемых сигналов предполагают когерентность вторичных полей, которые рассеяны одним и тем же фиксированным элементом объема и соответствуют зондирующим полям от различных излучателей. Однако присутствие движущихся кровеносных телец, а также случайный характер их расположения делают задачу нестационарной и требуют, строго говоря, учета статистических аспектов проблемы [318].

В этой связи ниже исследуются возможности некогерентных режимов работы томографа. Под корреляционным режимом томографирования здесь подразумевается метод восстановления, при котором прием сигналов и формирование частных промежуточных изображений для одной серии посылок (с селекцией движущихся рассеивателей) идет по аддитивной или мультипликативной схеме, а далее осуществляется корреляционная обработка этих изображений – определение пространственных смещений их элементов за время между посылками. Усреднение результатов такого корреляционного сравнения происходит по множеству сигналов от всех излучателей, и это усреднение заменяет собой обычно используемое в корреляционной обработке временное усреднение. Такой режим имеет преимущества когерентного и некогерентного режимов. Действительно, как и в когерентных системах, удается осуществить временную селекцию момента прихода сигнала, отраженного от интересующего элемента объема. С другой стороны, как и в некогерентных системах, усреднение по большой серии посылок с различных направлений, дающих сотни независимых измерений, позволяет снизить вредное влияние спекл-эффектов, т.е. “зернистости изображения”, на этапе получения картины кровеносных сосудов. Кроме того, использование круговой схемы получения первичной информации предоставляет возможность воспроизведения картины пространственного распределения кровотока с оценкой полного вектора скорости. Это осуществляется в тесной связи с процессом построения (на основе тех же измерений) томографического изображения всего органа в целом – в виде пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения, – см. главу 2. В этой связи, применение предлагаемой схемы предполагается, в первую очередь, в упомянутом выше томографе [А 62] (см. раздел 2.3), служащим для целей акустической маммографии, а также при исследовании органов, допускающих круговую или близкую к ней схему облучения и приема (конечности, язык и т.п.).

Таким образом, в настоящем разделе исследуются возможности введения в томографическую картину, восстанавливаемую акустическими методами, режимов выделения

кровеносной системы исследуемого органа с одновременным восстановлением пространственного распределения полного вектора скорости движения крови в томографическом срезе [А 38; А 52; А 111; 319]. Ориентация делается на использование относительно низких частот – около $1 \div 2$ МГц, за счет чего увеличивается доступная глубина проникновения ультразвука в исследуемую биоткань, и становится возможным исследование кровоснабжения не только вблизи поверхности, но и в глубине органа. В то же время, в работах других авторов в этом направлении обычно используются более высокие частоты $5 \div 10$ МГц. Общий фактор пространственно-временного накопления в рассматриваемых ниже системах очень велик; это повышает чувствительность системы, и кровь, по видимому, может не содержать акустически контрастных агентов либо содержать их в существенно меньшей концентрации.

§ 4.4.1. Аддитивно-корреляционный и мультипликативно-корреляционный алгоритмы восстановления общей картины кровотока и вектора его скорости

Объединение методов типа селекции движущихся целей с корреляционно-томографической системой предполагается осуществить следующим, достаточно стандартным, образом. В рассматриваемом томографе [А 62] (см. раздел 2.3) поочередно происходит излучение зондирующих импульсов одним из преобразователей. При этом каждый излучатель S с радиус-вектором \mathbf{r}_S последовательно посылает три или более одинаковых зондирующих импульса, которые можно объединить в две пары (или более развитые группы), обозначаемые далее индексами I и II, соответственно. Временной интервал $T_{\text{гер}}$ между первым и вторым импульсами фиксированной пары одинаков для обеих пар. Далее рассматривается вариант трех последовательных зондирующих импульсов $u_0^{(q)}$ ($q = 1, 2, 3$), объединяемых в две пары в виде $(q = 1, 2)$ и $(q = 2, 3)$. Им соответствуют разностные данные, формируемые из рассеянных сигналов $u_{\text{sc}}^{(q)} \equiv u^{(q)} - u_0^{(q)}$ (здесь $u^{(q)}$ – полное поле), приходящих на приемник R с радиус-вектором \mathbf{r}_R :

$$\Delta u_{\text{sc}}^{\text{I}}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) \equiv u_{\text{sc}}^{(2)}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) - u_{\text{sc}}^{(1)}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) ;$$

$$\Delta u_{\text{sc}}^{\text{II}}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) \equiv u_{\text{sc}}^{(3)}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) - u_{\text{sc}}^{(2)}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) .$$

Это простейший вариант селекции, подавляющий рассеяние от неподвижных объектов. При более сложной последовательности излучений возможны более тонкие методы режекции [320; 321]. Однако допустимое полное время измерений при фиксированном излучателе ограничено временем разрушения фиксированного взаимного расположения и формы кластеров крови. Такое ограничение связано с решением задачи оценки вектора скорости кровотока $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ из величины относительного смещения спекл-структур, перемещающихся вдоль изображения кровеносного сосуда по мере движения по нему крови.

С другой стороны, существуют ограничения на минимально допустимое время повторений T_{rep} между двумя последовательно излученными импульсами. Так, в простейшем случае селекции желательно, чтобы T_{rep} превосходило полную длительность τ_{sc} всего рассеянного сигнала u_{sc} . Рассеяние от неподвижной биологической ткани может быть сильным, и тогда, за счет эффектов перерассеяния, длительность τ_{sc} может существенно превосходить величину $\cong 2L/c_0$, где L – линейный размер области рассеяния \mathfrak{R} ; c_0 – скорость звука в фоновой среде. Кроме того, для устойчивости оценки $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ предлагаемым методом нужно, чтобы смещение спекл-структур за время T_{rep} могло быть надежно оценено, т.е. превосходило пороговую величину Δr_0 . Характерный размер элементов спекл-структуры близок к размеру элемента разрешения томографической системы. Следовательно, на масштабах порядка пятна разрешения может содержаться один элемент или небольшое количество элементов спекл-структуры. В акустических томографических системах с большим числом приемоизлучающих преобразователей разрешающая способность составляет доли характерной длины волны λ_0 . В рассматриваемом томографе с кольцевой антенной решеткой разрешающая способность близка к $\lambda_0/4$ на всей плоскости томографирования (см. раздел 2.2, а также [А 62]); поэтому мажорантная оценка порогового смещения составляет $\Delta r_0 \cong \lambda_0/4$. При повышении помехоустойчивости пространственно-временной обработки сигналов в томографе (например, за счет увеличения количества приемоизлучающих преобразователей) и повышении входного отношения сигнал/помеха (например, за счет применения акустоконтрастных веществ) порог Δr_0 может быть существенно снижен. Таким образом, оба условия на T_{rep} имеют вид:

$$T_{\text{rep}} > \tau_{\text{sc}}; \quad |\mathbf{v}|_{\min} T_{\text{rep}} \geq \Delta r_0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{T_{\text{rep}}}{T_0} \geq \frac{\Delta r_0}{\lambda_0} \frac{c_0}{|\mathbf{v}|_{\min}}, \quad (4.31)$$

где $|\mathbf{v}|_{\min}$ – минимальное значение $|\mathbf{v}(\mathbf{r})|$, которое желательно оценить; T_0 – период сигнала на несущей частоте. При $L \cong 0.1 \div 0.2$ м, $c_0 \cong 1500$ м/с, скорости кровотока в достаточно крупных сосудах $|\mathbf{v}|_{\min} \cong 0.05 \div 0.2$ м/с, $\Delta r_0 \cong \lambda_0/4$ и несущей частоте $\cong 1.6$ МГц имеем $T_{\text{rep}} \cong 1 \div 4$ мс, что вполне приемлемо в рассматриваемых томографических устройствах.

При обработке удобно использовать комплексное представление сигналов, осуществив переход к комплексному аналитическому сигналу путем добавления гильбертово сопряженной и инвертированной по знаку мнимой части. Рассматриваемые далее комплексные сигналы будут обозначаться так же, как и исходные действительные сигналы $u_{\text{sc}}(t)$.

В описываемой ниже схеме используется процесс когерентной обработки разностных рассеянных сигналов, который во многом похож на обработку рассеянных полей в

классической многоакурсной когерентной томографии. Рассеянные сигналы, принятые всеми преобразователями и отфильтрованные, подвергаются в процессе сканирования временной подстройке. Для этого сигналы $\Delta u_{sc}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$ фазируются для каждой фиксированной пары “излучатель–приемник” на текущую точку изображения \mathbf{r} с помощью выбора соответствующего момента времени $t = t_{RS}(\mathbf{r})$. Значение $t_{RS}(\mathbf{r}) = t(\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}) + t(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_R) + t_0$ равно сумме времени $t(\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r})$ распространения сигнала от излучателя S до точки \mathbf{r} и времени $t(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_R)$ распространения от \mathbf{r} до приемника R , включая дополнительную постоянную задержку t_0 (не зависящую от S и R), которая обеспечивает фазировку примерно на максимум огибающей комплексного сигнала Δu_{sc} . Далее для определенности рассматривается двумерная схема томографирования. В сфазированном разностном поле $\Delta u_{sc}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$ содержится информация только о движущихся рассеивателях, которые лежат на дуге эллипса (если неоднородности фазовой скорости звука не учитываются), имеющего фокусы в точках \mathbf{r}_S и \mathbf{r}_R и проходящего через восстанавливаемую точку изображения \mathbf{r} . Таким образом, обработка осуществляется в первом приближении Борна (приближении однократного рассеяния), так как в разностных сигналах вклад от неподвижной биоткани, которая может создавать наиболее сильное рассеяние, компенсирован. Рассеяние же от движущейся крови слабо. Кроме того, в сигналах Δu_{sc} после процесса фазирования остается вклад только от кластеров крови, попадающих на упомянутую дугу эллипса с толщиной около 1 мм (это характерный линейный размер элемента разрешения на мегагерцовых частотах). При дальнейшем же построении изображений путем аддитивного или мультипликативного объединения Δu_{sc} от всех приемников, доминирует вклад от элемента разрешения площади $\cong 1 \text{ мм}^2$ с центром в текущей точке \mathbf{r} .

На основе значений $\Delta u_{sc} = \Delta u_{sc}^I$ и $\Delta u_{sc} = \Delta u_{sc}^{II}$, предварительно сфазированных на текущую точку \mathbf{r} , строятся, соответственно, два изображения $Z = Z^I(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ и $Z = Z^{II}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ для каждого фиксированного излучателя (индекс S). Перебор всех излучателей дает две серии изображений. При аддитивном методе построения этих изображений разностные сигналы объединяются взвешенным суммированием по приемникам:

$$Z(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \equiv Z_{\text{add}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) = \sum_R J(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) , \quad (4.32)$$

$$\text{где } J(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \equiv \Delta u_{sc}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r})) \left| \sin(\varphi_S - \varphi_R) \right| A(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) .$$

Здесь φ_S, φ_R – полярные углы излучателя \mathbf{r}_S и приемника \mathbf{r}_R , соответственно. В случае зондирующих сигналов от точечных излучателей эти углы отсчитываются из текущей точки изображения \mathbf{r} , а в случае плоских волн – из начала координат, помещенного в центр круговой антенной решетки. Множители вида $\left| \sin(\varphi_S - \varphi_R) \right|$ обеспечивают рав-

номерность угловой плотности данных рассеяния Δu_{sc} , однако их присутствие в (4.32) не принципиально, поскольку в рассматриваемых подходах основным моментом является дальнейшая взаимная пространственная корреляция построенных промежуточных изображений. Множители $A(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ компенсируют как геометрическую расходимость волн, так и их поглощение в фоновой среде, – см. раздел 2.1.

Процесс фазирования сигналов, а также расчет множителей A предполагают знание пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения в фоновой неподвижной среде. Эти пространственные распределения неоднородны, в общем случае, и должны быть найдены предварительно, например, на основе определения всех времен пролета и изменения амплитуды сигналов с последующим уточнением оцененных крупномасштабных пространственных распределений на основе полных томографических данных, – см. раздел 2.1. Тем самым, восстановлению вектора скорости кровотока должно предшествовать восстановление полной сглаженной томографической картины пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения, что, независимо от сказанного, осуществляется в рамках той же самой томографической схемы.

При мультипликативном методе фазироваться и накапливаются результаты попарного перемножения разностных сфазированных сигналов для различных пар приемников (R, R') . Пары $R = R'$ не рассматриваются; это несколько повышает контрастность получаемого изображения:

$$Z(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \equiv Z_{\text{mult}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) = \sum_R \sum_{R', R' \neq R} J(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) J^*(\mathbf{r}_{R'}, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}); \quad (4.33)$$

верхний символ “*” означает комплексное сопряжение. Здесь попарные произведения сфазированных сигналов, регистрируемых конкретной парой приемников, рассматриваются для одного и того же излучателя S .

При обоих методах построения промежуточных изображений предполагается, что в течение общего времени съема данных при переборе всех излучателей картина пространственного распределения вектора скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ остается приблизительно неизменной. Такое условие может быть обеспечено не только в случае выполнения всех измерений в течение короткого времени между двумя последовательными сокращениями сердца, но и в случае, когда посылки от различных излучателей осуществляются после разных сокращений, но при одной и той же задержке по отношению к опорной фазе очередного сокращения.

В случае рассмотрения всех пар (R, R') , где $R, R' = \overline{1, K}$, $R' \neq R$, мультипликативно построенное изображение (4.33) является строго действительным:

$$\begin{aligned} Z_{\text{mult}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) &= \\ &= \left| \sum_{R=1}^K J(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \right|^2 - \sum_{R=1}^K |J(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})|^2 = |Z_{\text{add}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})|^2 - \sum_{R=1}^K |J(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})|^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Допустимо, однако, рассматривать только часть пар (R, R') , в том числе, при каждом фиксированном излучателе S рассматривать свой индивидуальный набор пар (R, R') .

Поскольку в построении изображений (4.32), (4.33) участвуют непосредственно сами сигналы, а не их модули, то эти изображения обладают спекл-структурами, перемещающимися вдоль кровеносных сосудов при движении по ним крови. Такое перемещение может быть определено корреляционным сравнением небольших фрагментов двух изображений Z^I и Z^{II} при одном и том же излучателе. Сравнение осуществляется путем вычисления двумерной (или трехмерной в трехмерной задаче) взаимной пространственной корреляции этих фрагментов. Коррелируемые фрагменты (в трехмерном случае это фрагменты объемов) $Z^I(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p}_1)$, $\mathbf{p}_1 \in P_1$, и $Z^{II}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p}_2)$, $\mathbf{p}_2 \in P_2$, имеют общий фиксированный центр \mathbf{r} , а переменный вектор \mathbf{p}_1 или \mathbf{p}_2 характеризует координаты точек в этих фрагментах относительно центра. Фрагменты Z^I и Z^{II} имеют, в общем случае, разные линейные размеры l_1 и l_2 , соответственно, где $l_1 < l_2$: $P_1 \subset P_2$. Размер l_1 наименьшего фрагмента Z^I должен быть заведомо больше пятна разрешения. С другой стороны, этот линейный размер в направлении поперечного сечения кровеносного сосуда должен быть меньше диаметра сосуда, так как в противном случае можно определить лишь некоторое "среднее" значение скорости вдоль поперечного сечения. Относительное смещение характерной спекл-структуры (с учетом возможного различного знака этого смещения) на участке Z^{II} , появляющееся за время $T_{\text{геп}}$ по сравнению с участком Z^I , лежит в пределах $\pm |\mathbf{v}|_{\text{max}} T_{\text{геп}}$, где $|\mathbf{v}|_{\text{max}}$ – максимальная скорость кровотока. Поэтому размер l_2 должен удовлетворять соотношению

$$l_2 \geq l_1 + 2(|\mathbf{v}|_{\text{max}} + \delta v) T_{\text{геп}}, \quad (4.35)$$

где δv – абсолютная погрешность оценки скорости. Результатом корреляции является взаимная корреляционная функция $\Gamma(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})$, построенная для каждой точки изображения \mathbf{r} :

$$\Gamma(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) = \int_{\mathbf{p} \in P_1} Z^I(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p}) \left[Z^{\text{normI}}_{\text{normI}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p} + \Delta \mathbf{r}) \right]^* d\mathbf{p}, \quad (4.36)$$

$$\text{где } Z^{\text{normI}}_{\text{normI}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p} + \Delta \mathbf{r}) = \frac{Z^{II}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p} + \Delta \mathbf{r})}{\sqrt{\int_{\mathbf{p}' \in P_1} |Z^{II}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r} + \mathbf{p}' + \Delta \mathbf{r})|^2 d\mathbf{p}'}}.$$

Далее функция Γ усредняется по всем излучателям при фиксированных \mathbf{r} и $\Delta \mathbf{r}$: $\bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) \equiv \sum_S \Gamma(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})$, и при каждом фиксированном \mathbf{r} ищется вектор сдвига $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_{\text{max}}$, соответствующий положительному главному максимуму функции $\text{Re} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})$. Условия на максимум при поиске $\Delta \mathbf{r}_{\text{max}}$ имеют вид:

$$\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r}) \equiv \operatorname{Re} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}_{\max}) = \max_{\Delta \mathbf{r}} \operatorname{Re} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}) > 0, \quad (4.37)$$

$$\text{причем } \operatorname{Re} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}_{\max}) \gg |\operatorname{Im} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r}_{\max})|.$$

Максимум функции $\operatorname{Re} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})$ должен обеспечиваться именно за счет того, что при сдвиге $\Delta \mathbf{r}_{\max}$ два коррелируемых фрагмента изображений оказываются наиболее похожими друг на друга, а не только за счет амплитудных значений этих фрагментов. С этой целью, при коррелировании фрагментов в (4.36) больший фрагмент Z^{II} следует нормировать на его среднеквадратичное значение (индивидуальное для каждого сдвига $\Delta \mathbf{r}$) в пределах области P_1 , занимаемой меньшим фрагментом, т.е. в (4.36) фигурирует $Z_{\text{norm1}}^{\text{II}}$.

В итоге, вектор скорости в каждой точке изображения оценивается из очевидного соотношения

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{r}_{\max} / T_{\text{rep}}. \quad (4.38)$$

В работе [322] вектор смещения оценивался по минимуму невязки сопоставляемых изображений.

Важно отметить следующее. Во-первых, прямой доплеровский алгоритм нельзя непосредственно использовать в рассматриваемом импульсном режиме, при котором смещение за время между соседними посылками одного и того же излучателя не превосходит одной-двух длин волн. Во-вторых, коррелируются фрагменты изображений, соответствующие именно фиксированному излучателю, поскольку разные излучатели посылают зондирующие импульсы не одновременно, и в фиксированном пространственном элементе разрешения при смене излучателя происходит смена совокупностей движущихся кровяных телец. Это обстоятельство требует привлечения корреляционных методов оценки скорости кровотока. Усреднение результата корреляции по излучателям существенно повышает точность получаемой оценки искомого вектора, а единственность главного максимума функции $\operatorname{Re} \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \Delta \mathbf{r})$ при фиксированном \mathbf{r} обеспечивается накоплением большого количества слагаемых.

Пространственная локализация функции $\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r})$ четко определяет положение и форму кровеносных сосудов, что далее иллюстрируется результатами численного моделирования. Поэтому на карте значений векторного поля $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ следует рассматривать только окрестность максимальных значений функции $\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r})$, определяемую из условия

$$\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r}) / \max_{\mathbf{r}} \{ \bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r}) \} > \beta, \quad (4.39)$$

где β – заданный коэффициент, $0 < \beta < 1$. Построение карты кровеносных сосудов, исходя из $\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r})$, более надежно и устойчиво, чем построение с помощью функции $F(\mathbf{r})$, полученной из промежуточных изображений $Z(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ вида (4.32) или (4.33):

$$F(\mathbf{r}) \equiv \sum_S Z(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) . \quad (4.40)$$

Роль спекл-эффектов, таким образом, двойка. Выделение сосуда с помощью $|F(\mathbf{r})|$ не всегда оказывается эффективным, поскольку в пространственном распределении $F(\mathbf{r})$ могут присутствовать нежелательные, в данном случае, спекл-эффекты. В то же время, в пространственном распределении $\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r})$ спекл-эффекты отсутствуют. С другой стороны, именно благодаря присутствию спекл-структуры во фрагментах изображений Z^I и Z^{II} становится возможным определение вектора скорости кровотока предлагаемой методикой. Здесь принципиально важно то обстоятельство, что движение спекл-структуры повторяет движение крови. Это имеет место даже в случае существенности процессов перераспределения.

При сравнении аддитивной и мультипликативной схем важен вопрос о связи входного отношения сигнал/помеха (по мощности) $(S/N)_{\text{in}}$ и выходного отношения $(S/N)_{\text{out}}$. Этот вопрос подробно освещен в [А 52; 319] на основе общих положений [323]. Оказывается, что в томографической схеме, содержащей $\cong 100$ и более преобразователей, можно видеть кровеносные сосуды и восстанавливать значение вектора скорости в них даже без применения контрастных агентов. Более того, использование только одного излучателя уже дает итоговое выходное отношение сигнал/помеха (с учетом эффекта подавления рассеяния от неподвижных рассеивателей) после усреднения по спекл-структуре, превышающее 1. Усреднение результата пространственной корреляции изображений по всем излучателям обеспечивает существенное увеличение выходного отношения сигнал/помеха данного пространственно-корреляционного процесса.

Итак, центральным моментом рассматриваемых методов является взаимная пространственная корреляция промежуточных изображений, соответствующих фиксированному излучателю. Благодаря этому, предлагаемые корреляционные алгоритмы, допускают, в отличие от чисто линейных методов, возможность полной смены рассеивателей в сосудах, а, следовательно, взаимную некогерентность рассеянных полей, соответствующих различным излучателям. Тем самым, они допускают последовательное облучение исследуемой области с различных направлений, несмотря на многократную смену рассеивающих центров в течение полного времени съема информации. Рассмотренная некогерентная томографическая система делает возможным измерение скорости кровотока независимо от величины реального перемещения крови за суммарное время измерений. Процесс измерений при посылках от разных излучателей может быть синхронизован с ритмикой сердца. Если для определения скорости кровотока используется излучение одного или небольшого количества излучателей, то весь процесс съема данных $200 \div 300$ -ми приемниками занимает несколько миллисекунд. Если же используется весь набор излучателей ($200 \div 300$ штук), то весь процесс съема данных занимает уже до 0.5 секунды, т.е. сравним с интервалом сердцебиений. Поэтому его целесообразно разбить на несколько групп (по $10 \div 50$ излучателей), привязав моменты посылок излучений в каждой последующей группе к одному и тому же временному интервалу соответствующего нового кар-

диоцикла. Именно некогерентный характер корреляционной обработки изображений позволяет провести подобное разбиение. Таким образом, при использовании круговой решетки со сплошным заполнением время непосредственного съема данных при осуществлении трехкратного обзора, требуемого алгоритмом, занимает менее 1 секунды и не требует никакого дальнейшего накопления (например, за счет длительности посылки), так как коэффициент пространственно-временного накопления в этой решетке может превышать 10^6 . Время же обработки зависит от производительности вычислительного комплекса.

Подобные томографические системы допускают множество вариантов своей реализации. В двумерной томографической схеме, описываемой в разделе 2.3, восстанавливается двумерный вектор кровотока \mathbf{V} , являющийся проекцией полного трехмерного вектора на плоскость томографирования. Для восстановления вертикальной компоненты скорости нужна трехмерная схема томографирования. В то же время, можно использовать двумерную антенную решетку с наклонными приемоизлучающими элементами, позволяющую повысить в несколько раз разрешающую способность в вертикальном направлении в классическом активном томографировании неподвижных объектов (см. раздел 4.2).

§ 4.4.2. Численное моделирование корреляционно-томографических методов восстановления вектора скорости кровотока

Детально процесс численного моделирования изложен в [А 52; А 111; 319]. Поэтому ниже будут кратко отмечены только основные моменты.

Исходные параметры при численном моделировании выбирались близкими к характеристикам двумерного томографа и имеющимся данным по акустическим характеристикам крови. Предполагалось, что в антенной решетке томографа используется равномерное круговое расположение приемоизлучающих преобразователей, хотя большое количество (более $200 \div 300$) равномерно расположенных преобразователей может быть заменено гораздо меньшим количеством преобразователей (порядка $20 \div 30$) в сочетании с вращением антенной решетки [А 62] (см. также выше раздел 2.3).

Кровоток представляет собой поток кластеризованной среды. Размер кластеров крови $\cong 10$ мкм [324] много больше размера биологической клетки, но много меньше размера ячейки разрешения в мегагерцовом диапазоне частот. Поэтому при численном моделировании каждый кластер может рассматриваться, как практически точечный рассеиватель с некоторой координатой фазового центра рассеяния. Выбранное при моделировании среднее расстояние между соседними точечными рассеивателями $\cong \lambda_0/20$ обеспечивает присутствие в пятне разрешения с размером $\cong \lambda_0/4$ большого числа рассеивателей. Зависимость среднего размера кластеров от градиента скорости кровотока [325] при моделировании не учитывалась. Однако трудно ожидать заметного изменения результатов при учете подобных факторов.

Моделируемые ультразвуковые импульсы длительности $T_0 = N_0/f_0$, посылаемые фиксированным излучателем на несущей частоте $f_0 = 1.5$ МГц, имеют вид:

$$u_0^{(q)}(t) = u_0(t - (q-1)T_{\text{rep}}), \quad q = 1, 2, 3,$$

где

$$u_0(t) \equiv u_0^{(q=1)}(\mathbf{r}_R = \mathbf{r}_S; \mathbf{r}_S, t) = \begin{cases} 0.5 [1 - \cos(2\pi f_0 t / N_0)] \sin(2\pi f_0 t) & \text{при } t \in [0, T_0]; \\ 0 & \text{при } t > T_0; \end{cases}$$

$N_0 = 2.5$. На этапе фазирования разностных сигналов $\Delta u_{\text{sc}}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$ дополнительная задержка t_0 (см. § 4.4.1) полагалась равной $T_0/2$. В модели кровотока рассеиватели-кластеры при смене излучателя продолжали двигаться вдоль кровеносного сосуда.

Задача восстановления пространственного распределения вектора скорости кровотока моделировалась для кровеносных сосудов различной формы [А 52; А 111; 319]. Ниже результаты описываются на примере модели, в которой ставилась задача оценки неравномерного пространственного распределения скорости в поперечном сечении достаточно крупного кровеносного сосуда. Задавалась модель разветвленного кровеносного сосуда с толщиной основной части $d = 3\lambda_0$ и толщиной двух ответвлений $d = 2\lambda_0$ и $d = \lambda_0$ (рис. 4.9а). Различная толщина отдельных частей сосуда позволяет оценить эффективность восстановления кровотока в сосудах с поперечным линейным размером как близким к λ_0 , так и более крупным. Вводятся локальные взаимно ортогональные оси (η, \wp) , индивидуальные для каждого участка сосуда неизменной толщины. “Продольная” координата η задает направление вдоль оси данной части сосуда, а “поперечная” координата \wp соответствует расстоянию в поперечном сечении от центра этого сечения. Значение скорости при перемещении точки наблюдения в поперечном сечении менялось по параболическому закону от 30 см/с на оси ($|\wp| = 0$) до 6 см/с вблизи стенок сосудов ($|\wp| = d/2$). Полагалось $T_{\text{rep}} = 3$ мс и $l_2 - l_1 = 2\lambda_0$. Такой диапазон скоростей достаточно широк, и, одновременно, он удовлетворяет требованию (4.31) при $\Delta r_0 \cong \lambda_0/4$.

Для достаточно толстых сосудов аддитивно-корреляционный метод дает оценку профиля скорости $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$, близкую к истинному значению (рис. 4.9б–д; $l_1 = \lambda_0/2$, $l_2 = 2.5\lambda_0$, количество излучателей и количество приемников составляло $K = 64$). А именно, функция $F^I(\mathbf{r})$, являющаяся результатом объединения (4.40) по излучателям всех изображений $Z^I(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$, комплексна при аддитивном алгоритме (4.32). В этом случае ни $\text{Re}F^I(\mathbf{r})$, ни $\text{Im}F^I(\mathbf{r})$ не выделяют четко карту кровеносных сосудов. Несколько отчетливее сосуда видны из пространственного распределения $|F^I(\mathbf{r})|$ (рис. 4.9б), хотя присутствие спекл-эффектов играет здесь отрицательную роль. При мультипликативном алгоритме (4.34) функция $F^I(\mathbf{r})$ действительна, и в случае большого количества преобразователей кровотоков выделяется хорошо.

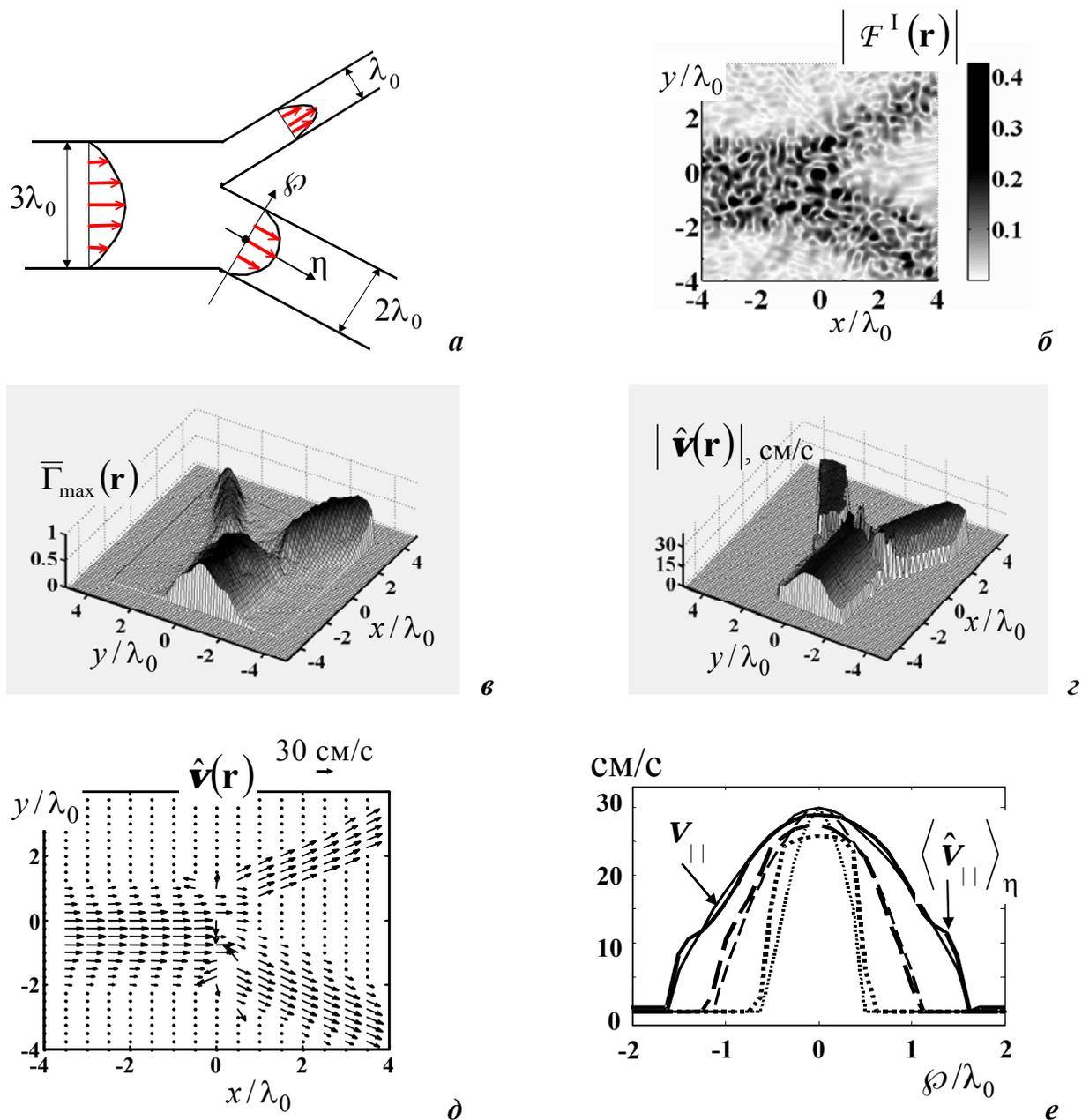
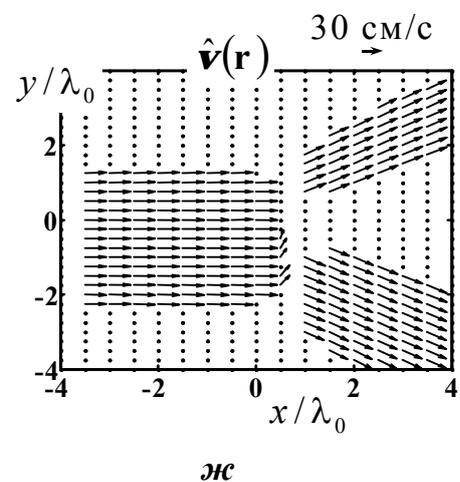


Рис. 4.9. Результат модельного восстановления аддитивно-корреляционным методом вектора скорости, неравномерно распределенного в поперечных сечениях разветвленного сосуда:

- модель кровеносного сосуда (а);
- модуль результата аддитивного накопления сфазированных разностных сигналов (б);
- нормированное пространственное распределение максимумов функции корреляции (в);
- оценка модуля вектора скорости кровотока (г) и восстановленное векторное поле скорости (д);
- пространственное распределение оценки осевой компоненты скорости (е) в поперечном сечении сосуда толщины $3\lambda_0$ (сплошные линии), $2\lambda_0$ (пунктирные линии), λ_0 (линия, составленная из точек);
- результат восстановления векторного поля скорости при $|\mathbf{v}| = \text{const}$ (жс).



Пространственное распределение максимумов функции $\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r})$, определяемое соотношением (4.37), четко характеризует область локализации движущихся рассеивателей как при аддитивных (рис. 4.9е), так и при мультипликативных изображениях.

Область использования оценки вектора скорости $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ выделяется в соответствии с критерием (4.39). На рис. 4.9з представлен модуль $|\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})|$, а на рис. 4.9д приведено пространственное распределение оценки полного векторного поля $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$. Качество оценок, в целом, оказывается достаточно хорошим. При мультипликативно-корреляционном методе в оценке иногда возникают области с аномальной ошибкой (их размеры невелики) там, где в область меньшего коррелируемого фрагмента изображения попадают разные участки со скоростью кровотока, отличающейся по величине или направлению. В мультипликативном методе высокое качество оценки $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ и отсутствие артефактов в распределениях $F^1(\mathbf{r})$ и $\bar{\Gamma}_{\max}(\mathbf{r})$, хорошо отражающих картину кровотока, обеспечивается при большем количестве усредняемых слагаемых, чем в аддитивном методе.

Количественным критерием качества восстановления служит относительная среднеквадратичная погрешность оценки $\hat{\mathbf{v}}$ вектора скорости \mathbf{v} :

$$\delta_{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{\int (\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r}))^2 d\mathbf{r}}{\int \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}}, \text{ где интегрирование осуществляется по области расположе-}$$

ния истинного сосуда. Отдельно рассматриваются погрешности δ_{ax} и δ_{tr} для пространственных распределений вектора скорости вдоль центральной оси и в поперечном сечении сосуда, соответственно. В случае δ_{ax} интегрирование осуществляется по координате η при $\wp = 0$. В случае δ_{tr} интегрирование происходит по точкам \wp поперечного сечения при фиксированном η . При этом могут быть выбраны как отдельные сечения, так и оценка $\langle \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta}$, усредненная по ряду поперечных сечений.

На рис. 4.9е для участков сосуда различной толщины проведено сравнение усредненных оценок пространственного распределения осевой компоненты скорости $\langle \hat{v}_{||} \rangle_{\eta}$ (толстые линии определенного типа) с истинным пространственным распределением $V_{||}(\wp)$ в поперечном сечении (тонкие линии соответствующего типа). Усреднение значений $\hat{v}_{||}(\mathbf{r})$ происходит по различным поперечным сечениям. Среднеквадратичные погрешности для оценки вектора скорости на оси сосуда и для поперечного пространственного распределения вектора скорости, усредненного вдоль длины сосуда, составляют: $\delta_{\text{ax}} \approx 0.06$, $\delta_{\text{tr}} \approx 0.07$ в толстом сосуде ($d = 3\lambda_0$); $\delta_{\text{ax}} \approx 0.09$, $\delta_{\text{tr}} \approx 0.12$ в сосуде средней толщины ($d = 2\lambda_0$); $\delta_{\text{ax}} \approx 0.14$, $\delta_{\text{tr}} \approx 0.37$ в тонком сосуде ($d = \lambda_0$). Увеличение погрешности для тонкого сосуда связано с тем, что размер l_1 равен половине толщины данного сосуда. Поэтому в тонком сосуде параболический профиль не воспроизводится, а получается оценка усредненной скорости. Для сравнения на рис. 4.9ж приведен результат восстановления в случае постоянной в поперечном сечении скорости.

Оценка $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})$ устойчива к выбору вспомогательных параметров (l_1, l_2) процесса восстановления. Качество оценки вектора скорости мультипликативно-корреляционным методом оказывается, по сравнению с аддитивным методом, существенно различным на протяжении сосуда [319].

Наконец, исследовалась *помехоустойчивость решения при влиянии медленных движений фоновой среды и аппаратурных шумов*. Так, важную роль в рассматриваемой задаче играют помехи, возникающие за счет случайного смещения рассеивателей, участвующих в создании кровотока, и рассеивателей фоновой ткани, которая лишь в идеале неподвижна. Такие смещения обусловлены, например, естественными сокращениями мышц и произвольными движениями человека. При попарном вычитании рассеянных сигналов влияние этих смещений компенсируется неполностью.

В присутствии помех от смещения малоподвижного фона кровотока моделировался в виде потока рассеивателей, координаты которых флуктуируют в процессе движения. Привносились малые смещения рассеивателей фоновой среды относительно их среднего положения. При этом малоподвижные рассеиватели располагались как вне кровеносных сосудов, так и внутри их, создавая сплошной фон. Присутствие фоновых рассеивателей “внутри” кровеносных сосудов реально вызывается конечной толщиной слоя, озвученного при томографировании. В таком слое сверху и снизу кровеносного сосуда присутствует фоновая биоткань. При излучении нового зондирующего импульса положение каждого фонового рассеивателя изменялось случайным образом (как по величине, так и по направлению) в пределах участка площади $\chi \times \chi$, где χ – заданный линейный размер. Направление смещения было ориентировано всегда в сектор первого квадранта. Подобные смещения с ориентацией в определенном секторе направлений возникают, например, при дыхании пациента. Поскольку биологическая ткань рассеивает сильнее, чем кровь [326 (§ 4.3)], коэффициент рассеяния от малоподвижных рассеивателей полагался случайной величиной в интервале $[1; 10]$, а от рассеивателей в сосудах – $[0; 1]$. Среднюю скорость малоподвижного фона можно принять равной $v_{bg} \cong \chi / (\sqrt{2} T_{rep})$. Например, при $T_{rep} = 1$ мс, $\chi = \lambda_0 / 50$ или $\chi = \lambda_0 / 30$ имеем, соответственно, $v_{bg} \approx 1.4$ см/с или $v_{bg} \approx 2.4$ см/с.

Другой вид помехи – шум аппаратурного происхождения, т.е. нормально распределенный случайный процесс, который привносится независимо к каждой реализации $u_{sc}^{(q=1)}$, $u_{sc}^{(q=2)}$, $u_{sc}^{(q=3)}$. Численное моделирование показало, что устойчивость аддитивно-корреляционного и мультипликативно-корреляционного методов к помехам обоих типов приемлема для реализации томографической схемы в практических условиях [А 52; 319].

Итак, сравнение методов восстановления скорости кровотока показывает, что для восстановления пространственного распределения вектора скорости кровотока наиболее удобным, в практическом отношении, оказывается аддитивно-корреляционный алгоритм. Аддитивно построенные изображения, участвующие в процессе корреляции, обладают развитой спекл-структурой и, при небольшом количестве приемников, более высоким отношением сигнал/помеха. В этом случае аддитивный алгоритм обеспечивает высокое качество восстановления скорости при меньшем количестве данных рассеяния, по сравне-

нию с мультипликативно-корреляционным алгоритмом. В то же время, помехоустойчивость аддитивного и мультипликативного алгоритмов как к помехам за счет отражений от малоподвижного фона, так и к аппаратным шумам достаточно высока. С другой стороны, мультипликативный метод построения изображений имеет то преимущество перед аддитивным методом, что он не требует выполнения этапа корреляции промежуточных изображений при воспроизведении только пространственного распределения кровеносных сосудов с целью оценки их формы и толщины, без оценки вектора скорости кровотока. Визуализация картины кровоснабжения может быть осуществлена также с помощью пространственного распределения максимумов функции корреляции как аддитивных, так и мультипликативных изображений в процессе решения полной задачи восстановления пространственного распределения вектора скорости кровотока.

Описанная методика восстановления карты вектора скорости кровотока апробирована на экспериментальных данных, полученных на опытном образце ультразвукового томографа (см. раздел 2.3). Описанию результатов экспериментов посвящены работы [А 38; 319]. Более того, методика восстановления вектора скорости кровотока обобщена на случай использования данных рассеяния, которые получают при томографировании акустического нелинейного параметра второго порядка [А 49; А 50; А 110; А 111; 319].

ЧАСТЬ II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Глава 5. Вступление к Части II (по материалам библиографических источников)

Необходимость вводной главы к части II настоящей работы обусловлена рядом обстоятельств. Во-первых, физико-математическая специфика развития функциональных методов решения обратных задач рассеяния отличается ее квантово-механической направленностью и сугубо математическим характером ряда работ в данном направлении. Это привело к заметному отрыву имеющегося богатого теоретического материала от процесса развития прикладных исследований в области волновой, в частности, акустической томографии. Во-вторых, абстрактная постановка задачи и характерная для математической литературы терминология не способствуют легкости восприятия важных и перспективных, по своей сути, результатов акустик-прикладниками. Однако в математических и физико-теоретических работах, ставящих своей целью исследование процессов квантовой теории рассеяния и, соответственно, решение прямых и обратных задач потенциального рассеяния, накоплено большое количество результатов общего характера. Эти результаты касаются, например, единственности решения, характеристики данных рассеяния (поскольку данные рассеяния – т.е. поля, доступные для измерения – в многомерном случае могут обладать существенной избыточностью), формальных алгоритмов решения. Материал части II следует рассматривать только как одну из первых попыток ввести в круг активного использования лишь часть богатого теоретического багажа, обретенного в этой области рассмотрения обратных задач рассеяния.

Функционально-аналитические методы решения обратных задач рассеяния как в квантово-механической постановке, так и в классическом волновом варианте приобретают в настоящее время все большее значение, хотя они находятся еще в стадии развития даже в теоретическом плане. Имеются в виду методы, базирующиеся на положениях современного функционального анализа, теории функций комплексных переменных и отличающиеся высокой математической строгостью и общностью полученных результатов. Актуальность проблемы связана с тем, что функциональный подход к обратным векторным и скалярным волновым задачам является, в целом, наиболее общей и информативной теорией. Его основные преимущества заключаются как в получении аналитическим образом строгого или почти строгого решения, так и, в ряде случаев, в меньшем количестве вычислительных операций, по сравнению с итерационными методами, при получении численных решений. Кроме того, открывается возможность глубже исследовать механизм действия традиционных алгоритмов реконструкции рассеивателей и четко определить границы их практических возможностей. По-видимому, функционально-аналитические методы займут, со временем, одно из ведущих мест в анализе и решении прямых и обратных задач прикладной физики, именно благодаря своей общности и информативности.

Первоначально функционально-аналитические методы начали развиваться в 1950-е годы в математических и физико-теоретических работах ряда авторов, исследовавших процессы рассеяния в физике элементарных частиц и, соответственно, решение прямых и обратных задач рассеяния на потенциале. Достаточно подробный исторический обзор, начиная с этого периода времени и кончая современным состоянием проблемы, дан, например, в [124; 125; 136; 327]. С другой стороны, можно выделить основные направления, в которых шло развитие функциональных методов. Основоположниками этих методов являются И. М. Гельфанд, М. Г. Крейн, Б. М. Левитан, В. А. Марченко, разрабатывавшие, прежде всего, спектральный подход к решению обратных квантово-механических задач с одномерным или сферически симметричным потенциалом [125; 327–332]. Этот подход (за исключением [332]) предполагает использование данных рассеяния для неограниченного множества (возможно, дискретного) частот, поскольку в одномерной схеме измерения данных рассеяния частота является единственным изменяемым информативным параметром. В сферически симметричном случае многочастотность данных требуется при фиксации положения единственного излучателя и единственного приемника. Изменение положений приемоизлучающих преобразователей смягчает это требование или даже устраняет его при достаточном объеме данных рассеяния пространственного типа. Так, в [332] используется зависимость характеристик рассеянного монохроматического поля от угла между направлениями падения и рассеяния. Этого оказывается достаточно для восстановления сферически-симметричного потенциала.

Развитие функциональных методов в многомерном случае начинается с математической постановки обратных задач И. М. Гельфандом [333] и продолжается в работах Г. Мозеса, Р. Проссера [202–205], Ю. М. Березанского [150], Л. Д. Фаддеева [123; 124; 334; 335], Р. Ньютона [127; 336–342]. Г. Мозес и Р. Проссер рассматривали решение волновой обратной задачи рассеяния, в том числе и многомерной, используя рекурсивную процедуру, получившую название обратного ряда Борна [202–205]. Ю. М. Березанский в [150] дал схему решения поставленных И. М. Гельфандом обратных многомерных задач в рамках общего подхода. Он исследовал, главным образом, вопросы единственности решения и эквивалентности различных формулировок при постановке некоторых из рассмотренных задач. В конце этой большой, носящей программный характер, работы, предпринята одна из первых попыток рассмотрения волновой обратной задачи в акустической постановке для среды с плотностной неоднородностью. Ю. М. Березанский коснулся также общих положений многомерной акустической обратной задачи, вне зависимости от конкретных методов ее решения.

Обобщение одномерных уравнений Гельфанда–Левитана и уравнения Марченко на многомерное пространство без предположения о сферической симметрии было выполнено Л. Д. Фаддеевым. Для этого Л. Д. Фаддеев использовал результаты его предшествующих работ [334; 335]; затем они были обобщены им в [124]. Независимо Р. Ньютоном [127; 129 (гл. 2.2.2); 336–342] была разработана иная схема обобщения и изложено свое видение результатов Л. Д. Фаддеева [127]. В этих исследованиях Л. Д. Фаддеевым были введены мнимые добавки к волновому вектору падающего поля, отсутствующие в реальном эксперименте [334; 335]. Направление фиксированной мнимой добавки характеризуется единичным вектором γ с произвольной ориентацией. Подробно такая процедура описана далее в разделе 6.1 настоящей работы. При этом Л. Д. Фаддеев, стремясь следовать ходу

решения одномерной обратной задачи [123; 124], ввел функции Грина G_γ , которые соответствуют бесконечно малой мнимой добавке к волновому вектору [335] и реализуют “свойство вольтерровости”. Данное свойство позволяет придать основным интегральным уравнениям вид уравнений Вольтерра, обеспечивая тем самым их разрешимость итерационными методами. С этой целью было необходимо отказаться от рассмотрения изотропной задачи и использовать особые “направления вольтерровости”, характеризуемые вышеупомянутым единичным вектором γ , так что в интегральных уравнениях (уже не одномерных) один из пределов интегрирования становится зависящим от аргументов ядра. Такие преобразования потребовали использования функций Грина G_γ , также анизотропных, причем рассматривается аналитическое продолжение зависимости G_γ , как функции от комплексного множителя s , в верхнюю комплексную полуплоскость. По физическому смыслу множитель s равен проекции волнового вектора с мнимой добавкой на направление γ , а значение $\text{Im}s$ равно величине мнимой добавки к волновому вектору. Между классической функцией Грина (изотропной) и функциями G_γ имеется однозначная взаимосвязь [124 (уравнение 3.2 главы III); 335]. Однако функции Грина G_γ не обладают свойством вольтерровости; тем не менее, уравнениям с их участием можно придать вид уравнений Фредгольма [127; 136 (§ 2.1)].

Разработанный при таком подходе алгоритм решения обратной задачи рассеяния изложен, например, в [136 (§ 1.1)]. В нем в качестве первого шага осуществляется переход от измеряемых данных рассеяния (например, амплитуды рассеяния f) к обобщенным данным h_γ . Дальнейшие шаги этого алгоритма включают в себя процедуры, использующие данные для всех энергий, и при этом подразумевают ослабление эффектов рассеяния по мере увеличения энергии. Даже в простейшем случае отсутствия связанных состояний алгоритм оказывается очень сложным, и его практическая (численная или прикладная) реализация для квантово-механических или волновых задач в настоящее время нам неизвестна. В случае акустических задач возникает дополнительная сложность его непосредственной реализации. Дело в том, что имея много общего с волновыми обратными задачами рассеяния, обратные задачи потенциального рассеяния обладают, в то же время, рядом принципиальных отличий, основное из которых – различие в энергетической зависимости процессов потенциального рассеяния в квантовой механике и частотной зависимости рассеяния волн на неоднородностях фазовой скорости. В квантовых задачах рассеивающий потенциал не зависит от частоты (т.е. энергии налетающей частицы) [336], благодаря чему на высоких частотах рассеяние приобретает квазиборновский характер. В акустике же рассеиватель представлен, в первую очередь, неоднородностями фазовой скорости звука в исследуемом объекте, вклад которых в функцию рассеивателя пропорционален квадрату частоты. Следовательно, в отличие от ситуации в квантовой механике, рассеиватель является частотно (энергетически) зависимым, причем вклад в функцию акустического рассеивателя за счет неоднородности скорости увеличивается с ростом частоты. Как следствие, сила рассеивателя, т.е. его влияние, неограниченно возрастает на бесконечно больших частотах, т.е., в противоположность ситуации в квантовой механике, процессы перерассеяния становятся чрезвычайно сильными. Кроме того, вклад в функцию

акустического рассеивателя вносят неоднородности коэффициента поглощения, которые тоже частотно зависимы. И лишь третья компонента функции рассеивателя, связанная с неоднородностью плотности среды, не зависит от частоты. Однако рассеиватели, представленные исключительно плотностной компонентой, встречаются достаточно редко. В общем же случае подход, использующий широкий спектр частот или энергий и предполагающий отсутствие зависимости функции рассеивателя от частоты, не может быть использован в акустике в непосредственном виде (за исключением монохроматических задач, где это предположение может быть принято явным или неявным образом).

Другой вариант обобщения уравнения Гельфанда–Левитана на многомерный случай разрабатывался в цикле работ Р. Ньютона [127; 336–342]. Получив обобщение уравнения Марченко для трехмерных квантово-механических потенциалов без условия сферической симметрии, Р. Ньютон начал теоретические исследования вопросов однозначного восстановления потенциала с помощью предложенного им квантово-механического метода на основе данных рассеяния, полученных в дальней зоне на всех частотах и для всех направлений падения и рассеяния падающей волны. Итог исследований нашел отражение в книге Р. Ньютона [127]. Часть этой книги посвящена изложению подхода Л. Д. Фаддеева к обратным многомерным задачам рассеяния. Приведены итоговые варианты алгоритмов решения обратной задачи, найденных в результате исследований Л. Д. Фаддеева, Р. Ньютона, а также Р. Г. Новикова и Г. М. Хенкина [136], Р. Б. Лавина и А. И. Нахмана [343]. Эти алгоритмы состоят из ряда последовательных шагов, которые приводят к оценке потенциала, – как создающего связанные состояния, так и свободного от них, – на основе данных рассеяния для всех энергий (т.е. частот в акустическом случае) падающего излучения. Однако данное технически не реализуемое требование к данным рассеяния, а также общая сложность интегральных уравнений, которые необходимо решать, затрудняют в той или иной степени приближенное практическое восстановление потенциалов по этим схемам. Кроме того, данные схемы непосредственно применимы сугубо для обратных задач квантово-механического типа, в которых предполагается отсутствие зависимости потенциала от энергии зондирующего излучения.

Метод выделения определенного направления, связанного с направлением падающего поля, и перехода к новому волновому вектору, имеющему добавку (в данном случае, мнимую) в направлении γ , нашел свое развитие в приложении к двумерным, а позднее и к трехмерным, обратным скалярным задачам в монохроматическом режиме. В двумерном случае этот путь рассмотрен в цикле работ Р. Г. Новикова и П. Г. Гриневича, опирающихся на работы А. П. Веселова, С. В. Манакова, С. П. Новикова, о чем подробно будет сказано в главе 6. В трехмерном случае подобный путь развивался Р. Г. Новиковым и Г. М. Хенкиным (см. главу 9), которые использовали, в частности, подход, восходящий к работе Р. Билса и Р. Р. Койфмана [344]. Для обеспечения монохроматичности как в двумерном, так и в трехмерном пространствах использовались именно такие комплексные волновые векторы, ненулевая или же бесконечно малая мнимая часть которых *ортогональна* действительной части. Такая ортогональность позволяет работать, в математическом смысле, в рамках монохроматической задачи, поскольку квадрат волнового вектора остается неизменным, в то время как модуль волнового вектора может изменяться. Таким образом, монохроматический режим, обеспечиваемый при этом подходе, позволяет отвлечься от специфики квантово-механических задач и различий в энергетической (частот-

ной) зависимости квантово-механических процессов от процессов классического волнового рассеяния, в то время как многие предшествующие подходы основывались на наличии данных рассеяния для всех частот или некоторого частотного интервала.

В работах М. Абловица, Д. Бар Якова, А. Фокаса, А. Нахмана, Р. Билса и Р. Р. Койфмана положено начало многомерному функциональному подходу, получившему название “ $\bar{\partial}$ -метод”, в основе которого лежит $\bar{\partial}$ -уравнение [345–351]. Имеется в виду дифференциальное уравнение, которое характеризует внутреннее волновое поле (т.е. поле внутри области рассеяния) с помощью производной этого поля по аргументу, комплексно сопряженному с основным аргументом задачи, что и дало название методу. Для решения монохроматических обратных задач по физически содержательным данным $\bar{\partial}$ -метод был приспособлен в двумерном случае Р. Г. Новиковым и П. Г. Гриневичем [137; 352] и в трехмерном случае Г. М. Хенкиным и Р. Г. Новиковым [136] с помощью приема использования ортогональной мнимой добавки к волновому вектору. При этом восстановление рассеивающего объекта (уже вне зависимости от его квантово-механической или волновой природы) опирается на тот факт, что при увеличении модуля волнового вектора процессы перерассеяния ослабевают, подобно тому, как это имело место в случае рассеяния на квантово-механическом потенциале с ростом энергии. Подробное рассмотрение общей ситуации, сложившейся в связи с решением обратной задачи рассеяния $\bar{\partial}$ -методом, дано в работе [136]. Пример численного решения двумерных обратных задач на основе $\bar{\partial}$ -метода приведен в [353].

В литературе по многомерным обратным задачам восстановления внутренней структуры объектов, прозрачных для того или иного вида излучения, заметное место занимает обширный цикл работ М. И. Белишева с коллегами [354–363], выполненных ими на протяжении многих лет. Результаты значительной части этих исследований обобщены в [358; 359; 362; 363]. Аналитический метод, разработанный М. И. Белишевым и получивший название метода граничного управления (ГУ), т.е. в английской транскрипции – boundary control (BC) method, развивает спектральный подход к одномерной задаче и в существенной мере отличается от подходов, рассматриваемых ниже в представляемой работе. В рамках метода ГУ для нахождения неоднородностей среды используются нестационарные волновые эффекты при импульсном или широкополосном облучении. Метод ГУ представляет собой строгое математическое развитие классических подходов к одномерным обратным задачам, а также тех соображений, которые использовались в ранний период развития методов томографии в работах по “временноразрешенному” томографированию и томографированию в приближении однократного рассеяния (в первую очередь, акустическому). Первые результаты метода ГУ обсуждены в конце обзора [136 (§ 5.2)]. На протяжении ряда лет совершенствовались терминология, круг понятий, методы решения, а ограничения, накладываемые исходными предположениями, постепенно устранялись или снижались. В самом кратком виде постановка проблемы и подходы к ее решению могут быть сформулированы следующим образом.

В свободном волноведущем пространстве (размерности 2 или более) выделена исследуемая область $\tilde{\Omega}$ с гладкой границей $\tilde{\Gamma}$. В области $\tilde{\Omega}$ задан метрический тензор, гладко зависящий от точки. Метрика в $\tilde{\Omega}$ определяется временем распространения сигнала

ла между точками по геодезической траектории. В простейшем случае изотропной неоднородной среды метрический тензор в декартовых координатах пропорционален единичной матрице с зависящим от точки коэффициентом пропорциональности $1/c(\mathbf{r})$, где $c(\mathbf{r})$ имеет смысл скорости звука. Отсутствие внутренних течений в $\check{\Omega}$ делает метрику среды неориентированной. На границе Γ задается возбуждение (источники) с неограниченно широкой полосой излучаемых частот, что позволяет рассмотреть не только математические, но и физические лучи, перпендикулярные границе в конкретной ее точке, и описать метрический тензор в $\check{\Omega}$ с помощью последовательности времен τ , необходимых для достижения той или иной точки, лежащей на фиксированном луче. Волновые поля, которые порождаются исчезающе короткими возбуждениями, идущими одновременно от всех точек границы, заполняют всю область $\check{\Omega}$ за время \mathcal{T}^* (верхний символ “* ” в обозначении \mathcal{T}^* не имеет отношения к обозначению комплексного сопряжения, общепринятому в настоящей работе, что очевидно по контексту).

При решении обратной задачи восстановления метрики в $\check{\Omega}$ и, следовательно, неоднородностей, расположенных в ней, несколькими предлагаемыми в работах М. И. Белишева алгоритмами выделяются две постановки: спектральная и динамическая. Показана взаимосвязь этих постановок: возможен переход от спектральных данных к динамическим данным и обратно. При спектральной постановке задается множество собственных значений (спектр) оператора Лапласа в области $\check{\Omega}$ при условии Дирихле или Неймана на Γ и нормальные производные на Γ соответствующих нормированных собственных функций. При динамической постановке роль экспериментальных данных играет оператор отклика, переводящий δ -образное во времени возбуждение от точечного первичного источника в реакцию (отклик) в виде нормальной производной поля на границе на протяжении промежутка времени $2\mathcal{T}$. Здесь \mathcal{T} обозначает произвольный фиксированный промежуток времени. Значение \mathcal{T} определяет ту приграничную подобласть $\check{\Omega}^{\mathcal{T}}$ области $\check{\Omega}$, которая заполняется идущими от границы полями к моменту $t = \mathcal{T}$. Экспериментальные данные, используемые для восстановления скорости звука $c(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} \in \check{\Omega}$, представлены в виде *оператора отклика* $\hat{R}_{(B)}^{2\mathcal{T}}$. Этот оператор описывает полное поле, которое после прохождения через область $\check{\Omega}$ наблюдается в точке \mathbf{y} границы Γ в ответ на локальное пространственно-временное δ -образное возбуждение, создаваемое в точке \mathbf{x} этой же границы Γ . Поле, порожденное возбуждением, распространяется внутри $\check{\Omega}$ с переменной скоростью $c(\mathbf{r})$ и при этом взаимодействует с неоднородностями среды, что приводит к появлению рассеянных полей, возвращающихся к границе и регистрируемых наблюдателем. В результате оператор $\hat{R}_{(B)}^{2\mathcal{T}}$, соответствующий промежутку времени именно $2\mathcal{T}$, содержит информацию о среде не во всей $\check{\Omega}$, а лишь в ее подобласти $\check{\Omega}^{\mathcal{T}}$, заполненной полем к моменту $t = \mathcal{T}$. Эти соображения делают естественной следующую постановку обратной задачи: по заданному оператору $\hat{R}_{(B)}^{2\mathcal{T}}$ восстановить скорость $c(\mathbf{r})$ в подобласти $\check{\Omega}^{\mathcal{T}}$, заполненной полем к моменту \mathcal{T} . Если $\mathcal{T} > \mathcal{T}^*$, то имеется вся необхо-

димая информация для решения обратной задачи восстановления пространственного распределения $c(\mathbf{r})$ во всей области $\check{\check{\Omega}}$.

Важное свойство волновых процессов в $\check{\check{\Omega}}$, используемое на этапе решения обратной задачи методом ГУ, состоит в следующем. Подбирая возбуждение на границе, т.е. управляя им и одновременно зная оператор отклика $\hat{R}_{(B)}^{2T}$, можно создавать волновые поля любой желаемой формы. Эти поля создаются в подобласти $\check{\check{\Omega}}^T$, причем только в течение исчезающе короткого временного интервала в окрестности заранее заданного момента времени $t = T$. Такая возможность позволяет создавать на некоторое мгновение последовательность полевых конфигураций, образующих полный (в том или ином смысле) базис. Об этом свойстве говорят как о свойстве граничной управляемости физической системы, в которой протекают волновые процессы. Нужно отметить, что здесь речь идет только о принципиальной возможности при решении обратной задачи контролировать форму волны, а не о ее физической реализации в томографическом эксперименте. Используя свойство управляемости, в рамках метода ГУ удастся подобрать граничные возбуждения, создающие в фиксированный момент времени поля δ -образной формы – “острые пики” в окрестности определенной точки подобласти $\check{\check{\Omega}}^T$. Именно такие поля используются при восстановлении скорости. Алгоритм, основанный на методе ГУ, дал положительные результаты при апробации в ряде численных экспериментов [360; 363].

Л. Н. Пестовым предложена версия метода ГУ [364–366], предполагающая измерения на границе в течение временного интервала $[0; 2T]$ при $T > T^*$. Результаты работ по моделированию в двумерном и трехмерном случаях, выполненные Л. Н. Пестовым с соавторами [365; 366], весьма успешны. В этом исследовании в качестве экспериментальных данных использован оператор отклика $\hat{R}_{(P)}^{2T}$, который является обратным к упомянутому выше оператору $\hat{R}_{(B)}^{2T}$ в работах М. И. Белишева и связывает точечное возбуждение на границе в виде нормальной производной (возбуждение Неймана) со значением собственнo скалярного поля на границе Γ . Оба вида данных, по сути, эквивалентны. Другое непринципиальное отличие состоит в том, что М. И. Белишевым восстанавливается метрика в $\check{\check{\Omega}}$, и тогда $c(\mathbf{r})$ находится как отношение приращения расстояния к соответствующему приращению времени распространения, а в работах Л. Н. Пестова осуществляется восстановление пространственного распределения функционального коэффициента $\varrho(\mathbf{r})$ при второй производной полевой переменной по времени. Этот коэффициент назван в ряде работ М. И. Белишева и Л. Н. Пестова “плотностью”, однако по физическому (акустическому) смыслу он описывает, в случае среды с постоянной физической плотностью, произведение значений объемной сжимаемости среды и физической плотности среды в точке \mathbf{r} , т.е., фактически, величину, обратную квадрату скорости звука: $\varrho(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}$

(предполагается отсутствие поглощения). Рассмотренный и промоделированный в работе [365] алгоритм заключается в следующем. Исходное акустическое возбуждение в реальном или модельном эксперименте представляет собой сигнал wavelet-типа с полосой око-

ло одной октавы. Это возбуждение, создающее звуковое поле, соответствует заданному значению нормальной производной $f_0(\mathbf{x}, t')$ на границе в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ в момент времени t' . Такое возбуждение действует в течение интервала времени \mathcal{T} . Осуществляется последовательный перебор совокупности точек \mathbf{x} , достаточно плотно распределенных вдоль границы. Экспериментальные данные, с помощью которых восстанавливается зависящая от координат функция $\varrho(\mathbf{r})$, содержат в себе реакцию всей области $\check{\Omega}$ в виде поля $u^{f_0}(\mathbf{y}, t)$, наблюдаемого как функция времени t на интервале $t \in [0, 2\mathcal{T}]$ в плотном наборе точек границы $\mathbf{y} \in \Gamma$. Вся совокупность экспериментальных данных позволяет построить оператор отклика $\hat{R}_{(P)}^{2\mathcal{T}}$ области $\check{\Omega}$ на основе соотношений

$$\left(\hat{R}_{(P)}^{2\mathcal{T}} f_0\right)(\mathbf{y}, t) = u^{f_0}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \quad t \in [0, 2\mathcal{T}].$$

Эти выражения, фактически, имеют вид интегральных соотношений на границе, поскольку оператор отклика выражается через ядро $R_{(P)}^{2\mathcal{T}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t - t')$ этого оператора как

$$\hat{R}_{(P)}^{2\mathcal{T}}(\bullet) \equiv \int_{\Gamma} d\mathbf{x} \int_0^t dt' R_{(P)}^{2\mathcal{T}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t - t')(\bullet),$$

т.е.

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{x} \int_0^t dt' R_{(P)}^{2\mathcal{T}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t - t') f_0(\mathbf{x}, t') = u^{f_0}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \quad t' \in [0, \mathcal{T}], \quad t \in [0, 2\mathcal{T}]$$

(все рассматриваемые в алгоритме функции предполагаются вещественнозначными). Далее для восстановления функции $\varrho(\mathbf{r})$ используется оригинальный прием. Найденный оператор $\hat{R}_{(P)}^{2\mathcal{T}}$, который индивидуален для каждого фиксированного пространственного распределения $\varrho(\mathbf{r})$, позволяет управлять граничными возбуждениями и тем самым задать (не в эксперименте, а уже на этапе решения обратной задачи) на границе Γ набор специальных возбуждений $\{f_i(\mathbf{x}, t')\}$, где i – индекс, задающий функцию из данного набора. При каждом фиксированном i возбуждение $f_i(\mathbf{x}, t')$, идущее одновременно от *всей* границы Γ (а не от фиксированной точки границы, как в реальном эксперименте) лоцирует область $\check{\Omega}$, содержащую неизвестное пространственное распределение $\varrho(\mathbf{r})$. Функции $f_i(\mathbf{x}, t')$, определяемые на границе, должны быть такими, чтобы в момент $t = \mathcal{T}$ ($\mathcal{T} > \mathcal{T}^*$) в области $\check{\Omega}$ создавались требующиеся поля возмущений $\varphi_i(\mathbf{r}) \equiv u^{f_i}(\mathbf{r}, t = \mathcal{T})$, $\mathbf{r} \in \check{\Omega}$. В качестве набора $\{\varphi_i(\mathbf{r})\}_{\check{\Omega}}$ выбираются гармонические функции (т.е. функции, удовлетворяющие однородному уравнению Лапласа в области $\check{\Omega}$ с граничным условием Неймана), поскольку они особенно удобны для дальнейших вычислений. Такие функции используются в алгоритме Л. Н. Пестова вместо “острых пиков”

δ -образной формы у М. И. Белишева. Итак, поля $\varphi_i(\mathbf{r})$ имеют априори известный и удобный для дальнейших вычислений гармонический вид в области $\check{\Omega}$. Однако прямой синтез таких функций $\varphi_i(\mathbf{r})$ для всей области $\check{\Omega}$ невозможен, поскольку пространственное распределение $\varrho(\mathbf{r})$ неизвестно, и, следовательно, ядро оператора отклика $R_{(p)}^{2T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$ неизвестно для произвольных точек $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \check{\Omega}$, но только для точек границы. Тем не менее, оказывается, что, используя только оператор отклика $\hat{R}_{(p)}^{2T}$ с ядром $R_{(p)}^{2T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t - t')$, уже известный из эксперимента ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$), можно создать граничные возбуждения $f_i(\mathbf{x}, t')$, благодаря которым в фиксированный момент времени $t = T$ на границе $\mathbf{y} \in \Gamma$ будут порождаться требуемые гармонические функции $\varphi_i(\mathbf{y}) = u^{f_i}(\mathbf{y}, t = T)$. Как показано в [365], эти функции $\varphi_i(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \Gamma$, являются “следом” на границе Γ функций $\varphi_i(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \check{\Omega}$. Доказывается ряд теорем о том, что задание граничных возбуждений $\{f_i(\mathbf{x}, t')\}_\Gamma$ и, следовательно, задание функций $\{\varphi_i(\mathbf{y})\}_\Gamma$ на границе Γ одновременно обеспечивает почти точное задание требуемых функций $\{\varphi_i(\mathbf{r})\}_{\check{\Omega}}$ во всей области $\check{\Omega}$. В этом смысле такой результат переключается с результатом, содержащимся в одной из самых ранних фундаментальных работ по многомерным обратным задачам рассеяния [150 (§ 3)], где рассмотрено возбуждение с границы гармонической волны во внешней области, *не содержащей неоднородности*, а также переключается с результатом более поздней работы [367], где подобные соотношения приведены для области, *содержащей* неоднородность. При этом показано, что возбуждение должно создавать поле (являющееся аналогом для поля $\varphi_i(\mathbf{r})$ в настоящем контексте), которое на границе области $\mathbf{y} \in \Gamma$ будет совпадать со значениями требуемого поля (являющегося аналогом для $\varphi_i(\mathbf{y})$). В [365] гармонические функции $\varphi_i(\mathbf{r})$, выступающие в качестве зондирующих полей, создаются в области $\check{\Omega}$, *содержащей* неоднородное распределение $\varrho(\mathbf{r})$. Тогда соотношения для решения вспомогательной задачи определения искомых граничных возбуждений $f_i(\mathbf{x}, t')$, создающих при $t = T$ заданные гармонические поля $\varphi_i(\mathbf{y})$, строятся при каждом фиксированном i с помощью интегрального уравнения вида

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{x} \int_0^T dt' R_{(p)}^{2T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, T - t') f_i(\mathbf{x}, t') = \varphi_i(\mathbf{y}) ,$$

т.е.

$$\left(\hat{R}_{(p)}^{2T} f_i \right)(\mathbf{y}, t = T) = \varphi_i(\mathbf{y}) , \quad \mathbf{y} \in \Gamma .$$

Эти соотношения для нахождения $f_i(\mathbf{x}, t')$ линейны и имеют схематический вид

$$[f_0, f_i] = F_{\text{func}}(f_0, \varphi_i) . \quad (5.1)$$

Здесь в качестве известных данных используются имеющиеся данные в виде оператора отклика $\hat{\mathbf{R}}_{(P)}^{2T}$; $[f_0, f_j]$ – интегральная форма, которая вычисляется для любых возбуждений f_0 по явной формуле, использующей оператор $\hat{\mathbf{R}}_{(P)}^{2T}$. Функционал $\mathcal{F}_{\text{func}}(f_0, \varphi_i)$ также явно определяется оператором $\hat{\mathbf{R}}_{(P)}^{2T}$, возбуждением f_0 и гармонической функцией φ_i . Именно процесс нахождения граничных возбуждений $f_i(\mathbf{x}, t')$, создающих в области $\tilde{\Omega}$ при $t = T$ желаемые поля $\varphi_i(\mathbf{y})$ (или поля δ -образной формы у М. И. Белишева), дал общее название рассматриваемому методу – “метод граничного управления” [357–363].

Возможность создания достаточно произвольной функции поля $\varphi^F(\mathbf{r})$ во внутренней области $\mathbf{r} \in \tilde{\Omega}$ с помощью контролируемых излучателей (возбуждений) $F(\mathbf{x}', t')$, расположенных на границе Γ , обеспечивается *широкой* полосой частот излучаемого сигнала и необходимостью создания требуемой формы волны только в один определенный момент времени T . Излучаемая полоса временных частот не обязательно должна быть неограниченно широкой, однако при этом полоса пространственных частот воспроизводимой функции $\varphi^F(\mathbf{r})$ также претерпевает определенные ограничения. При приеме на границе Γ поля, пришедшего из области $\tilde{\Omega}$, имеет место обратная ситуация: определенная конфигурация поля $\varphi^F(\mathbf{r})$ в $\tilde{\Omega}$, будучи предоставленная “сама себе”, т.е. эволюционирующая в соответствии с волновым уравнением в неоднородной среде, создает на границе Γ принимаемые сигналы, имеющие однозначное поведение во времени. Важно то, что тот и другой процессы порождаются в $\tilde{\Omega}$ в присутствии неоднородного пространственного распределения $\varrho(\mathbf{r})$, т.е. связаны, в конечном счете, с известным оператором отклика $\hat{\mathbf{R}}_{(P)}^{2T}$. В определенном смысле эти два процесса являются обобщением процесса монохроматического борновского рассеяния, о чем далее будет идти речь в связи с соотношениями (5.2) и (5.3).

Когда в качестве зондирующей волны выступает поле $\varphi_i(\mathbf{r})$ при фиксированном i , оно удовлетворяет уравнению [365] $\nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}) - \varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \tilde{\Omega}$. Это соотношение можно трактовать как уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r})$ с вторичными источниками $\varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r})$, возбуждаемыми в области $\tilde{\Omega}$ и порождающими поля $\varphi_i(\mathbf{r})$. С другой стороны, оператор отклика $\hat{\mathbf{R}}_{(P)}^{2T}$ описывает поле, принимаемое на границе Γ , а также позволяет описать поле, существующее во всей области $\tilde{\Omega}$. В результате, вторичные источники $\varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r})$ можно разложить по системе тех же функций $\{\varphi_j(\mathbf{r})\}_{\tilde{\Omega}}$, что приводит к коэффициентам разложения $\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$. Вторым важным моментом является полученная в [365] связь этих коэффициентов разложения с интегральной квадратичной

формой $[f_i, f_j]$ от функций возбуждения $f_i(\mathbf{x}, t')$ и $f_j(\mathbf{x}, t')$ на границе. Эта форма играет роль некоторого внутреннего произведения в пространстве значений граничных возбуждений $\{f_i(\mathbf{x}, t')\}$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, на интервале времени $t' \in [0, T]$. Таким образом, центральное соотношение алгоритма Л. Н. Пестова имеет вид:

$$\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = [f_i, f_j]. \quad (5.2)$$

Это соотношение обобщает классическое соотношение, имеющее место в теории рассеяния в первом приближении Борна (приближении однократного рассеяния), – см. (1.40):

$$\tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k}) = (2\pi)^D f(\mathbf{k}, \mathbf{I}), \quad (5.3)$$

где D – размерность пространства. В (5.3) пространственное фурье-преобразование $\tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k}) \equiv \int v(\mathbf{r}) \exp[-i(\mathbf{I} - \mathbf{k})\mathbf{r}] d\mathbf{r}$ функции неоднородности $v(\mathbf{r})$ выражается через экспериментальные данные – амплитуду рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ в направлении волнового вектора \mathbf{I} в ответ на падающую плоскую волну с волновым вектором \mathbf{k} , – см. (1.38). В методе граничного управления вида (5.2) аналогом пространственного спектра рассеивателя $\tilde{v}(\mathbf{I} - \mathbf{k})$ являются коэффициенты разложения $\int_{\tilde{\Omega}} \varrho(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ неизвестного пространственного распределения $\varrho(\mathbf{r})$ по базису в виде попарных произведений функций $\varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \tilde{\Omega}$. В этих произведениях поля $\varphi_i(\mathbf{r})$ и $\varphi_j(\mathbf{r})$ соответствуют “базисным” возбуждениям i и j всей границы, выступающим в качестве аналогов направлений векторов \mathbf{k} и \mathbf{I} . В роли аналога амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ в (5.3) выступает форма $[f_i, f_j]$ в (5.2).

Решение уравнений (5.2) может оказаться некорректным и неединственным, особенно в области высоких пространственных частот восстанавливаемого распределения $\varrho(\mathbf{r})$. Расширение области восстанавливаемых пространственных частот (в сторону их повышения) связано, в свою очередь, с возникающей при этом некорректностью уравнений (5.1) для нахождения граничных возбуждений $f_i(\mathbf{x}, t')$ по заданным гармоническим полям $\varphi_i(\mathbf{y})$. Тогда требуются определенные способы регуляризации решаемых уравнений, а также критерии выбора одного из возможных решений. По рассчитанным из (5.2) коэффициентам разложения далее восстанавливается сама функция $\varrho(\mathbf{r})$ с учетом того, что система произведений функций $\{\varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r})\}_{\tilde{\Omega}}$ не является ортогональной и при этом не только полна, но и переполнена.

Предложенный в работах М. И. Белишева с соавторами метод ГУ, в том числе, один из вариантов этого метода, рассмотренный в работах Л. Н. Пестова с его соавторами

и доведенный до численной реализации, открывает перспективное направление в методах решения томографических задач акустики. Можно лишь добавить, что такой подход дает непосредственное решение, не привлекая итерационные схемы, за счет чего он свободен от ограничений, связанных с обеспечением сходимости итераций. При этом он использует богатый набор данных, являющийся существенно переопределенным. Это увеличивает объем вычислений, но делает алгоритмы восстановления более устойчивыми, а их дальнейшее исследование многообещающим. Степень избыточности экспериментальных данных особенно велика в случае решения методом ГУ трехмерной обратной задачи и использования широкой полосы частот – в одну или более октавы.

Сложным для описываемого подхода является определение поглощения в среде. Это связано с отсутствием в рассматриваемой схеме каких-либо измерений амплитудного или энергетического характера для сигнала, прошедшего через $\tilde{\Omega}$. Тем не менее, такая информация в неявном виде присутствует в операторах отклика $\hat{R}_{(B)}^{2\tau}$ или $\hat{R}_{(P)}^{2\tau}$, что позволяет, в принципе, при определенной модификации алгоритма, определить энергетические потери в $\tilde{\Omega}$ и восстановить карту коэффициента поглощения [368; 369].

Цикл работ Б. Н. Захарьева [370–373] посвящен анализу прямых и обратных задач квантово-механического рассеяния – одномерных и сферически-симметричных. Полное изложение результатов, полученных к 1985 году, дано в [372]. Особое внимание уделено связанным состояниям и аспектам численного решения подобных задач на ЭВМ. Важно отметить, что Б. Н. Захарьев впервые стал использовать результаты функционально-аналитического подхода для решения конкретных физических задач. Более поздняя книга [373] поднимает ряд новых проблем.

Обратная задача рассеяния, работающая с полными данными в монохроматическом режиме, является размерностно-безызыточной в двумерном случае: двумерное многообразие неизвестных и двумерное же многообразие данных, получаемых при всестороннем зондировании и приеме. В трехмерном случае она становится размерностно-избыточной: трехмерное многообразие неизвестных и четырехмерное многообразие данных. При переходе к полихроматическому или импульсному режиму уже двумерная обратная задача становится избыточной. Поэтому встает задача характеристики, определяющая взаимосвязь избыточных данных рассеяния. В литературе ее анализу уделялось достаточно много внимания [124; 136; 339]. Возможно, что со временем соотношения характеристики будут “вплетены” в функциональные алгоритмы, что послужит, в частности, повышению их помехоустойчивости или восполнению недостающих данных рассеяния, которые не удастся измерить экспериментально в силу технических или анатомических (в медицинских приложениях) причин.

Можно ослабить избыточность многомерной задачи, работая в конечной полосе частот. Это предполагает функциональный метод реконструкции акустических рассеивателей на основе данных, измеренных в ограниченной полосе [374–376]. Он использует асимптотические свойства волновых акустических полей при стремлении частоты поля к нулю. Дело в том, что чем ниже частота, тем меньше влияние акустического рассеивателя в виде неоднородности фазовой скорости звука, и, следовательно, приближение однократного рассеяния может быть использовано с тем большей точностью, подобно квантово-

механическому рассеянию на высоких частотах. Трудность практической реализации данного подхода заключается в том, что непосредственные измерения в эксперименте на очень низких частотах затруднительны. Кроме того, разрешающая способность изображения, восстанавливаемого при решении обратной задачи и определяемого длиной волны, становится неприемлемо низкой при слишком низких частотах. Как следствие, процедура аналитического продолжения данных на предельный случай нулевой частоты, которую необходимо выполнить в том или ином виде для решения задачи, обладает сильной неустойчивостью.

Любой способ решения обратных задач рассеяния в прикладных областях требует детального исследования алгоритмов восстановления рассеивателей с целью их функционального и технического согласования с реальной измерительной установкой (томографом), методом получения первичных данных рассеяния, вычислительными возможностями имеющегося оборудования и способами отображения итоговых результатов. При этом, с одной стороны, функциональные методы являются наиболее передовыми и мощными в теоретическом и принципиальном плане, а с другой стороны, их применение для решения прикладных обратных задач рассеяния классических полей находится только в начальной стадии исследования, и дальнейшее продвижение в этом направлении является несомненно важным. Требуется детальная проработка общих идей и методов функционально-аналитических подходов, развивавшихся в чисто математическом плане, с целью их применения к конкретным волновым и, в частности, акустическим обратным задачам рассеяния. При этом принципиальны все стороны процесса решения: важно разобраться в механизме, позволяющем тому или иному алгоритму учесть явление многократного рассеяния; найти границы применимости схемы вычисления, определяемые заданной точностью решения и физическими характеристиками рассеивателя (решение должно быть устойчиво к неизбежным ошибкам измерения в эксперименте, а также к возможным ошибкам другого типа, связанным с нестрогим приближением реальных данных рассеяния к их теоретической идеализации); обеспечить единственность восстановления рассеивателя; определить роль избыточности в данных рассеяния; оценить практическую реализуемость алгоритмов средствами вычислительной техники и удобство их сопряжения с техническими возможностями конкретных томографических систем. В частности, в литературе практически не уделялось внимание тому факту, что некоторые из алгоритмов, разработанных на основе функционально-аналитических методов, весьма чувствительны, в силу некорректности задачи, к ошибкам в данных рассеяния. Поэтому при решении прикладных задач требуется сопряжение этих алгоритмов с процедурами функциональной, а затем и вычислительной регуляризации, методы которой [377; 378], в приложении к подобным обратным задачам, далеко не так хорошо изучены и освоены, как это имеет место в линейных обратных задачах [377–379].

В настоящей части II представляемой диссертационной работы предпринята попытка дать, хотя бы частично, ответы на подобные вопросы, возникающие в связи с применением разработанных в последнее время функционально-аналитических алгоритмов. Детально анализируются несколько особенно перспективных, на наш взгляд, функционально-аналитических методов решения двумерной и трехмерной обратных задач рассеяния, в контексте возможности их практического применения в обратных акустических задачах томографического типа. По ходу изложения даются подробные ссылки на соответ-

ствующие работы ряда авторов, идеи которых были положены в основу алгоритмов восстановления внутренних полей и, в итоге, характеристик самого рассеивателя. Тем не менее, обсуждаемые методы, использующие круг идей квантово-механического происхождения, по-видимому, не исчерпывают всех возможностей, открывающихся в данном направлении, и в дальнейшем на этом пути можно ожидать новых важных результатов.

Рассматриваемый в главе 6 и в главе 7 алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова перспективен для решения прикладных двумерных обратных задач рассеяния, использующих монохроматический режим. Этот алгоритм хорошо реализуем на современных вычислительных машинах. Однако если в случае монохроматических волновых полей акустические обратные задачи рассеяния можно рассматривать в рамках схемы, общей с квантово-механическими задачами, то в случае многочастотного или импульсного режима необходимо учитывать специфику рассеяния именно акустических полей. Методу решения многочастотной акустической двумерной задачи томографического типа, основанной на функциональном подходе, посвящена глава 8. Этот метод можно применять также и для импульсного режима работы медицинских томографов, повысив, тем самым, их информативность и расширив область работоспособности.

Для большинства практических приложений представляют интерес трехмерные томографические системы. В настоящее время трехмерное изображение синтезируется, в основном, в виде объединения двумерных изображений слоев томографируемого органа [213–215; 239; 243; 293]. Строгое решение трехмерной обратной задачи рассеяния функциональными методами не удается получить простой модификацией двумерных алгоритмов, и нужна разработка новых методов решения. Результаты этих исследований появились относительно недавно, но их практическая пригодность в акустических системах была не очевидна, а требуемый объем вычислений в настоящее время представляется чрезвычайно большим. Тем не менее, быстрый прогресс в области вычислительных систем позволяет поставить вопрос о перспективности реализации этих новых подходов при решении трехмерных обратных задач акустического рассеяния, хотя бы в самой простой постановке. Глава 9 открывает цикл исследований по применению в решении трехмерных обратных задач акустического рассеяния строгих функциональных методов их решения. Эти исследования направлены, в конечном счете, на создание трехмерных систем акустоскопии принципиально нового типа.

Глава 6. Точное решение двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния

Практически вся имеющаяся на сегодняшний день литература, посвященная решению обратной задачи рассеяния на основе функционально-аналитических методов, имеет четко выраженную математическую направленность и квантово-механическую прикладную специфику, и поэтому она не всегда попадает в поле зрения читателей с несколько иным профилем интересов. Учитывая это обстоятельство, в начале данной главы излагаются основные понятия, идеи, обозначения и соотношения, используемые в многомерных функционально-аналитических алгоритмах восстановления рассеивателя. Такой подход был развит в работах Л. Д. Фаддеева и ряда других авторов, на часть работ которых ниже даются ссылки по мере изложения материала. Подход привел к разработке законченного алгоритма, названного ниже алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова. В свою очередь, данный алгоритм показал нам путь модификации подхода Роуза, снимающей проблему неединственности решения.

Настоящая глава посвящена анализу и модельной реализации строгих двумерных функционально-аналитических алгоритмов решения двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния: модифицированному алгоритму Роуза и алгоритму Новикова–Гриневича–Манакова.

Раздел 6.1. Применение формализма комплексных волновых векторов к обратным задачам

Скалярная обратная задача рассеяния в классическом варианте предполагает восстановление скалярной функции рассеивателя (рассеивающего потенциала) $v(\mathbf{r}, \omega)$, которая локализована в конечной области \mathfrak{R} координатного пространства, описываемого вектором \mathbf{r} . Поскольку далее рассматривается монохроматическая задача, то параметр ω в аргументе функции $v(\mathbf{r})$ будет опускаться, за исключением главы 8, где анализируется многочастотный случай. При используемой временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$ функция $v(\mathbf{r})$ связана с акустическими характеристиками рассеивателя, находящегося в области $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$ на фоне однородной непоглощающей среды с постоянной плотностью, следующим образом, – см. (1.10):

$$v(\mathbf{r}) = k_0^2 - k^2(\mathbf{r}) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c(\mathbf{r})} \equiv \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c(\mathbf{r})}. \quad (6.1)$$

Здесь $k_0 = \omega/c_0$ и c_0 – волновое число и фазовая скорость в фоновой среде; $k(\mathbf{r}) = \omega/c(\mathbf{r})$ и $c(\mathbf{r})$ – эти же величины в присутствии рассеивателя; $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ – амплитудный коэффициент поглощения в области рассеяния \mathfrak{R} .

Запаздывающее $u^+(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ и опережающее $u^-(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ волновые поля в произвольной точке \mathbf{z} , лежащей вне области расположения первичных источников этих полей, подчиняются неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}) + k_0^2 u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{z}) u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}); \quad (6.2)$$

$v(\mathbf{z}) = 0$ при $\mathbf{z} \notin \mathfrak{R}$. Исходными данными рассеяния в рассматриваемом далее методе являются значения классической амплитуды рассеяния $f^+(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ для всех направлений падения и рассеяния плоских запаздывающих волн. В настоящей части представляемой работы под термином “классические” здесь и далее будут подразумеваться обычно используемые в акустике волновые величины, в отличие от вводимых далее обобщенных величин. Волновые векторы \mathbf{k} и \mathbf{l} характеризуют направление падения на рассеивающий объект плоской монохроматической волны с единичной амплитудой $u_0^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z})$ и направление рассеяния в дальнем поле, соответственно. Поскольку поглощение в фоновой среде отсутствует, то \mathbf{k} и \mathbf{l} – действительные векторы:

$$\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^D, \quad \mathbf{k}^2 = \mathbf{l}^2 = k_0^2,$$

где D – размерность пространства. Понятие амплитуды рассеяния кратко обсуждалось в связи с (1.38) и более подробно в [А 2 (раздел 5.1)]. По физическому смыслу, амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \tilde{T}(\boldsymbol{\xi} = \mathbf{l}, \mathbf{k})$ пропорциональна излучающей части ($|\boldsymbol{\xi}| = k_0$) пространственного спектра

$$\tilde{T}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k}) = \int_{\mathfrak{R}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (6.3)$$

вторичных источников $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv I^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{r})u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, – см. выше главу 1 [А 2 (раздел 5.1)]. Здесь $u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ – полное запаздывающее поле в точке $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$ в присутствии рассеивателя, $\boldsymbol{\xi}$ – вектор пространственной частоты:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{l}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (6.4)$$

– см. (1.33). При определении $\tilde{T}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k})$ и $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ интегрирование по координатному пространству $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^D$ сводится к интегрированию по области рассеяния \mathfrak{R} , где функция рассеивателя $v(\mathbf{r})$ отлична от нуля.

Уравнение Липпмана–Швингера для полного поля в произвольной точке $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^D$ имеет вид

$$u^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z}) + \int_{\mathfrak{R}} G_0^+(\mathbf{z} - \mathbf{r}, k_0) u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) v(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$

Здесь $G_0^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = G_0^+(|\mathbf{z}|, |\mathbf{k}| = k_0)$ – запаздывающая функция Грина однородного изотропного непоглощающего пространства для оператора $\nabla^2 + \mathbf{k}^2$, т.е. $\nabla^2 G_0^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) + \mathbf{k}^2 G_0^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \delta(\mathbf{z})$. Тогда уравнение Липпмана–Швингера при переходе в дальнюю зону приводит к связи между наблюдаемым рассеянным полем $u_{sc}^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = u^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) - \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z})$ и амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ – см. (1.38):

$$u_{sc}^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = C_D \frac{\exp(ik_0|\mathbf{z}|)}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}} f(\mathbf{k}, \mathbf{I} = k_0 \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}}\right), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \quad (6.5)$$

$$\text{где } C_D = -\frac{\pi\sqrt{\pi}(1+i)}{\sqrt{k_0}} \text{ при } D=2; \quad C_D = -2\pi^2 \text{ при } D=3.$$

В случае опережающего классического волнового поля $u^-(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ в уравнении Липпмана–Швингера

$$u^-(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z}) + \int_{\mathfrak{R}} G_0^-(\mathbf{z} - \mathbf{r}, k_0) u^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}) v(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

участвует опережающая функция Грина однородного непоглощающего пространства $G_0^-(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = G_0^-(|\mathbf{z}|, |\mathbf{k}| = k_0)$. Между запаздывающим и опережающим полем существует интегральная связь через амплитуду рассеяния для запаздывающего поля [124 (уравнение 1.9 главы III); 136]:

$$u^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = u^-(\mathbf{z}, \mathbf{k}) - 2\pi i \int_{\mathbf{I} \in \mathbb{R}^D} f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{I}^2) u^-(\mathbf{z}, \mathbf{I}) d\mathbf{I}. \quad (6.6)$$

Одним из ключевых моментов в функционально-аналитических методах является формальное распространение волновых векторов в “нефизическую” область комплексных значений путем искусственного введения дополнительных векторов \mathbf{k}_I и \mathbf{I}_I , соответствующих мнимой части векторов \mathbf{k} и \mathbf{I} [123; 124; 136; 334; 348; 349]:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_R + i\mathbf{I}_I, \quad \text{причем } |\mathbf{k}_R| = |\mathbf{I}_R|, \quad |\mathbf{k}_I| = |\mathbf{I}_I|,$$

где $\mathbf{k}_R, \mathbf{I}_R, \mathbf{k}_I, \mathbf{I}_I \in \mathbb{R}^D$ [367; 386]. Такой прием можно рассматривать как переход от плоских однородных волн к волнам неоднородным, причем характер неоднородности определяется соотношением между мнимыми и действительными компонентами волновых

векторов \mathbf{k} и \mathbf{l} : величиной угла между мнимой и действительной частями волнового вектора, а также их абсолютными значениями. Падающее поле теперь приобретает вид

$$\exp(i \mathbf{k} \mathbf{z}) = \exp(i \mathbf{k}_R \mathbf{z} - \mathbf{k}_I \mathbf{z}). \quad (6.7)$$

При $\mathbf{k}_I = 0$, т.е. в условиях реального эксперимента, волна остается плоской. С увеличением же $|\mathbf{k}_I|$ при математическом оперировании с комплексными \mathbf{k} нарастает неоднородность значения амплитуды вдоль фронта.

Переход к комплексным волновым векторам влечет за собой необходимость обобщения всех величин и функций, зависящих от волновых векторов, на случай комплексных аргументов. Так, по аналогии с классическим уравнением Гельмгольца (6.2), обобщенное (неоднородное) волновое поле $\Psi = \Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k})$, является решением уравнения

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k}) + \mathbf{k}^2 \Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{z}) \Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k}), \quad (6.8)$$

рассматриваемого уже для комплексных $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D$. Тем самым, уравнение Гельмгольца получает параметрическую зависимость от вектора \mathbf{k} , квадрат которого определяет коэффициент при Ψ . При падающем поле, имеющем вид (6.7), для всех \mathbf{k} , за исключением некоторых значений $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D \setminus \mathbb{R}^D$ [136], существует единственное решение уравнения

$$(6.8), \text{ имеющее при } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty \text{ асимптотику } \Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i \mathbf{k} \mathbf{z}) \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}} \right) \right] \text{ и}$$

называемое решением Л. Д. Фаддеева. Интегральная форма соотношения (6.8) является аналогом уравнения Липпмана–Швингера для полей $\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k})$:

$$\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i \mathbf{k} \mathbf{z}) + \int_{\mathfrak{R}} G_{\text{Fad}}(\mathbf{z} - \mathbf{r}, \mathbf{k}) \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) v(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^D. \quad (6.9)$$

Здесь $G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ – функция Грина, введенная Л. Д. Фаддеевым для комплексных \mathbf{k} по следующему принципу [334]. Выражения для запаздывающей $G_0^+(\mathbf{z}, |\mathbf{k}| = k_0) = G_0^+(|\mathbf{z}|, k_0)$ и опережающей $G_0^-(\mathbf{z}, |\mathbf{k}| = k_0) = G_0^-(|\mathbf{z}|, k_0)$ функций Грина однородного изотропного непоглощающего пространства можно записать в виде [A 1 (Введение)]:

$$G_0^\pm(\mathbf{z}, |\mathbf{k}| = k_0) \equiv G_0^\pm(|\mathbf{z}|, k_0) = -\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\xi \in \mathbb{R}^D} \frac{\exp(i \xi \mathbf{z})}{\xi^2 - k_0^2 \mp i0} d\xi, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^D; \quad (6.10)$$

ξ – вектор пространственной частоты; $(\mp i)$ – бесконечно малая мнимая добавка соответствующего знака. Тогда функция Грина–Фаддеева для комплексных

$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I$ вводится путем замены в выражении (6.10) вектора ξ на $\xi + i\mathbf{k}_I$ и, одновременно, величины $k_0^2 \pm i0$ на $\mathbf{k}^2 = (\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I)^2$:

$$G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I) = -\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\xi \in \mathbb{R}^D} \frac{\exp[i(\xi + i\mathbf{k}_I)\mathbf{z}]}{(\xi + i\mathbf{k}_I)^2 - (\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I)^2} d\xi, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^D. \quad (6.11)$$

Функции, описывающие обобщенные поля, удобно переопределить, вводя функции

$$\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k}) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{z}) \Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k}), \quad (6.12)$$

которые стремятся к единице при $|\mathbf{z}| \rightarrow \infty$. Операция (6.12) снятия “несущей” волны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ с падающего поля аналогична снятию несущей частоты при временной обработке. Функции $\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ удовлетворяют уравнению, следующему из (6.8) с учетом (6.12):

$$\nabla^2 \mu(\mathbf{z}, \mathbf{k}) + 2i\mathbf{k}(\nabla \mu(\mathbf{z}, \mathbf{k})) = v(\mathbf{z})\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k}). \quad (6.13)$$

Интегральная форма соотношения (6.13) является аналогом уравнения Липпмана–Швингера для полей $\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k})$:

$$\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = 1 + \int_{\mathfrak{R}} G_{\mu}(\mathbf{z} - \mathbf{r}, \mathbf{k}) \mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) v(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (6.14)$$

где $G_{\mu}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ – функция Грина–Фаддеева в терминах полей $\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k})$, т.е. функция Грина оператора $\nabla^2 + 2i\mathbf{k}\nabla$. По аналогии с (6.12), имеет место связь $G_{\mu}(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{z}) G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$.

В отличие от классических функций Грина, являющихся изотропными относительно направления в однородном координатном пространстве, функции Грина–Фаддеева $G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ и $G_{\mu}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ изотропией не обладают. При этом вектор $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D$ выступает в качестве параметра, который определяет характер анизотропии этих функций. Предельные значения функций $G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ и $G_{\mu}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ получаются при $|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$. Эти значения кардинальным образом зависят от величины угла между векторами \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_I , а также от ориентации как действительной \mathbf{k}_R , так и мнимой \mathbf{k}_I частей волнового вектора \mathbf{k} . В частности, классические функции Грина однородного безграничного пространства $G_0^{\pm}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R)$, соответствующие запаздывающим и опережающим волнам, получаются как предел функции $G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z}) G_{\mu}(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ при $|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$, если \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_I либо сонаправлены ($\mathbf{k}_I \uparrow\uparrow \mathbf{k}_R$), либо направлены противоположно ($\mathbf{k}_I \uparrow\downarrow \mathbf{k}_R$):

$$G_0^{\pm}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R) \equiv G_0^{\pm}(|\mathbf{z}|, |\mathbf{k}| = k_0) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{z}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_{\mu} \left(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R \pm i\varepsilon \frac{\mathbf{k}_R}{|\mathbf{k}_R|} \right). \quad (6.15)$$

Подобно этому определяются и сами классические запаздывающие и опережающие волновые поля $u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R)$:

$$u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Psi \left(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R \pm i\varepsilon \frac{\mathbf{k}_R}{|\mathbf{k}_R|} \right). \quad (6.16)$$

Аналогичным образом, обобщением амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$, где $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^D$, на случай комплексных волновых векторов является функция $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$, где $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^D$. Эта функция, определяемая по аналогии с (6.4), рассматривается для комплексных векторов $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^D$ с одинаковой мнимой добавкой $\mathbf{k}_I = \mathbf{I}_I$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{k}, \mathbf{I}) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{I}\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp[-i(\mathbf{I} - \mathbf{k})\mathbf{r}] d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp[-i(\mathbf{I}_R - \mathbf{k}_R)\mathbf{r}] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Классические амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{I} = \mathbf{I}_R) \equiv f^+(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ и $f^-(\mathbf{k}, \mathbf{I})$, соответствующие запаздывающему $u^+(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ и опережающему $u^-(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ полям, получаются как предельные значения обобщенной амплитуды рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ при $|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$, когда векторы \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_I остаются при переходе к пределу сонаправленными друг другу (для f^+) или направленными противоположно (для f^-):

$$f^\pm(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{I} = \mathbf{I}_R) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h \left(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \pm i\varepsilon \frac{\mathbf{k}_R}{|\mathbf{k}_R|}, \mathbf{I}_R \right).$$

Обобщенные поля реально в эксперименте не возбуждаются и не принимаются, но измеренная в эксперименте (или пересчитанная из экспериментальных данных) амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{I} = \mathbf{I}_R)$ для запаздывающего поля позволяет найти предельные значения

$$h_\gamma(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{I} = \mathbf{I}_R) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\varepsilon \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}_R)$$

обобщенной амплитуды рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ ($\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^D$) для произвольной ориентации в направлении $\boldsymbol{\gamma}$ ($|\boldsymbol{\gamma}| = 1$) бесконечно малой мнимой добавки $\mathbf{k}_I = \varepsilon \boldsymbol{\gamma} \rightarrow 0$, где $\varepsilon = |\mathbf{k}_I|$.

Ниже приводятся некоторые соотношения (их обоснования со ссылками на соответствующие оригинальные работы можно найти, например, в [А 131 – раздел 16.1]), ко-

торые связывают предельные значения функций, обобщенных на случай комплексных волновых векторов, с классическими функциями. Так, в [335] вводятся предельные значения функции Грина–Фаддеева:

$$G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\varepsilon\gamma),$$

и тогда предельные значения

$$\Psi_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\varepsilon\gamma)$$

обобщенных волновых полей Ψ связаны с классическими полями $u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ соотношением [124 (глава III)]:

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}) &= u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}) \pm \\ &\pm 2\pi i \int_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^D} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \theta[\pm(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \gamma)] \delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) u^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{m}) d\mathbf{m}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D, \quad \mathbf{k}^2 = k_0^2,$$

где $\theta(t) = \{1 \text{ при } t > 0; 0 \text{ при } t \leq 0\}$ – функция Хевисайда.

Уравнение (6.18) и уравнение (6.6) для взаимозависимости функций $u^+(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ и $u^-(\mathbf{z}, \mathbf{k})$, позволяют получить уравнение, связывающее предельные значения обобщенной амплитуды рассеяния $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ и классическую амплитуду рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ для запаздывающего поля в пространстве с размерностью $D = 2, 3$ [124 (уравнение 3.7 главы III); 136 (уравнение 1.7); 335]:

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) + 2\pi i \int_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^D} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \gamma)] \delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) f(\mathbf{m}, \mathbf{I}) d\mathbf{m}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^D; \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{I}| = k_0.$$

Поскольку

$$\delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) = \delta(\mathbf{m}^2 - k_0^2) = \frac{1}{2|\mathbf{m}|} \left[\delta(|\mathbf{m}| - k_0) + \delta(|\mathbf{m}| + k_0) \right] \quad (6.20)$$

и $d\mathbf{m} = |\mathbf{m}|^{D-1} d|\mathbf{m}| d\mathbf{e}_m$, где $\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}$ – единичный вектор, то (6.19) принимает вид

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) + \pi i k_0^{D-2} \int_{|\mathbf{m}|=k_0} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \gamma)] f(\mathbf{m}, \mathbf{I}) d\mathbf{e}_m, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^D, \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{I}| = k_0.$$

Надо обратить внимание, что векторы \mathbf{k} и $\boldsymbol{\gamma}$ одинаковы в левой и правой частях каждого из интегральных уравнений (6.18), (6.19) и (6.21).

Введенные обобщения классических функций на случай комплексных волновых векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I$ правомерны при произвольной ориентации векторов \mathbf{k}_R и \mathbf{k}_I друг относительно друга. Однако непосредственная реконструкция рассеивателя на базе функционально-аналитических методов предполагает работу с комплексными волновыми векторами, которые удовлетворяют условию [386; 387]

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{I}^2 = k_0^2, \quad \text{где } \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^D, \quad (6.22)$$

имеющему место и в случае действительных волновых векторов в монохроматической задаче. Поскольку k_0 – действительная величина, требования (6.22) означают, во-первых, ортогональность действительной и мнимой частей каждого из волновых векторов, а, во-вторых, однозначную взаимосвязь между абсолютными величинами этих частей:

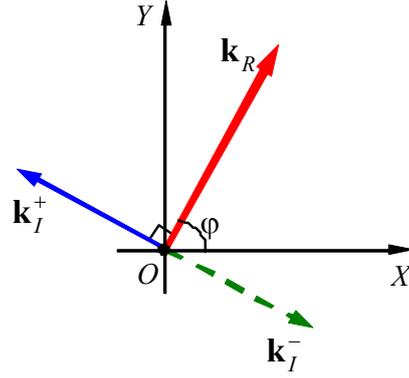
$$\mathbf{k}_R \perp \mathbf{k}_I, \quad \mathbf{k}_R^2 - \mathbf{k}_I^2 = k_0^2; \quad \mathbf{I}_R \perp \mathbf{I}_I, \quad \mathbf{I}_R^2 - \mathbf{I}_I^2 = k_0^2. \quad (6.23)$$

При этом неоднородность “возбуждаемых и регистрируемых” обобщенных волн имеет место вдоль фронта. Величина $|\mathbf{k}|^2 = \mathbf{k}_R^2 + \mathbf{k}_I^2$ может быть сколь угодно велика, однако с ростом $|\mathbf{k}_R|$ растет также $|\mathbf{k}_I|$, так что, согласно (6.23), разница их квадратов всегда равна “энергии” падающей волны k_0^2 .

В трехмерном случае требованию (6.23) отвечают волновые векторы, мнимая часть которых лежит в плоскости, перпендикулярной фиксированному вектору действительной части.

В двумерном случае существуют лишь две ортогональные ориентации ненулевой мнимой части волнового вектора относительно его фиксированной действительной части (рис. 6.1). Левосторонняя ортогональная ориентация соответствует вектору $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$, правосторонняя – вектору $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$. Далее в настоящей главе рассматриваются именно двумерные рассеиватели. Предельные значения функций $G_\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k})$, $\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{k})$, $\mu(\mathbf{z}, \mathbf{k})$ и $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$, $\mathbf{I}_I = \mathbf{I}_I^\pm \rightarrow 0$ будут обозначаться как $G_\mu^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}_R) \equiv G_\mu^\pm(\mathbf{z}, \varphi)$, $\Psi^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}_R) \equiv \Psi^\pm(\mathbf{z}, \varphi)$, $\mu^\pm(\mathbf{z}, \mathbf{k}_R) \equiv \mu^\pm(\mathbf{z}, \varphi)$ и $h^\pm(\mathbf{k}_R, \mathbf{I}_R) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi')$. Углы φ и φ' обозначают направления действительных векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R = \{k_0, \varphi\}$ и $\mathbf{I} = \mathbf{I}_R = \{k_0, \varphi'\}$ в полярной системе координат, причем $|\mathbf{k}_R| = |\mathbf{I}_R| = k_0$. Индексы “ \pm ” для перечисленных функций не означают запаздывающего или опережающего решения, а соответствуют левосторонней и правосторонней ориентации добавки $\mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$.

Рис. 6.1. Левосторонняя и правосторонняя ортогональные ориентации вектора мнимой части относительно вектора действительной части в двумерном случае.



Здесь нужно ввести понятие λ -плоскости, используемое авторами рассматриваемого алгоритма и тесно связанное с понятием комплексных волновых векторов именно в *двумерном* пространстве [137; 352; 386; 387]. Тот факт, что волновой вектор \mathbf{k} (для волнового вектора \mathbf{l} дальнейшие действия аналогичны) имеет именно две компоненты $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$, позволяет перейти от векторной переменной

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I = \left\{ k_x = k_x^R + ik_x^I, \quad k_y = k_y^R + ik_y^I \right\},$$

$$\text{где } k_x^R \equiv \text{Re}k_x, \quad k_x^I \equiv \text{Im}k_x, \quad k_y^R \equiv \text{Re}k_y, \quad k_y^I \equiv \text{Im}k_y,$$

к новой скалярной комплексной переменной λ по правилу:

$$\lambda \equiv \frac{k_x + ik_y}{k_0} = \frac{(k_x^R + ik_x^I) + i(k_y^R + ik_y^I)}{k_0} = \frac{k_x^R - k_y^I + i(k_x^I + k_y^R)}{k_0}. \quad (6.24)$$

При этом требуется только выполнение условий (6.22), равносильных условиям (6.23). Преобразование, обратное к (6.24), имеет вид

$$k_x = k_x^R + ik_x^I = \frac{k_0}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad k_y = k_y^R + ik_y^I = i \frac{k_0}{2} \left(-\lambda + \frac{1}{\lambda} \right). \quad (6.25)$$

Тем самым, каждому комплексному вектору $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ ставится в соответствие точка $\left(\frac{k_x^R - k_y^I}{k_0}, i \frac{k_x^I + k_y^R}{k_0} \right)$ на комплексной λ -плоскости.

В случае работы с действительными волновыми векторами ($\mathbf{k}_I = 0$), многообразие всех $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{k}^2 = k_0^2$, отображается на окружность единичного радиуса $|\lambda| = 1$. Когда же $\mathbf{k}_I \neq 0$, величина $|\lambda|$ зависит от ориентации мнимой добавки относительно вектора \mathbf{k}_R . Так, из (6.24) с учетом того, что $\mathbf{k}_R^2 = (k_x^R)^2 + (k_y^R)^2$ и $\mathbf{k}_I^2 = (k_x^I)^2 + (k_y^I)^2$, вытекает:

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{k_0^2} \left[(k_x^R - k_y^I)^2 + (k_x^I + k_y^R)^2 \right] = \frac{1}{k_0^2} \left[\mathbf{k}_R^2 + \mathbf{k}_I^2 - 2(k_x^R k_y^I - k_x^I k_y^R) \right]. \quad (6.26)$$

Пусть φ – угол между вектором \mathbf{k}_R и осью OX ; тогда

$$k_x^R = |\mathbf{k}_R| \cos \varphi, \quad k_y^R = |\mathbf{k}_R| \sin \varphi, \quad (6.27)$$

и для декартовых компонент мнимой части имеют место соотношения (рис. 6.1)

$$k_x^I = \mp |\mathbf{k}_I| \sin \varphi, \quad k_y^I = \pm |\mathbf{k}_I| \cos \varphi \quad \text{при } \mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm. \quad (6.28)$$

Следовательно, $-2(k_x^R k_y^I - k_x^I k_y^R) = \mp 2|\mathbf{k}_R| \cdot |\mathbf{k}_I^\pm|$, и подстановка этого соотношения в (6.26) дает:

$$|\lambda| = \frac{1}{k_0} \left(|\mathbf{k}_R| \mp |\mathbf{k}_I^\pm| \right) = \frac{1}{k_0} \left(\sqrt{k_0^2 + (\mathbf{k}_I^\pm)^2} \mp |\mathbf{k}_I^\pm| \right) \quad \text{при } \mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm, \quad (6.29)$$

так как $|\mathbf{k}_R| = \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}_I^2}$, согласно (6.23).

В отличие от неизменной в монохроматическом случае величины $\mathbf{k}^2 = k_0^2$, модуль комплексного волнового вектора $|\mathbf{k}|$ зависит от величины мнимой ортогональной добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$, но не зависит от ориентации этой добавки:

$$|\mathbf{k}|^2 = |\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I|^2 = \mathbf{k}_R^2 + \mathbf{k}_I^2 = k_0^2 + 2\mathbf{k}_I^2, \quad (6.30)$$

в силу (6.23). Следовательно, по мере увеличения $|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_I^\pm|$ значение $|\mathbf{k}|$ всегда монотонно увеличивается.

Из (6.29) видно, что в случае левосторонней мнимой добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$ с ростом $|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_I^+|$ от 0 до ∞ величина волнового вектора $|\mathbf{k}|$ увеличивается, а величина $|\lambda| = \frac{1}{k_0} \left(\sqrt{k_0^2 + (\mathbf{k}_I^+)^2} - |\mathbf{k}_I^+| \right)$ монотонно уменьшается от 1 до 0: $\lim_{|\mathbf{k}_I^+| \rightarrow \infty} |\lambda| = 0$. По этой причине при изменении величины и направления вектора \mathbf{k}_R (следовательно, и $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$) на комплексной λ -плоскости становятся достижимыми все точки λ , которые лежат *внутри* окружности единичного радиуса: $|\lambda| < 1$.

Аналогично, в случае правосторонней мнимой добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$ с ростом $|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_I^-|$ от 0 до ∞ величина $|\lambda| = \frac{1}{k_0} \left(\sqrt{k_0^2 + (\mathbf{k}_I^-)^2} + |\mathbf{k}_I^-| \right)$ монотонно увеличивается.

ется от 1 до ∞ : $\lim_{|\mathbf{k}_I^-| \rightarrow \infty} |\lambda| \rightarrow \infty$. При изменении \mathbf{k}_R достигаются все точки λ , лежащие *вне* окружности единичного радиуса: $|\lambda| > 1$. Таким образом, устанавливается взаимнооднозначное соответствие между волновым вектором $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ и точкой на комплексной λ -плоскости, а также, в частности, между величиной вектора \mathbf{k}_I с фиксированной ортогональной ориентацией и точкой на λ -плоскости. Итак,

$$|\lambda| \rightarrow 1 \text{ при } |\mathbf{k}_I^\pm| \rightarrow 0; \quad |\lambda| < 1 \text{ при } \mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+; \quad |\lambda| > 1 \text{ при } \mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-.$$

Приводимые далее в настоящей части уравнения справедливы для *произвольной* точки \mathbf{z} двумерного (см. главы 6–8) или трехмерного (см. главу 9) пространства, как внутри области рассеяния \mathfrak{R} , так и вне нее. Однако уравнения будут рассматриваться в рамках алгоритмов восстановления функции рассеивателя и полей внутри области \mathfrak{R} , и поэтому вместо общего аргумента $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^D$ будет использоваться аргумент \mathbf{r} , обозначающий, прежде всего, его принадлежность к области \mathfrak{R} .

Известная из эксперимента амплитуда рассеяния

$$f(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{I} = \mathbf{I}_R) \equiv f(\varphi, \varphi') \equiv f^+(\varphi, \varphi') \quad (|\mathbf{k}| = |\mathbf{I}| = k_0),$$

соответствующая запаздывающему классическому полю, позволяет найти предельные значения $h_\gamma(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R, \mathbf{I} = \mathbf{I}_R) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} h(\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\varepsilon \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}_R)$ обобщенной амплитуды рассеяния, определенные для произвольной ориентации в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ бесконечно малой мнимой добавки, с помощью интегрального уравнения (6.19), или (6.21). В частности, в двумерном случае ($D = 2$) при ортогональных бесконечно малых мнимых добавках $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm = \varepsilon \boldsymbol{\gamma}^\pm \rightarrow 0$, ориентированных в направлениях единичных векторов $\boldsymbol{\gamma}^\pm$, вектор $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\pm$ перпендикулярен вектору $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R$. Тогда при фиксированных \mathbf{k} и $\boldsymbol{\gamma}$ скалярное произведение $(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})$ будет неотрицательно, если вектор \mathbf{m} опережает по фазе вектор \mathbf{k} не более чем на π в случае $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^+$ и отстает по фазе от вектора \mathbf{k} не более чем на π в случае $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^-$ (рис. 6.2). Следовательно, с учетом обозначений $\mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}$, $\mathbf{I} = \{k_0, \varphi'\}$, $\mathbf{m} = \{k_0, \varphi''\}$ и $d\mathbf{e}_\mathbf{m} = d\varphi''$, предельные значения $h_{\boldsymbol{\gamma}^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{I}) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi')$ подчиняются уравнению [386]:

$$h^\pm(\varphi, \varphi') - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi'') \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] f(\varphi'', \varphi') d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'). \quad (6.31)$$

Уравнение (6.31), в котором переменная φ играет роль параметра, линейно относительно неизвестной функции $h^\pm(\varphi, \varphi')$. Интегральный член обеспечивает учет перерассеяния волн на неоднородности среды и, в то же время, придает нелинейный характер этому уравнению относительно данных рассеяния $f(\varphi, \varphi')$. Система для нахождения $h^\pm(\varphi, \varphi')$ получается перебором всех φ' при фиксированном φ .

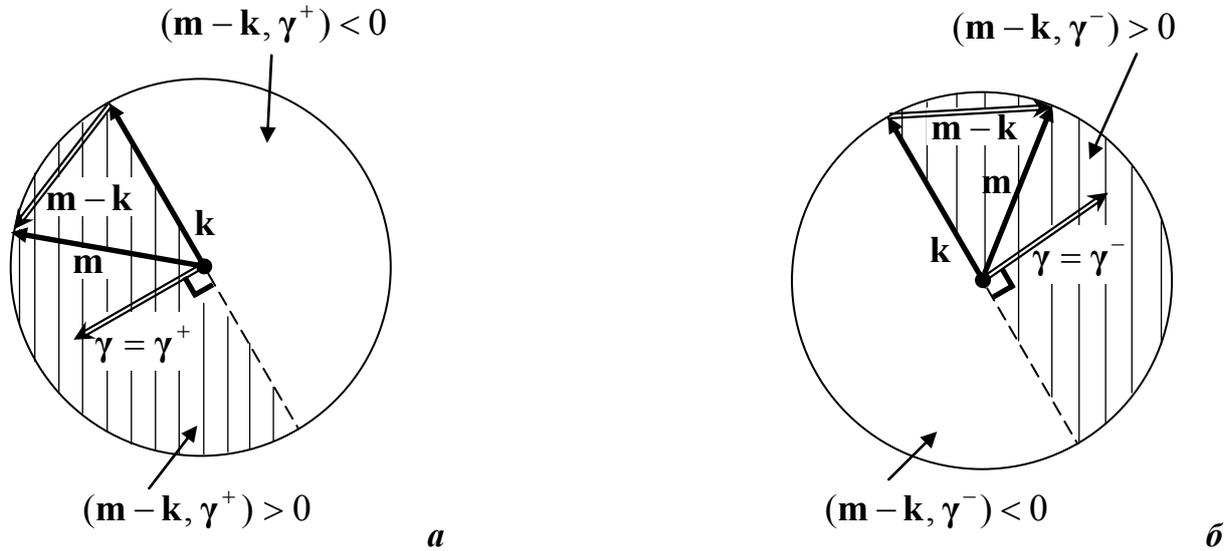


Рис. 6.2. Зависимость знака скалярного произведения $(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})$ от направления вектора \mathbf{m} ($|\mathbf{m}| = |\mathbf{k}|$) при фиксированном векторе $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R$ и фиксированном векторе $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\pm$, ортогональном к \mathbf{k} . Заштрихованы области, соответствующие тем направлениям вектора \mathbf{m} , при которых $(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) > 0$ в случае $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^+$ (а) и $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^-$ (б).

Далее в двумерном случае на основе $h^\pm(\varphi, \varphi')$ могут быть вычислены функции $\rho(\varphi, \varphi')$ или $\bar{\rho}(\varphi, \varphi')$, по своей роли являющиеся ядрами в соответствующих интегральных уравнениях связи предельных значений $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ обобщенного волнового поля $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ [352; 388]:

$$\Psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - \Psi^-(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') \Psi^-(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi', \quad (6.32)$$

$$\Psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - \Psi^-(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\varphi, \varphi') \Psi^+(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi'.$$

Аналогичные соотношения можно также написать для предельных значений $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ функции $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, так как $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Уравнения типа (6.32) будут далее называться ρ -соотношениями.

Уравнения, подобные (6.32), существуют и в классическом случае; при этом роль функций Ψ^\pm играют запаздывающее и опережающее волновые поля u^\pm , подчиняющиеся уравнению Гельмгольца (6.2) и соотношению (6.16), а вместо функций $\rho(\varphi, \varphi')$ и $\bar{\rho}(\varphi, \varphi')$ стоят классические амплитуды рассеяния $f^\pm(\varphi, \varphi')$. Одно из таких интегральных уравнений – (6.6), а другое выражение получается, если в (6.6) поменять местами индексы “плюс” и “минус”, где функция $f^-(\varphi, \varphi')$ рассчитывается из $f^+(\varphi, \varphi') \equiv f(\varphi, \varphi')$ на основе уравнения (6.21), поскольку $f^-(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ при $\gamma = -\frac{\mathbf{k}_R}{|\mathbf{k}_R|}$:

$$u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - u^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \mp 2\pi i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^D} f^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{l}^2) u^\mp(\mathbf{r}, \mathbf{l}) d\mathbf{l}, \quad (6.33)$$

или, в силу (6.20),

$$u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - u^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \mp \pi i k_0^{D-2} \int_{|\mathbf{l}|=k_0} f^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{l}) u^\mp(\mathbf{r}, \mathbf{l}) d\mathbf{e}_\mathbf{l}, \quad (6.34)$$

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{l}| = k_0, \quad \mathbf{e}_\mathbf{l} = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}.$$

Уравнения для нахождения $\rho(\varphi, \varphi')$ и $\bar{\rho}(\varphi, \varphi')$ строятся на основе уравнения связи между обобщенными полями $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ и одним из классических полей $u^-(\mathbf{r}, \varphi)$ или $u^+(\mathbf{r}, \varphi)$. В общем случае, для предельных значений $\Psi_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\varepsilon \boldsymbol{\gamma})$ справедливо уравнение (6.18). Из него при $D = 2$ и $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$, с учетом (6.20), получается:

$$\begin{aligned} \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi) &= u^-(\mathbf{r}, \varphi) - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi') \theta[\mp \sin(\varphi' - \varphi)] u^-(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi', \\ \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi) &= u^+(\mathbf{r}, \varphi) + \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi') \theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)] u^+(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi'. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Следовательно, разность $\Psi^+ - \Psi^-$, стоящая в левой части уравнения (6.32), будет определяться интегралом от комбинации функций $h^\pm(\varphi, \varphi')$ и $u^-(\mathbf{r}, \varphi)$ или $u^+(\mathbf{r}, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \Psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - \Psi^-(\mathbf{r}, \varphi) &= \mp \pi i \int_0^{2\pi} \left\{ h^+(\varphi, \varphi') \theta[\mp \sin(\varphi' - \varphi)] - \right. \\ &\quad \left. - h^-(\varphi, \varphi') \theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)] \right\} u^\mp(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi'. \end{aligned}$$

В полученном подынтегральном выражении следует выразить, с помощью уравнения (6.35), одну из функций $u^{\mp}(\mathbf{r}, \varphi)$ через функцию $\Psi^{-}(\mathbf{r}, \varphi)$ или через $\Psi^{+}(\mathbf{r}, \varphi)$ и сопоставить результат с видом соответствующего уравнения (6.32). В итоге получается, что функции $\rho(\varphi, \varphi')$ и $\bar{\rho}(\varphi, \varphi')$ подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \varphi') + \pi i \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi'') \theta[\mp \sin(\varphi'' - \varphi')] f_{1,2}(\varphi'', \varphi') d\varphi'' &= -\pi i f_{1,2}(\varphi, \varphi'), \\ \bar{\rho}(\varphi, \varphi') - \pi i \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\varphi, \varphi'') \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi')] f_{1,2}(\varphi'', \varphi') d\varphi'' &= -\pi i f_{1,2}(\varphi, \varphi'), \end{aligned} \quad (6.36)$$

в которых функция $f_1(\varphi, \varphi')$ или равноправная функция $f_2(\varphi, \varphi')$ являются линейной комбинацией функций $h^{\pm}(\varphi, \varphi')$:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi, \varphi') &= \theta[-\sin(\varphi' - \varphi)] h^{+}(\varphi, \varphi') - \theta[\sin(\varphi' - \varphi)] h^{-}(\varphi, \varphi'), \\ f_2(\varphi, \varphi') &= \theta[-\sin(\varphi' - \varphi)] h^{-}(\varphi, \varphi') - \theta[\sin(\varphi' - \varphi)] h^{+}(\varphi, \varphi'). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Интегральный член в (6.36) обязан своим происхождением опять же учету многократного рассеяния волн. Системы для определения $\rho(\varphi, \varphi')$ и $\bar{\rho}(\varphi, \varphi')$ формируются путем рассмотрения всех φ' при каждом фиксированном φ .

Следующий этап связан с определением на основе $\rho(\varphi, \varphi')$ или $\bar{\rho}(\varphi, \varphi')$ полей $\mu^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi)$ и функции скачка $K(\mathbf{r}, \varphi)$, по своему физическому смыслу характеризующей отличие друг от друга предельных значений $\mu^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi)$ функции $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ при стремлении к нулю левосторонней или правосторонней мнимой добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^{\pm} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}, \varphi) &\equiv \mu^{+}(\mathbf{r}, \varphi) - \mu^{-}(\mathbf{r}, \varphi) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \left\{ \Psi^{+}(\mathbf{r}, \varphi) - \Psi^{-}(\mathbf{r}, \varphi) \right\} = \\ &= \exp[-ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \left\{ \Psi^{+}(\mathbf{r}, \varphi) - \Psi^{-}(\mathbf{r}, \varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

где $\mathbf{r} = \{x; y\}$ в декартовой системе координат. Левая часть уравнений (6.32) пропорциональна искомой величине $K(\mathbf{r}, \varphi)$, а в правой части этих уравнений через $K(\mathbf{r}, \varphi)$ можно выразить функции $\Psi^{\mp}(\mathbf{r}, \varphi)$ или $\mu^{\mp}(\mathbf{r}, \varphi)$. При этом необходимо различать два случая, соответствующие разным типам рассеивателей.

Первый случай соответствует произвольному двумерному рассеивателю, который обладает достаточно широким пространственным спектром. За счет этого при формальном математическом переходе от действительных волновых векторов к комплексным, т.е. от плоских монохроматических волн к неоднородным монохроматическим – в силу требований (6.22) – волнам, данный рассеиватель может породить столь сильное рассеяние назад обобщенных неоднородных волн, что его необходимо учитывать для строгой рекон-

струкции рассеивателя. Такое обратное рассеяние описывается функцией $h(\mathbf{k}, \mathbf{I} = -\mathbf{k}^*)$, где верхний символ “*” означает комплексное сопряжение. И в двумерном, и в трехмерном случаях функция $h(\mathbf{k}, \mathbf{I} = -\mathbf{k}^*)$ ($\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^D$) является аналогом классической амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I} = -\mathbf{k})$ ($\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^D$). Из (6.5) видно, что функция $f(\mathbf{k}, \mathbf{I} = -\mathbf{k})$ пропорциональна классическому полю плоских волн в дальней зоне, рассеянному назад, т.е. в направлении вектора $\mathbf{I} = -\mathbf{k}$. Одновременно из (6.4) следует, что $f(\mathbf{k}, \mathbf{I} = -\mathbf{k})$ порождается компонентами $\tilde{I}(\mathbf{I} = -\mathbf{k}, \mathbf{k})$ пространственного спектра (6.3) классических вторичных источников $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv I^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{r})u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Таким образом, за рассеянное назад классическое поле ответственны именно пространственные компоненты $\tilde{I}(\mathbf{I} = -\mathbf{k}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$. По аналогии, согласно (6.17), обобщенная амплитуда рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ описывает рассеяние неоднородных обобщенных полей в направлении действительной части \mathbf{I}_R волнового вектора \mathbf{I} , если неоднородная зондирующая волна распространяется в направлении волнового вектора \mathbf{k}_R . Тогда функция

$$h(\mathbf{k}, \mathbf{I} = -\mathbf{k}^*) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(i 2\mathbf{k}_R \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \text{ где } \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^D, \quad (6.39)$$

описывает рассеяние обобщенных волн назад, и это рассеяние назад порождается за счет компонент $\xi = -2\mathbf{k}_R$ пространственного спектра $\tilde{I}_\mu(\xi, \mathbf{k}) \equiv \int_{\mathfrak{R}} I_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\xi \mathbf{r}) d\mathbf{r}$ обобщенных вторичных источников $I_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D$.

За счет присутствия рассеяния назад обобщенных полей, функция $\mu^-(\mathbf{r}, \varphi)$ с необходимостью выражается через обе функции $K(\mathbf{r}, \varphi)$ и $h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*)$. По этой причине для восстановления обобщенных полей и, в итоге, функции рассеивателя необходимо знать $h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*)$, причем для *всех* комплексных $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ [А 83; 386; 389]. Однако сама функция $h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*)$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$), в отличие от $f(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$), не является экспериментально измеряемой величиной, а пересчитывается [136; 137; 367] из измеренной амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ ($\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$). Процедура пересчета обладает сильной неустойчивостью, быстро нарастающей по мере увеличения мнимой части волнового вектора. Это не позволяет на практике вычислить $h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*)$ с приемлемой точностью и, в конечном счете, адекватно восстановить рассеиватель [А 83; А 177].

Второй случай предполагает работу с классом двумерных рассеивателей, которые *при всех ракурсах* облучения создают пренебрежимо малое рассеяние назад неоднородных обобщенных полей. Математически это требование выражается в виде [386; 389]:

$$h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*) \equiv 0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2, \quad \mathbf{k}^2 = k_0^2, \quad (6.40)$$

т.е., согласно (6.39), при каждом фиксированном \mathbf{k} должно выполняться условие

$$\tilde{I}_\mu(\boldsymbol{\xi} = -2\mathbf{k}_R, \mathbf{k}) = 0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2. \quad (6.41)$$

Поскольку рассеяния назад не должно быть ни при одном \mathbf{k} , а из (6.23) следует, что $|\mathbf{k}_R| = \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}_I^2}$, т.е. всегда $|\mathbf{k}_R| \geq k_0$, то требование (6.41) может быть мажорирующим образом заменено условием локализации пространственного спектра обобщенных вторичных источников внутри круга радиуса $2k_0$:

$$\tilde{I}_\mu(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k}) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{\xi}| \geq 2k_0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2.$$

В терминах классических полей требование (6.41) означает (по крайней мере, приближенно), что пространственный спектр классических вторичных источников должен быть локализован внутри круга радиуса $2k_0$ с центром в точке \mathbf{k} ; этот центр индивидуален для каждого фиксированного \mathbf{k} :

$$\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k}) = 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{\xi} - \mathbf{k}| \geq 2k_0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \quad |\mathbf{k}| = k_0. \quad (6.42)$$

Смещение центра области локализации пространственного спектра $\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k})$, по сравнению со случаем обобщенных полей, происходит из-за того, что в классическом поле $u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, в отличие от $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, не снята несущая волна $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$: см. также [А 2 (раздел 6.1)].

В случае финитных размеров области рассеяния \mathfrak{R} пространственный спектр $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \exp(-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ функции рассеивателя $v(\mathbf{r})$ и пространственный спектр вторичных источников $\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k})$ являются аналитическими функциями. Следовательно, $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi})$ и $\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k})$ не обладают строгой финитностью области их локализации. По этой причине условия (6.41) или (6.42) могут выполняться лишь приближенно.

Условие (6.42) с практической точки зрения более удобно, чем (6.40) или (6.41), поскольку его справедливость легче проверить, исходя из оценки ширины пространственного спектра $\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k})$ для заданного класса рассеивателей, – об оценке этой ширины см. [А 2 (раздел 6.5); А 10].

Процессы многократного рассеяния полей приводят к расширению линейных размеров области локализации пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k})$ по сравнению с пространственным спектром рассеивателя $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi})$ в некоторое количество раз $m_0 \geq 1$. В классическом случае этот эффект обсуждался, например, в [А 2 (раздел 6.1)]. В случае обобщенных волн ситуация аналогична, поскольку поле $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ и вторичные источники $I_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv v(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, можно представить в виде ряда Борна–Неймана по степеням функции рассеивателя $v(\mathbf{r})$ с помощью уравнения (6.14). Тогда выражение (6.39)

для $h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*)$ представляется в виде ряда Борна–Неймана по степеням $\tilde{v}(\xi)$. Следовательно, условие (6.41) или (6.42) может выполняться, если пространственный спектр рассеивателя локализуется в области с радиусом $\Xi = 2k_0/m_0$, меньшим $2k_0$:

$$\tilde{v}(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geq 2k_0/m_0; \quad (6.43)$$

коэффициент $m_0 \geq 1$ характеризует увеличение линейных размеров области локализации пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ при фиксированном \mathbf{k} по сравнению с $\tilde{v}(\xi)$. Значение m_0 индивидуально для конкретной функции рассеивателя $v(\mathbf{r})$ и должно быть таким, чтобы многократное рассеяние не приводило к расширению пространственного спектра вторичных источников за пределы круга радиуса $2k_0$. Чем сильнее рассеиватель, тем больше m_0 ; поэтому условие (6.41) или (6.42) приближенно может быть выполнено для слабых рассеивателей с достаточно широким пространственным спектром (m_0 близко к 1) и для сравнительно узкополосных по пространственному спектру ($m_0 > 1$) рассеивателей средней силы, – классификация рассеивателей по их силе дана в (1.42)–(1.44).

Ограничение (6.43) на пространственный спектр рассеивателя обеспечивает выполнение требований (6.41) или (6.42), означающих отсутствие рассеяние назад неоднородных волн для любого ракурса облучения рассеивателя, т.е. выполнение требования $h(\mathbf{k}, -\mathbf{k}^*) \equiv 0$, $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. В то же время, отсутствие рассеяния назад в классическом случае, – т.е. $f(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) \equiv 0$, $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{k}^2 = k_0^2$, – является необходимым, но не всегда достаточным условием выполнения условий (6.41) или (6.42). Это связано с тем, что рассеяние назад классических волн будет практически отсутствовать, если спектральные компоненты $\tilde{v}(\xi)$ пренебрежимо малы в определенных областях пространственных частот вне круга радиуса $2k_0/m_0$, хотя, в отличие от случая обобщенных полей, допустимы конечные области значений ξ , в которых значения компонент $\tilde{v}(\xi)$ сколь угодно велики.

При отсутствии рассеяния назад обобщенных полей функция $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ однозначным образом связана с величиной $K(\mathbf{r}, \varphi)$ своего скачка (6.38) по формуле, являющейся следствием формулы Сохоцкого–Племеля [390 (§ 16)]:

$$\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\mathbf{r}, \varphi'') \exp(i\varphi'')}{\exp(i\varphi'') - \frac{k_x + ik_y}{k_0}} d\varphi'' \quad , \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2, \quad (6.44)$$

где k_x и k_y – комплексные числа, соответствующие абсциссе и ординате вектора \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I = \left\{ k_x = k_x^R + ik_x^I, \quad k_y = k_y^R + ik_y^I \right\}.$$

Рассмотрение выражения (6.44) при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$, т.е. при $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \rightarrow \mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$, в итоге дает:

$$\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\mathbf{r}, \varphi'') \chi^\pm(\varphi - \varphi'') d\varphi'', \text{ где } \chi^\pm(\varphi) \equiv \frac{1}{1 - (1 \mp 0) \cdot \exp(i\varphi)}. \quad (6.45)$$

Выражение (1 ∓ 0) означает присутствие бесконечно малой отрицательной (-0) или положительной ($+0$) добавки к единице. Кроме того, левая часть первого уравнения (6.32) – это

$$\begin{aligned} \Psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - \Psi^-(\mathbf{r}, \varphi) &= \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) [\mu^+(\mathbf{r}, \varphi) - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi)] = \\ &= \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) K(\mathbf{r}, \varphi) = \exp[ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] K(\mathbf{r}, \varphi), \end{aligned}$$

где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R = \{k_0, \varphi\}$, а в правой части функция

$$\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi') = \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r}) \mu^-(\mathbf{r}, \varphi') = \exp[ik_0(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')] \mu^-(\mathbf{r}, \varphi')$$

при $\mathbf{k}' = \{k_0, \varphi'\}$ выражается через K с помощью (6.45). В итоге получается уравнение для нахождения $K(\mathbf{r}, \varphi)$ по функции $\rho(\varphi, \varphi')$ [391]:

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}, \varphi) &= \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') \exp[ik_0 \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}] \times \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\mathbf{r}, \varphi'') d\varphi''}{1 - (1 + 0) \cdot \exp[i(\varphi' - \varphi'')]} \right] d\varphi'; \quad \mathbf{r} = \{x, y\}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Система уравнений получается дискретным перебором всех φ и решается при фиксированном \mathbf{r} .

Раздел 6.2. Уравнения типа Марченко–Ньютона–Роуза в терминах обобщенных вторичных источников и данных рассеяния. Роль соотношения Сохоцкого в обеспечении единственности решения

В [380] обсуждалась возможность практической реализации метода решения акустической обратной задачи рассеяния путем восстановления источников рассеянного поля и самого поля внутри рассеивателя. В основе данного подхода лежит интегральное уравнение связи неизвестного акустического поля внутри рассеивателя с данными рассеяния, измеряемыми для разных ракурсов облучения зондирующими сигналами и для разных положений приемников. Попытка решения обратной задачи рассеяния этим методом была предпринята в цикле работ Дж. Роуза с соавторами. Исходным в исследованиях является выполненное Л. Д. Фаддеевым [124] и Р. Ньютоном [127; 336] обобщение уравнения

Марченко на случай многомерных квантово-механических потенциалов. Начиная с применения этого уравнения к решению плазменного волнового уравнения (равносильного уравнению Шредингера) с независимым от частоты рассеивателем [381], Дж. Роуз переходит к решению многомерной акустической обратной задачи рассеяния для дальнего поля [375; 382; 383] и впоследствии (в отличие от Р. Ньютона, оперирующего с данными рассеяния в дальнем поле) не исключает возможности измерения данных вблизи рассеивателя [384; 385; 376], в том числе, и для упругих сред. Исследование практических возможностей данного метода осуществлено в [А 21; А 81; А 82; 380].

В настоящем разделе рассматривается алгоритм типа алгоритма Роуза [А 21; 380] в терминах функций, представляющих собой обобщение классических волновых полей, функций Грина, вторичных источников и данных рассеяния на пространство комплексных волновых векторов при сохранении условия монохроматичности задачи. Предлагается модификация этого алгоритма в двумерном случае, использующая дополнительное интегральное уравнение связи для внутренних полей, что обеспечивает единственность решения. Модификация алгоритма Роуза была выполнена под влиянием схемы двумерного алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова, обсуждаемого далее в разделе 6.3 и строящегося с помощью описанного обобщения волновых функций. Алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова был предложен и изложен в работах [137; 352; 386; 391], использующих методы работ [138; 388; 392; 393]. История вопроса более подробно изложена в [268]. Первоначально алгоритм разрабатывался для решения задач рассеяния заряженных частиц на потенциале в квантовой механике. Однако уравнение Шредингера для постоянной энергии и уравнение Гельмгольца математически тождественны, и поэтому алгоритм остается в силе для обратных задач акустического рассеяния. В [А 21–А 25; А 83; А 177] алгоритм проанализирован с физической точки зрения применительно к двумерным акустическим задачам рассеяния, выявлен механизм его работы (в том числе, физический смысл операций, осуществляемых при восстановлении), и установлены пределы его применимости. В отличие от модифицированного алгоритма Роуза, алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова использует на заключительном этапе аналитическую связь между обобщенными внутренними полями и искомой функцией рассеивателя. Для практического применения весьма важно, что такая связь линейна в силу компенсации эффектов перерассеяния, имеющей место благодаря работе с обобщенным вариантом полей. В связи с этим, далее алгоритму Новикова–Гриневича–Манакова уделяется особое внимание.

Ниже дается изложение модифицированного алгоритма Роуза, а затем алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова в виде, наиболее подходящем для их использования в задачах томографического типа [А 23; А 69]. Для получения связи с алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова, уравнения типа Марченко–Ньютона–Роуза (далее сокращенно МНР) [А 21; 380] теперь будут рассматриваться для плоской падающей волны и дальней зоны приема. Это не изменяет, по сравнению с ближней зоной, ход рассуждений и получаемые выводы, но точка излучения заменяется на волновой вектор \mathbf{k} или на угол падения φ зондирующей плоской волны, исходными данными является амплитуда рассеяния, и уравнения связи с внешним полем записываются в терминах амплитуды рассеяния. Надо заметить, что название “уравнения Марченко–Ньютона–Роуза (МНР)” связано с тем, что

подобное уравнения, но во временном представлении, получено в работе [376], где оно называется уравнением Марченко–Ньютона для ближнего поля.

В классическом случае уравнения типа МНР имеют вид (6.33), или (6.34). Умножение левой и правой частей уравнений (6.33) на функцию рассеивателя $v(\mathbf{r})$ с учетом того, что

$$I^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = v(\mathbf{r}) u^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k})$$

– вторичные источники классических полей, приводит к уравнениям типа МНР для связи вторичных источников с данными рассеяния в дальней зоне для пространства размерности D :

$$\begin{cases} I^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = -2\pi i \int_{\mathbf{I} \in \mathbb{R}^D} f^+(\mathbf{k}, \mathbf{I}) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{I}^2) I^-(\mathbf{r}, \mathbf{I}) d\mathbf{I}, \\ I^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}) - I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 2\pi i \int_{\mathbf{I} \in \mathbb{R}^D} f^-(\mathbf{k}, \mathbf{I}) \delta(\mathbf{k}^2 - \mathbf{I}^2) I^+(\mathbf{r}, \mathbf{I}) d\mathbf{I}. \end{cases} \quad (6.47)$$

Уравнения связи классических вторичных источников с амплитудой рассеяния таковы:

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathfrak{R}} I^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{I}\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{I}); \quad \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^D. \quad (6.48)$$

Система уравнений (6.47)–(6.48) при заданных значениях $f^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ заведомо имеет истинное решение $I^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, соответствующее истинному рассеивателю $v(\mathbf{r})$. Однако это решение неединственно [А 132 (раздел 16.2); 380], поскольку система, состоящая только из уравнений (6.48), но с нулевой правой частью, при фиксированных \mathbf{k} и \mathbf{I} имеет целое множество решений – неизлучающих вторичных источников [А 1 (раздел 1.1); 142 (§ 3.1)].

Уравнения (6.47) и (6.48), справедливые для действительных волновых векторов \mathbf{k} и \mathbf{I} , можно обобщить в двумерной задаче на комплексные \mathbf{k} и $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^2$, используя подход, описанный в разделе 6.1. Умножение уравнений (6.32) на $v(\mathbf{r})$ дает аналоги уравнений (6.47) в случае обобщенных вторичных источников $I_\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv I_\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi) = v(\mathbf{r}) \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ (сейчас вторичные источники рассматриваются в терминах полей Ψ^\pm):

$$\begin{cases} I_\Psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - I_\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') I_\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi', \\ I_\Psi^+(\mathbf{r}, \varphi) - I_\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \widehat{\rho}(\varphi, \varphi') I_\Psi^+(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi'. \end{cases} \quad (6.49)$$

По аналогии с (6.48), уравнения связи обобщенных вторичных источников с обобщенной амплитудой рассеяния имеют вид (6.17), т.е.

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathfrak{R}} I_{\Psi}^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi) \exp(-i\mathbf{I}\mathbf{r}) d\mathbf{r} = h^{\pm}(\varphi, \varphi'), \quad \mathbf{k} = \{k_0, \varphi\}, \quad \mathbf{I} = \{k_0, \varphi'\} \quad (6.50)$$

(мнимые компоненты векторов \mathbf{k} и \mathbf{I} исчезающе малы). Функции $h^{\pm}(\varphi, \varphi')$ известны: они рассчитываются согласно (6.31) из измеряемых запаздывающих данных $f \equiv f^+(\varphi, \varphi')$.

Как и в классическом случае, неединственность решения системы (6.49)–(6.50) сохраняется [А 132 (раздел 16.2); 380].

Однако при работе с обобщенными полями $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ удается обеспечить единственность даже в монохроматической задаче в *двумерном* пространстве, если вместо (6.50) использовать соотношение Сохоцкого в виде (6.45), предполагающее отсутствие рассеяния назад обобщенных полей. Это соотношение отражает, по сути, факт аналитичности функций в пространстве углов φ падения зондирующего поля, что подробнее поясняется далее. Так, рассмотрение одного из интегральных ρ -соотношений (6.32), записываемых в терминах полей

$$\mu^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi) = \exp[-ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \Psi^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi), \quad \mathbf{r} = \{x, y\},$$

в сочетании с соответствующим соотношением Сохоцкого обеспечивает единственность восстановления значений μ^{\pm} . Например,

$$\mu^+(\mathbf{r}, \varphi) - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho_{\text{exp}}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi') \mu^-(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi' \quad (6.51)$$

$$\mu^-(\mathbf{r}, \varphi) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mu^+(\mathbf{r}, \varphi'') - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi'')] \chi^-(\varphi - \varphi'') d\varphi'', \quad (6.52)$$

где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\rho_{\text{exp}}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi') \equiv \rho(\varphi, \varphi') \exp[ik_0 \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}]$,

$$\chi^-(\varphi) = \frac{1}{1 - (1 + 0) \cdot \exp(i\varphi)}.$$

Нижняя надпись “exp” в обозначении функции $\rho_{\text{exp}}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi')$ подчеркивает присутствие экспоненциального множителя в выражении для этой функции. В правой части (6.52) учтено, что $K \equiv \mu^+ - \mu^-$.

Система уравнений (6.51)–(6.52) будет называться, в контексте анализа метода Роуза, модифицированным алгоритмом Роуза. Единственность решения следует из единст-

венности нахождения $\rho(\varphi, \varphi')$ по данным $f(\varphi, \varphi')$ с помощью (6.31), (6.36)–(6.37) и однозначности последующего решения интегрального уравнения (6.46) относительно функции $K \equiv \mu^+ - \mu^-$. Уравнение (6.46), получающееся в результате подстановки соотношения Сохоцкого (6.52) в ρ -соотношение (6.51), является одним из звеньев в алгоритме Новикова–Гриневича–Манакова, описываемого далее в разделе 6.3. Как показано авторами этого алгоритма и подтверждено численным моделированием в разделе 6.4 и разделе 7.1, решение K уравнения (6.46) единственно для не слишком сильных рассеивателей. Тогда функция μ^- непосредственно рассчитывается из (6.52) на основе найденных значений K , и далее функция μ^+ рассчитывается из (6.51) на основе μ^- . В свою очередь, единственность восстановления полей $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ приводит к единственности восстановления функции рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$, что подтверждается результатами численного моделирования, обсуждаемыми далее в § 6.4.1.

Для анализа модифицированного алгоритма Роуза и его последующей численной реализации удобно переписать уравнения (6.51)–(6.52) в терминах угловых гармоник. Как и раньше, для произвольной периодической функции $g(\varphi)$ с периодом 2π переход к угловым гармоникам $\tilde{g}(q)$ и обратно осуществляется по формулам:

$$\tilde{g}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-iq\varphi) d\varphi \equiv \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q}[g(\varphi)], \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (6.53)$$

$$g(\varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(q) \exp(iq\varphi) \equiv \hat{\Phi}_{q \rightarrow \varphi}^{-1}[\tilde{g}(q)].$$

Здесь символ “ \sim ” над функцией означает фурье-преобразование по угловой переменной, а не по пространственной. Характер фурье-преобразования в настоящем контексте и далее очевиден из смысла приводимых аргументов.

Тогда ρ -соотношение (6.51) в результате фурье-преобразования по углу φ принимает вид

$$\tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q) - \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q) = 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, -q') \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q'), \quad (6.54)$$

где $\tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q')$ – двойная угловая гармоника (по углам φ и φ') функции $\rho_{\text{exp}}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi')$. Соотношения Сохоцкого (6.45) при переходе к угловым гармоникам преобразуются к виду

$$\tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q) = \delta_{q0} + [\tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q) - \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q)] \tilde{\chi}^\pm(q), \quad \text{где } \delta_{q0} = \begin{cases} 1, & q = 0; \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (6.55)$$

Угловые гармоники $\tilde{\chi}^{\pm}(q)$ функций $\chi^{\pm}(\varphi) \equiv \frac{1}{1 - (1 \mp 0) \cdot \exp(i\varphi)}$, введенных в (6.45),

вычисляются аналитически:

$$\tilde{\chi}^{+}(q) = \begin{cases} 1 & \text{при } q = 0, 1, 2, \dots; \\ 0 & \text{при } q = -1, -2, -3, \dots; \end{cases} \quad \tilde{\chi}^{-}(q) = \begin{cases} 0 & \text{при } q = 0, 1, 2, \dots; \\ -1 & \text{при } q = -1, -2, -3, \dots \end{cases} \quad (6.56)$$

Рассмотрение любого из двух уравнений (6.55) отдельно для нулевых ($q = 0$), отрицательных ($q < 0$) и положительных ($q > 0$) угловых гармоник с учетом (6.56) приводит к одним и тем же выражениям:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^{+}(\mathbf{r}, q) &= 0 \quad \text{при } q < 0; \\ \tilde{\mu}^{-}(\mathbf{r}, q) &= 1 \quad \text{при } q = 0, \quad \tilde{\mu}^{-}(\mathbf{r}, q) = 0 \quad \text{при } q > 0. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Следовательно, оба соотношения Сохоцкого (6.55) равноправны и, с точки зрения новой информации, не дополняют друг друга. По этой причине в модифицированном алгоритме Роуза (6.51)–(6.52) используется только одно из них – (6.52).

При рассмотрении отдельно отрицательных, нулевых и положительных угловых гармоник q , ρ -соотношение (6.54) с учетом (6.57) распадается на следующие выражения:

$$\tilde{\mu}^{-}(\mathbf{r}, q) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{-1} \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, -q') \tilde{\mu}^{-}(\mathbf{r}, q') = -2\pi \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q' = 0), \quad q < 0; \quad (6.58)$$

$$\tilde{\mu}^{+}(\mathbf{r}, q) = 1 + 2\pi \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q' = 0) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{-1} \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, -q') \tilde{\mu}^{-}(\mathbf{r}, q'), \quad q = 0; \quad (6.59)$$

$$\tilde{\mu}^{+}(\mathbf{r}, q) = 2\pi \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q' = 0) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{-1} \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, -q') \tilde{\mu}^{-}(\mathbf{r}, q'), \quad q > 0; \quad (6.60)$$

здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q') &= \hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow q'} \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \rho_{\text{exp}}(\mathbf{r}, \varphi, \varphi') = \\ &= \hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow q'} \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} [\rho(\varphi, \varphi') \exp(ik_0 \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\})]. \end{aligned}$$

Итак, при переходе к угловым гармоникам из соотношения Сохоцкого следует, что значения $\tilde{\mu}^{\pm}(\mathbf{r}, q)$ отличны от нуля только для гармоник определенного знака. В силу этого факта, система модифицированных уравнений Роуза (6.51)–(6.52) распадается на

самостоятельную систему (6.58) относительно ненулевых значений отрицательных гармоник $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q < 0)$ и отдельные выражения (6.59) и (6.60) для последующего расчета ненулевых значений неотрицательных гармоник $\tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q \geq 0)$ по уже найденным $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q < 0)$.

Модифицированный алгоритм Роуза обладает рядом преимуществ. Во-первых, он сохраняет свойство *линейности* относительно неизвестных полей μ^\pm или их угловых гармоник $\tilde{\mu}^\pm$. Во-вторых, для восстановления поля не требуется знание “нефизических” данных рассеяния (соответствующих опережающим полям), в отличие от прежних вариантов систем уравнений типа МНР, в которых использовались значения опережающих полей $G^-(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega)$. В-третьих, данная система уравнений (6.51)–(6.52), или (6.58)–(6.60), однозначно разрешима, причем уже обсуждавшаяся единственность решения обеспечивается тем, что уравнения Сохоцкого обладают одновременно следующими свойствами. Уравнения Сохоцкого, в отличие от уравнений МНР, *неоднородны*, хотя и локальны по \mathbf{r} . Их неоднородность отражает тот факт, что вдали от рассеивателя значения полей $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ стремятся к значению $\mu_0^\pm(\mathbf{r}, \varphi) \equiv 1$, соответствующему падающему полю. Кроме того, из всех возможных решений, удовлетворяющих уравнениям МНР, уравнения Сохоцкого выделяют только те решения, которые обладают свойством *аналитичности*. Действительно, согласно (6.57), для любого фиксированного \mathbf{r} угловые гармоники $\tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q)$ отличны от нуля только при q определенного знака: $\tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q) = 0$ при $q > 0$ (для $\tilde{\mu}^-$) или при $q < 0$ (для $\tilde{\mu}^+$). Следовательно, $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ являются аналитическими функциями по углу падения поля φ , т.е., фактически, по комплексным векторам $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$. В данном контексте переход к комплексным \mathbf{k} , где $\mathbf{k}^2 \equiv k_0^2$, равносильен, с формальной точки зрения, переходу к комплексным φ , так как $\mathbf{k} = \{k_x = k_0 \cos \varphi, k_y = k_0 \sin \varphi\}$ и $k_x, k_y \in \mathbb{C}^2$. Именно совокупность перечисленных свойств уравнений Сохоцкого обеспечивает единственность восстановления поля, поскольку рассмотренные ранее в классическом случае системы уравнений типа МНР с дополнительными условиями не имели однозначного решения. Использованное Дж. Роузом условие причинности в t -пространстве [А 21; 376; 380] – это неявное использование факта аналитичности полей в фурье-сопряженном ω -пространстве; однако уравнения причинности однородны, так же как и основные уравнения МНР, и поэтому не могут обеспечить единственности решения. Дополнительные уравнения связи внутренних полей с внешним полем типа уравнений Липпмана–Швингера являются нелокальными, но их количество намного меньше числа неизвестных и недостаточно для обеспечения единственности [А 21; 380]. В то же время, количество дополнительных уравнений Сохоцкого (6.52) в дискретизованном варианте такое же, как количество основных уравнений МНР в терминах обобщенных полей (6.51), т.е. их достаточно много.

На основе уже найденных полей $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi) = \sum_q \tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q) \exp(iq\varphi)$ нужно восстано-

новить функцию рассеивателя $v(\mathbf{r})$. Здесь возможны несколько путей. В классическом случае, если процессы перерассеяния волн существенны, линейная связь между $v(\mathbf{r})$ и внутренним полем отсутствует. Тогда функцию рассеивателя $v(\mathbf{r})$ надо находить или из уравнения Липпмана–Швингера, или из волнового уравнения (при импульсном режиме), переходящего в уравнение Гельмгольца при монохроматическом режиме. При этом волновое уравнение и уравнение Гельмгольца связывают оценку рассеивателя со значениями поля и его производных в фиксированной точке пространства, в фиксированный момент времени, при фиксированном ракурсе облучения. Тем самым, в случае присутствия помех встает дополнительная задача объединения таких “частных” оценок рассеивателя в единую итоговую оценку [А 18]. Аналогичный путь допустим и в случае обобщенных полей. Тогда при использовании монохроматических полей $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ функция $v(\mathbf{r})$ оценивается из интегрального уравнения типа Липпмана–Швингера (6.14) или из дифференциального уравнения (6.13). Удобнее использовать поля $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$. Тогда из уравнения Гельмгольца (6.8) при $\mathbf{z} = \mathbf{r}$ и фиксированном φ следует оценка $\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi)$ функции $v(\mathbf{r})$:

$$\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi) = k_0^2 + \frac{\nabla^2 \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)}{\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)}, \text{ где } \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi) = \exp[ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi). \quad (6.61)$$

Оценка \hat{v}_{Hel} строго совпадает с истинной функцией $v(\mathbf{r})$, если $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ известны точно; иначе \hat{v}_{Hel} зависит от ракурса φ падающего поля, и требуется усреднение по всем ракурсам φ падающих полей (N_φ – количество ракурсов):

$$\langle \hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi) \rangle_\varphi = k_0^2 + \frac{1}{N_\varphi} \sum_\varphi \frac{\nabla^2 \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)}{\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)}. \quad (6.62)$$

Таким образом, последовательность оценки полей и функции рассеивателя в модифицированном алгоритме Роуза схематически имеет вид:

$$f(\varphi, \varphi') \xrightarrow{(6.31)} h^\pm(\varphi, \varphi') \xrightarrow{(6.36), (6.37)} \rho(\varphi, \varphi') \xrightarrow{(6.58)–(6.60)} \tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q) \xrightarrow{(6.62)} \langle \hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi) \rangle_\varphi.$$

Существенно, что модифицированный алгоритм Роуза получен именно для двумерных задач и не имеет непосредственного обобщения на трехмерный случай; в то же время, первоначально предполагалось, что исходный алгоритм Роуза будет справедлив как в двумерном, так и в трехмерном случаях. Кроме того, на заключительном этапе находде-

ния рассеивателя, и уравнение типа Липпмана–Швингера, и волновое уравнение или уравнение Гельмгольца связывают $v(\mathbf{r})$ с волновыми полями нелинейным образом. Более изящный путь нахождения оценки рассеивателя $v(\mathbf{r})$ – алгоритмическое объединение значений полей для всех ракурсов – реализуется в алгоритме Новикова–Гриневича–Манакова, описанию и обсуждению характерных особенностей которого посвящен следующий раздел 6.3. Здесь используется линейная связь между $v(\mathbf{r})$ и скачком обобщенных полей $K(\mathbf{r}, \varphi) \equiv \mu^+(\mathbf{r}, \varphi) - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi)$. В классическом случае подобная связь отсутствует.

Раздел 6.3. Алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова и его связь с соотношениями Марченко–Ньютона–Роуза

Алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова (НГМ), позволивший получить модифицированный алгоритм Роуза, естественно, имеет с ним ряд общих черт. Этот алгоритм, уже упоминавшийся в начале предыдущего раздела 6.2, строится на тех же ρ -соотношениях в терминах обобщенных полей (6.51), к которым добавляется соотношение Сохоцкого (6.52). НГМ-алгоритм в виде, рассматриваемом в главе 6 и главе 7, предназначен для решения обратной двумерной монохроматической задачи рассеяния. Так же как и модифицированный алгоритм Роуза, он не относится к классу итерационных алгоритмов, предлагая аналитическое решение задачи в явном виде. Решение достигается в несколько этапов. На каждом этапе решается система уравнений, *линейная* относительно неизвестных величин (поэтому итерационные методы решения необязательны) и нелинейная относительно экспериментально измеряемых данных рассеяния (за счет чего учитываются эффекты перерассеяния волн внутри рассеивателя). Размерность системы уравнений на каждом фиксированном этапе на порядки меньше, чем в случае итерационных методов, когда необходимо одновременное решение системы уравнений, общей для всей совокупности неизвестных величин и нелинейной относительно этих неизвестных. Эти и другие особенности алгоритма рассматриваются в настоящем разделе.

Последовательность восстановления характеристик двумерного рассеивателя на основе известной из эксперимента амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ в НГМ-алгоритме имеет несколько этапов. В работе [386] НГМ-алгоритму соответствуют уравнения (5.10)–(5.15), (9.7), (9.8) в нумерации данной публикации, причем аргументы функций записаны в ней в терминах λ -плоскости (см. раздел 6.1). Первые этапы уже были описаны в разделе 6.1 и ниже кратко повторяются для цельности изложения алгоритма. После выполнения предельных переходов $\mathbf{k}_J^\pm \rightarrow 0$, учитывающих ортогональную ориентацию (левостороннюю или правостороннюю) бесконечно малой мнимой добавки \mathbf{k}_J^\pm к волновому вектору, векторы \mathbf{k} и \mathbf{l} рассматриваются далее как действительные.

Эман 1. Из данных $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv f(\varphi, \varphi')$ формируется обобщенная амплитуда рассеяния $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi')$ для левосторонних и правосторонних добавок на основе интегральных уравнений (6.31):

$$h^\pm(\varphi, \varphi') - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi'') \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] f(\varphi'', \varphi') d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'). \quad (6.63)$$

Уравнения линейны относительно неизвестных функций h^\pm . В то же время, в них учитываются процессы перерассеяния волн на неоднородностях среды, и это придает нелинейный характер уравнениям относительно экспериментальных данных $f(\varphi, \varphi')$: данные рассеяния входят не только в правую часть (свободный член), но и в ядро оператора (матрицу при неизвестных). При численном расчете значения всех угловых переменных дискретизируются, и дискретизованный аналог соотношений (6.63) схематично записывается в виде

$$M_{f \rightarrow h^\pm}(\varphi, \varphi', \varphi'') h^\pm(\varphi, \varphi'') = f(\varphi, \varphi'). \quad (6.64)$$

При каждом фиксированном значении угла φ соотношения (6.64) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $h^\pm(\varphi, \varphi'')$. Матрица $M_{f \rightarrow h^\pm}(\varphi, \varphi', \varphi'')$, зависящая от φ как от параметра, состоит из единичного оператора и дискретного аналога оператора взвешенного интегрирования по углу φ'' в (6.63).

Эман 2. Из найденных значений $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ вычисляется функция $\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \equiv \rho(\varphi, \varphi')$ – ядро в первом интегральном уравнении (6.32), связывающем предельные значения обобщенных волновых полей $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ и $\Psi^\mp(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ в присутствии рассеивателя. С этой целью решаются уравнения (6.36)–(6.37) для $\rho(\varphi, \varphi')$ на основе, например, $f_1(\varphi, \varphi')$:

$$\rho(\varphi, \varphi') + \pi i \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi'') f_1(\varphi'', \varphi') \theta[\sin(\varphi' - \varphi'')] d\varphi'' = -\pi i f_1(\varphi, \varphi'), \quad (6.65)$$

где $f_1(\varphi, \varphi') = \theta[-\sin(\varphi' - \varphi)] h^+(\varphi, \varphi') - \theta[\sin(\varphi' - \varphi)] h^-(\varphi, \varphi')$.

Дискретный аналог соотношений (6.65) имеет вид

$$M_{h^\pm \rightarrow \rho}(\varphi', \varphi'') \rho(\varphi, \varphi'') = -\pi i f_1(\varphi, \varphi'). \quad (6.66)$$

Подобно (6.64), соотношения (6.66) при каждом фиксированном φ являются системой линейных алгебраических уравнений, однако матрица $M_{h^\pm \rightarrow \rho}(\varphi', \varphi'')$ при неизвестных $\rho(\varphi, \varphi'')$ не зависит от φ , в отличие от матрицы $M_{f \rightarrow h^\pm}(\varphi, \varphi', \varphi'')$.

Этапы 1 и 2 одинаковы для модифицированного алгоритма Роуза и НГМ-алгоритма. В результате выполнения этих этапов исходные данные $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ входят в функцию ρ существенно нелинейным образом.

Этап 3. Найденные значения $\rho(\varphi, \varphi')$ позволяют найти значения разностного поля $K(\mathbf{r}, \varphi) \equiv \mu^+(\mathbf{r}, \varphi) - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi)$ из уравнения (6.46), непосредственно следующего из уравнений (6.51) и (6.52):

$$K(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') \exp[ik_0 \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}] \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(\mathbf{r}, \varphi'') d\varphi''}{1 - (1+0) \cdot \exp[i(\varphi' - \varphi'')]} \right] d\varphi' ; \quad \mathbf{r} = \{x, y\}, \quad (6.67)$$

где выражение $(1+0)$ в (6.67) означает присутствие бесконечно малой положительной добавки к единице. Уравнение (6.67) можно записать в более компактном виде:

$$K(\mathbf{r}, \varphi) - S(\mathbf{r}, \varphi) = Ex^-(\mathbf{r}, \varphi) \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') Ex^+(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi' ; \quad (6.68)$$

здесь

$$Ex^\pm(\mathbf{r}, \varphi) \equiv \exp[\pm ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)], \quad \mathbf{r} = \{x, y\} ; \quad (6.69)$$

$$S(\mathbf{r}, \varphi) \equiv Ex^-(\mathbf{r}, \varphi) \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') Ex^+(\mathbf{r}, \varphi') J(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi' .$$

Интеграл

$$J(\mathbf{r}, \varphi') \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\mathbf{r}, \varphi'') \chi^-(\varphi' - \varphi'') d\varphi'' , \quad \text{где } \chi^-(\varphi) \equiv \frac{1}{1 - (1+0) \cdot \exp(i\varphi)} , \quad (6.70)$$

возникает в правой части (6.67) за счет учета эффектов перерассеяния.

Анализ соотношения (6.67) показал [А 22; А 24], что при организации процесса численного счета в качестве неизвестных удобнее рассматривать значения

$$\tilde{K}(\mathbf{r}, q) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(\mathbf{r}, \varphi) \exp(-iq\varphi) d\varphi \equiv \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} K(\mathbf{r}, \varphi) ,$$

получаемые из $K(\mathbf{r}, \varphi)$ переходом (6.53) в пространство угловых гармоник q , фурье-сопряженное пространству углов φ . Уравнения относительно $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$ получаются при-

менением к левой и правой частям (6.67) фурье-преобразования по циклической переменной φ . Итоговая система уравнений относительно угловых гармоник $\tilde{K}(\mathbf{r}, q')$ имеет вид:

$$\sum_{q'=-\infty}^{\infty} M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q') \tilde{K}(\mathbf{r}, q') = \mathcal{D}(\mathbf{r}, q); \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.71)$$

где

$$\begin{aligned} M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q') &= \\ &= \delta_{qq'} - 2\pi \tilde{\chi}^-(q') \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \left\{ Ex^-(\mathbf{r}, \varphi) \hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow -q'} [\rho(\varphi, \varphi') Ex^+(\mathbf{r}, \varphi')] \right\}; \\ \delta_{qq'} &= \begin{cases} 1 & \text{при } q = q', \\ 0 & \text{при } q \neq q'; \end{cases} \quad \mathcal{D}(\mathbf{r}, \varphi) = \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \left\{ Ex^-(\mathbf{r}, \varphi) \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') Ex^+(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi' \right\}. \end{aligned}$$

Каждая из систем решается при фиксированном \mathbf{r} , т.е. матрица $M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q')$ при известных и правая часть $\mathcal{D}(\mathbf{r}, q)$ зависят от \mathbf{r} как от параметра.

Эман 4. Наконец, на последнем этапе знание функции $K(\mathbf{r}, \varphi)$ позволяет вычислить непосредственно искомую функцию рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ на основе анализа поведения функции $\mu(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ при комплексных $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ в асимптотическом случае $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$. Для этого удобно использовать введенную в (6.24) комплексную переменную $\lambda = \frac{k_x + ik_y}{k_0}$ и рассмотреть правостороннюю ориентацию мнимой добавки к волновому вектору $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$. В итоге, искомая связь между $\nu(\mathbf{r})$ и $K(\mathbf{r}, \varphi)$ имеет вид [А 132 (§ 16.3.1); 137; 352]:

$$\nu(\mathbf{r}) = -\frac{k_0}{2\pi} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{2\pi} K(\mathbf{r}, \varphi) \exp(i\varphi) d\varphi, \quad (6.72)$$

$$\text{где } \int_0^{2\pi} K(\mathbf{r}, \varphi) \exp(i\varphi) d\varphi = 2\pi \tilde{K}(\mathbf{r}, q = -1); \quad \mathbf{r} = \{x, y\}.$$

Согласно (6.72), функция рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ при фиксированном \mathbf{r} находится на основе значения только одной угловой гармоники $\tilde{K}(\mathbf{r}, q = -1)$. В то же время,

$$\tilde{K}(\mathbf{r}, q = -1) \equiv \tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q = -1) - \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1) = -\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1), \quad (6.73)$$

поскольку $\tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q = -1) = 0$ в силу (6.57). Тогда с вычислительной точки зрения целесообразно решать не систему уравнений (6.71) относительно всех учитываемых угловых

гармоник $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$, а систему (6.58) относительно гармоник $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q)$ только с отрицательными номерами $q < 0$, имеющую в два раза меньше неизвестных:

$$\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{-1} \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, -q') \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q') = -2\pi \tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q' = 0); \quad (6.74)$$

$$q = -1, -2, \dots;$$

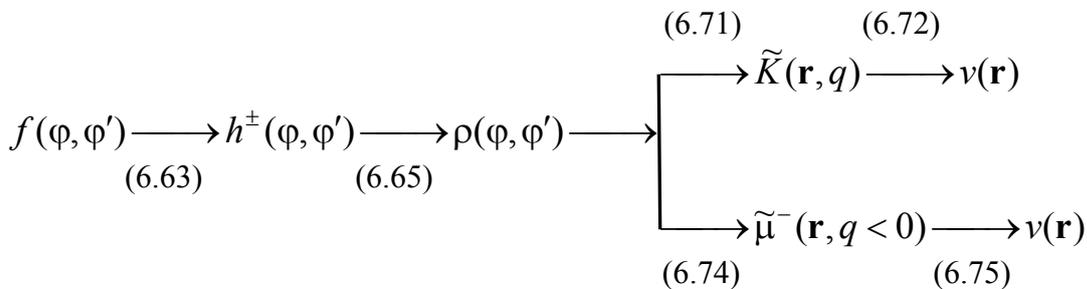
$\tilde{\rho}_{\text{exp}}(\mathbf{r}, q, q')$ – двойная угловая гармоника (по углам φ и φ') функции

$$\rho_{\text{exp}}(\varphi, \varphi') \equiv \rho(\varphi, \varphi') \exp[ik_0 \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}].$$

Результаты численного моделирования, излагаемые далее в § 6.4.1, показали, что итоговая оценка рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ является тождественной в случае системы для $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$ и системы для $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q)$. Следовательно, помехоустойчивость обеих систем совершенно одинакова, хотя формальные численные значения обратной обусловленности системы для $\tilde{\mu}^-$ могут, при восстановлении сильных рассеивателей, в $2 \div 3$ раза превосходить соответствующие значения системы для \tilde{K} . (Под обратной обусловленностью понимается отношение абсолютных значений минимального и максимального собственных чисел матрицы при неизвестных.) Таким образом, уравнения (6.74) целесообразно использовать для нахождения $\tilde{\mu}^-$, а далее находить $\nu(\mathbf{r})$ из соотношения (6.72) НГМ-алгоритма, приобретающего с учетом (6.73) вид

$$\nu(\mathbf{r}) = k_0 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1); \quad \mathbf{r} = \{x, y\}. \quad (6.75)$$

Таким образом, схема двух возможных вариантов нахождения функции рассеивателя НГМ-алгоритмом такова:



Интегральные члены в уравнениях (6.63) и (6.65) для $h^\pm(\varphi, \varphi')$ и $\rho(\varphi, \varphi')$, а также член (6.70) в уравнении (6.67) для $K(\mathbf{r}, \varphi)$ обязаны своим происхождением учету пере-

рассеяний падающего монохроматического поля плоской волны на неоднородности $v(\mathbf{r})$ и потому в первом приближении Борна (приближение однократного рассеяния) отсутствуют. Кроме того, наличие перерассеяний учитывается в исходных данных – амплитуде рассеяния $f(\varphi, \varphi')$, входящей в том или ином виде не только в свободные члены, но и в оператор при неизвестных этих уравнений. В то же время, соотношения (6.72) или (6.75) имеют один и тот же вид вне зависимости от числа учитываемых перерассеяний. Несмотря на то, что в общем случае при учете перерассеяний обратная задача рассеяния является нелинейной относительно восстанавливаемой функции рассеивателя (в силу нелинейности ряда Борна–Неймана), соотношения (6.72) или (6.75) связывают *линейным* (!) образом искомую функцию рассеивателя $v(\mathbf{r})$ и функции $K \equiv \mu^+ - \mu^-$ или μ^- , являющиеся обобщенными характеристиками внутреннего поля. При этом в построении оценки функции $v(\mathbf{r})$ участвует сразу вся совокупность полей $K(\mathbf{r}, \varphi)$, соответствующая рассмотрению *всех ракурсов* падающих полей. Такая линейность, отсутствующая в случае оценки $v(\mathbf{r})$ на основе классических полей, является отличительной и очень важной особенностью алгоритма. Линеаризация соотношений, приводящих к решению обратной задачи, достигается благодаря свойствам симметрии функций Грина–Фаддеева $G_{\mu}^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ (см. раздел 6.1) относительно направления вектора $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^{\pm} \rightarrow 0$), а также интегрированию в (6.72) по всем направлениям падения φ плоской волны. Эти свойства и операции, выполняемые в алгоритме, приводят к компенсации эффектов многократного рассеяния (для каждого фиксированного порядка по перерассеяниям) в правой части (6.72), представленной в виде ряда Борна–Неймана для полей μ^+ и μ^- по степеням функции $v(\mathbf{r})$ [А 21; А 22; А 177]. Механизм линеаризации подробно описан в [А 177].

Возможен переход к более общему алгоритму [386; 389], анализ которого выполнен в [А 83; А 177]. Общий алгоритм не требует выполнения условия (6.42), т.е. не накладывает ограничения на ширину пространственного спектра $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ и, теоретически, воспроизводит без искажения все пространственные компоненты рассеивателя $\tilde{v}(\xi)$. Однако теоретическая возможность восстановления всех компонент $\tilde{v}(\xi)$ на практике не приводит к существенному улучшению ситуации из-за возникновения неустойчивости решения [А 83; А 177] в силу того, что при нарушении условия (6.42) создается рассеяние обобщенного (неоднородного) волнового поля назад. Дело в том, что обратная задача, вне зависимости от способа решения, некорректна уже в первом приближении Борна: попытка восстановить рассеиватель с учетом его высших пространственно-спектральных частот $|\xi| > 2k_0$ приводит к неустойчивости. Простейшая процедура стабилизации решения в этом случае сводится к обнулению компонент $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| \geq 2k_0$. С ростом силы рассеивателя обратная задача рассеяния акустических волн становится нелинейной относительно функции рассеивателя, и для обеспечения устойчивости решения теперь необходимо, чтобы пространственный спектр вторичных источников был хорошо локализован внутри круга радиуса $2k_0$. Это означает, что с ростом силы рассеивателя ширина 2Ξ простран-

ственно-частотной области, в которой в основном сосредоточен спектр рассеивателя ($\tilde{v}(\xi) \approx 0$ при $|\xi| \geq \Xi$), обязана уменьшаться. Следовательно, требование достоверности восстановления приводит к более жестким ограничениям на пространственный спектр рассеивателя: должно выполняться условие

$$\tilde{v}(\xi) \approx 0 \text{ при } |\xi| \geq \frac{2k_0}{m_0}, \text{ т.е. } \Xi \leq \frac{2k_0}{m_0}, \quad (6.76)$$

где m_0 – коэффициент расширения линейных размеров области локализации пространственного спектра вторичных источников по сравнению с пространственным спектром рассеивателя. В случае нарушения этого условия процедура стабилизации, которая должна быть реализована в численном аналоге используемого алгоритма, становится более жесткой. Стабилизация предполагает обнуление в процессе восстановления компонент $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| \geq 2k_0/m_0$ [А 23]. Однако эффективность этой процедуры с ростом силы рассеивателя снижается из-за усиливающегося комбинационного влияния невоспроизводимых высоких пространственных частот $|\xi| \geq 2k_0/m_0$ на результат реконструкции $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| < 2k_0/m_0$. Общие вопросы единственности и устойчивости решения обратной задачи акустического рассеяния рассмотрены также выше в разделе 3.2 [А 2 (глава 6)].

Подводя итог, можно кратко выделить основные характерные особенности НГМ-алгоритма [А 23; А 177]. Учитываются эффекты многократного рассеяния волн, и поэтому процедура восстановления рассеивателя нелинейна относительно данных рассеяния. В то же время, на каждом этапе алгоритм остается линейным относительно искомым величин, т.е. важно, что он не относится к классу итерационных алгоритмов. Он справедлив для рассеивателей с поглощением и без него.

Входные данные (амплитуда рассеяния), требуемые для НГМ-алгоритма, зависят от углов падения и рассеяния волн, благодаря чему они вписываются естественным образом в круговую схему съема томографических данных с разных направлений в реальном эксперименте. Функция рассеивателя $v(\mathbf{r})$ может быть найдена в любой точке \mathbf{r} независимо от ее значений в других точках, что удобно для применения в практических приложениях, в частности, для задач медицинского акустического томографирования.

При организации процесса численной реконструкции возникает весьма существенная экономия вычислительных затрат по сравнению с традиционными итерационными методами. В предположении того, что амплитуда рассеяния измеряется для N_φ направлений рассеяния при каждом из N_φ заданных направлений распространения падающей волны, для восстановления рассеивателя (в конечном счете) внутреннее поле надо восстановить в $\cong N_\varphi^2$ пространственных точках \mathbf{r} . В соответствии со схемой НГМ-алгоритма это требует, по порядку величины, $\cong N_\varphi^4$ операций. Такой порядок количества операций определяется, в сущности, системами (6.71) или (6.74) для нахождения характеристик внутреннего поля, поскольку их решение в каждой фиксированной точке \mathbf{r} нуждается в

$\cong N_\phi^2$ операциях, и тогда в $\cong N_\phi^2$ точках – в $\cong N_\phi^4$ операциях. Вычислительные затраты для решения этих систем являются наибольшими, по сравнению с затратами на решение остальных уравнений НГМ-алгоритма. В то же время, разработанные итерационные алгоритмы для восстановления рассеивателей средней силы путем обращения матрицы, имеющей в двумерном случае размерность $\cong (N_\phi^2 \times N_\phi^2)$ [228; 229], нуждаются примерно в $\cong N_\phi^6$ действиях. Алгоритмы с попеременными итерациями в применении к рассеивателям средней силы [143; 185; 394] предполагают порядка $\cong N_\phi^5$ операций на каждую итерацию (использование БПФ может несколько уменьшить эту оценку), а восстановление сильного рассеивателя требует около $\cong N_\phi^6$ действий. Тем самым, НГМ-алгоритм имеет с вычислительной точки зрения существенное преимущество перед перечисленными итерационными алгоритмами (подробно итерационные процедуры описаны в [А 2 (§ 5.4.2)]), особенно значимое при восстановлении сложных объектов, для которых N_ϕ велико.

Сила акустического рефракционно-поглощающего рассеивателя и ширина пространственного спектра возбуждаемых в нем вторичных источников увеличиваются с ростом частоты зондирующего поля. Тогда можно оценить диапазон частот зондирующих волн ω , в котором рассеиватель будет адекватно восстановлен, и результаты его реконструкции будут наиболее эффективными. Этот диапазон ограничен сверху условием (6.76) хорошей локализации пространственного спектра рассеивателя внутри круга радиуса $2k_0/m_0$, поскольку коэффициент m_0 расширения пространственного спектра вторичных источников по сравнению с областью локализации $\tilde{v}(\xi)$ для рефракционной и поглощающей компонент акустического рассеивателя растет с увеличением ω . С другой стороны, диапазон допустимых частот зондирования ограничен снизу требованием томографического эксперимента, – длина волны в фоновой среде λ_0 должна быть много меньше линейных размеров рассеивателя L , поскольку пространственное разрешение, с которым можно восстановить $v(\mathbf{r})$, составляет около $\lambda_0/3$ (см. ниже § 6.4.3). Для медицинских приложений диапазон приемлемых частот зондирования, удовлетворяющих обоим упомянутым условиям, находится в диапазоне от десятков кГц до нескольких МГц [А 23; А 177].

Вопросы дискретизации и избыточности данных рассеяния, возникающие при любом методе решения обратных акустических задач рассеяния, рассматривались в общем виде выше в разделе 3.2 [А 2 (разделы 6.1–6.4)]. Кроме того, в [А 23] эти вопросы обсуждались с прикладной стороны, опять же безотносительно к конкретному методу решения.

К недостаткам НГМ-алгоритма относится, во-первых, то, что он разработан для двумерных задач и не допускает непосредственного обобщения на трехмерные задачи. Тем не менее, в настоящее время разработан и исследован на численных моделях функциональный метод решения трехмерных монохроматических задач рассеяния, обсуждаемый в главе 9. Во-вторых, в рассматриваемом варианте алгоритма есть ограничение – предполагается однородная и непоглощающая фоновая среда. Однако в [395; 396] намечен путь, предоставляющий возможность обобщения алгоритма на случай

неоднородной фоновой среды. Более того, такой прием, по-видимому, расширит область применимости НГМ-алгоритма благодаря возможности постепенного включения в рассмотрение полной амплитуды рассеяния [А 2 (п. 5.4.2.5); 140; 141; 142 (§ 7.1); 237].

Таким образом, для рассеивателя, не создающего сильного рассеяния назад, НГМ-алгоритм дает схему его восстановления, накладывающую некоторые ограничения на характеристики рассеивателя, а в остальном имеющую очень широкую область применения. Результаты численного моделирования подтверждают высокие точностные характеристики алгоритма (см. далее раздел 6.4) и его работоспособность для рассеивателей достаточно большой силы (см. раздел 7.1), свидетельствуя о перспективности практического применения алгоритма в системах акустического медицинского томографирования.

Раздел 6.4. Восстановление рефракционно-поглощающих рассеивателей. Помехоустойчивость решения

В настоящем разделе приводятся результаты численного восстановления рассеивателей и волновых полей НГМ-алгоритмом и модифицированным алгоритмом Роуза [А 12; А 21; А 68; А 84; А 85; 380]. Иллюстрируется эквивалентность конечной оценки рассеивателя, получаемой каждым из подходов при использовании всех ракурсов зондирования, и, одновременно, преимущество последнего этапа НГМ-алгоритма.

Область работоспособности обоих алгоритмов определяется двумя условиями [386; 389].

Во-первых, это условие обеспечения строгости алгоритма (6.40), эквивалентное условию (6.41) и выполняющееся в случае локализации пространственного спектра классических вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ внутри круга радиуса $2k_0$ (6.42):

$$\tilde{I}(\xi, \mathbf{k}) \approx 0 \quad \text{при} \quad |\xi - \mathbf{k}| \geq 2k_0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2, \quad |\mathbf{k}| = k_0. \quad (6.77)$$

Естественно, что для рассеивателей $\nu(\mathbf{r})$, расположенных в ограниченной области пространства, это условие может выполняться лишь приближенно.

Во-вторых, это достаточное условие для обеспечения единственности решения уравнений (6.63), (6.65) и (6.67) или (6.71) – условие на норму амплитуды рассеяния $\|f(\varphi, \varphi')\|$:

$$\|f(\varphi, \varphi')\| < \frac{1}{3\pi}, \quad \text{где} \quad \|f(\varphi, \varphi')\| \equiv \sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |f(\varphi, \varphi')|^2}. \quad (6.78)$$

Норма данных рассеяния является информативной мерой силы рассеивателя. Авторы НГМ-алгоритма приводят условие (6.78) как достаточное условие однозначной разрешимости всех систем уравнений, решаемых для нахождения функции $K(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ итерационным методом последовательных приближений. А именно, условие $\|\rho(\varphi, \varphi')\| < 1$ является достаточным условием, чтобы уравнение (6.67) для функции $K(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ было однозначно разрешимо итерационным методом последовательных приближений [388; 391]. В свою

очередь, анализ уравнений (6.63) и (6.65) для построения функции ρ из амплитуды рассеяния f показывает, что условие $\|f(\varphi, \varphi')\| < 1/(3\pi)$ является *достаточным* условием, чтобы функция $\rho(\varphi, \varphi')$ могла быть найдена из $f(\varphi, \varphi')$ опять же итерационным методом последовательных приближений, и при этом обеспечивалось бы условие $\|\rho\| < 1$. Более детально проблема единственности решения авторами алгоритма не рассматривалась, и вопрос об условии, *необходимом* для обеспечения единственности решения, не исследовался с теоретической точки зрения. По этой причине при численном моделировании на него было обращено особое внимание. Восстановление рассеивателей различных типов (характерные примеры обсуждаются далее) показало, что приведенное условие на $\|f\|$ носит сильно мажорантный характер. Реальные возможности алгоритма гораздо выше, а критическое значение $\|f\|$ по крайней мере на порядок больше.

В двумерном случае исходные данные рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ связаны с рассеянной составляющей классического запаздывающего поля в дальней зоне соотношением (6.5):

$$u_{sc}^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = -\pi\sqrt{\pi}(1+i)\frac{\exp(ik_0|\mathbf{z}|)}{\sqrt{k_0|\mathbf{z}|}} f(\mathbf{k}, \mathbf{l} = k_0\frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|}}\right), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty.$$

При численном моделировании значения $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ вычислялись посредством итерационного решения уравнения Липпмана–Швингера (1.32) относительно пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ при заданном рассеивателе

$v(\mathbf{r})$. В итоге полагалось $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{I}(\xi = \mathbf{l}, \mathbf{k})$. Методика и особенности

численного решения прямых задач рассеяния изложена в [А 2 (раздел 5.3); А 9]. Объем дискретизованных данных рассеяния должен превышать минимально необходимый объем, что обсуждалось выше в разделе 3.2 [А 2 (глава 6)].

Действительная часть функции рассеивателя (6.1) в каждой фиксированной точке \mathbf{r} связана с относительным контрастом скорости звука $\Delta c(\mathbf{r})/c_0$, где $\Delta c(\mathbf{r}) \equiv c(\mathbf{r}) - c_0$,

соотношением $\text{Re } v(\mathbf{r}) = k_0^2 - k^2(\mathbf{r}) \equiv k_0^2 - k_0^2 / \left(1 + \frac{\Delta c(\mathbf{r})}{c_0}\right)^2$, откуда

$$\frac{\Delta c(\mathbf{r})}{c_0} = -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\text{Re } v(\mathbf{r})}{k_0^2}}} \quad (6.79)$$

(по физическому смыслу $\Delta c(\mathbf{r})/c_0 \geq -1$). Оценка дополнительного набега фазы, приобретаемого волной при пересечении рассеивателя вдоль траектории l_{sr} , имеет вид:

$$\Delta\psi = \int_{l_{sr}} (k_0 - k(\mathbf{r})) dl_r = k_0 \int_{l_{sr}} \frac{\Delta c(\mathbf{r})/c_0}{1 + \Delta c(\mathbf{r})/c_0} dl_r, \quad (6.80)$$

где dl_r – длина элемента траектории в окрестности точки \mathbf{r} . Если контраст рассеивателя вдоль l_{gr} знакопеременен, то соотношение (6.80) следует использовать для оценки $\Delta\psi$ на участках с фиксированным знаком контраста $\Delta c/c_0$. При этом знак набег фазы $\Delta\psi$ принимается совпадающим со знаком Δc .

Мнимая часть функции рассеивателя (6.1) пропорциональна амплитудному коэффициенту поглощения $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ на данной частоте, а значение $c(\mathbf{r})$ во многих практических приложениях может быть заменено на c_0 , с точностью до $\Delta c(\mathbf{r})/c_0$:

$$\operatorname{Im} v(\mathbf{r}) = -2\omega \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c(\mathbf{r})} \approx -\frac{2\omega \alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c_0} \equiv -2k_0 \alpha(\mathbf{r}, \omega). \quad (6.81)$$

Восстановление чисто рефракционных дефокусирующих и фокусирующих рассеивателей, чисто поглощающих рассеивателей, а также рассеивателей, содержащих сразу рефракционную и поглощающую рассеивающие компоненты, с различной силой и формой, с различной степенью сложности пространственной структуры, дало результаты, обсуждаемые ниже [А 12; А 68; А 84; А 85].

В данном разделе 6.4 рассматриваются рассеиватели, для которых в пространственном спектре $\tilde{v}(\xi)$ практически отсутствуют высокочастотные компоненты, так что пространственный спектр вторичных источников с высокой степенью точности удовлетворяет условию (6.77) локализации внутри круга радиуса $2k_0$. Для таких рассеивателей НГМ-алгоритм и алгоритм Роуза являются, по сути, строгими. При численном моделировании длина волны полагалась условно равной $\lambda_0 = 8$ единиц дискретизации длины (далее сокращенно – е.д.д.). Единица дискретизации длины является условным пространственным масштабом, целесообразно выбираемым при численном моделировании; в данном случае это $\lambda_0/8 = 1$ е.д.д., что совпадает с пространственным шагом дискретизации функции рассеивателя вдоль каждой из декартовых осей.

§ 6.4.1. Восстановление алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова и модифицированным алгоритмом Роуза

Обобщающим примером работы НГМ-алгоритма может служить несимметричный рефракционно-поглощающий рассеиватель (рис. 6.3а, б), в пространственном спектре которого практически отсутствуют высокочастотные компоненты, и, следовательно, НГМ-алгоритм является строгим. Центральный “пик” функции $\operatorname{Re} v(\mathbf{r})$ (рис. 6.3а, в) имеет гауссовскую форму с полушириной $d_{1/2} \approx 0.58\lambda_0$ по уровню $1/e$ и амплитудным значением, соответствующим относительному контрасту скорости $\Delta c/c_0 = 0.15$, согласно (6.79). Другой пик с такими же формой и полушириной имеет смещенный центр в точке с декартовыми координатами $\{-10\lambda_0/8; 0\}$. Его амплитудное значение по абсолютной величине в 1.5 раза меньше, чем для центрального пика, и соответствует отрицательному контрасту $\Delta c/c_0 \approx -0.073$ (рис. 6.3в). Следующая деталь функции $\operatorname{Re} v(\mathbf{r})$ – центрально

симметричная “стенка”, центральное сечение которой имеет гауссовскую форму с тем же значением $d_{1/2}$. Амплитудное значение в этом сечении, которое достигается на расстоянии $R_0 \approx 1.78\lambda_0$ от начала координат, в три раза меньше, чем для центрального пика, и определяется контрастом $\Delta c/c_0 \approx 0.043$. Такое же амплитудное значение, но задаваемое отрицательным контрастом, имеют еще две детали гауссовской формы с той же полушириной $d_{1/2}$ и с центрами в точках $\{-R_0; 0\}$, $\{0; -R_0\}$ соответственно. Эти две гауссианы формируют двое “ворот” в стене (рис. 6.3а). Рассеиватель достаточно сильный: для центрального сечения рассеивателя вдоль оси OX (рис. 6.3в) дополнительный набег фазы волны (6.80) составляет $\Delta\psi \approx -0.14\pi$ на участке с отрицательным контрастом ($\text{Re } v(x; y=0) < 0$) и $\Delta\psi \approx 0.32\pi$ на участке с положительным контрастом ($\text{Re } v(x; y=0) > 0$); для центрального сечения вдоль оси OY суммарный дополнительный набег $\Delta\psi \approx 0.35\pi$.

Функция $\text{Im } v(\mathbf{r})$ состоит из “плато”, “выступа” на нем и “впадины” (рис. 6.3б, г). Амплитудное значение коэффициента поглощения на плато составляет $\alpha \approx 0.032$ Нп/е.д.д. = 0.256 Нп/ λ_0 , согласно (6.81). Выступ и впадина образуются дополнительными деталями гауссовской формы с прежней полушириной $d_{1/2}$ (амплитуда выступа в два раза меньше, чем впадины). Суммарное поглощение на центральном сечении вдоль оси OX приводит к затуханию волны по амплитуде в ≈ 3.7 раза, вдоль оси OY – в ≈ 2.5 раза.

Норма данных рассеяния $\|f\| \approx 11/(3\pi)$ на порядок превосходит пороговое значение $1/(3\pi)$, определенное в (6.78). Тем не менее, если объем дискретизованных данных рассеяния превышает (даже незначительно) минимально необходимый объем, то при восстановлении НГМ-алгоритмом в отсутствие шумовых помех оценка $\hat{v}(\mathbf{r})$ практически совпадает с истинной функцией $v(\mathbf{r})$: на рис. 6.3в, г представлены сечения функций $v(\mathbf{r})$ и $\hat{v}(\mathbf{r})$ вдоль оси OX ; аналогичные сечения вдоль оси OY приведены в [А 85]. О большой силе рассеивателя свидетельствует результат восстановления $\hat{v}_{\text{bom}}(\mathbf{r})$ в приближении однократного рассеяния при отсутствии шумовых помех (рис. 6.3д). Сравнение $\hat{v}_{\text{bom}}(\mathbf{r})$ и истинной функции $v(\mathbf{r})$ показывает, что характерные амплитудные значения функции $\text{Re } \hat{v}_{\text{bom}}(\mathbf{r})$ в несколько раз меньше истинных, а в функции $\text{Im } \hat{v}_{\text{bom}}(\mathbf{r})$ не воспроизведены правильно даже очертания характерных деталей.

Для оценки помехоустойчивости решения в незашумленные данные рассеяния была внесена случайная нормально распределенная шумовая помеха $n(\varphi, \varphi')$, некоррелированная по направлениям, с нулевым средним значением и среднеквадратичным амплитудным отклонением $\sigma_{\text{ns}} = 0.01 f_{\text{max}}$ ($f_{\text{max}} \equiv \max_{\varphi, \varphi'} |f(\varphi, \varphi')|$) независимо для действительной и мнимой части помехи, т.е. $\sqrt{2}\sigma_{\text{ns}}$ – полное стандартное отклонение помехи, как комплексной величины.

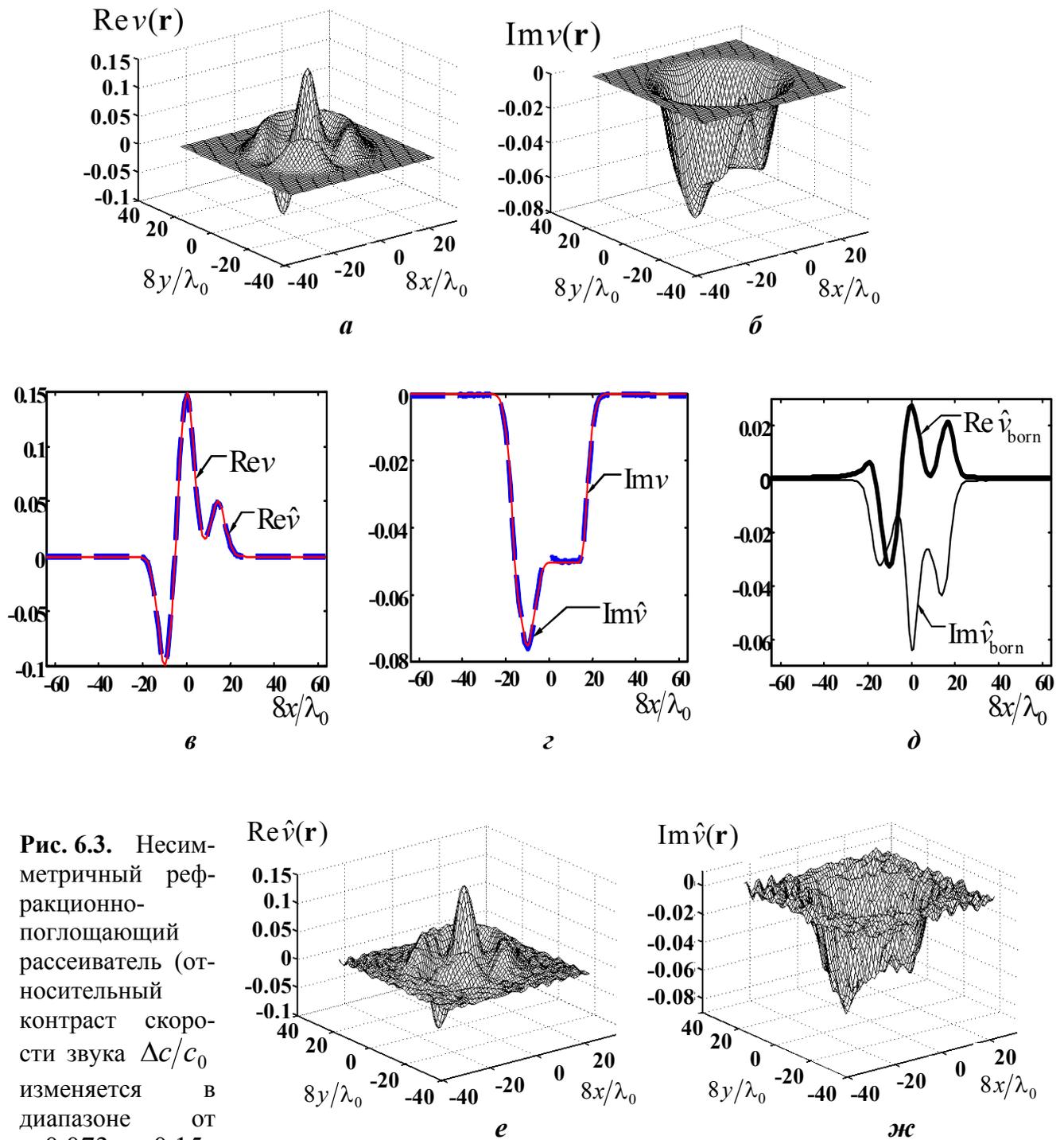


Рис. 6.3. Несимметричный рефракционно-поглощающий рассеиватель (относительный контраст скорости звука $\Delta c/c_0$ изменяется в диапазоне от -0.073 до 0.15 ;

максимальный дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.35\pi$; максимальное амплитудное поглощение в рассеивателе – в 3.7 раза; норма данных рассеяния $\|f\| \approx 11/(3\pi)$):

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей истинного рассеивателя;
- центральные сечения $y = 0$ действительной (в) и мнимой (г) частей истинного рассеивателя v (тонкая линия) и рассеивателя \hat{v} , восстановленного с учетом многократных рассеяний при отсутствии шумовых помех (толстая пунктирная линия);
- центральное сечение $y = 0$ рассеивателя, восстановленного в приближении однократного рассеяния без шумовых помех (д);
- общий вид действительной (е) и мнимой (ж) частей рассеивателя, восстановленного по зашумленным данным с амплитудным шумовым отклонением $\sigma_{ns} = 0.01 f_{max}$.

Входное амплитудное отношение “помеха/сигнал” составляет

$$N/S \equiv \frac{\|n(\varphi, \varphi')\|}{\|f(\varphi, \varphi')\|} = \frac{\sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |n(\varphi, \varphi')|^2}}{\sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |f(\varphi, \varphi')|^2}}; \quad (6.82)$$

норма незашумленных данных $\|f\|$ и норма $\|n\|$ шумового поля $n(\varphi, \varphi')$ определяются так же, как в (6.78). Это отношение $N/S \approx 0.076$ существенно превосходит заданную величину $\sigma_{ns}/f_{\max} = 0.01$. Результат восстановления рассеивателя по зашумленным данным приведен на рис. 6.3е, ж. Качество восстановления характеризуется относительной среднеквадратичной погрешностью δ_v оценки $\hat{v}(\mathbf{r})$ в области рассеяния \mathfrak{R} :

$$\delta_v \equiv \frac{\sqrt{\int_{\mathfrak{R}} |\hat{v}(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}}{\sqrt{\int_{\mathfrak{R}} |v(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}}. \quad (6.83)$$

Для рассматриваемого рассеивателя $\delta_v \approx 0.11$. Таким образом, при существенном влиянии эффектов многократного рассеяния относительная погрешность восстановления δ_v в присутствии шумовых помех оказывается близкой, но несколько большей, чем входное амплитудное отношение “помеха/сигнал” N/S . Это свидетельствует о достаточно высокой помехоустойчивости решения в случае рассеивателей средней силы (1.43). Полученное изображение можно подвергнуть фильтрации, учитывающей ожидаемый вид пространственно-спектральной плотности мощности рассеивателя [А 18; А 23]. Такая фильтрация резко улучшает качество восстановления [А 33; А 34; А 86].

Сопоставление результатов решения обратной задачи НГМ-алгоритмом и модифицированным алгоритмом Роуза (описанным в разделе 6.2) выполнено на примере восстановления рассеивателя, практически не создающего рассеяния назад. Чисто рефракционный рассеиватель гауссовской формы (рис. 6.4а, толстая сплошная линия) с максимальным контрастом скорости звука $\Delta c/c_0 = 0.6$ является достаточно сильным: дополнительный набег фазы волны (6.80) при распространении волны вдоль центрального сечения составляет $\Delta\psi \approx 1.23\pi$.

Значения угловых гармоник $\tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q)$ вычислялись из соотношений (6.58)–(6.60) при фиксированном \mathbf{r} , после чего рассчитывались значения обобщенных волновых полей

$$\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi) = \exp[ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi), \text{ где } \mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi) = \sum_q \tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q) \exp(iq\varphi).$$

Оценка рассеивателя $\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi)$ получается из (6.61) при рассмотрении одного ракурса φ падающего поля, а оценка $\hat{v}(\mathbf{r}) = \langle \hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi) \rangle_{\varphi}$, получаемая из (6.62), является результатом усреднения $\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi)$ по всем использованным ракурсам. В отсутствие шумовых помех, восстановление модифицированным алгоритмом Роуза идеально: уже при единственном ракурсе оценка $\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi)$ совпадает с истинной функцией рассеивателя $v(\mathbf{r})$ вне зависимости от φ (рис. 6.4а, толстая сплошная линия). При этом норма данных, составляющая $\|f\| \approx 16/(3\pi)$ для рассматриваемого рассеивателя гауссовской формы, на порядок превосходит пороговое значение (6.78). Условие симметричности формы рассеивателя при решении обратной задачи нигде не использовалось.

В отсутствие шумовых помех модифицированный алгоритм Роуза и алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова дают тождественные оценки рассеивающей неоднородности. Оценка $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$, полученная в первом приближении Борна, не воспроизводит правильно характеристики рассеивателя даже по масштабу величины (рис. 6.4б), что свидетельствует о сильном влиянии эффектов перерасеяния. Для сравнения помехоустойчивости обоих алгоритмов в данные рассеяния $f(\varphi, \varphi')$ вносилась случайная шумовая помеха (некоррелированная по направлениям), имеющая среднеквадратичное амплитудное отклонение $\sigma_{\text{ns}} = 0.03 f_{\text{max}}$ при нулевом среднем. Это существенный шум: амплитудное отношение “помеха/сигнал” (6.82) достигает $N/S \approx 0.14$, существенно превосходя величину $\sigma_{\text{ns}}/f_{\text{max}}$. Относительная погрешность оценки $\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi)$, найденной из $\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi)$ при одном направлении $\varphi = 0$ (рис. 6.4а, тонкая сплошная линия) составляет, по аналогии с (6.83), $\delta_{\text{Hel}} \equiv \frac{\|\hat{v}_{\text{Hel}} - v\|}{\|v\|} \approx 0.15$. После усреднения по всем ракурсам, оценка $\langle \hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi) \rangle_{\varphi}$ оказывается совпадающей с оценкой \hat{v} , полученной НГМ-алгоритмом (рис. 6.4а, пунктирная линия), что говорит об одинаковой помехоустойчивости обоих алгоритмов. Флуктуации в оценке уменьшаются, по сравнению с $\hat{v}_{\text{Hel}}(\mathbf{r}, \varphi)$, и погрешность падает до $\delta_v \equiv \frac{\|\hat{v} - v\|}{\|v\|} \approx 0.08$.

Интересно сравнить значения δ_{Hel} и δ_v . Угловое расстояние между соседними независимыми направлениями облучения оценивается как средняя ширина лепестка диаграммы рассеяния, т.е. $\overline{\Delta\varphi} \equiv \frac{\lambda_0/2}{L_0/2} = \frac{2\pi}{k_0 L}$, где L – линейный размер рассеивателя. Следовательно, количество независимых направлений φ составляет $\cong 2\pi/\overline{\Delta\varphi} \cong k_0 L$. Для рассматриваемого рассеивателя гауссовской формы $k_0 L \cong (10 \div 15)$. Если бы ошибки, возникающие в случае оценки \hat{v}_{Hel} из $\Psi^{\pm}(\mathbf{r}, \varphi)$ при фиксированном φ , были бы некоррелированы (по φ) между собой, то усреднение \hat{v}_{Hel} по всем независимым ракурсам уменьшило бы среднеквадратичную погрешность в усредненной оценке \hat{v} в

$\cong \sqrt{k_0 L} \cong (3 \div 4)$ раза. Однако результат моделирования дает уменьшение только в $\delta_{\text{Hel}}/\delta_v \approx 2$ раза. Это обстоятельство можно объяснить тем, что хотя \hat{v}_{Hel} находится из уравнения Гельмгольца на основе внутреннего поля $\Psi^+(\mathbf{r}, \varphi)$ или $\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi)$ при фиксированном φ , но само поле $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ найдено на основе зашумленных данных рассеяния, измеряемых при *всех* ракурсах излучения и приема. Поэтому ошибки, возникающие в оценке полей $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi)$ и, следовательно, в оценке \hat{v}_{Hel} , оказываются частично коррелированными для различных φ (хотя исходный шум некоррелирован для различных φ) [А 18].

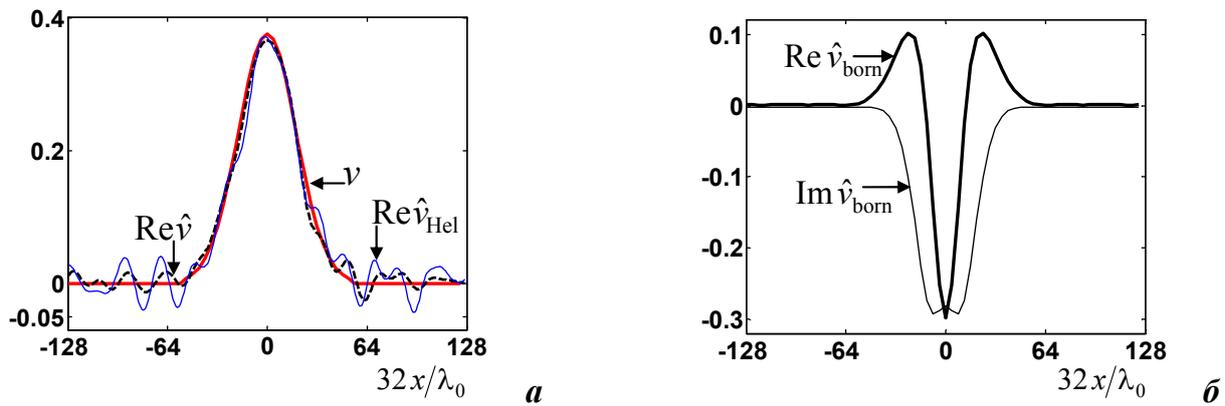


Рис. 6.4. Восстановление модифицированным алгоритмом Роуза рефракционного рассеивателя гауссовской формы (относительный контраст скорости звука $\Delta c/c_0 = 0.6$; набег фазы $\Delta\psi \approx 1.23\pi$; норма данных рассеяния $\|f\| \approx 16/(3\pi)$):

- центральные сечения истинного рассеивателя (v – толстая сплошная линия) и рассеивателя, восстановленного из уравнения Гельмгольца на основе $\Psi^-(\mathbf{r}, \varphi)$ для направления $\varphi = 0$ ($\text{Re} \hat{v}_{\text{Hel}}$ – тонкая сплошная линия) и при усреднении по всем ракурсам φ ($\text{Re} \hat{v}$ – пунктирная линия) в случае зашумленных данных со стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{\text{ns}} = 0.03 f_{\text{max}}$ (а);
- центральное сечение действительной (толстая линия) и мнимой (тонкая линия) частей рассеивателя, восстановленного в приближении однократного рассеяния (б).

§ 6.4.2. Высокочастотные компоненты пространственных спектров рассеивателя и его вторичных источников как дополнительные помехи

Первое условие (6.41) или (6.42) гарантированной работоспособности НГМ-алгоритма нарушается, если в пространственных спектрах рассеивателя и его вторичных источников присутствуют высокочастотные компоненты. Вклад в данные рассеяния за счет этих высокочастотных компонент выступает в алгоритме своего рода помехой, и алгоритм теряет строгость. Примером рассеивателей такого типа [А 21; А 68; А 84] может служить двумерный рефракционный рассеиватель с формой $v(\mathbf{r})$ в виде кольца

(рис. 6.5а), внешний и внутренний диаметры которого составляют $(25/16)\lambda_0$ и $(19/16)\lambda_0$. При численном моделировании полагалось $\lambda_0 = 16$ е.д.д. с тем, чтобы шаг пространственной дискретизации составлял $\lambda_0/16 = 1$ е.д.д. Такой частый шаг позволяет на этапе решения прямой задачи учитывать (до определенного предела) высокочастотные компоненты пространственных спектров, а на этапе решения обратной задачи – корректно вычислять пространственные производные в (6.72).

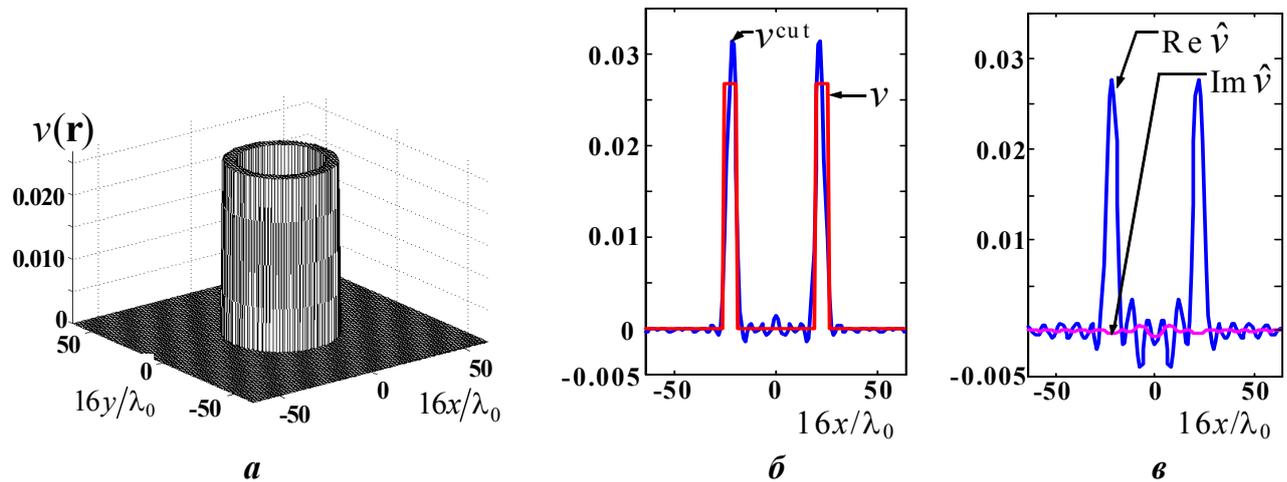
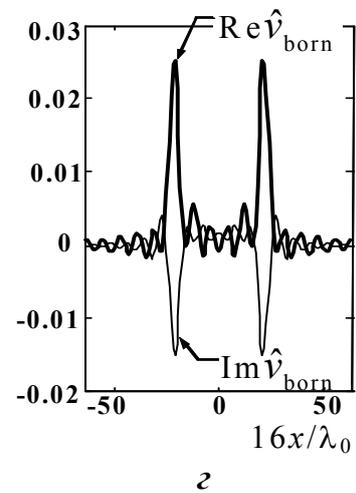


Рис. 6.5. Рефракционный рассеиватель в виде кольца, создающий рассеяние назад (контраст скорости звука $\Delta c/c_0 = 0.1$; дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.14\pi$; норма данных рассеяния $\|f\| \approx 8/(3\pi)$):

- общий вид истинного рассеивателя (а);
- центральные сечения истинного рассеивателя v и его формы v^{cut} после ограничения полосы частот пространственного спектра рассеивателя кругом радиуса $(11/4)k_0$ (б);
- центральные сечения рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (в) и в приближении однократного рассеяния (г).



Относительный контраст скорости звука внутри кольца полагался равным $\Delta c/c_0 = 0.1$, в соответствии с (6.79), что приводит к дополнительному набегу фазы волны (6.80) вдоль центрального сечения рассеивателя $\Delta\psi \approx 0.14\pi$. За счет резких границ функции $v(\mathbf{r})$ пространственный спектр рассеивателя $\tilde{v}(\xi)$ затухает с ростом $|\xi|$ очень медленно, имея осциллирующий характер. По этой причине при моделировании данных рассеяния $f(\varphi, \varphi')$ с помощью итерационного решения уравнения Липпмана–Швингера [А 2 (раздел 5.3); А 9] значения пространственных частот в спектре $\tilde{v}(\xi)$ были искусст-

венно ограничены кругом радиуса $(1/4)k_0$. Центральное сечение функции рассеивателя $v^{\text{cut}}(\mathbf{r})$, имеющей такой ограниченный по полосе пространственных частот спектр, изображена на рис. 6.5б. В случае ослабления контраста рассеивателя до борновского уровня, оценка рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r})$, полученная НГМ-алгоритмом, отличалась бы от истинной функции $v(\mathbf{r})$ только за счет обнуляемых алгоритмом при восстановлении высокочастотных компонент спектра $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| \geq 2k_0$ [А 23; А 177]. Однако для рассматриваемого рассеивателя пространственный спектр классических вторичных источников $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$ имеет высокочастотные пространственные компоненты вне круга радиуса $2k_0$ с центром в точке \mathbf{k} [380]. По этой причине качество реконструкции, в случае заметного влияния процессов перерассеяния, снижается из-за нарушения условия (6.41), или (6.42), что иллюстрируется ниже.

Относительная доля $(N/S)_{2k_0}$ высокочастотных компонент в пространственном спектре $\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})$, соответствующих пространственным частотам ξ , для которых $|\xi - \mathbf{k}| \geq 2k_0$, по отношению к доле низкочастотных компонент $|\xi - \mathbf{k}| < 2k_0$, определяется как

$$(N/S)_{2k_0} \equiv \frac{\left\| \tilde{I}(\xi, \mathbf{k})_{|\xi - \mathbf{k}| \geq 2k_0} \right\|}{\left\| \tilde{I}(\xi, \mathbf{k})_{|\xi - \mathbf{k}| < 2k_0} \right\|} \equiv \frac{\sqrt{\sum_{\mathbf{k}} \int_{|\xi - \mathbf{k}| \geq 2k_0} |\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})|^2 d\xi}}{\sqrt{\sum_{\mathbf{k}} \int_{|\xi - \mathbf{k}| < 2k_0} |\tilde{I}(\xi, \mathbf{k})|^2 d\xi}} \quad (6.84)$$

Для рассматриваемого рассеивателя в виде кольца эта доля достаточно заметна: $(N/S)_{2k_0} \approx 0.14$. Частным следствием присутствия высокочастотных компонент в спектре при $\xi = -\mathbf{k}$ является, для данного рассеивателя, присутствие рассеяния назад: модуль амплитуды рассеяния назад ($\varphi' = \pi + \varphi$), по сравнению с рассеянием вперед ($\varphi' = \varphi$), составляет $\frac{|f(\varphi, \varphi' = \pi + \varphi)|}{|f(\varphi, \varphi' = \varphi)|} \approx 0.05$. Одновременно, присутствие большой мнимой час-

ти в борновской оценке рассеивателя $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ свидетельствует о заметном влиянии процессов перерассеяния (рис. 6.5з). При учете перерассеяния результат реконструкции НГМ-алгоритмом центрального сечения \hat{v} в отсутствие шумовых помех приводится на рис. 6.5в; норма данных $\|f\| \approx 8/(3\pi)$. Факт центральной симметрии рассеивателя на этапе решения обратной задачи ни здесь, ни для последующих рассеивателей не использовался вовсе. Ошибки восстановления выражены в отличии $\text{Re } \hat{v}$ от v^{cut} и в присутствии

небольшой ложной мнимой части оценки: $\frac{\max_{\mathbf{r}} |\text{Im } \hat{v}(\mathbf{r})|}{\max_{\mathbf{r}} |\text{Re } \hat{v}(\mathbf{r})|} \approx 0.02$. Эти ошибки имеют

единственную причину – вышеупомянутые высокочастотные компоненты в пространственном спектре вторичных источников. Относительная среднеквадратичная погрешность восстановления (6.83), рассчитанная вдоль центрального сечения рассеивателя (на отрезке длины, равном внешнему диаметру рассеивателя), составляет $\delta_v \approx 0.22$. Величина δ_v , сравнима с относительной долей $(N/S)_{2k_0}$ высокочастотных пространственных компонент. Подобная сопоставимость величины амплитудного отношения “помеха/сигнал” N/S (6.82) и величины относительной погрешности δ_v , обусловленной только присутствием шумовой помехи в данных рассеяния, отмечалась и в случае рассеивателей, не имеющих высокочастотных пространственно-спектральных компонент (см. § 6.4.1). Следовательно, влияние таких компонент на качество восстановления сравнимо с влиянием случайных шумовых помех с интенсивностью, равной интенсивности той части рассеянного сигнала (амплитуды рассеяния), которая порождается этими высокочастотными компонентами.

Таким образом, для НГМ-алгоритма возможные ошибки воспроизведения рассеивателя имеют двоякую природу. Во-первых, это шумы эксперимента, влияние которых может быть уменьшено как техническими средствами, так и избыточностью (типа многократности) данных рассеяния. Во-вторых, это составляющие данных рассеяния, которые порождены высокочастотными компонентами пространственных спектров рассеивателя и его вторичных источников. В случае присутствия этих компонент, уменьшение их влияния на качество восстановления в рамках монохроматической задачи затруднительно. При реконструкции степени влияния обеих причин сопоставимы, и ошибки восстановления зависят от общего уровня эквивалентных помех обоих типов, который приближенно можно оценить как $\cong \sqrt{(N/S)^2 + (N/S)_{2k_0}^2}$.

§ 6.4.3. Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на крупномасштабном контрастном фоне

Одной из самых насущных медицинских задач является ранняя диагностика различных новообразований. Весьма важно выявить злокачественное новообразование еще на самой ранней стадии развития, когда размер пораженного участка составляет доли миллиметра. Для его обнаружения на основе экспериментальных акустических данных рассеяния весьма перспективно применение строгих математических методов решения обратных задач, обеспечивающих максимально полное использование данных и адекватное восстановление рассеивателя.

Наиболее развитые в настоящее время итерационные процедуры образуют обширный класс алгоритмов решения обратных задач, однако их реализация связана с проблемой сходимости процедуры, зависящей от параметров восстанавливаемого рассеивателя (исследуемого объекта, органа, биоткани). В биологических и медицинских приложениях оказывается эффективным двухшаговый итерационный подход, описанный выше в главе 2 [А 2 (§5.4.1, глава 8)]. В этом подходе на первом шаге восстанавливается неизвестное пространственное распределение крупномасштабных неоднородностей с помощью времяпролетного алгоритма. Это области со значительными отклонениями скорости зву-

ка, коэффициента поглощения и плотности от их средних значений, предварительно измеряемых в фоновой среде без рассеивателя. Характерный линейный размер таких областей превышает несколько длин волн (например, это крупные области органов, образуемые жировой, железистой, мышечной тканью и т.п.). Восстановление пространственного распределения крупномасштабных неоднородностей по времяпролетным данным эквивалентно учету эффектов многократного рассеяния вперед ультразвуковых волн внутри рассеивателя. Благодаря этому учету, на втором шаге обеспечивается высокая точность восстановления тонкой структуры рассеивателя на уже оцененном на первом шаге неоднородном крупномасштабном фоне, контраст которого может быть высоким. Тонкая структура представляет собой детали с линейным размером от нескольких десятых долей длины волны, лежащей в миллиметровом диапазоне, до нескольких длин волн и является весьма информативной для диагностических целей.

Как альтернатива двухшаговому алгоритму, в настоящем разделе рассматривается возможность *одновременного* восстановления как крупномасштабной, так и тонкой структуры рассеивателя в едином одношаговом НГМ-алгоритме [А 12; А 85]. Обсуждаемые далее результаты свидетельствуют, что качество одновременного восстановления мелко-масштабной и крупномасштабной структуры с помощью данного алгоритма сопоставимо с качеством в случае осуществления итерационной процедуры учета всех типов неоднородностей; при этом алгоритм не сталкивается с проблемой сходимости. Возможность восстановления рассеивателей с мелкими деталями иллюстрируется на примере достаточно сильных центрально симметричных рассеивателей с различными значениями контраста мелко-масштабных деталей и их ширины. Центральная симметрия рассеивателей позволяла сокращать время счета на этапе формирования модельных данных рассеяния, но при восстановлении рассеивателя с помощью НГМ-алгоритма условие симметрии нигде не использовалось. При численном моделировании полагалось $\lambda_0 = 16$ е.д.д.

Рассеиватель с тонкой структурой в виде центральной впадины изображен на рис. 6.6а, б. Функция $\text{Re } v(\mathbf{r})$ состоит из крупномасштабной части гауссовской формы с амплитудным значением, соответствующим контрасту скорости звука $\Delta c^{(1)}/c_0 = 0.2$ относительно фонового значения. В центре крупномасштабной неоднородности задается узкая “впадина” гауссовской формы с амплитудным значением, соответствующим отрицательному контрасту $\Delta c^{(2)}/c_0 = -0.04$. Полная ширина этой впадины составляет $\approx 3\lambda_0/16$ по уровню 0.5 от ее глубины на фоне крупномасштабной неоднородности (рис. 6.6в). Функция $\text{Im } v(\mathbf{r})$ представляет собой “плато”. Рассеиватель достаточно сильный: дополнительный набег фазы волны вдоль центрального сечения составляет $\Delta\psi \approx 1.16\pi$. Амплитудный коэффициент поглощения составляет на плато $\alpha \approx 0.02$ Нп/е.д.д. = 0.32 Нп/ λ_0 , приводя к суммарному амплитудному поглощению вдоль этого сечения в ≈ 6.6 раз.

О большой силе рассеивателя свидетельствует результат восстановления в приближении однократного рассеяния $\hat{v}_{\text{бom}}(\mathbf{r})$ (рис. 6.6е), при котором не воспроизведены правильно ни амплитудный масштаб, ни характерные детали истинной функции $v(\mathbf{r})$. В то же время, оценка $\hat{v}(\mathbf{r})$, полученная НГМ-алгоритмом (рис. 6.6з, ∂ – толстая пунктирная

линия), хорошо воспроизводит крупномасштабную часть рассеивателя, как рефракционную, так и поглощающую, несмотря на то, что норма данных $\|f\| \approx 18/(3\pi)$ существенно больше порогового значения $1/(3\pi)$, – см. (6.78). Амплитуда же воспроизведенной впадины оказалась заниженной. Причина этого заключается в следующем. Локальное значение относительного контраста скорости звука для крупномасштабной неоднородности в месте расположения центральной впадины составляет $\Delta c^{(1)}/c_0 = 0.2$, что соответствует локальным значениям скорости звука $c' = c_0(1 + \Delta c^{(1)}/c_0) = 1.2c_0$ и волнового числа $k' = k_0/1.2$. Поэтому для определения качества воспроизведения тонкой структуры функция $\hat{v}(\mathbf{r})$ сравнивалась с функцией $v_{1.6k_0}^{\text{cut}}(\mathbf{r})$ истинного рассеивателя, в пространственном спектре которого, однако, обнулены все компоненты $\tilde{v}(\xi)$ на пространственных частотах $|\xi| \geq 2k' \approx 1.6k_0$ (рис. 6.6г, d – тонкая линия). Дело в том, что результат восстановления рассеивателя, который имеет ту же форму, что и рассматриваемый исходный сильный рассеиватель $v(\mathbf{r})$, но является слабым рассеивателем на фоне однородной среды с волновым числом k' , с помощью НГМ-алгоритма или классических борновских алгоритмов, сводящихся к неискаженному воспроизведению пространственных спектральных компонент рассеивателя $\tilde{v}(\xi)$ при $|\xi| < 2k'$ и подавлению компонент при $|\xi| \geq 2k'$, совпадает по форме с функцией $v_{1.6k_0}^{\text{cut}}(\mathbf{r})$. С другой стороны, компоненты $|\xi| \geq 2k'$ были порождены именно мелкомасштабной структурой рассеивателя. Тогда из сопоставления \hat{v} и $v_{1.6k_0}^{\text{cut}}$ видно, что в случае рассматриваемого сильного рассеивателя мелкомасштабная структура воспроизводится на неизвестном крупномасштабном контрастном фоне с качеством разрешения, сравнимым с качеством восстановления в приближении однократного рассеяния этой же мелкомасштабной структуры на известном фоне с волновым числом k' .

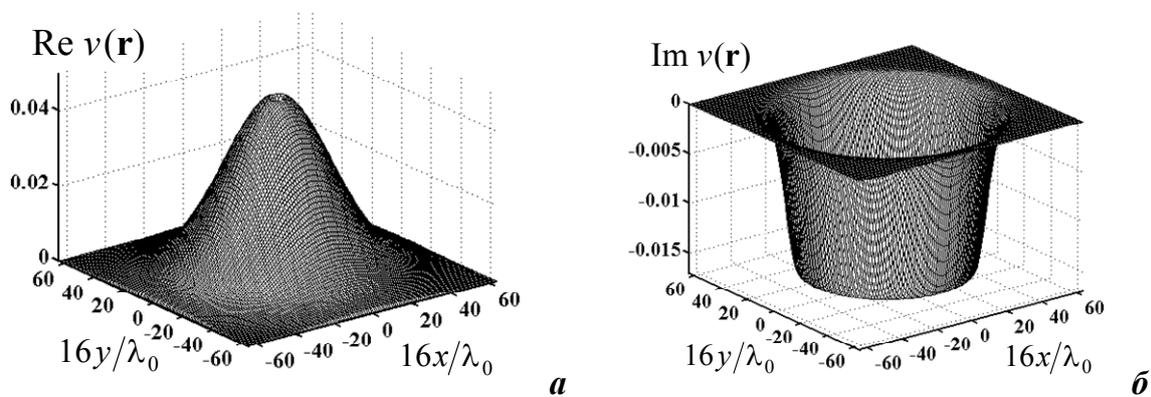


Рис. 6.6 а, б; см. подпись ниже.

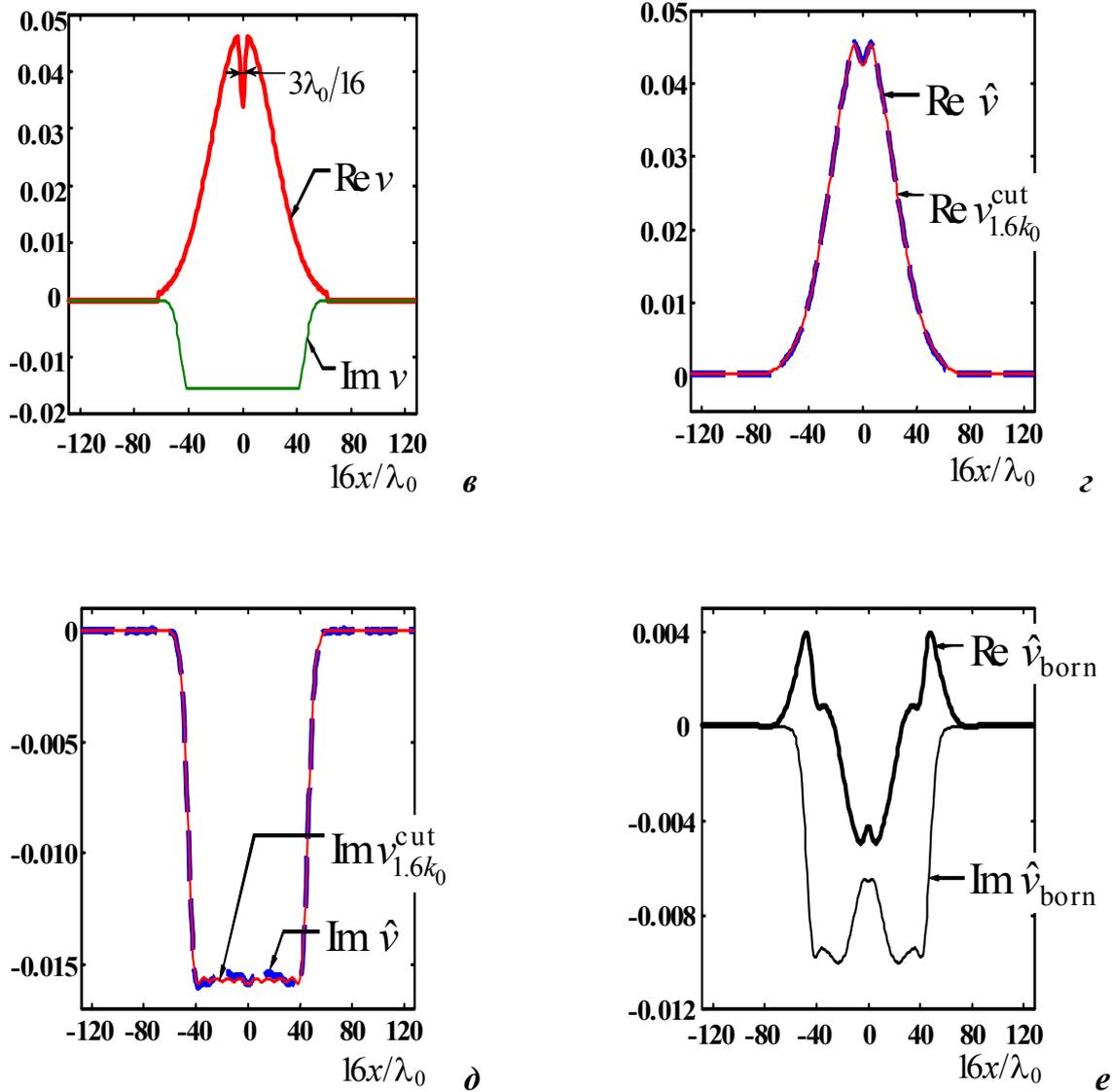


Рис. 6.6. Крупномасштабный сильный рефракционно-поглощающий рассеиватель (относительный контраст скорости звука $\Delta c^{(1)}/c_0 = 0.2$, дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 1.16\pi$, полуширина $d_{1/2}^{(1)} = 2\lambda_0$ по уровню $1/e$; амплитудное поглощение в рассеивателе – в 6.6 раз с тонкой структурой в виде центральной впадины (контраст скорости $\Delta c^{(2)}/c_0 = -0.04$, полуширина $d_{1/2}^{(2)} = \lambda_0/8$); норма данных рассеяния $\|f\| \approx 18/(3\pi)$:

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей истинного рассеивателя и их центральное сечение (в);
- центральное сечение действительной (г) и мнимой (д) частей рассеивателя: форма истинного рассеивателя после ограничения полосы частот его пространственного спектра кругом радиуса $1.6k_0$ ($v_{1.6k_0}^{\text{cut}}$ – тонкая линия); рассеиватель, восстановленный при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (\hat{v} – толстая пунктирная линия);
- центральное сечение рассеивателя, восстановленного в приближении однократного рассеяния (е).

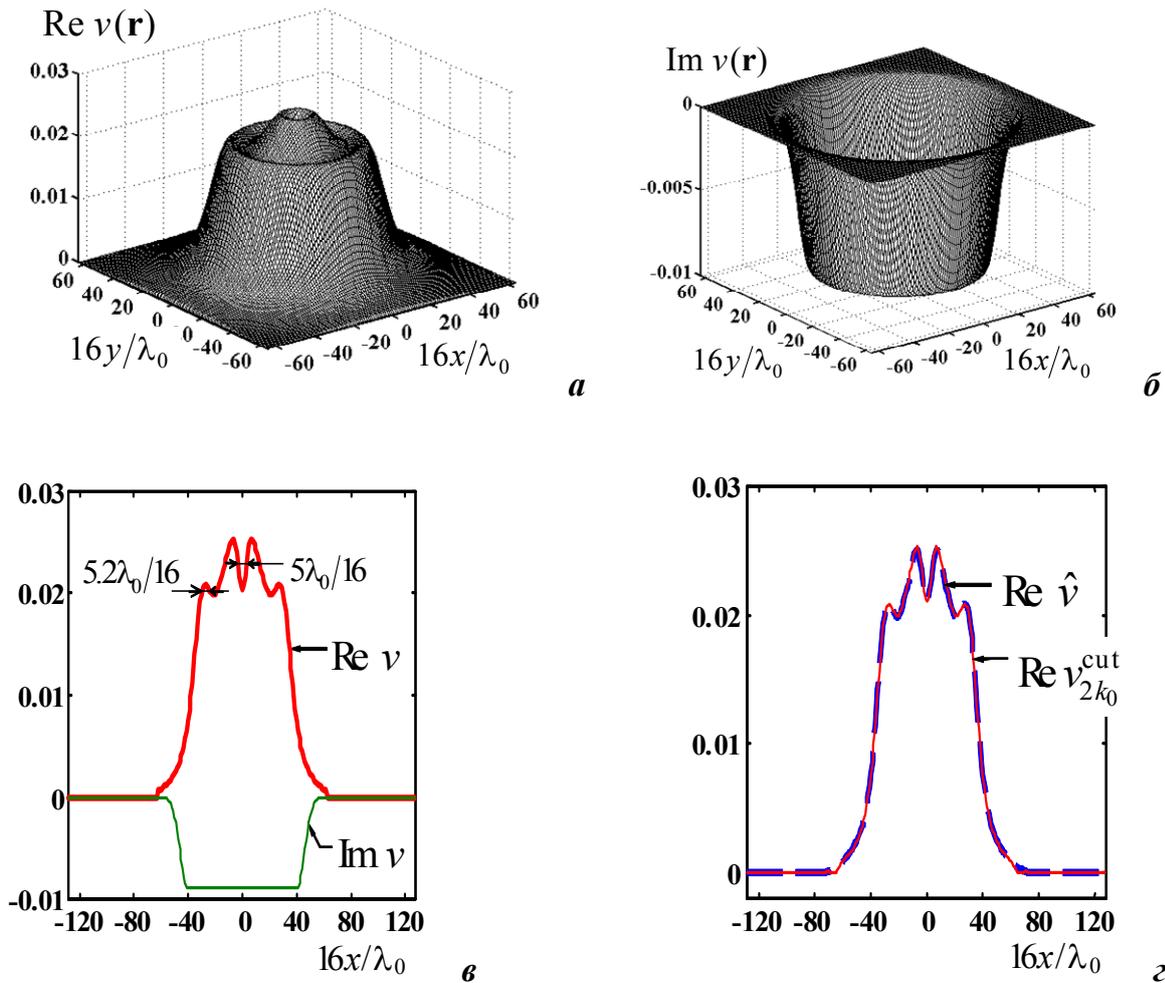


Рис. 6.7. Крупномасштабный рефракционно-поглощающий рассеиватель средней силы (контраст скорости звука $\Delta c^{(1)}/c_0 = 0.1$, дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx 0.62\pi$, полуширина $d_{1/2}^{(1)} = 2\lambda_0$; амплитудное поглощение в рассеивателе – в 3 раза) с тонкой структурой в виде центральной “впадины” (контраст $\Delta c^{(2)}/c_0 = -0.02$, полуширина $d_{1/2}^{(2)} = \lambda_0/4$) и внешней кольцевой “стенки” (контраст $\Delta c^{(3)}/c_0 = 0.03$, полуширина $d_{1/2}^{(3)} = \lambda_0/2$); норма данных рассеяния $\|f\| \approx 16/(3\pi)$:

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей истинного рассеивателя и их центральное сечение (в);
- центральное сечение действительной (г) и мнимой (д) частей рассеивателя: форма истинного рассеивателя после ограничения полосы частот его пространственного спектра кругом радиуса $2k_0$ ($v_{2k_0}^{\text{cut}}$ – тонкая линия); рассеиватель, восстановленный при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (\hat{v} – толстая пунктирная линия).

В случае рассеивателя, изображенного на рис. 6.7а, б, тонкая структура представлена центральной впадиной и узкой внешней кольцевой стенкой одновременно. Наибольший контраст для крупномасштабной неоднородности равен $\Delta c^{(1)}/c_0 = 0.1$. Для впадины тот же параметр равен $\Delta c^{(2)}/c_0 = -0.02$, так что полная ширина впадины составляет $\approx 5\lambda_0/16$ по уровню 0.5 от ее глубины. Центральное сечение стенки имеет гауссовскую форму. Амплитудное значение стенки в этом сечении достигается на расстоянии $15\lambda_0/8$ от начала координат и соответствует контрасту $\Delta c^{(3)}/c_0 = 0.03$; полная ширина стенки на фоне крупномасштабной неоднородности составляет $\approx 5.2\lambda_0/16$ по уровню 0.5 от ее высоты (рис. 6.7в). Эффекты перерасеяния по-прежнему выражены достаточно сильно: дополнительный набег фазы вдоль центрального сечения $\Delta\psi \approx 0.62\pi$; амплитудный коэффициент поглощения на “плато” $\alpha \approx 0.011$ Нп/е.д.д. = 0.18 Нп/ λ_0 , суммарное поглощение вдоль центрального сечения приводит к затуханию амплитуды в ≈ 2.9 раз.

Результат восстановления рассеивателя в приближении однократного рассеяния подобен изображенному на рисунке 6.6е, т.е. $\hat{v}_{\text{бom}}(\mathbf{r})$ резко отличается от истинной функции $v(\mathbf{r})$. При учете же перерасеяний, результат восстановления $\hat{v}(\mathbf{r})$ почти не отличается от функции $v_{2k_0}^{\text{cut}}(\mathbf{r})$ (рис. 6.7з, д), которая в данном случае близка к исходной функции $v(\mathbf{r})$ (незначительное отличие значения $2k' \approx 1.8k_0$ от $2k_0$ в функции $v_{2k_0}^{\text{cut}}$ не учитывается); норма данных рассеяния $\|f\| \approx 16/(3\pi)$. Итак, и кольцевая стенка, и центральная впадина воспроизведены четко.

Таким образом, НГМ-алгоритм позволяет уверенно воспроизводить тонкую структуру рассеивателя (детали с линейным размером $\cong \lambda_0/3$ и крупнее) в присутствии неизвестных контрастных крупномасштабных неоднородностей (размером в несколько λ_0), создающих сильное искажение внутреннего волнового поля и также восстанавливаемых алгоритмом. Приближение однократного рассеяния при восстановлении такого рассеивателя приводит к очень сильному искажению всей структуры рассеивателя в целом, как его крупномасштабной части, так и тонкой структуры. В то же время, применение НГМ-алгоритма обеспечивает качество разрешения тонкой структуры, не уступающее качеству восстановления этой же тонкой структуры в приближении однократного рассеяния на фоне известной однородной (т.е. неискажающей) среды. Эта способность алгоритма весьма полезна и перспективна при решении проблемы медицинской ультразвуковой томографии с высоким разрешением. Качество одновременного восстановления этим алгоритмом крупномасштабной и мелкомасштабной структуры сопоставимо с качеством восстановления в случае осуществления итерационной процедуры. Кроме того, НГМ-алгоритм не сталкивается с проблемой сходимости.

Глава 7. Восстановление акустических граничных рассеивателей алгоритмом Новикова–Гриневича–Манакова

Результаты восстановления неоднородностей различных типов, приведенные в разделе 6.4, свидетельствуют, что рассеиватели, для которых НГМ-алгоритм является практически строгим, восстанавливаются в отсутствие шумовых помех и технических погрешностей численного расчета с высокой степенью точности, даже когда норма данных рассеяния $\|f\|$ в $10 \div 20$ раз превосходит пороговое значение $1/(3\pi)$, приведенное в достаточном (но не необходимом) условии (6.78). Постепенное увеличение $\|f\|$ сказывается в монотонном ухудшении обусловленности задачи, т.е. в повышении чувствительности решения к различного рода помехам, что подробно будет рассмотрено ниже. Непосредственный анализ более точных, чем (6.78), оценок области работоспособности алгоритма весьма труден из-за нелинейности алгоритма относительно данных рассеяния f . С другой стороны, достичь таких значений $\|f\|$, при которых НГМ-алгоритм терял бы единственность решения или приобретал бы сильную неустойчивость, численным моделированием также оказалось нелегко. Дело в том, что для рассмотренных выше в разделе 6.4 рефракционно-поглощающих рассеивателей, данные $f = f(\varphi, \varphi')$ моделировались путем решения прямой задачи итерационным суммированием ряда Борна–Неймана из-за отсутствия строгого аналитического решения [А 2 (раздел 5.3); А 9; 142 (§ 2.3)]. Для достаточно сильных рассеивателей этот ряд расходится, что ограничивает возможность дальнейшего увеличения $\|f\|$. Решению же прямой задачи непосредственным обращением матриц препятствует их большая размерность в случае сильного влияния процессов перерассеяния. Таким образом, вопрос о возможности восстановления алгоритмом сильных рассеивателей оставался открытым в силу отсутствия модельных данных. Тогда возникло предложение исследовать работоспособность алгоритма с помощью двумерных рассеивателей с акустически абсолютно мягкой и абсолютно жесткой границей, характеризуемой граничными условиями 1-го и 2-го рода. Дело в том, что в случае круговой формы сечения таких рассеивателей известно строгое аналитическое решение прямой задачи при любом радиусе рассеивателя a и, следовательно, для разных $\|f\|$ и разной силы рассеивателей [144 (Т. 2, гл. 21, § 16); 189 (Т. II, §11.2); 397 (§ 29); 398 (гл. 10); 399 (гл. 3, § 4)]. Кроме того, соотношения, полученные А. А. Горюновым [142 (§ 8.2); 400], теоретически предсказывают возможность описания и восстановления граничных рассеивателей, как эффективных рефракционных рассеивателей $v(\mathbf{r})$, описываемых обобщенной функцией типа нормальной производной от δ -функции на границе, т.е. рассеивателей в виде двойного слоя, сосредоточенного на границе рассеивателя. Этот вопрос рассматривается в [А 131 (раздел 17.4)]. Надо подчеркнуть, что для восстановления граничных рассеивателей разработаны специальные алгоритмы поиска их границы [А 26; 401–403]. Поэтому привлечение НГМ-алгоритма имело целью не исследование нового метода восстановления рассеивателей такого типа, а определение предела работоспособности алгоритма в принципе [А 24; А 25].

Раздел 7.1. Восстановление граничных рассеивателей с большими волновыми размерами и область работоспособности алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова

При численном моделировании полагалось $\lambda_0 = 16$ е.д.д. На рис. 7.1 представлен мягкий рассеиватель с радиусом $a = \lambda_0/2$ и нормой данных рассеяния $\|f\| \approx 11.8/(3\pi)$. На рис. 7.2 представлен жесткий рассеиватель с таким же радиусом $a = \lambda_0/2$, норма которого $\|f\| \approx 9.0/(3\pi)$, однако, меньше, поскольку жесткий рассеиватель всегда является более слабым, чем мягкий рассеиватель при одинаковых волновых размерах. Рисунок 7.3 соответствует жесткому рассеивателю с большим радиусом $a = (11/16)\lambda_0$ и нормой $\|f\| \approx 11.3/(3\pi)$, близкой к норме для мягкого рассеивателя при $a = \lambda_0/2$. На рис. 7.1а изображены их диаграммы рассеяния, нормированные на значение для рассеяния назад [397 (§ 29); 399 (гл. 3, § 4)]; волна падает вдоль оси OX . Результат восстановления рассеивателей $\hat{v}(\mathbf{r})$ приведен на рис. 7.1а, 7.2а, 7.3а. Оценка $\hat{v}(\mathbf{r})$ является действительной функцией. Тогда, согласно [142 (§ 8.2); 400], ей может быть сопоставлен эффективный рефракционный рассеиватель вида (6.1), т.е. $v(\mathbf{r}) = \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right)$, что анализируется

подробнее в [А 131 (раздел 17.4)]. Функция $\hat{v}(\mathbf{r})$ почти не изменяется для точек \mathbf{r} внутри рассеивателя и быстро спадает в области границы рассеивателя. Этот спад в пограничной области – “фронт” функции $\hat{v}(\mathbf{r})$ – сопровождается осцилляциями. Происхождение осцилляций связано с тем, что алгоритм не воспроизводит компоненты пространственного спектра на пространственных частотах выше $2k_0$ (см. § 6.4.2).

Эффекты перерассеяния для всех трех рассеивателей выражены очень сильно, о чем свидетельствует оценка $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ – результат восстановления рассеивателя в приближении однократного рассеяния. Эта борновская оценка резко отличается, как по форме, так и по характерным амплитудным значениям, от оценки $\hat{v}(\mathbf{r})$, полученной с учетом перерассеяний. Кроме того, она имеет мнимую часть, соизмеримую по амплитуде с действительной частью. Для всех трех рассматриваемых рассеивателей функции $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$ однотипны по характеру поведения и порядку величины (рис. 7.1в, 7.2в).

По мере увеличения размера рассеивателя фиксированного типа, “фронт” функции $\hat{v}(\mathbf{r})$ становится более крутым, что видно из сравнения жестких рассеивателей с разными радиусами (рис. 7.2а, 7.3а). В то же время, оценка \hat{v} для жесткого рассеивателя с $a = (11/16)\lambda_0$ (рис. 7.3а) очень похожа на оценку \hat{v} для мягкого рассеивателя с $a = \lambda_0/2$ (рис. 7.1а), что подтверждает сопоставимость по силе этих двух рассеивателей. Такое совпадение оценок заслуживает внимания, поскольку исходные данные рассеяния различны, что видно из их диаграмм (рис. 7.1а).

Численное моделирование показало, что поставленный в начале настоящего раздела вопрос о границах работоспособности алгоритма оказывается непосредственно связан-

ным с устойчивостью решения к шумовым помехам, а также ошибкам измерений и дискретизации данных рассеяния. В то же время, тот факт, что граничные рассеиватели всегда создают рассеяние назад и, следовательно, НГМ-алгоритм для них заведомо не является строгим, влияет на устойчивость решения в меньшей степени.

С ростом силы рассеивателя присутствие рассеянного назад поля (выступающего, с точки зрения алгоритма, в роли помехи) проявляется, главным образом, в увеличении амплитуды осцилляций оценки $\hat{v}(\mathbf{r})$ граничного рассеивателя во внешней, по отношению к границе рассеивателя, области (рис. 7.2а, 7.3а). Устойчивость же оценки $\hat{v}(\mathbf{r})$ к упомянутым шумовым помехам и ошибкам тесно связана в алгоритме со значениями обусловленности дискретизованных систем уравнений, решаемых в процессе восстановления функции рассеивателя.

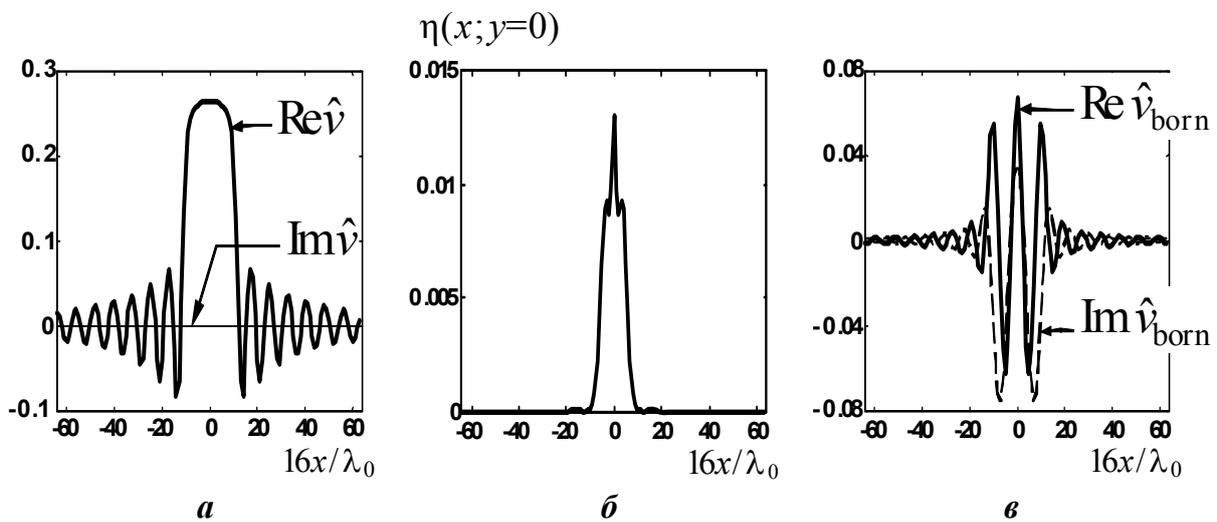
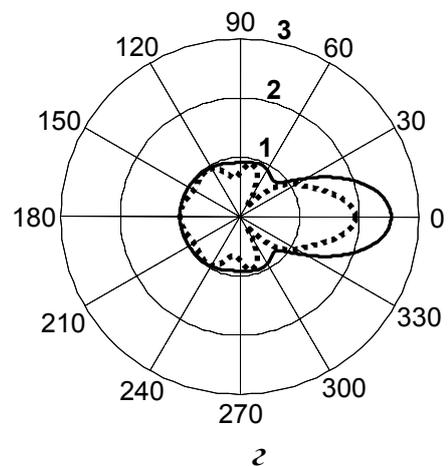


Рис. 7.1. Мягкий рассеиватель цилиндрической формы с радиусом $a = \lambda_0/2$; норма данных рассеяния $\|f\| \approx 11.8/(3\pi)$:

- центральные сечения рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний $\hat{v}(a)$ и в приближении однократного рассеяния $\hat{v}_{\text{born}}(b)$;
- значения обратной обусловленности в центральном сечении (b);
- нормированные диаграммы рассеяния (c) для мягкого рассеивателя с радиусом $a = \lambda_0/2$ (сплошная линия) и для жесткого с $a = 11\lambda_0/16$ (пунктирная линия).



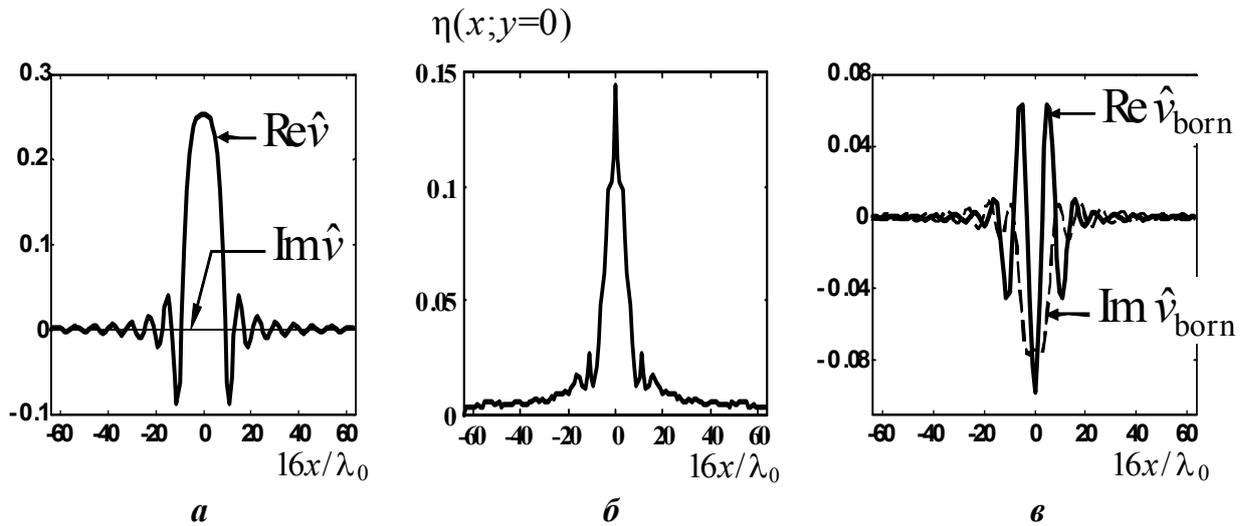


Рис. 7.2. Жесткий рассеиватель цилиндрической формы с радиусом $a = \lambda_0/2$; $\|f\| \approx 9/(3\pi)$:

- центральные сечения рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний \hat{v} (*a*) и в приближении однократного рассеяния \hat{v}_{born} (*v*);
- значения обратной обусловленности в центральном сечении (*b*).

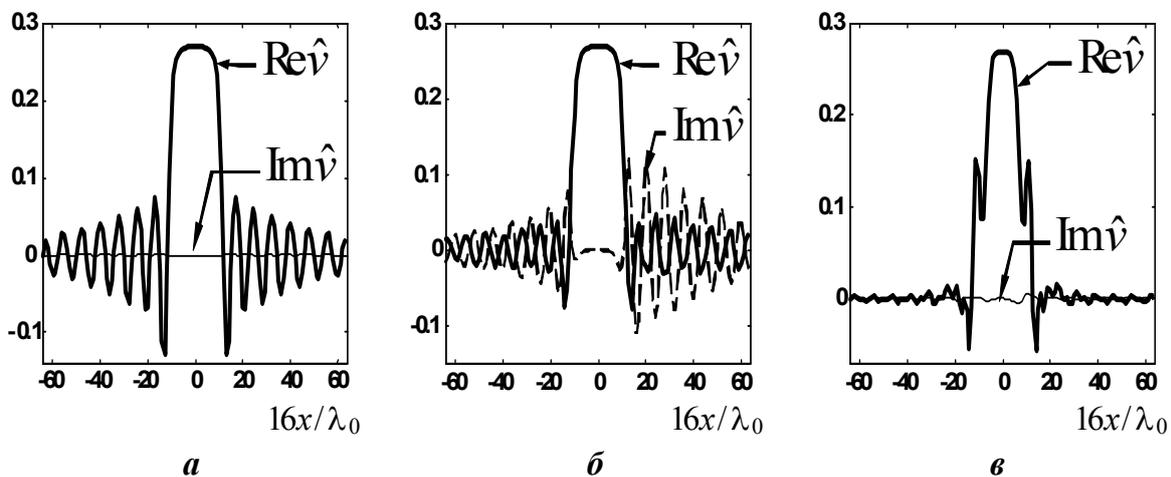


Рис. 7.3. Жесткий рассеиватель цилиндрической формы с радиусом $a = 11\lambda_0/16$; $\|f\| \approx 11.3/(3\pi)$:

- центральное сечение рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний (*a*);
- центральные сечения рассеивателя, восстановленного с учетом многократных рассеяний по зашумленным данным с амплитудным шумовым отклонением $\sigma_{\text{ns}} = 0.01 f_{\text{max}}$ без регуляризации (*b*) и в присутствии регуляризации (*v*).

В первую очередь, теряет устойчивость система (6.65) для нахождения функции $\rho(\mathbf{k}, \mathbf{L}) \equiv \rho(\varphi, \varphi')$ из функций $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{L}) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi')$ и, как следствие, система (6.67) для поля $K(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv K(\mathbf{r}, \varphi)$ или система (6.71) для угловых гармоник поля $\tilde{K}(\mathbf{r}, q')$. Система (6.71) с матрицей $M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q')$ при неизвестных $\tilde{K}(\mathbf{r}, q')$ и правой частью $\mathcal{D}(\mathbf{r}, q)$ для удобства чтения приводится ниже еще раз:

$$\sum_{q'=-\infty}^{\infty} M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q') \tilde{K}(\mathbf{r}, q') = \mathcal{D}(\mathbf{r}, q); \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.1)$$

$$\text{где } \mathcal{D}(\mathbf{r}, \varphi) = \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \left\{ Ex^-(\mathbf{r}, \varphi) \int_0^{2\pi} \rho(\varphi, \varphi') Ex^+(\mathbf{r}, \varphi') d\varphi' \right\},$$

$$Ex^\pm(\mathbf{r}, \varphi) \equiv \exp[\pm ik_0(x \cos \varphi + y \sin \varphi)], \quad \mathbf{r} = \{x, y\};$$

$$M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q') = \delta_{qq'} - 2\pi \tilde{\chi}^-(q') \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \left\{ Ex^-(\mathbf{r}, \varphi) \hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow -q'} [\rho(\varphi, \varphi') Ex^+(\mathbf{r}, \varphi')] \right\},$$

$$\delta_{qq'} = \{1 \text{ при } q = q', \quad 0 \text{ при } q \neq q'\}.$$

Для анализа помехоустойчивости системы (7.1), тождественной с системой (6.71), далее рассматривается зависящая от точки восстановления \mathbf{r} обратная обусловленность $\eta(\mathbf{r})$ матрицы $M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q')$, т.е. отношение абсолютных значений минимального и максимального собственных чисел этой матрицы. Для граничных рассеивателей с размером $a \ll \lambda_0$ значения $\eta(\mathbf{r})$ еще не слишком малы для всех точек \mathbf{r} . Например, при $k_0 a = 0.5$ для мягкого рассеивателя $\eta(\mathbf{r}) \approx (0.014 \div 0.024)$ в зависимости от точки \mathbf{r} ; для жесткого рассеивателя с тем же $k_0 a = 0.5$, как более слабого, обусловленность существенно лучше: $\eta(\mathbf{r}) \approx (0.55 \div 0.80)$. С ростом волновых размеров граничного рассеивателя $k_0 a$ и, следовательно, его силы, обусловленность ухудшается. Не только уменьшается максимальное значение η , достигаемое в центре рассеивателя, но и происходит спад величины $\eta(\mathbf{r})$ по мере увеличения расстояния от центра рассеивателя до текущей точки \mathbf{r} . Так, для мягкого рассеивателя с $a = \lambda_0/2$, значения $\eta(\mathbf{r}) = \eta(|\mathbf{r}|)$ представлены на рис. 7.1б. Для жесткого рассеивателя с тем же радиусом $a = \lambda_0/2$ соответствующие значения в $\approx (10 \div 100)$ раз выше (рис. 7.2б), а при радиусе $a = (11/16)\lambda_0$ вид и порядок величины $\eta(|\mathbf{r}|)$ становятся подобными рис. 7.1б.

Для жесткого рассеивателя с радиусом $a = (11/16)\lambda_0$ в незашумленные данные рассеяния $f(\varphi, \varphi')$ вносилась некоррелированная по направлениям ошибка $n(\varphi, \varphi')$ в

виде случайной нормально распределенной последовательности, независимой для $\text{Re } n(\varphi, \varphi')$ и $\text{Im } n(\varphi, \varphi')$, с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением $\sigma_{ns} = 0.01 f_{\max}$, где $f_{\max} \equiv \max_{\varphi, \varphi'} |f(\varphi, \varphi')|$. Тогда норма чисто шумовой ком-

поненты равна $\|n\| \equiv \sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |n(\varphi, \varphi')|^2} \approx 0.31/(3\pi)$, и входное амплитудное от-

ношение “помеха/сигнал” (6.82) составляет $\|n\| / \|f\| \approx 0.03$. Влияние шумовой компоненты на результат восстановления $\hat{v}(\mathbf{r})$ оказывается неодинаковым для разных пространственных областей (рис. 7.3б). Присутствие $n(\varphi, \varphi')$ почти не влияет на оценку \hat{v} в центральной части рассеивателя и проявляется в возникновении в области границы очень сильных паразитных осцилляций $\text{Im } \hat{v}(\mathbf{r})$, медленно спадающих с расстоянием. Несимметричный характер этих осцилляций относительно центра рассеивателя является подтверждением их шумового происхождения. Важно, что амплитуда оценки, полученной на основе данных рассеяния в виде только шумовой компоненты $n(\varphi, \varphi')$, более чем в 10^3 раз меньше амплитуды паразитных осцилляций $\text{Im } \hat{v}(\mathbf{r})$ на рис. 7.3б. Это обстоятельство ярко иллюстрирует, что учет эффектов перерассеяния на основном рассеивателе усиливает влияние шумовой помехи на оценку рассеивателя, т.е. ухудшает помехоустойчивость решения. С другой стороны, достаточно устойчивое воспроизведение \hat{v} в центральной части и возникновение неустойчивости на периферии позволяют предположить, что помехоустойчивость оценки определяется, прежде всего, явлениями перерассеяния вблизи границы, что и сказывается на величине обусловленности матрицы $M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}(\mathbf{r}, q, q')$ в данной точке \mathbf{r} . В центральной части рассеивателя значения обратной обусловленности η матрицы $M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}(\mathbf{r}, q, q')$ наибольшие, и, следовательно, помехоустойчивость выше. При приближении к границе рассеивателя величина η резко уменьшается – в десятки раз при увеличении расстояния всего на $\frac{\lambda_0}{4} \div \frac{\lambda_0}{2}$. Это наблюдается для соизмеримых по силе жесткого рассеивателя с $a = (11/16)\lambda_0$ и мягкого рассеивателя с $a = \lambda_0/2$ (рис. 7.1б). Именно это уменьшение η говорит о снижении помехоустойчивости решения и во много раз усиливает влияние помехи.

Была предпринята попытка повысить помехоустойчивость решения системы (7.1) через регуляризацию МНК-решения этой системы. В полученной с этой целью системе

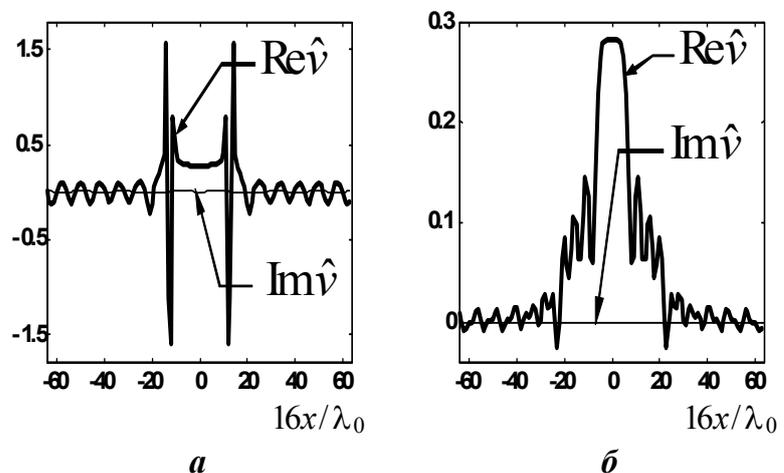
$$M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}^+ M_{\rho \rightarrow \tilde{k}} \tilde{K} = M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}^+ \mathcal{D}$$

($M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}^+$ – эрмитово сопряженная матрица) матрица $M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}^+ M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}$ перед обращением предварительно регуляризовалась путем добавления к ней εE , где E – единичная матрица, ε – коэффициент регуляризации, который выбирался равным произведению отно-

сительного коэффициента регуляризации $\varepsilon_0 < 1$ и среднего значения диагональных элементов матрицы $M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}^+ M_{\rho \rightarrow \tilde{k}}$. Значения ε_0 были индивидуальны для каждой точки \mathbf{r} . Регуляризованное решение, полученное при $\varepsilon_0 = 3 \times 10^{-4}$ в присутствии прежней шумовой помехи, представлено на рис. 7.3в. Регуляризация подавила не только паразитные осцилляции $\text{Im} \hat{v}$, но и существенно снизила осцилляции функции $\text{Re} \hat{v}$, вызванные ограничением частот пространственного спектра оценки \hat{v} кругом радиуса $2k_0$. Эта оценка $\text{Re} \hat{v}$ близка к регуляризованному решению, полученному при том же ε_0 по *незашумленным* данным рассеяния. Это говорит о том, что боковые “выбросы” с амплитудой ≈ 0.15 в оценке $\text{Re} \hat{v}$ (рис. 7.3в) связаны с влиянием даже очень слабого шума и ошибок дискретизации при одновременном резком ухудшении обусловленности в этой пространственной области.

При дальнейшем незначительном увеличении размера цилиндрического рассеивателя помехоустойчивость решения падает чрезвычайно быстро. Так, оценка жесткого рассеивателя с радиусом $a = \lambda_0$ даже в отсутствие шумовой помехи оказывается устойчивой только для внутренних точек $|\mathbf{r}| \leq \lambda_0/2$ (рис. 7.4а). Норма данных для этого рассеивателя $\|f\| \approx 13.9/(3\pi)$ увеличилась незначительно, по сравнению со случаем жесткого рассеивателя при $a = (11/16)\lambda_0$; значения же η упали в ≈ 100 раз, даже в максимуме составляя только $\eta(\mathbf{r} = 0) \approx 4 \times 10^{-4}$. Резкий спад величины η до значений $\approx 10^{-5}$ наблюдается уже на расстоянии около $\lambda_0/2$ от центра (т.е. внутри рассеивателя, не доходя до границы рассеивателя); как следствие – резкие выбросы в оценке \hat{v} в этой области. Здесь помехоустойчивость уже настолько низкая, что на оценке отражаются погрешности дискретизации уравнений алгоритма при численном расчете. Введение регуляризации в данной ситуации хотя и стабилизирует решение (выбросы подавлены), но не обеспечивает приемлемого качества оценки: рис. 7.4б, $\varepsilon_0 = 10^{-7}$ (увеличение ε_0 не улучшает оценки).

Рис. 7.4. Центральные сечения жесткого рассеивателя цилиндрической формы с радиусом $a = \lambda_0$ и $\|f\| \approx 13.9/(3\pi)$, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний без регуляризации (а) и в присутствии регуляризации (б).



Таким образом, акустически жесткие и мягкие рассеиватели, размер которых приближается к λ_0 , не удастся оценить методами решения обратной задачи, предназначенными для восстановления рассеивателей с плавно меняющимися пространственными характеристиками. Особенности, возникающие для граничных рассеивателей с размером около λ_0 или более, отмечались также в работе [404]. Сила таких рассеивателей увеличивается настолько, что ряд Борна–Неймана для них расходится. Однако данные обстоятельства не исключают возможность нахождения границы подобных рассеивателей специально разработанными для этой цели алгоритмами (некоторые из них здесь уже упоминались).

В отличие от граничных рассеивателей, в случае плавных рефракционных и (или) поглощающих рассеивателей, характерные значения и поведение величины обусловленности, в зависимости от положения точки \mathbf{r} , не связаны непосредственно с присутствием в рассеивателе контрастных деталей с малыми волновыми размерами, наподобие границы. Например, для сопоставления можно взять уже рассмотренный в § 6.4.2 двумерный рефракционный рассеиватель в виде кольца, внешний и внутренний радиусы которого равны $(25/16)\lambda_0$ и $(19/16)\lambda_0$ (рис. 6.5а). Контраст скорости звука внутри кольца $\Delta c/c_0 = 0.1$ приводит к дополнительному набегу фазы волны около 0.14π ; норма данных рассеяния $\|f\| \approx 8/(3\pi)$. Как и граничный рассеиватель, этот рефракционный рассеиватель создает сильное рассеяние назад, а учет эффектов перерассеяния при восстановлении также принципиально необходим (рис. 6.5б, в, г). Несмотря на это, значения $\eta(\mathbf{r}) \approx (0.3 \div 0.5)$ достаточно высоки во всей области восстановления, и уменьшения η в области границ рассеивателя не наблюдается. С другой стороны, в § 6.4.3 НГМ-алгоритмом восстанавливались крупные и контрастные рефракционно-поглощающие рассеиватели с линейным размером в несколько длин волн. Дополнительный набег фазы для них превышал π , а норма данных достигала $\|f\| \approx 18.5/(3\pi)$, что заметно превышает аналогичную норму для граничных рассеивателей с размером около λ_0 . Тем не менее, значения η не падали ниже $\cong 10^{-2}$. Приведенные примеры показывают, что пороговое значение $\eta \cong 10^{-5}$, при котором помехоустойчивость алгоритма становится уже неприемлемо низкой, удалось определить благодаря специфике именно граничных рассеивателей.

Увеличение силы рассеивателя приводит к постепенному ухудшению обусловленности дискретизованного алгоритма решения обратной задачи. С другой стороны, теория решения обратной двумерной монохроматической задачи рассеяния утверждает, что в случае дискретизованных данных единственность решения имеет место только для рассеивателей слабых и средней силы [А 2 (глава 6); 367], – см. выше раздел 3.2. Связать эти два обстоятельства можно следующим образом. Численная реконструкция всегда предполагает работу с дискретным набором данных рассеяния. Поэтому неединственность решения обратной задачи, о которой говорится в случае функционального описания континуального рассеивателя, полей, данных рассеяния и т.п., после дискретизации таких непрерывных величин может быть вызвана как недостатком данных, так и собственно неустойчивостью решения. Недостаточный объем дискретизованных данных рассеяния можно увеличить, по крайней мере, до минимально необходимого объема, который при учете

эффектов многократного рассеяния всегда превышает объем независимых дискретизованных параметров, характеризующих сам рассеиватель. По мере роста силы рассеивателя минимальный объем увеличивается, однако неустойчивость задачи при этом может не только не уменьшаться, но проявляться тем больше, чем сильнее рассеиватель. Это связано с тем, что двумерная монохроматическая задача является безызбыточной, в смысле одинаковой размерности пространства данных рассеяния и пространства неизвестных параметров рассеивателя. Данные вопросы обсуждались выше в разделе 3.2 [А 2 (глава 6); А 11]. Именно эффект снижения устойчивости вплоть до уровня, неприемлемого с практической точки зрения, для очень сильных рассеивателей (а граничные рассеиватели всегда сильные, поскольку создают сильные искажения падающего поля [А 131 – раздел 17.4]) и наблюдался при реконструкции. Дальнейшие исследования в этом направлении, направленные на повышение помехоустойчивости процесса восстановления за счет многочастотного режима и описанные далее в главе 8, были выполнены с помощью восстановления двумерных рефракционных рассеивателей с большим контрастом скорости звука (дополнительный набег фазы волны более π).

Как итог, можно сделать следующие выводы. Численное моделирование показало, что регуляризация оценок, получаемых на основе НГМ-алгоритма, как способ уменьшения влияния на решение помех и ошибок дискретизации задачи, эффективна только если рассеиватель таков, что обратная обусловленность решаемых уравнений алгоритма относительно $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$ еще превосходит величину $\eta \cong 10^{-5}$ для всех точек \mathbf{r} внутри рассеивателя. В противном случае, регуляризация стабилизирует решение, но не повышает существенно качество восстановления. Можно предположить следующую простую связь обратной обусловленности и точности данных рассеяния, определяемой присутствующими помехами и частотой дискретизации этих данных. Если относительная погрешность в данных, являющихся входными при решении системы, превосходит обратную обусловленность матрицы при неизвестных, то удовлетворительное качество восстановления становится невозможным. Такая связь справедлива при решении линейных (борновских) обратных задач, и возможное ее отличие для нелинейной (учитывающей перерассеяния) обратной задачи рассеяния в этих примерах не наблюдалось.

Надо иметь в виду, что для сильных рассеивателей абсолютные численные величины обусловленности системы (6.65) для нахождения $\rho(\varphi, \varphi')$, где неустойчивость возникает прежде всего, лучше, чем системы для $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$. Следовательно, величина обусловленности не является универсальным критерием работоспособности того или иного этапа алгоритма; эта величина носит относительный характер и может рассматриваться как критерий помехоустойчивости только в рамках конкретной рассматриваемой системы. Как обсуждалось в разделе 6.3, вместо системы (6.71), т.е. (7.1), относительно угловых гармоник $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$ можно решать систему (6.74) относительно угловых гармоник $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q)$. Для сильных рассеивателей численные значения обратной обусловленности системы относительно $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q)$ могут в несколько раз превосходить соответствующие значения системы относительно $\tilde{K}(\mathbf{r}, q)$. При этом итоговая оценка рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ получается совершенно одинаковой в обоих случаях, т.е. помехоустойчивость обеих систем одинакова.

Раздел 7.2. Восстановление граничных рассеивателей с малыми волновыми размерами

Самостоятельный интерес представляют результаты восстановления НГМ-алгоритмом граничных рассеивателей с предельно малыми волновыми размерами $k_0 a \ll 1$ [А 25]. При численном моделировании полагалось $\lambda_0 = 16$ е.д.д. На рис. 7.5а и 7.6а изображены полученные этим алгоритмом оценки \hat{v} для мягкого ($\|f\| \approx 2.7/(3\pi)$) и жесткого ($\|f\| \approx 0.02/(3\pi)$) рассеивателей, соответственно, с одинаковым размером $k_0 a = 0.05$. Эти оценки имеют два важных отличия. Во-первых, амплитуда боковых осцилляций по отношению к амплитуде главного максимума заметно больше в случае жесткого рассеивателя. Это связано с тем, что при данном размере $k_0 a$ рассеяние на мягком рассеивателе цилиндрической формы носит сугубо монополюсный характер, а на жестком – монополюсно-дипольный [397 (§ 29); 399 (гл. 3, § 4)]. Поэтому для жесткого цилиндра относительная доля мощности поля, рассеянного в обратном направлении и направлениях, близких к нему, больше, чем для мягкого цилиндра. Как следствие, оценка по НГМ-алгоритму, не учитывающая рассеяние назад, приобретает боковые осцилляции, сильнее выраженные в случае жесткого цилиндра. Во-вторых, абсолютные значения оценки \hat{v} гораздо больше (в 200 раз при рассматриваемом $k_0 a$) для мягкого рассеивателя, чем для жесткого. Это связано с различной силой рассеяния при одинаковом волновом размере: нормы $\|f\|$ отличаются более чем в 130 раз. Жесткий рассеиватель, начиная с размера порядка $k_0 a = 0.05$ и менее, становится эквивалентным (с точки зрения наблюдаемого вне цилиндра рассеянного поля) некоторому борновскому рассеивателю, т.е. рассеивателю, не порождающему перерассеяния. Другими словами, оценка $\hat{v}_{\text{борн}}$ в приближении однократного рассеяния совпадает с оценкой \hat{v} (рис. 7.6). При этом обусловленность всех решаемых систем уравнений алгоритма практически равна 1, т.е. идеально хорошая. Напротив, борновская оценка $\hat{v}_{\text{борн}}$ мягкого рассеивателя при $k_0 a = 0.05$ имеет сильно выраженную мнимую часть (рис. 7.5б), которая отсутствует в учитывающей перерассеяния оценке \hat{v} (рис. 7.5а), хотя $\text{Re} \hat{v}_{\text{борн}}$ близка к \hat{v} . Обратная обусловленность матрицы $M_{\rho \rightarrow \tilde{K}}(\mathbf{r}, q, q')$ составляет $\eta(\mathbf{r}) \approx (0.4 \div 0.5)$, в зависимости от точки восстановления \mathbf{r} .

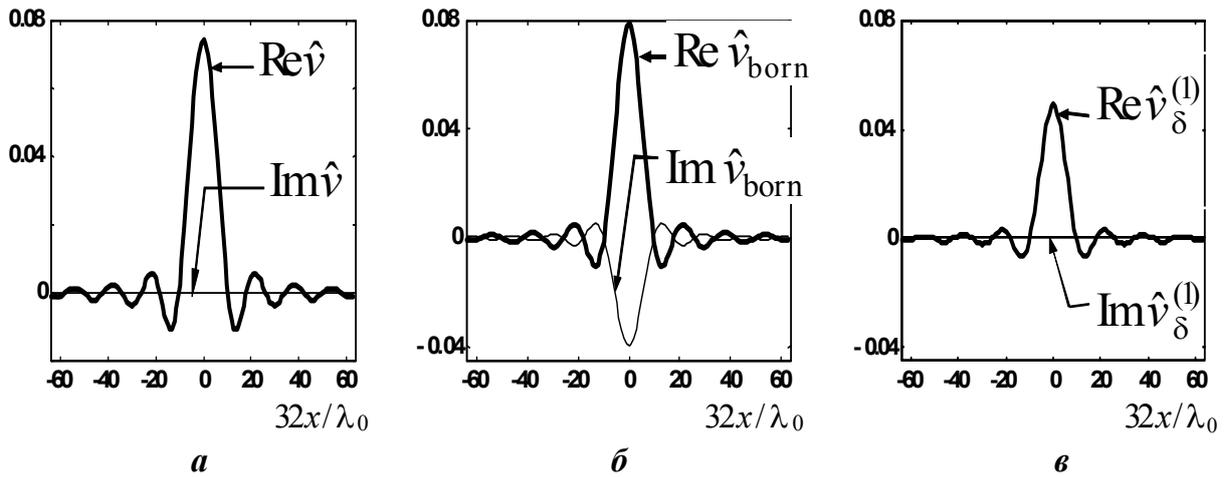
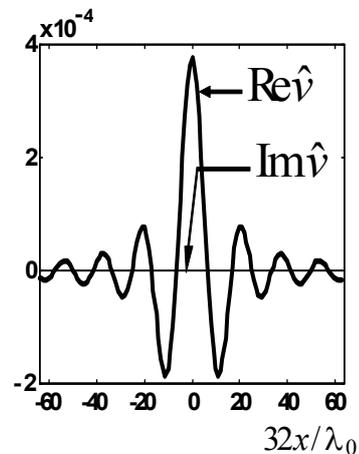


Рис. 7.5. Мягкий рассеиватель цилиндрической формы с волновым размером $k_0 a = 0.05$; $\|f\| \approx 2.7/(3\pi)$:

- центральные сечения рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех с учетом многократных рассеяний \hat{v} (а) и в приближении однократного рассеяния \hat{v}_{born} (б);
- центральное сечение результата восстановления в приближении однократного рассеяния δ -образного (точечного) рассеивателя с единичной нормировкой, когда данные рассеяния сформированы в том же приближении: $\hat{v}_{\delta}^{(1)}$ (в).

Рис. 7.6. Жесткий рассеиватель цилиндрической формы с волновым размером $k_0 a = 0.05$; $\|f\| \approx 0.02/(3\pi)$: центральное сечение рассеивателя, восстановленного при отсутствии шумовых помех (результаты восстановления при учете многократных рассеяний и в приближении однократного рассеяния совпадают).



При дальнейшем уменьшении $k_0 a$, форма и пропорции оценки \hat{v} не изменяются; ее полная ширина по уровню 0.7 составляет около $\lambda_0/4$. Полученная оценка \hat{v} , пронормированная на свою меру (т.е. объем $\int \hat{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, занимаемый функцией $\hat{v}(\mathbf{r})$), является некоторой предельной эффективной “аппаратной функцией” НГМ-алгоритма, *нелинейного* относительно данных рассеяния. Это связано с тем, что при $k_0 a \leq 0.05$ волновые размеры рассеивателя столь малы, что такой мягкий цилиндр представляет собой почти “точечное” препятствие с круговой диаграммой рассеяния.

Таким образом, рассеивающая способность мягкого цилиндра, по сравнению с жестким, оказывается гораздо больше, при одном и том же волновом размере $k_0 a \ll 1$. Со-

поставление сечений рассеяния мягкого (σ_{soft}) и жесткого (σ_{hard}) цилиндров с соответствующими радиусами $a = a_{\text{soft}}$ и $a = a_{\text{hard}}$ подтверждает этот вывод. Так, при

$$k_0 a \ll 1: \quad \sigma_{\text{soft}} \approx \frac{\pi^2 a_{\text{soft}}}{k_0 a_{\text{soft}} \ln^2 \left(\frac{1}{k_0 a_{\text{soft}}} \right)} \quad [189 (\text{Т. II}, \S 11.2)],$$

$$\sigma_{\text{hard}} \approx \frac{3}{4} (k_0 a_{\text{hard}})^3 \pi^2 a_{\text{hard}} \quad [189 (\text{Т. II}, \S 11.2); 397 (\S 29); 398 (\text{гл. 10})].$$

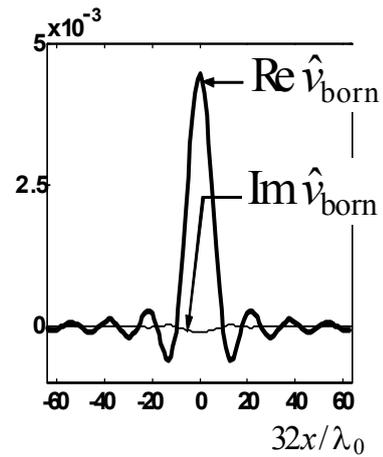
Из условия $\sigma_{\text{soft}} = \sigma_{\text{hard}}$, означающего приблизительное равенство рассеивающих способностей мягкого и жесткого цилиндров, вытекает соотношение, связывающее волновые размеры “эквивалентных” рассеивателей:

$$k_0 a_{\text{soft}} = \exp \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{(k_0 a_{\text{hard}})^2} \right]. \quad (7.2)$$

Из (7.2) следует, что по силе рассеяния значение $k_0 a_{\text{soft}} \approx 0.01$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} = 0.5$; значение $k_0 a_{\text{soft}} \approx 9.5 \times 10^{-9}$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} = 0.25$; значение $k_0 a_{\text{soft}} = 10^{-30}$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} \approx 0.1293$; значение $k_0 a_{\text{soft}} \approx 7 \times 10^{-51}$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} = 0.1$. Тем самым, при одинаковом сечении рассеяния, мягкий цилиндр, по сравнению с жестким, имеет гораздо меньшие физические размеры. Незначительное уменьшение размеров жесткого цилиндра влечет значительное (на много порядков!) уменьшение размеров “эквивалентного” мягкого цилиндра. Жесткий цилиндр становится квазиборновским при $k_0 a_{\text{hard}} \leq 0.05$. Мягкий же цилиндр не становится квазиборновским ни при каких физически реализуемых размерах. Действительно, уже при $k_0 a_{\text{hard}} \approx 0.1252$ вытекающий из (7.2) размер мягкого цилиндра $k_0 a_{\text{soft}} \cong 10^{-32}$ выходит на уровень, соответствующий (при скорости $\cong 1500$ м/с и частоте $\cong 1$ МГц, характерных для звука в мягких биологических тканях) планковскому размеру 10^{-35} м. При этом ненулевое значение $\text{Im} \hat{v}_{\text{born}}$ в борновской оценке мягкого рассеивателя с $k_0 a_{\text{soft}} = 10^{-30}$ все равно присутствует (рис. 7.7), свидетельствуя о наличии процессов “перерассеяния”. Одновременно, оценка \hat{v} того же мягкого цилиндрического рассеивателя по НГМ-алгоритму является чисто действительной величиной, практически совпадающей, при данном $k_0 a_{\text{soft}}$, с функцией $\text{Re} \hat{v}_{\text{born}}$. Отсутствие $\text{Im} \hat{v}$ означает, что даже в случае чрезвычайно малых, физически принципиально нереализуемых, волновых размеров рассеивателей, НГМ-алгоритм способен учесть процессы перерассеяния, происходящие на расстояниях, на 30 порядков (!) меньших λ_0 , т.е. далеко за пределами реальной разрешающей способности алгоритма. Этот факт объясняется строгостью математического аппарата алгоритма. Однако даже при таких предельно малых размерах мягкого рассеивателя, норма данных $\|f\| \approx 0.14/(3\pi)$ и амплитуда оценки \hat{v} оказываются на порядок больше,

чем в случае квазиборновского жесткого рассеивателя с $k_0 a = 0.05$ (рис. 7.6). С другой стороны, при одном и том же размере a , жесткий цилиндр является гораздо более слабым, чем мягкий, причем это различие в силе рассеивателей проявляется тем сильнее, чем меньше их размер. Так, жесткий рассеиватель при $k_0 a = 10^{-30}$ имеет норму данных $\|f\| \approx 8.2 \times 10^{-60} / (3\pi)$. Его оценка \hat{v} , совпадающая с \hat{v}_{born} , в точности повторяет форму и пропорции оценки для жесткого рассеивателя при $k_0 a = 0.05$ (рис. 7.6), однако амплитуда оценки \hat{v} составляет $\approx 1.5 \times 10^{-61}$.

Рис. 7.7. Центральное сечение мягкого рассеивателя цилиндрической формы с волновым размером $k_0 a = 10^{-30}$ и $\|f\| \approx 0.14 / (3\pi)$, восстановленного при отсутствии шумовых помех в приближении однократного рассеяния \hat{v}_{born} ; оценка \hat{v} при учете многократных рассеяний имеет $\text{Re} \hat{v} = \text{Re} \hat{v}_{\text{born}}$, $\text{Im} \hat{v} = 0$.



Интересно сопоставить приведенные результаты сравнения волновых размеров мягкого и жесткого двумерных рассеивателей с трехмерным случаем. Так, сечения рассеяния для мягкой и жесткой сфер с радиусами $a = a_{\text{soft}}$ и $a = a_{\text{hard}}$, соответственно, составляют при $k_0 a \ll 1$: $\sigma_{\text{soft}} \approx 4\pi a_{\text{soft}}^2$ [189 (Т. II, § 11.3); 399 (гл. 3, § 5)];

$$\sigma_{\text{hard}} \approx (7/9)(k_0 a_{\text{hard}})^4 \pi a_{\text{hard}}^2 \quad [398 \text{ (гл. 9); } 399 \text{ (гл. 3, § 5)}].$$

(Надо иметь в виду, что в [189 (Т. II, § 11.3); 397 (§ 29)] значение σ_{hard} приводится с опечатками.) Из условия $\sigma_{\text{soft}} = \sigma_{\text{hard}}$ следует связь: $k_0 a_{\text{soft}} = (\sqrt{7}/6)(k_0 a_{\text{hard}})^3$. Тогда значение $k_0 a_{\text{soft}} \approx 5.5 \times 10^{-2}$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} = 0.5$; значение $k_0 a_{\text{soft}} \approx 4.4 \times 10^{-4}$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} = 0.1$; значение $k_0 a_{\text{soft}} \approx 4.4 \times 10^{-16}$ эквивалентно $k_0 a_{\text{hard}} = 10^{-5}$; и, наконец, уровень планковского размера $k_0 a_{\text{soft}} = 10^{-32}$ соответствует эквивалентной величине $k_0 a_{\text{hard}} \approx 3 \times 10^{-11}$. Таким образом, при уменьшении волнового размера жесткой сферы, соответствующий волновой размер мягкой сферы уменьшается гораздо быстрее, по кубическому закону $k_0 a_{\text{soft}} \sim (k_0 a_{\text{hard}})^3$, хотя эта зависимость и не столь резкая, как в двумерном случае.

В заключение надо упомянуть проблему акустического рассеяния на точечной неоднородности и неоднородности монопольного типа с малыми волновыми размерами. Проблема рассеяния на точечной неоднородности привлекала внимание исследователей в области квантовой теории рассеяния [405; 406], а в контексте НГМ-алгоритма рассматривалась в связи с анализом акустического рассеяния на объектах с малыми волновыми размерами, на границах которых выполняется граничное условие 1-го рода. Вопрос о “точечном” рассеивателе (δ -образном рассеивателе – достаточно сильной неоднородности с исчезающе малыми размерами) интересен по нескольким причинам. Во-первых, оказывается, что процесс рассеяния на точечном рассеивателе всегда сопровождается многократным рассеянием, и это интересно уже само по себе. Во-вторых, НГМ-алгоритм учитывает многократные рассеяния, что делает процедуру восстановления нелинейной относительно экспериментальных данных. В связи с этим, вопрос о виде аппаратной функции данного алгоритма более сложен, чем в системах с линейной обработкой. В-третьих, алгоритм не учитывает рассеяние назад. Поэтому точечный рассеиватель, одинаково рассеивающий во всех направлениях, может служить иллюстрацией характера и степени тех искажений результата восстановления, которые вызваны присутствием рассеяния назад. В [407] отмечалось, что задача монопольно-дипольного рассеяния от объектов с малыми волновыми размерами весьма многогранна и по своему содержанию, и в прикладном отношении.

Введение представления об исчезающе малой, но достаточно сильной неоднородности среды представляется естественной и удобной идеализацией, использование которой дает информацию об аппаратных функциях различных алгоритмов и систем, предназначенных для восстановления внутренней структуры объектов. Более детальное рассмотрение этого представления показывает, однако, что оно требует определенного уточнения и осторожности в его использовании. Оказывается, что амплитуда и фаза вторичного источника, порожденного такой предельно сосредоточенной неоднородностью, не произвольны: так называемый коэффициент перерассеяния, характеризующий вторичный источник, ограничен по модулю, и его фаза однозначно определяет амплитуду [408]. Такая связь между амплитудой и фазой коэффициента перерассеяния является строгим и чисто классическим аналогом результата, полученного Л. Д. Фаддеевым и позже другими авторами для δ -образных рассеивающих потенциалов в квантовой механике, – см., например, [405] и [409], а также ссылки, имеющиеся в этих работах. Ее существование подтверждается численно на различных примерах, включая анализ аппаратной функции НГМ-алгоритма [А 25; А 131 (раздел 17.3)].

Изложенные в [А 25; А 131 (раздел 17.3)] результаты относятся к случаю рассеяния акустических волн на квазиточечной неоднородности, которая создает рассеянное поле только монопольного типа, причем в отсутствие поглощения. Продолжение исследований нашло отражение в [А 27], где анализируются два семейства монопольных квазиточечных неоднородностей. В [А 28; А 29; А 87] дополнительно затрагивается случай квазиточечных неоднородностей в присутствии поглощения. Кроме того, в [410–412] рассмотрено рассеяние на квазиточечной неоднородности, которая отличается от фоновой среды как скоростью звука, так и плотностью. В поле, рассеянном такой неоднородностью, надо учитывать не только монопольную компоненту, но и дипольную. Процесс рассеяния при этом описывается с помощью матричных функций Грина, что позволяет единообразно учитывать присутствие рефракционной и плотностной составляющих неоднородности. Ограничение на абсолютную величину коэффициентов перерассеяния, а также взаимосвязь между амплитудой и фазой рассеянного поля по-прежнему имеют место, но описываются более сложными соотношениями.

Глава 8. Многочастотное обобщение двумерного алгоритма Новикова

Алгоритм Новикова–Гриневича–Манакова (НГМ), подробно описанный и проанализированный в разделе 6.3, предоставляет серьезные перспективы для решения прикладных двумерных монохроматических задач. Детальное исследование этого алгоритма показало, что область его работоспособности намного больше, чем первоначально предполагалось. Тем не менее, при увеличении силы акустического рассеивателя наблюдалось возникновение неустойчивости и повышенной чувствительности к ошибкам в данных рассеяния (см. раздел 7.1). Основная и принципиальная причина этого явления кроется в размерностной избыточности данных рассеяния для двумерной монохроматической задачи. А именно, массив таких данных соответствует двумерно-параметрической области углов падения и рассеяния $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Той же размерностью “два” характеризуется область локализации искомого двумерного рассеивателя конечных размеров. Отсутствие размерностной избыточности данных для монохроматической задачи приводит к тому, что условия многочисленных теорем и утверждений относительно единственности решения таких задач (одна из ранних работ в этом направлении – [150]) носят отчасти более ограничительный характер [А 11; 367], по сравнению с трехмерной монохроматической задачей [А 11; 280; 367], особенно когда рассматривается конечный объем дискретизованных экспериментальных данных рассеяния. Эти вопросы поднимались выше в разделе 3.2 [А 2 (глава 6)].

Импульсный, или, во многом эквивалентный ему, многочастотный (полихроматический) режим снимает ограничение на силу рассеивателя, с точки зрения обеспечения единственности решения, поскольку в параметризации данных рассеяния появляется дополнительное измерение – частота. Однако простое аддитивное объединение множества решений монохроматических задач не является эффективным методом и не эквивалентно решению *единой* задачи, в котором используется факт общности рассеивателя для каждой монохроматической задачи. Поэтому необходим более полный метод объединения решений, который не лежит “на поверхности” и нуждается в дополнительном исследовании. Цель настоящей главы – найти и апробировать на численных моделях способ органичного объединения многочастотных данных и методов решения множества монохроматических задач двумерного рассеяния в виде единого функционального алгоритма. Этот алгоритм базируется на монохроматических вариантах решения, развитых в работах С. П. Новикова, Л. Д. Фаддеева, П. Г. Гриневича, С. В. Манакова и включающих последние результаты Р. Г. Новикова.

Функция рассеивателя $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ описывает отклонения фазовой скорости звука $c(\mathbf{r})$ и плотности среды $\rho(\mathbf{r})$ от их значений c_0 и ρ_0 в однородной фоновой непоглощающей среде без дисперсии, а также присутствие поглощения в рассеивателе, характеризуемого амплитудным коэффициентом поглощения $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$ на частоте ω_j . Присутствие неоднородности плотности желательно учитывать, например, в задачах медицинской диагностики, – см. раздел 4.3, а также [А 2 (п. 7.3.1.2); А 3]. Тогда функция рассеивателя,

в пренебрежении малой поправкой $\sim \alpha^2(\mathbf{r}, \omega_j)$, принимает более общий, по сравнению с (6.1), вид (1.17):

$$v(\mathbf{r}, \omega_j) = v_c(\mathbf{r}, \omega_j) + v_\rho(\mathbf{r}) + i v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j), \quad (8.1)$$

$$\text{где } v_c(\mathbf{r}, \omega_j) = \omega_j^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right), \quad v_\rho(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right),$$

$$v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) \equiv \text{Im } v(\mathbf{r}, \omega_j) = -2 \omega_j \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{c(\mathbf{r})}.$$

для используемой временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega_j t)$. В § 4.3.1, а также в [А 2 (§ 7.3.1)] вместо обозначения $v_\rho(\mathbf{r})$ использовалось обозначение $\mathcal{P}(\mathbf{r})$. Параметр ω_j в аргументах функций сейчас выписывается в явном виде, поскольку в дальнейшем будет рассматриваться полихроматический режим зондирования. Предполагается, что частотная зависимость коэффициента поглощения характеризуется показателем степени ζ , т.е. $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) \sim (\omega_j)^\zeta$. Способ оценки заранее неизвестных значений $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$, зависящих, в общем случае, от координат, предлагался выше в разделе 4.3 [А 2 (раздел 7.3); А 3; А 8; А 14; А 77; А 78].

Из (8.1) следуют характерные частотные зависимости:

$$v_c(\mathbf{r}, \omega_j) \sim (\omega_j)^2; \quad v_\rho(\mathbf{r}) = \text{const}_\omega(\mathbf{r}); \quad v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) \sim (\omega_j)^{\zeta+1}, \quad (8.2)$$

где $\text{const}_\omega(\mathbf{r})$ означает константу по частоте при каждом фиксированном \mathbf{r} . Таким образом, в общем случае, действительная часть функции рассеивателя $\text{Re } v(\mathbf{r}, \omega_j) = v_c(\mathbf{r}, \omega_j) + v_\rho(\mathbf{r})$ представлена двумя компонентами: неоднородностью скорости звука $v_c(\mathbf{r}, \omega_j)$, имеющей квадратичную частотную зависимость, и частотно-независимой неоднородностью плотности $v_\rho(\mathbf{r})$. Мнимая часть $\text{Im } v(\mathbf{r}, \omega_j) = v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$ представлена поглощающей компонентой с соответствующей частотной зависимостью.

Как и в алгоритме Новикова–Гриневича–Манакова, данными рассеяния при восстановлении $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ может служить классическая амплитуда рассеяния $f^+ \equiv f(\mathbf{k}, \mathbf{I}; \omega_j) = f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ для запаздывающего поля; индекс j у векторов \mathbf{I} и \mathbf{k} для краткости опущен. Предполагается, что значения $f(\mathbf{k}, \mathbf{I}; \omega_j)$ известны для всех направлений вектора $\mathbf{I} = \{k_{0j}, \varphi'\}$ (в полярной системе координат) рассеянной волны в дальней зоне при каждом фиксированном волновом векторе $\mathbf{k} = \{k_{0j}, \varphi\}$ падающей за-

запаздывающей плоской волны $u_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u_0^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Для связности изложения ниже в нескольких фразах будут повторены некоторые главные моменты, описанные в разделе 6.1 и касающиеся применения формализма комплексных волновых векторов к решению обратных задач. Основополагающим моментом функционально-аналитических методов является (следуя Л. Д. Фаддееву) математический переход от решения обратной задачи в физической области действительных волновых векторов $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$ в “нефизическую” область комплексных волновых векторов

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_R + i\mathbf{I}_I$$

$$(\mathbf{k}_R \equiv \text{Re}\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_I \equiv \text{Im}\mathbf{k}; \quad \mathbf{I}_R \equiv \text{Re}\mathbf{I}, \quad \mathbf{I}_I \equiv \text{Im}\mathbf{I})$$

с сохранением условия монохроматичности:

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{I}^2 = k_{0j}^2 \quad \text{при } \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^2.$$

Это условие означает, что $\mathbf{k}_R \perp \mathbf{k}_I$. Переход в область комплексных \mathbf{k} и \mathbf{I} сопровождается введением обобщенного волнового поля $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ на частоте ω_j и обобщенной амплитуды рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{I}; \omega_j)$. Эти функции принципиальным образом зависят от взаимной ориентации действительной и мнимой частей волновых векторов, и данная зависимость сохраняется при предельном переходе к действительным векторам. Поскольку $\mathbf{k}_R \perp \mathbf{k}_I$, то в двумерной задаче допустимы только две ортогональные ориентации вектора \mathbf{k}_I относительно вектора \mathbf{k}_R : левосторонняя ориентация, обозначаемая как $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$, и правосторонняя $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$ (рис. 6.1). При бесконечно малой, но перпендикулярно ориентированной мнимой части волнового вектора $\mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$, обобщенное поле $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ принимает предельные значения $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$, а обобщенная амплитуда рассеяния – предельные значения $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{I}; \omega_j) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$; $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^2$. Важно, что $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ и $h^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{I}; \omega_j)$ не совпадают с их классическими аналогами – запаздывающим классическим волновым полем $u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ и амплитудой рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I}; \omega_j)$. Это связано с тем, что u^{cl} и f получаются из Ψ и h при добавке \mathbf{k}_I , которая также бесконечно мала, но *сонаправлена* с вектором \mathbf{k}_R .

В данной главе для полных классических запаздывающих полей будут использоваться уже введенные здесь обозначения

$$u_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u_0^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j), \quad u^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j).$$

Это делается с той целью, чтобы в процессе чтения материала было легче ориентироваться, где речь идет о классических полях, а где о предельных значениях обобщенных волновых полей при бесконечно малых ортогональных добавках $\mathbf{k}_j^\pm \rightarrow 0$.

Раздел 8.1. Модифицированный двумерный алгоритм Новикова в монохроматическом и полихроматическом режимах

В настоящее время единственным строгим алгоритмом решения обратных двумерных волновых акустических монохроматических задач рассеяния средствами функционального анализа, доведенным до стадии численного моделирования, является НГМ-алгоритм. Он обеспечивает строгое решение задачи с учетом эффектов многократного рассеяния, однако накладывает ограничения на класс восстанавливаемых рассеивателей. Впоследствии НГМ-алгоритм был модифицирован Р. Г. Новиковым [271; 413]. Этот новый вариант двумерного монохроматического алгоритма, обсуждению преимуществ которого и обобщению на полихроматический случай посвящена настоящая глава, будет далее называться модифицированным двумерным алгоритмом Новикова [А 31; 414]. Надо иметь в виду, что в следующей главе 9 будет обсуждаться трехмерный алгоритм Новикова, имеющий достаточно мало общих черт с модифицированным двумерным алгоритмом Новикова. Рассматриваемая модификация двумерного алгоритма приведена в упоминавшихся работах его автора в терминах комплексных переменных на λ -плоскости (см. раздел 6.1). В представляемом же ниже изложении все этапы алгоритма описываются в терминах классических углов и координат.

Первый этап – такой же, как и в исходном НГМ-алгоритме: предельные значения обобщенной амплитуды рассеяния $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находятся из известных классических значений амплитуды рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ на основе интегрального соотношения (6.31), или (6.63) [124 (уравнение 3.7 главы III); 136 (уравнение 1.7); 271; 335; 386; 413]:

$$h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) - \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi''; \omega_j) \theta[\pm \sin(\varphi'' - \varphi)] f(\varphi'', \varphi'; \omega_j) d\varphi'' = f(\varphi, \varphi'; \omega_j), \quad (8.3)$$

где $\theta(t) = \{1 \text{ при } t > 0; 0 \text{ при } t \leq 0\}$ – функция Хевисайда. После перехода к дискретным величинам, соотношение (8.3) переходит в систему линейных алгебраических уравнений, решаемую при каждом фиксированном угле падения φ и фиксированной частоте.

На втором этапе, уже отличающемся от этапов НГМ-алгоритма, находится классическое запаздывающее полное волновое поле $u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$. Асимптотика этого поля для

удобства переопределяется на единицу при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ путем введения классической модулирующей функции $\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$. Сначала строится вспомогательная функция

$$B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} Q^-(\mathbf{r}, \varphi'', \varphi'; \omega_j) \chi^+(\varphi - \varphi'') d\varphi'' - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} Q^+(\mathbf{r}, \varphi'', \varphi'; \omega_j) \chi^-(\varphi - \varphi'') d\varphi'' . \quad (8.4)$$

Здесь $\chi^\pm(\varphi) \equiv \frac{1}{1 - (1 \mp 0) \cdot \exp(i\varphi)}$, где выражение (1 ∓ 0) означает бесконечно малую отрицательную (-0) или положительную $(+0)$ добавку к единице;

$$Q^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \equiv h^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)] , \quad (8.5)$$

где

$$h^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \equiv h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) \exp[ik_{0j} \{x(\cos \varphi' - \cos \varphi) + y(\sin \varphi' - \sin \varphi)\}] ; \quad (8.6)$$

$$\mathbf{r} = \{x, y\} .$$

Знание $B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$ позволяет найти поле $\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \equiv \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ из системы линейных уравнений:

$$\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \int_0^{2\pi} B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi' = 1 . \quad (8.7)$$

Соотношения (8.4)–(8.7) справедливы при отсутствии рассеяния назад обобщенных полей. Имеется в виду то же самое условие (6.40) или (6.41), которое накладывалось на рассеиватель в НГМ-алгоритме. Оно выполняется при условии локализации пространственного спектра классических вторичных источников внутри круга радиуса $2k_{0j}$ ($k_{0j} \equiv \omega_j/c_0$) с центром в точке \mathbf{k} (6.42). Доказательство связи (8.4)–(8.7), приведенное в [413 (ур. (2.25)–(2.34))], подробно воспроизведено в [А 31; А 131 (раздел 18.1)] в терминах угловых гармоник полей

$$\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j) \equiv \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \exp(-iq\varphi) d\varphi .$$

Пространство угловых гармоник q , принимающих целые значения (т.е. $q \in \mathbb{Z}$), является фурье-сопряженным к пространству углов φ . Ниже приводятся некоторые соотношения,

которые понадобятся в дальнейшем. Так, угловые гармоники функций $\chi^\pm(\varphi)$ строго рассчитываются аналитически и уже приводились в (6.56):

$$\tilde{\chi}^+(q) = \begin{cases} 1 & \text{при } q = 0, 1, 2, \dots; \\ 0 & \text{при } q = -1, -2, -3, \dots; \end{cases} \quad \tilde{\chi}^-(q) = \begin{cases} 0 & \text{при } q = 0, 1, 2, \dots; \\ -1 & \text{при } q = -1, -2, -3, \dots \end{cases} \quad (8.8)$$

Кроме того, в разделе 6.2 было показано, что в случае отсутствия рассеяния назад обобщенных полей Ψ справедливы следующие соотношения. Для пересчитанных (путем снятия несущей волны) предельных значений $\mu^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$, которые соответствуют двум ортогональным ориентациям бесконечно малой мнимой добавки $\mathbf{k}_j^\pm \rightarrow 0$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$, имеют место свойства (6.57) их угловых гармоник

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^\pm(\mathbf{r}, q; \omega_j) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \exp(-iq\varphi) d\varphi: \\ \tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q < 0; \omega_j) &\equiv 0; \quad \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = 0; \omega_j) \equiv 1; \\ \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q > 0; \omega_j) &\equiv 0; \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

В то же время, между предельными значениями $\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ и классическим полем $\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ имеет место связь (6.35) [124 (глава III)]:

$$\Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) = u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \pi i \int_0^{2\pi} h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) \theta[\pm \sin(\varphi' - \varphi)] u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi'.$$

Это соотношение, с учетом аналогичных переопределений

$$\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j), \quad \mu^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\Psi^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j),$$

т.е.

$$\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \equiv \exp[-ik_{0j}\{x \cos \varphi + y \sin \varphi\}] u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j),$$

$$\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \equiv \exp[-ik_{0j}\{x \cos \varphi + y \sin \varphi\}] \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j),$$

приобретает вид

$$\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) = \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \pi i \int_0^{2\pi} Q^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi', \quad (8.10)$$

где функции Q^\pm определены в (8.5).

В силу свойства (8.8), при численной реализации алгоритма, функцию $B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$, приведенную в (8.4), наиболее удобно рассчитывать в пространстве угловых гармоник. Применение фурье-преобразования $\hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q}$ по углу φ к выражению (8.4), правая часть которого является линейной комбинацией циклических сверток, дает:

$$\tilde{B}(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) = \frac{i}{2} 2\pi \tilde{Q}^-(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) \tilde{\chi}^+(q) - \frac{i}{2} 2\pi \tilde{Q}^+(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) \tilde{\chi}^-(q),$$

и, с учетом (8.8),

$$\tilde{B}(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) = \begin{cases} i\pi \tilde{Q}^-(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) & \text{при } q = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ i\pi \tilde{Q}^+(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) & \text{при } q = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (8.11)$$

Аналогичная операция $\hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q}$ применяется к уравнению (8.7):

$$\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j) + \int_0^{2\pi} \tilde{B}(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi' = \delta_{q0}, \text{ где } \delta_{q0} = \begin{cases} 1, & q = 0; \\ 0, & q \neq 0. \end{cases}$$

Данное уравнение, после преобразования подынтегрального выражения с помощью соотношения для обратного фурье-преобразования

$$\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) = \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j) \exp(iq'\varphi'), \quad (8.12)$$

приобретает окончательный вид:

$$\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{B}}(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j) = \delta_{q0}. \quad (8.13)$$

Здесь $\tilde{\tilde{B}}$ – двойная угловая гармоника (по углам φ и φ'):

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{B}}(\mathbf{r}, q, q'; \omega_j) &\equiv \hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow q'} \tilde{B}(\mathbf{r}, q, \varphi'; \omega_j) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \exp(-iq\varphi) \exp(-iq'\varphi') d\varphi d\varphi', \end{aligned}$$

вычисляемая применением к (8.11) дополнительного фурье-преобразования $\hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow q'}$ по углу φ' :

$$\tilde{\tilde{B}}(\mathbf{r}, q, q'; \omega_j) = \begin{cases} i\pi \tilde{\tilde{Q}}^-(\mathbf{r}, q, q'; \omega_j) & \text{при } q = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ i\pi \tilde{\tilde{Q}}^+(\mathbf{r}, q, q'; \omega_j) & \text{при } q = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (8.14)$$

для любого $q' \in \mathbb{Z}$.

Надо обратить внимание, что в (8.13) фигурируют значения $\tilde{\tilde{B}}(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j)$, соответствующие именно номеру $(-q')$.

На третьем этапе алгоритма из уже найденного классического поля $\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ непосредственно рассчитываются, согласно (8.10), предельные значения обобщенного поля $\mu^-(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$, соответствующие бесконечно малой ортогональной добавке $\mathbf{k}_j^- \rightarrow 0$:

$$\mu^-(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) = \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \pi i \int_0^{2\pi} \mathcal{Q}^-(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi' . \quad (8.15)$$

Численная реализация этого соотношения опять же может основываться на применении к (8.15) операции $\hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q}$ и преобразовании подынтегрального выражения с помощью (8.12):

$$\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q; \omega_j) = \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j) + 2i\pi^2 \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}^-(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j). \quad (8.16)$$

При этом для нахождения рассеивателя на последнем этапе нужно рассчитать только гармонику $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) &= \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) + \\ &+ 2i\pi^2 \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}^-(\mathbf{r}, q = -1, -q'; \omega_j) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j) . \end{aligned} \quad (8.17)$$

Последний четвертый этап, как и первый, аналогичен заключительному этапу НГМ-алгоритма, – это вычисление искомой функции рассеивателя с помощью соотношения (6.75) [137; 352]:

$$v(\mathbf{r}, \omega_j) = \frac{k_{0j}}{2\pi} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{2\pi} \mu^-(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \exp(i\varphi) d\varphi , \quad (8.18)$$

или

$$v(\mathbf{r}, \omega_j) = k_{0j} \left(i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) \equiv 2ik_{0j} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) , \quad (8.19)$$

где введена новая комплексная переменная

$$z \equiv x + iy, \quad \text{и тогда} \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (8.20)$$

Соотношение (6.72) НГМ-алгоритма говорит, что в правой части выражения (8.18) вместо $\mu^-(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ может присутствовать разность предельных значений $-K(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \equiv -\left\{ \mu^+(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) - \mu^-(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) \right\}$, соответствующих двум ортогональным ориентациям бесконечно малой мнимой добавки $\mathbf{k}_j^\pm \rightarrow 0$. Однако, согласно (8.9), $\tilde{\mu}^+(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) \equiv 0$, за счет чего имеют место (8.18), (8.19). Соотношения (8.18), (8.19), как и (8.7), справедливы при условии отсутствия рассеяния назад обобщенных волн.

Итак, последовательность реализации модифицированного алгоритма в монохроматическом варианте, т.е. при фиксированном ω_j , такова. Из данных $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находятся $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ решением линейных систем (8.3) в пространстве углов при каждом фиксированном φ . Из $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ строятся функции $h^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$ и $Q^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$, согласно (8.5). Нахождение классического поля из линейной системы (8.7) равносильно нахождению угловых гармоник этого поля $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$ из системы (8.13) с учетом выражения (8.14) для \tilde{B} , в котором $\tilde{Q}^\pm(\mathbf{r}, q, q'; \omega_j)$ рассчитываются применением к $Q^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)$ фурье-преобразования по обоим углам. Далее предельные значения обобщенного поля непосредственно рассчитываются на основе значений классических полей из (8.15) или, что удобнее, (-1) -я угловая гармоника обобщенного поля $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$ рассчитывается из (8.17). Функция рассеивателя находится из (8.18) или (8.19), где операция дифференцирования может быть выполнена с помощью пространственного фурье-преобразования, однако лучший результат дает метод конечных разностей.

Изложенная последовательность действий схематически имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccc} f(\varphi, \varphi'; \omega_j) & \longrightarrow & h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) & \longrightarrow & Q^\pm(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) & \dashrightarrow & \\ (8.3) & & & & (8.5) & & \\ \\ \dashrightarrow & \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j) & \longrightarrow & \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) & \longrightarrow & v(\mathbf{r}, \omega_j) & . \\ (8.13), (8.14) & & (8.17) & & (8.19) & & \end{array}$$

Модифицированный алгоритм Новикова сохраняет все достоинства НГМ-алгоритма: локальность по пространственной координате (функция рассеивателя восстанавливается в фиксированной точке \mathbf{r} независимо от других точек), возможность получения решения безытерационным способом (поскольку решаемые системы линейны относительно неизвестных), учет эффектов перерассеяния. В монохроматическом режиме качество восстановления рассеивателей данным алгоритмом и НГМ-алгоритмом эквивалентны. Оба монохроматических алгоритма имеют одни и те же пределы работоспособности, с точки зрения ограничения класса восстанавливаемых рассеивателей. Так, сила рассеивателя, определяемая дополнительным набегом фазы волны и полным поглощением или усилением при прохождении через рассеиватель, может быть большой, но все же ограничена определенным пределом (он выявлен на языке обратной обусловленности в разделе 7.1), при превышении которого решение теряет устойчивость. Кроме того, оба алгоритма остаются строгими только при отсутствии рассеяния назад обобщенных (на случай комплексных волновых векторов) волн. В частности, это означает отсутствие рассеяния назад классических полей, т.е. исключает наличие границ или областей с резким изменением фазовой скорости звука. Данное ограничение не является спецификой конкретного алгоритма, но отражает общие характерные особенности решения двумерной монохроматической обратной задачи рассеяния, – см. выше раздел 3.2 [А 2 (глава 6); А 11]. Оно может быть выполнено для рассеивателей с компактным пространственным спектром; в противном случае при восстановлении происходит сглаживание формы рассеивателя и вносится погрешность в оценку его характеристик (см. § 6.4.2).

Эквивалентность в монохроматическом режиме оценки функции рассеивателя модифицированным алгоритмом и НГМ-алгоритмом проиллюстрирована в [414] на примере несимметричного рефракционно-поглощающего рассеивателя.

По сравнению с НГМ-алгоритмом, модифицированный алгоритм имеет важные в практическом отношении преимущества. Во-первых, уже в монохроматическом режиме существенно сокращается число вычислительных операций, поскольку системы уравнений требуется решать только на двух (вместо трех) этапах – при нахождении h^+ и h^- из данных рассеяния f и при нахождении классического поля. Во-вторых, модифицированный алгоритм восстанавливает классическое поле $\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$, или $u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ вместо разности предельных значений обобщенных полей $\mu^+ - \mu^-$. Тогда восстановленные $u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ и $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ позволяют рассчитать значения классических вторичных источников $I^+ \equiv I^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv v(\mathbf{r}, \omega_j)u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j)$ и далее оценить важную характеристику рассматриваемого класса рассеивателей – ширину области локализации пространственного спектра вторичных источников $\tilde{I}^{\text{cl}}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \int I^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \exp(-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\mathbf{r}$. Символ “ \sim ” над функцией здесь означает фурье-преобразование по пространственной переменной, а не по угловой, что понятно из смысла приводимых аргументов; $\boldsymbol{\xi}$ – вектор пространственной частоты. Знание упомянутой ширины позволяет обеспечить адекватное описание обратной задачи в терминах дискретных величин, а также единственность и ус-

тойчивость последующего решения, – см. выше раздел 3.2 [А 2 (глава 6); А 10; А 11], – что важно иметь в виду при постановке эксперимента.

Третье преимущество модифицированного алгоритма связано с важным вопросом, касающимся возможности обобщения алгоритма на полихроматический режим. Дело в том, что решение обратной двумерной монохроматической задачи становится тем менее устойчивым, чем сильнее рассеиватель. Эта ситуация не зависит от конкретного способа решения, поскольку она обусловлена размерностной безызбыточностью двумерной монохроматической задачи, – см. см. выше раздел 3.2 [А 2 (глава 6); А 11]. Потеря устойчивости решения происходит в модифицированном алгоритме и в НГМ-алгоритме в равной мере, т.е. сильный рассеиватель, восстанавливающийся искаженно из-за потери устойчивости решения НГМ-алгоритма (см. раздел 7.1), имеет ту же степень искажения и при восстановлении модифицированным алгоритмом. Несмотря на то, что данные монохроматические алгоритмы успешно восстанавливают двумерные рассеиватели достаточно большой силы (см. раздел 6.4), на практике (в том числе, в задачах медицинской диагностики) могут встречаться рассеиватели настолько сильные, что устойчивость решения в монохроматическом режиме утрачивается. Единственный путь преодоления неустойчивости – переход к импульсному или полихроматическому режиму томографирования. Важно, что качество решения при одновременном и взаимосвязанном использовании всего объема многочастотных данных оказывается существенно выше по сравнению с результатом простого усреднения отдельных монохроматических решений. Анализ НГМ-алгоритма и его модификации показал нетривиальность их обобщения на импульсный режим (авторами алгоритмов этот вопрос не рассматривался). Причина нетривиальности заключается в следующем. В уравнениях (8.3), предназначенных для нахождения $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$, амплитуда рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ входит не только в правую часть, но и в оператор при неизвестных h^\pm , и при обобщении этих уравнений на импульсный режим произведение $h^\pm(\varphi, \varphi''; \omega_j) f(\varphi'', \varphi'; \omega_j)$ переходит в свертку (по времени) временных аналогов соответствующих функций $h^\pm(\varphi, \varphi''; t)$ и $f(\varphi'', \varphi'; t)$. Длительность (по t) функции $f(\varphi, \varphi'; t)$ близка к длительности T_{sc} рассеянного сигнала. Тогда разложение в ряд Борна–Неймана временного аналога уравнений (8.3) показывает, что длительность функций $h^\pm(\varphi, \varphi'; t)$ увеличивается, по сравнению с T_{sc} , пропорционально количеству актов (кратности) рассеяния и, следовательно, может во много раз превосходить T_{sc} для сильных рассеивателей. Поскольку при построении функций $h^\pm(\varphi, \varphi'; t)$ необходимо рассматривать весь временной интервал их локализации, это будет чрезмерно увеличивать вычислительные затраты и размерность дискретизованных величин. В НГМ-алгоритме последующие этапы нахождения характеристик обобщенных полей на основе h^\pm требуют дальнейшего расширения анализируемого временного интервала. В модифицированном алгоритме такого нового расширения не будет возникать, так как из (8.7) или (8.13) на основе h^\pm находятся полные классические поля, длительность процессов в которых, по фи-

зическому смыслу, определяется суммой длительностей падающего и рассеянного сигналов и близка к T_{sc} .

В связи с отмеченной вычислительной трудностью непосредственной обработки данных, полученных в импульсном режиме, внимание было обращено на возможность восстановления рассеивателя на основе совокупности монохроматических данных, полученных на разных частотах ω_j , $j = \overline{1, J}$; J – общее количество частот. При этом связующим звеном является общность (единство) искомого рассеивателя для всех частот. Тем самым, уравнения связи следуют из априорно известной частотной зависимости (8.2) для рефракционной, плотностной и поглощающей компонент рассеивателя:

$$\begin{aligned} \frac{v_c(\mathbf{r}, \omega_j)}{(k_{0j})^2} - \frac{v_c(\mathbf{r}, \omega_{j+1})}{(k_{0, j+1})^2} &= 0; & v_\rho(\mathbf{r}) &= \text{const}_\omega(\mathbf{r}); \\ \frac{v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{(k_{0j})^{\zeta+1}} - \frac{v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_{j+1})}{(k_{0, j+1})^{\zeta+1}} &= 0; & j &= \overline{1, (J-1)}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Одновременно, согласно (8.19),

$$\begin{aligned} \text{Re} v(\mathbf{r}, \omega_j) \equiv v_c(\mathbf{r}, \omega_j) + v_\rho(\mathbf{r}) &= -2k_{0j} \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) \right], \\ \text{Im} v(\mathbf{r}, \omega_j) \equiv v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) &= 2k_{0j} \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) \right], \end{aligned} \quad (8.22)$$

откуда

$$\begin{aligned} 2k_{0j} \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) \right] + v_c(\mathbf{r}, \omega_j) + v_\rho(\mathbf{r}) &= 0; \\ 2k_{0j} \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) \right] - v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) &= 0; \quad j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Значения $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$ можно выразить через классические поля или их угловые гармоники с помощью (8.17). В (8.23) фигурируют значения пространственных производных

$\frac{\partial \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)}{\partial z}$, вычисление которых непосредственно из $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$

требует знания функции $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$ не только в фиксированной точке \mathbf{r} , но и в ее окрестности, что нарушает (после дискретизации по \mathbf{r}) локальность задачи по координатам \mathbf{r} . Для сохранения локальности, уравнения (8.7) или (8.13) нужно дополнить уравнениями, получающимися при дифференцировании (8.7) или (8.13) по комплексной переменной $z \equiv x + iy$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) + \int_0^{2\pi} B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) d\varphi' = 1; \\ \frac{\partial \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)}{\partial z} + \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j)}{\partial z} \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j) + \right. \\ \left. + B(\mathbf{r}, \varphi, \varphi'; \omega_j) \frac{\partial \mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \varphi'; \omega_j)}{\partial z} \right] d\varphi' = 0, \end{array} \right.$$

или в пространстве угловых гармоник:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j) + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{B}(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j) = \delta_{q0}; \\ \frac{\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)}{\partial z} + 2\pi \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \tilde{B}(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j)}{\partial z} \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j) + \right. \\ \left. + \tilde{B}(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j) \frac{\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j)}{\partial z} \right] = 0; \quad j = \overline{1, J}. \end{array} \right. \quad (8.24)$$

При таком приеме пространственные производные $\partial \mu^{\text{cl}}/\partial z$ или $\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}}/\partial z$ рассматриваются как дополнительные неизвестные в фиксированной точке \mathbf{r} , что приводит к расширенной системе локальных уравнений. Объединением всех систем вида (8.24), записанных при каждой из частот ω_j , служат уравнения связи (8.21) с учетом (8.23). После записи соотношений (8.23) в терминах $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$ с помощью (8.17), система уравнений (8.21)–(8.24), в которую уравнения связи (8.21), (8.23) включаются с весовыми коэффициентами, может быть решена при каждом фиксированном \mathbf{r} сразу относительно всех неизвестных: $\text{Re } \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$, $\text{Im } \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$, $\text{Re}[\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)/\partial z]$, $\text{Im}[\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)/\partial z]$, $v_c(\mathbf{r}, \omega_j)$, $v_\rho(\mathbf{r})$, $v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$. Надо заметить, что в отсутствие уравнений связи система уравнений (8.24) распалась бы на две отдельные системы: одна для $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$, а другая (решаемая после нахождения $\tilde{\mu}^{\text{cl}}$) – для $\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)/\partial z$.

Вычислительная сторона заметно упрощается, когда рассеиватель представлен только одной его компонентой или же все присутствующие компоненты имеют одинаковую частотную зависимость. Тогда условия (8.21) записываются сразу относительно полной функции $v(\mathbf{r}, \omega_j)$. Например, если плотностной компонентой можно пренебречь, а

коэффициент поглощения рефракционно-поглощающего рассеивателя обладает линейной частотной зависимостью ($\zeta = 1$), то:

$$\frac{v(\mathbf{r}, \omega_j)}{(k_{0j})^2} - \frac{v(\mathbf{r}, \omega_{j+1})}{(k_{0, j+1})^2} = 0, \quad (8.25)$$

т.е., с учетом (8.19),

$$\frac{1}{k_{0j}} \frac{\partial \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)}{\partial z} - \frac{1}{k_{0, j+1}} \frac{\partial \tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_{j+1})}{\partial z} = 0.$$

Интегрирование данного соотношения по комплексной переменной z дает:

$$\frac{\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)}{k_{0j}} - \frac{\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_{j+1})}{k_{0, j+1}} = \text{const}_z.$$

Эта константа $\text{const}_z = 0$, что следует из рассмотрения предела $|z| \rightarrow \infty$, где $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{r}|$ [А 31; А 131 (раздел 18.1)]. Таким образом,

$$\frac{\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)}{k_{0j}} - \frac{\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_{j+1})}{k_{0, j+1}} = 0. \quad (8.26)$$

В (8.26) значения $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$ выражаются через $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$ из (8.17), что приводит к окончательному виду уравнений связи:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_{0j}} \left[\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j) + \right. \\ & \left. + 2i\pi^2 \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}^-(\mathbf{r}, q = -1, -q'; \omega_j) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_j) \right] - \\ & - \frac{1}{k_{0, j+1}} \left[\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q = -1; \omega_{j+1}) + \right. \\ & \left. + 2i\pi^2 \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}^-(\mathbf{r}, q = -1, -q'; \omega_{j+1}) \tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q'; \omega_{j+1}) \right] = 0; \quad j = \overline{1, (J-1)}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Эти соотношения добавляются, как связующие, к уравнениям (8.13), рассматриваемым для всех $j = \overline{1, J}$. Таким образом, не требуется ни искать $\partial \tilde{\mu}^{\text{cl}} / \partial z$, ни разделять неиз-

вестные функции на компоненты. Далее для простоты (но без ограничения общности получаемых результатов!) будет рассматриваться именно этот вариант уравнений связи.

Важно подчеркнуть, что модифицированный алгоритм обеспечивает значительно более эффективное обобщение на полихроматический режим (в этом его третье преимущество), чем НГМ-алгоритм. Причина этого заключается в том, что в НГМ-алгоритме система (6.71) или эквивалентная ей система (6.74), к которой добавляются полихроматические условия связи, решается, по сути, относительно отрицательных угловых гармоник предельных значений обобщенных полей $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q < 0; \omega_j)$, что непосредственно видно из (6.74). При этом уравнения связи типа (8.25) выражаются, согласно (8.19), не через все неизвестные $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q < 0; \omega_j)$, а только через (-1) -ю гармонику $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$. Остальные неизвестные в уравнениях связи не участвуют. В модифицированном же алгоритме основная система решается относительно классических полей (8.7) или их угловых гармоник (8.13). При этом те же уравнения связи выражаются через *все* неизвестные гармоники $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$, благодаря чему обеспечивается гораздо более жесткая связь неизвестных при разных ω_j , чем в НГМ-алгоритме. Кроме того, повышению устойчивости полихроматического варианта модифицированного алгоритма также способствует отсутствие интегрального уравнения (6.65) для функции $\rho(\varphi, \varphi'; \omega_j)$, по физическому смыслу связывающей, согласно (6.32), предельные значения $\mu^+(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ и $\mu^-(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$ в НГМ-алгоритме; $\mu^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j) = \exp[-ik_0j(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \Psi^\pm(\mathbf{r}, \varphi; \omega_j)$. При увеличении силы рассеивателя система уравнений (6.65) для нахождения $\rho(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ из $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ первой становится неустойчивой в последовательно реализуемой цепочке уравнений НГМ-алгоритма.

Монохроматический модифицированный алгоритм Новикова состоит из нескольких этапов, выполняемых последовательно. По этой причине в полихроматическом варианте не удастся объединить, через условия связи для разных частот, сразу все этапы алгоритма (так же как и НГМ-алгоритма) в единую систему, решаемую относительно сразу всей совокупности неизвестных h^\pm и μ^{cl} на основе полихроматических данных при сохранении *линейности* относительно неизвестных. Причина этого – в нелинейности используемых соотношений относительно данных рассеяния (благодаря чему учитываются процессы перерассеяния). Тогда уравнения (8.7) или (8.13) становятся нелинейными относительно неизвестных h^\pm (они формируют функцию B) и μ^{cl} , если функции h^\pm не будут отдельно вычислены из (8.3). Таким образом, рассмотрение единой системы (8.3), (8.13) с уравнениями связи (8.27) требует решения системы нелинейных уравнений, содержащих произведение неизвестных. В связи с этим, для сохранения линейности в предлагаемом полихроматическом алгоритме, система уравнений (8.3) для нахождения $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ из $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ решается независимо для каждой из используемых частот, после чего значения $\tilde{\mu}^{\text{cl}}(\mathbf{r}, q; \omega_j)$ при каждом фиксированном \mathbf{r} находятся одно-

временно для всех частот из полихроматической системы (8.13) в совокупности с уравнениями связи (8.27) в количестве $J - 1$. Поскольку уравнения связи делают эту систему избыточной, используется ее решение методом наименьших квадратов (МНК). При этом в решаемой МНК-системе роль подсистемы уравнений связи можно регулировать, предварительно умножая уравнения связи (8.27) на весовой коэффициент β . Далее из (8.17) рассчитываются $\tilde{\mu}^-(\mathbf{r}, q = -1; \omega_j)$ отдельно для каждой ω_j . Итогом полихроматического варианта алгоритма Новикова являются оценки

$$\hat{v}_{\text{poly}}(\mathbf{r}, \omega_j) = \hat{v}_{c(\text{poly})}(\mathbf{r}, \omega_j) + \hat{v}_{\rho(\text{poly})}(\mathbf{r}) + i \hat{v}_{\alpha(\text{poly})}(\mathbf{r}, \omega_j)$$

функции рассеивателя $v(\mathbf{r}, \omega_j) = v_c(\mathbf{r}, \omega_j) + v_\rho(\mathbf{r}) + i v_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$, рассчитанные из (8.19) или (8.23) для каждой из частот в отдельности. Однако, в силу введенных условий связи (8.21), отношения

$$\begin{aligned} \hat{w}_{c(\text{poly})}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{\hat{v}_{c(\text{poly})}(\mathbf{r}, \omega_j)}{k_{0j}^2}, & \hat{w}_{\rho(\text{poly})}(\mathbf{r}) &\equiv \hat{v}_{\rho(\text{poly})}(\mathbf{r}), \\ \hat{w}_{\alpha(\text{poly})}(\mathbf{r}) &\equiv \frac{\hat{v}_{\alpha(\text{poly})}(\mathbf{r}, \omega_j)}{k_{0j}^{\zeta+1}} \end{aligned} \quad (8.28)$$

не зависят от частоты (это обеспечивается заданием достаточно большого весового коэффициента β для уравнений связи, используемых при МНК-решении), и получаемые далее оценки $\hat{w}_{c(\text{poly})}(\mathbf{r})$, $\hat{w}_{\rho(\text{poly})}(\mathbf{r})$, $\hat{w}_{\alpha(\text{poly})}(\mathbf{r})$ будут называться полихроматической оценкой функции рассеивателя. Данный полихроматический алгоритм сохраняет все достоинства монохроматического модифицированного алгоритма.

Раздел 8.2. Численное моделирование полихроматического алгоритма

Полихроматический алгоритм нигде не использует факт какого-либо типа симметрии формы рассеивателя. Использование при численном моделировании полихроматического режима двумерных рассеивателей круговой (цилиндрической) формы никак не ограничивает общности результатов их восстановления. Выбор круговой формы связан только с тем, что для таких рассеивателей существует точное аналитическое решение прямой задачи, и при этом сила рассеивателя может быть сколь угодно большой. Так, решение прямой задачи в виде классического рассеянного поля, приведенное в [188 (гл. IX, § 7, п. 1)] для случая точечных излучателей и приемников, асимптотическим переходом было приведено к случаю плоских падающих волн и рассеянных (при переходе к дальней зоне) волн

$$u_{\text{sc}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) - u_0^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r}) [\mu^{\text{cl}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) - 1].$$

Амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}; \omega_j)$ рассчитывалась из u_{sc} согласно соотношению (6.5) для двумерной задачи и временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega_j t)$:

$$u_{sc}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) = -\pi\sqrt{\pi}(1+i) \frac{\exp(ik_{0j}|\mathbf{r}|)}{\sqrt{k_{0j}|\mathbf{r}|}} f(\mathbf{k}, \mathbf{l} = k_{0j} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}; \omega_j) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}|}}\right), \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.$$

Во всех рассматриваемых далее примерах с рассеивателями цилиндрической формы радиуса a , показатель преломления рассеивателя полагался равным $c_0/c = 1.1$ (c – скорость звука внутри цилиндра, бесконечно длинного в третьем измерении), т.е. рассеиватель задавался фокусирующим. Соответствующий относительный контраст скорости звука составляет $\frac{\Delta c}{c_0} \equiv \frac{c-c_0}{c_0} = \frac{c}{c_0} - 1 \approx -0.091$; дополнительный набег фазы волны вдоль

$$\text{диаметра рассеивателя } \Delta\psi \cong 2a|k_j - k_{0j}| = 2k_{0j}a \left| \frac{\Delta c}{c_0} \frac{1}{1 + \Delta c/c_0} \right| = 2k_{0j}a \left| 1 - \frac{c_0}{c} \right|,$$

где $k_{0j} = \omega_j/c_0$, $k_j = \omega_j/c$. Эффекты перерассеяния поля внутри фокусирующего рассеивателя ($c_0/c > 1$) выражены значительно сильнее, по сравнению с дефокусирующим рассеивателем ($c_0/c < 1$), при одной и той же абсолютной величине относительного контраста $|\Delta c|/c_0$. Поэтому именно фокусирующие рассеиватели были выбраны для иллюстрации возможного эффекта возникновения неустойчивости решения обратной задачи в монохроматическом режиме и стабилизации решения в полихроматическом режиме за счет объединения одночастотных решений через условия связи. Радиус всех цилиндров составлял $a = 3\lambda_0^{\max}$, где $\lambda_0^{\max} = 8$ е.д.д. – длина волны, соответствующая самой низкой частоте. Тогда $\Delta\psi \cong 1.2\pi$ при $\lambda_{0j} = \lambda_0^{\max}$, и $\Delta\psi$ увеличивается пропорционально росту частоты. Такой достаточно большой набег фазы в сочетании с фокусирующим характером рассеивателя приводит к сильно выраженным эффектам перерассеяния.

Для рефракционного рассеивателя с поглощением показатель преломления полагался равным $\frac{c_0}{c} + i \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{k_{0j}}$. Мнимая добавка $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}$ задавалась независимой от частоты ω_j , что соответствовало линейной зависимости от ω_j коэффициента поглощения внутри рассеивателя $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$. Это несколько не ограничивает общности получаемых далее результатов, но удобно при численном моделировании, поскольку $\nu_\alpha(\mathbf{r}, \omega_j) = \text{Im } \nu(\mathbf{r}, \omega_j)$ приобретает квадратичную частотную зависимость $\sim \omega_j^2$, так же, как и $\nu_c(\mathbf{r}, \omega_j) = \text{Re } \nu(\mathbf{r}, \omega_j)$ (в пренебрежении малой поправкой $\sim \alpha^2(\mathbf{r}, \omega_j)$). Тогда в (8.1) $\nu(\mathbf{r}, \omega_j)/\omega_j^2$ не зависит от частоты, что позволяет использовать уравнения связи (8.25), приводящие к (8.27). В то же время, такой вид частотной зависимости не редок в биологических тканях [309].

Для рефракционно-поглощающего рассеивателя, результаты восстановления которого приведены на рис. 8.1, полагалось $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j} = 0.03$. Рассматривались девять длин волн $\lambda_{0j} = 2\pi/k_{0j}$ в диапазоне от $\lambda_0^{\min} = 7.5$ е.д.д. до $\lambda_0^{\max} = 8$ е.д.д. (т.е. относительная ширина полосы составляет $(\lambda_0^{\max} - \lambda_0^{\min})/\lambda_0^{\max} \approx 0.063$) с шагом дискретизации $\Delta\lambda_0 = 0.0625$ е.д.д. Амплитудное поглощение при распространении волны вдоль диаметра рассеивателя приводит к уменьшению амплитуды волны в $\cong \exp(2\alpha\alpha)$ раз, т.е. в ≈ 3 раза на самой низкой частоте.

При восстановлении этого и последующих цилиндрических рассеивателей в монохроматическом и полихроматическом режимах учитывалось следующее обстоятельство. В данных рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ присутствует рассеянное назад поле, являющееся своего рода помехой при восстановлении. Поэтому, для уменьшения его влияния, функции $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$, найденные из (8.3) при заданном $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$, подвергались фильтрации (по углам). Функция фильтра не зависела от ω_j и задавалась в виде $\Pi(|\varphi - \varphi'|) = 0.5(1 + \cos|\varphi - \varphi'|)$. В последующих этапах алгоритма везде участвовала функция $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) \Pi(|\varphi - \varphi'|)$ вместо $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$. Численное моделирование показало, что фильтрация значений $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ значительно эффективнее фильтрации значений $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$. Это можно объяснить тем, что $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ находится на основе произвольного $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ из строгих уравнений Фаддеева (8.3), а далее классическое волновое поле находится на основе $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ из соотношений, предполагающих отсутствие рассеяния назад обобщенных полей. При фильтрации именно $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ влияние этого обратного рассеяния устраняется в большей степени.

Оценки $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$, полученные модифицированным алгоритмом в монохроматическом режиме при соответствующей длине волны λ_{0j} , приведены на рис. 8.1а. Шумовые помехи в данных рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ отсутствовали, однако качество восстановления в выбранном диапазоне длин волн оказалось неудовлетворительным: оценки искажены сильными флуктуациями и резкими выбросами (при $\lambda_{0j} = 7.5$ е.д.д.). Уменьшение шага дискретизации по углам φ и φ' не изменяло характера оценок, и, следовательно, искажения вызваны именно неустойчивостью монохроматического решения из-за большой силы рассеивателя. Как показало моделирование различных рассеивателей, возникновение неустойчивости монохроматической оценки в конкретной точке \mathbf{r} сопровождается уменьшением обратной обусловленности матрицы $E + 2\pi\tilde{\tilde{B}}(\mathbf{r}, q, -q'; \omega_j)$ (E – единичная матрица) при неизвестных угловых гармониках классического поля $\tilde{\mu}^{\text{cl}}$ в системе (8.13) до $\cong (3 \div 5) \times 10^{-3}$ (рис. 8.1б). (Под обратной обусловленностью понимает-

ся модуль отношения минимального собственного значения матрицы к максимальному.) Для рассматриваемого рефракционно-поглощающего рассеивателя неустойчивость в обозначенном диапазоне длин волн возникает не только вблизи границы рассеивателя, но и в глубине него (рис. 8.1а).

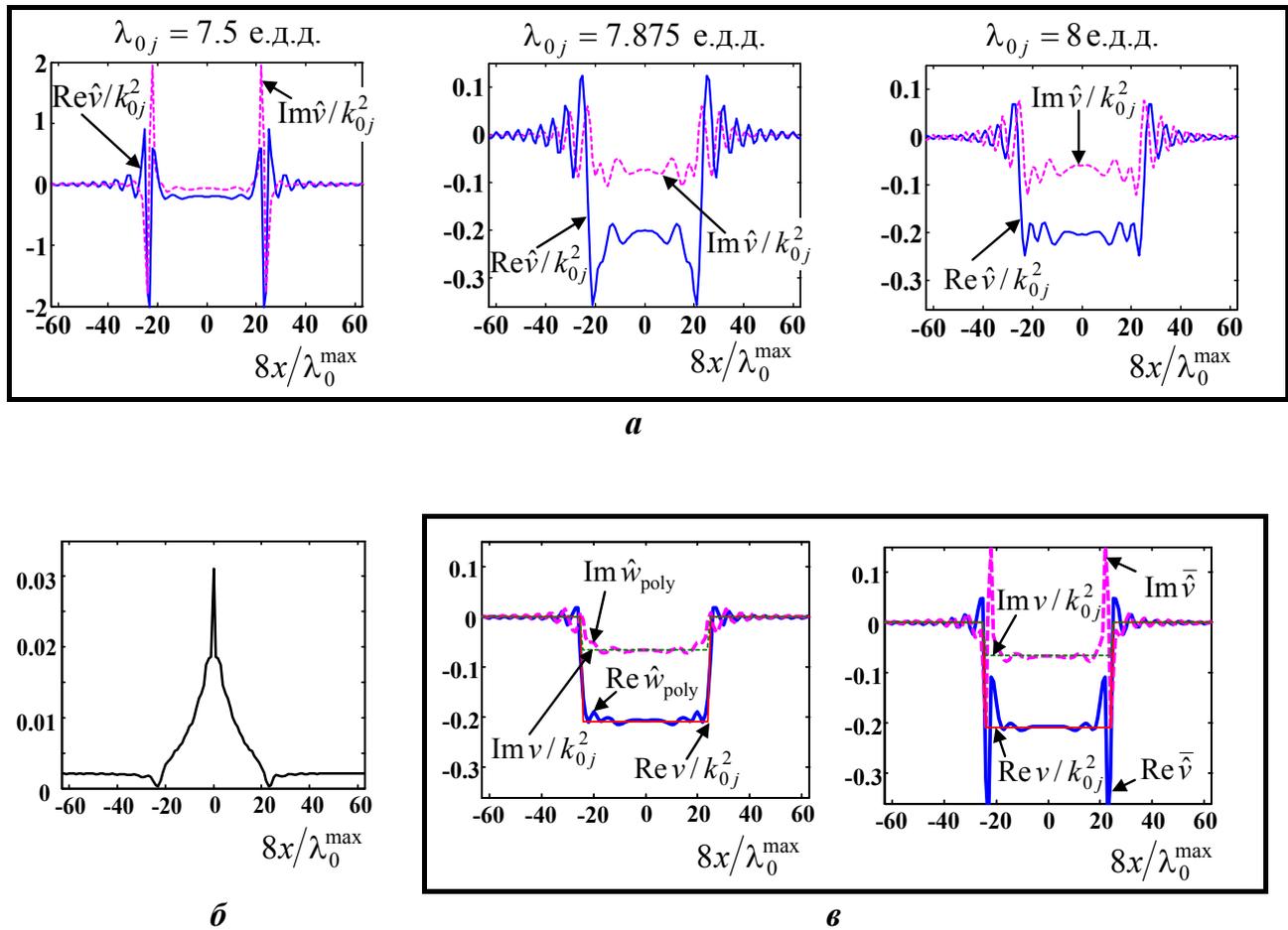


Рис. 8.1. Рефракционно-поглощающий рассеиватель цилиндрической формы радиуса $a = 3\lambda_0^{\max}$ с фокусирующим контрастом скорости звука $\Delta c/c_0 \approx -0.09$; набег фазы $\Delta\psi \cong (1.2\pi \div 1.4\pi)$ и амплитудное поглощение в рассеивателе – в $3 \div 3.6$ раза в рабочем диапазоне $\lambda_{0j} \in [7.5; 8]$ единиц дискретизации длины:

- центральные сечения действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) части монохроматических оценок рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$ при трех длинах волн в отсутствие шумовых помех (а);
- значения (в центральном сечении) обратной обусловленности матрицы при угловых гармониках классического поля в монохроматической системе уравнений при $\lambda_{0j} = 7.5$ е.д.д. (б);
- полихроматическая оценка $\hat{w}_{\text{poly}}(x, y = 0)$ (слева) в сравнении со среднеарифметическим значением монохроматических оценок $\bar{v}(x, y = 0)$ (справа) при использовании девяти длин волн (в); истинные значения действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей рассеивателя изображены более тонкой линией соответствующего типа.

Весовой коэффициент β для уравнений связи (8.27), добавляемых к системе (8.13) в полихроматическом режиме, должен быть настолько большим, чтобы итоговая оценка (8.28), т.е.

$$\hat{w}_{\text{poly}}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\hat{v}_{\text{poly}}(\mathbf{r}, \omega_j)}{k_{0j}^2} \quad \text{при } \zeta = 1 \text{ и } \nu_p \equiv 0,$$

была одинаковой при всех λ_{0j} . Дальнейшее увеличение β не изменяет этой оценки. Далее везде полагалось $\beta = 5$; регуляризация МНК-решения системы не требовалась. Полихроматическая оценка рефракционной и поглощающей частей рассеивателя при использовании девяти длин волн λ_{0j} в диапазоне от 7.5 е.д.д. до 8 е.д.д. с шагом $\Delta\lambda_0 = 0.0625$ е.д.д. (рис. 8.1в, слева) дает результат, близкий к истине. В общем случае, при измерениях на разных частотах ω_j независимая информация о рассеивателе достигается при шаге дискретизации по частотам $\Delta\omega \cong 2\pi/T_{\text{sc}}$, где T_{sc} – характерная длительность рассеянного сигнала. Дальнейшее уменьшение этого шага не улучшает качества полихроматической оценки в отсутствие помех и позволяет только уменьшить влияние частотно-независимых помех в их присутствии. При заметно выраженных эффектах перерасcеяния волн и, тем более, при резонансных эффектах, длительность T_{sc} значительно превосходит ее значение $\cong 2L/c_0$ (L – линейный размер рассеивателя), соответствующее однократному рассеянию.

Для иллюстрации принципиальной роли уравнений связи, на рис. 8.1в (справа) приводится результат простого усреднения соответствующих наборов монохроматических решений $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)$ с учетом характерной квадратичной частотной зависимости:

$$\bar{\hat{v}}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)}{k_{0j}^2} \quad (\zeta = 1, \quad \nu_p \equiv 0).$$

Амплитуда осцилляций в такой среднеарифметической оценке снизилась, по сравнению с отдельными монохроматическими решениями. Однако присутствующие сильные выбросы свидетельствуют, что проблема неустойчивости решения не ликвидирована усреднением.

Пример следующего рефракционного рассеивателя интересен тем, что качество частного монохроматического решения при $\lambda_{0j} = 6.1875$ е.д.д. практически идеально (рис. 8.2а). Однако при следующем, большем значении $\lambda_{0j} = 6.25$ е.д.д., отличающемся от предыдущего незначительно, восстановленное изображение оказывается неудовлетворительным (рис. 8.2б), а при дальнейшем увеличении λ_{0j} качество решения немонотонно улучшается, и затем опять ухудшается при $\lambda_{0j} = 6.5$ е.д.д. Тем самым, устойчивость монохроматического решения не всегда монотонно возрастает при снижении рабочей частоты. Это объясняется тем, что за счет сложного характера эффектов перерасcеяния, эффек-

тивная сила рассеяния может как уменьшаться, так и увеличиваться (хотя амплитуда функции рассеивателя (8.1) уменьшается).

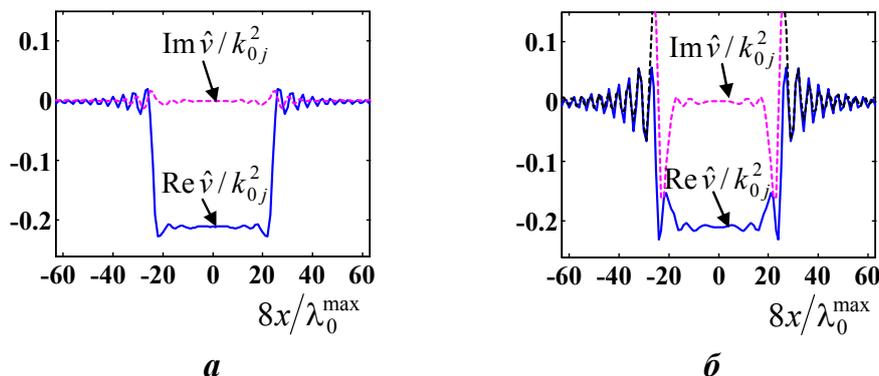


Рис. 8.2. Действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части монохроматических оценок $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$ рефракционного рассеивателя цилиндрической формы радиуса $a = 3\lambda_0^{\max}$ с фокусирующим контрастом скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.09$ при $\lambda_{0j} = 6.1875$ е.д.д. (а) и $\lambda_{0j} = 6.25$ е.д.д. (б) в отсутствие шумовых помех; набег фазы $\Delta\psi \cong 1.6\pi$.

В еще более длинноволновом диапазоне λ_{0j} от 7 е.д.д. до 8 е.д.д. монохроматические оценки становятся устойчивыми и в отсутствие помех воспроизводят рассеиватель практически идеально (рис. 8.3а). Надо обратить внимание, что для рассеивателя с тем же контрастом скорости, но обладающим существенным поглощением, восстановление в том же длинноволновом диапазоне уже становится неустойчивым, приводя к сильным искажениям воспроизведенных значений характеристик рассеивателя (рис. 8.1а). Это говорит о том, что присутствие поглощения в рассеивателе дополнительно искажает внутреннее волновое поле и тем самым приводит к увеличению эффективной силы рассеивателя.

Практический вывод из описанной ситуации таков. В условиях реальной томографии фиксированный фрагмент изображения может восстанавливаться на разных частотах с существенно разным качеством, заранее точно неизвестным. Использование же полихроматического режима, при достаточно большом количестве частот, позволяет обеспечить адекватное восстановление акустических характеристик рассеивателя.

Диапазон λ_{0j} от 7 е.д.д. до 8 е.д.д. использовался для сопоставительного анализа полихроматической оценки рассеивателя и результата среднеарифметического усреднения монохроматических решений в присутствии случайных помех. В данные рассеяния $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ на каждой из частот вносилась нормально распределенная случайная шумовая помеха с нулевым средним и стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{ns}(\omega_j) = \varepsilon_{ns} \bar{f}(\omega_j)$ независимо для действительной и мнимой частей помехи, т.е. $\sqrt{2}\sigma_{ns}$ – полное стандартное отклонение для комплексной помехи. Здесь

$$\bar{f}(\omega_j) \equiv \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' |f(\varphi, \varphi'; \omega_j)|^2} \quad - \text{среднеквадратичное значение данных}$$

рассеяния, индивидуальное для каждой частоты ω_j ; ε_{ns} – относительный коэффициент зашумления. Для всех ω_j помехи независимы.

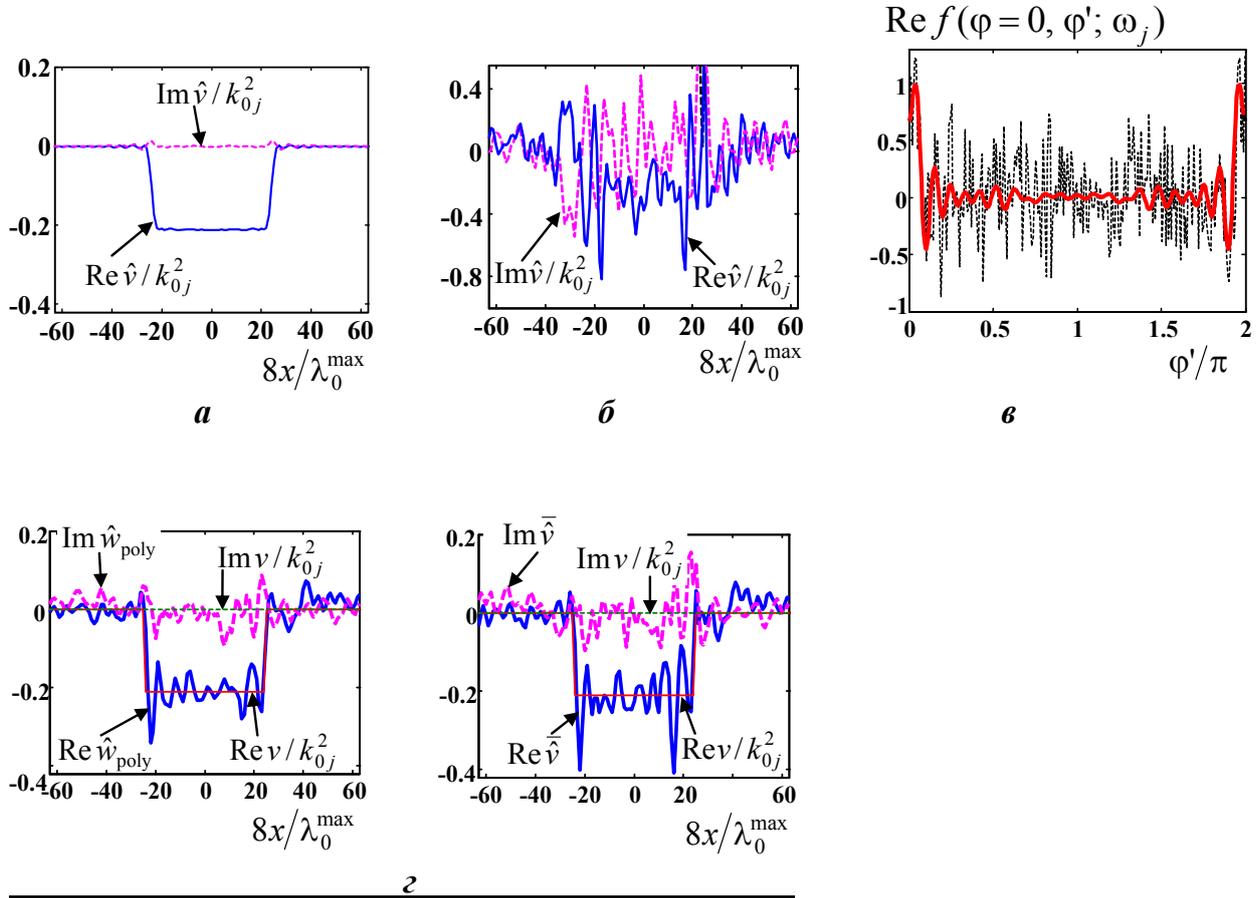


Рис. 8.3. Рефракционный рассеиватель цилиндрической формы радиуса $a = 3\lambda_0^{\text{max}}$ с фокусирующим контрастом скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.09$; набег фазы $\Delta\psi \cong (1.2\pi \div 1.4\pi)$ в рабочем диапазоне $\lambda_{0j} \in [7; 8]$ единиц дискретизации длины. В данных рассеяния присутствует шум со стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{\text{ns}}(\omega_j) = 0.5\bar{f}(\omega_j)$:

- действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части монохроматической оценки рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r}, \omega_j)/k_{0j}^2$ при $\lambda_{0j} = 7$ е.д.д. в отсутствие (а) и в присутствии (б) шумовых помех;
- действительная часть амплитуды рассеяния при $\lambda_{0j} = 7$ е.д.д. (в) в отсутствие (толстая линия) и в присутствии (тонкая пунктирная линия) шума;
- полихроматическая оценка рассеивателя $\hat{w}_{\text{poly}}(x, y = 0)$ (слева) и среднеарифметическое значение монохроматических оценок $\bar{v}(x, y = 0)$ (справа) при зашумленных данных (з); истинные значения действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей рассеивателя изображены более тонкой линией соответствующего типа.

Ожидаемый в томографических экспериментах уровень зашумления данных, соответствующий $\varepsilon_{\text{ns}} = 0.03$, практически не искажает, по сравнению со случаем незашумленных данных, сколько-нибудь существенным образом монохроматические оценки (рис. 8.3а). Численное моделирование показало, что пока шумы не приводят к возникновению эффектов неустойчивости монохроматических решений, полихроматическое решение $\hat{w}_{\text{poly}}(\mathbf{r})$ практически совпадает со среднеарифметическим монохроматических оценок $\bar{v}(\mathbf{r})$. Увеличение количества используемых частот приводит только к уменьшению амплитуды флуктуаций обеих оценок. При $\varepsilon_{\text{ns}} = 0.5$ амплитуда шумовых помех становится близкой к максимальной амплитуде незашумленных данных (рис. 8.3в). Уровень шумов уже такой большой, что погрешности монохроматической оценки сравнимы или даже значительно превышают истинные значения функции рассеивателя (рис. 8.3б). Кроме того, шумы настолько увеличивают амплитуду рассеяния, что на более коротких длинах волн диапазона $\lambda_{0j} \in [7; 8]$ е.д.д. возникает неустойчивость монохроматического решения, проявляющаяся в виде выбросов большой амплитуды и сильного общего искажения оценки. В этой ситуации полихроматическое решение не только усредняет влияние случайных шумов, но и дополнительно стабилизирует решение, что видно из сравнения полихроматической и среднеарифметической оценок при использовании девяти длин волн (рис. 8.3г).

Таким образом, полихроматический вариант двумерного модифицированного алгоритма Новикова, сохраняя все достоинства монохроматического варианта этого алгоритма (см. раздел 8.1) и модифицированного алгоритма Роуза (см. раздел 6.2), позволяет с достаточной уверенностью восстанавливать рассеиватели, для которых по причине их силы успех монохроматических алгоритмов не гарантирован либо вообще не возможен. Тем самым, полихроматический вариант оказывается устойчивым и позволяет реконструировать сильные рассеиватели, не поддающиеся адекватному воспроизведению в монохроматическом режиме. Необходимое количество частот нуждается в оценке для конкретной решаемой задачи. Оно зависит от класса томографируемых рассеивателей – их силы в используемом частотном диапазоне и сложности пространственной структуры. Достижимая помехоустойчивость алгоритма к случайным помехам достаточна, в ряде случаев, для практических целей даже в монохроматическом режиме, и растет с увеличением количества используемых частот, давая возможность реализовать импульсный режим томографирования в сочетании с мощными функциональными методами восстановления.

Глава 9. Решение трехмерной монохроматической обратной задачи рассеяния алгоритмом Новикова

Трехмерные системы акустического томографирования в настоящее время находятся еще в процессе развития как в техническом, так и в алгоритмическом плане [282–286]. Разрабатываемые практические системы в своем большинстве представляют собой объединение большого числа двумерных систем, так как обмен между слоями предполагается слабым и почти не учитывается [214; 215; 239; 243; 293]. В более развитой схеме трехмерной томографии [283–286] на первом этапе предполагается использовать лучевые и борновские подходы. Более подробно о современном состоянии акустических томографических систем говорилось выше в разделе 4.1 [А 2 (раздел 7.1)]. В настоящей главе обсуждаются впервые полученные результаты численного моделирования решения обратной трехмерной задачи рассеяния акустических (скалярных) волн [А 30; А 93; 414] с помощью монохроматического функционально-аналитического алгоритма Новикова [415; 416], учитывающего эффекты многократного рассеяния при постановке задачи, близкой к строгой. С точки зрения используемого подхода, алгоритм Новикова представляет собой модификацию предшествующего ему трехмерного алгоритма Новикова–Хенкина [А 32; А 92; 414].

Раздел 9.1. Основные соотношения для волновых векторов и данных рассеяния в трехмерном пространстве

Функция рассеивателя (рассеивающий потенциал) $v(\mathbf{r})$, восстанавливаемая при решении монохроматической обратной задачи рассеяния, характеризует неоднородность в виде отклонения скорости звука $c(\mathbf{r})$ и амплитудного коэффициента поглощения или усиления $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ внутри области рассеяния от их значений в фоновой среде. В случае однородного изотропного непоглощающего фона, в котором при постоянной плотности скорость звука равна c_0 , а волновое число составляет k_0 , функция рассеивателя имеет вид (6.1):

$$v(\mathbf{r}) = \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) - 2i\omega \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega)}{c(\mathbf{r})} ; \quad (9.1)$$

временная зависимость полей полагается $\sim \exp(-i\omega t)$.

Экспериментальными данными для трехмерного алгоритма Новикова являются значения классической амплитуды рассеяния $f^+ \equiv f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ для запаздывающих полей. Амплитуда рассеяния пропорциональна асимптотике рассеянного поля в дальней зоне, т.е., согласно (6.5) при $D = 3$,

$$u_{\text{sc}}^+(\mathbf{z}, \mathbf{k}) = -2\pi^2 \frac{\exp(ik_0|\mathbf{z}|)}{|\mathbf{z}|} f(\mathbf{k}, \mathbf{I} = k_0 \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}) + o\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty;$$

$\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3$ – волновые векторы падающей плоской монохроматической волны и рассеянной волны в дальней зоне, соответственно; $\mathbf{k}^2 = \mathbf{I}^2 = k_0^2$.

Формализм функционально-аналитических методов уже подробно был изложен в разделе 6.1, и сейчас он очень кратко будет упомянут для большей физической ясности и облегчения чтения материала настоящей главы. Функционально-аналитические методы решения обратной задачи рассеяния основаны на формальном распространении волновых векторов на область комплексных значений $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^3$:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I, \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_R + i\mathbf{I}_I, \quad \text{где } \mathbf{k}_R \equiv \text{Re } \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_I \equiv \text{Im } \mathbf{k}, \quad \mathbf{I}_R \equiv \text{Re } \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}_I \equiv \text{Im } \mathbf{I}.$$

Направление мнимой части волнового вектора $\mathbf{k}_I \equiv |\mathbf{k}_I| \boldsymbol{\gamma}$ можно характеризовать единичным вектором $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^3$, $|\boldsymbol{\gamma}| = 1$. Одновременно требуется сохранение условия

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{I}^2 = k_0^2 \quad \text{при } \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^3. \quad (9.2)$$

При комплексных волновых векторах классическое волновое поле переходит в обобщенное поле $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$, амплитуда рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ ($\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3$) переходит в обобщенную амплитуду рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ ($\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^3$).

Если величина мнимых добавок к волновым векторам $|\mathbf{k}_I|$ и $|\mathbf{I}_I|$ не бесконечно мала, то из условий (9.2) следует, что действительная и мнимая части волнового вектора должны быть взаимно ортогональны, а их величины взаимосвязаны:

$$\mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R, \quad \mathbf{k}_R^2 - \mathbf{k}_I^2 = k_0^2; \quad \mathbf{I}_I \perp \mathbf{I}_R, \quad \mathbf{I}_R^2 - \mathbf{I}_I^2 = k_0^2. \quad (9.3)$$

В двумерном случае существуют только две возможные ориентации вектора $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$, ортогонального фиксированному вектору \mathbf{k}_R : рис. 9.1а, подобный рис. 6.1, приводится здесь для сопоставления с трехмерным случаем. Взаимная ориентация векторов \mathbf{I}_R и \mathbf{I}_I аналогична. В трехмерном случае вектор \mathbf{k}_I ($\mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R$) мог бы принимать любое направление в плоскости, перпендикулярной фиксированному вектору \mathbf{k}_R . Однако при решении именно трехмерных задач вводится дополнительное требование

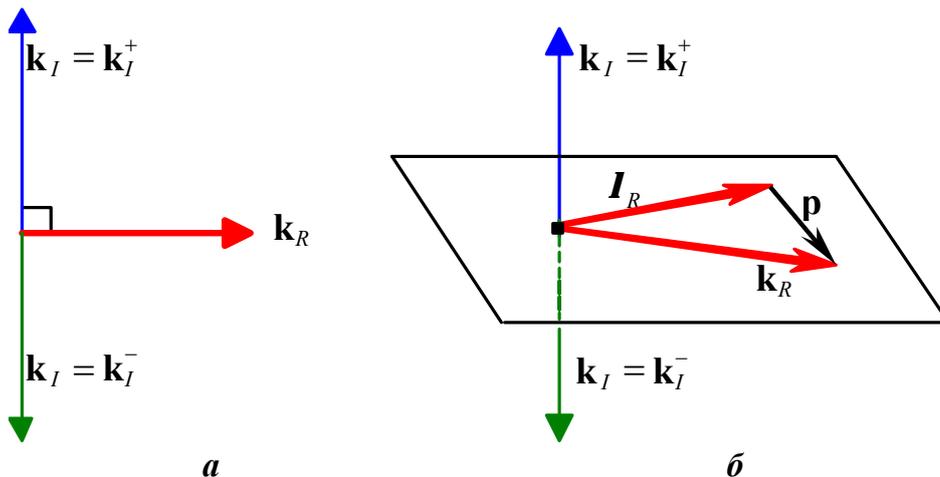
$$\mathbf{k}_I = \mathbf{I}_I, \quad (9.4)$$

и тогда из (9.3) и (9.4): вытекает:

$$\mathbf{k}_R^2 - \mathbf{k}_I^2 = k_0^2, \quad \mathbf{k}_I \perp \mathbf{k}_R, \quad \mathbf{k}_I \perp \mathbf{I}_R, \quad |\mathbf{I}_R| = |\mathbf{k}_R|, \quad \mathbf{k}_I = \mathbf{I}_I. \quad (9.5)$$

Тем самым, мнимые компоненты $\mathbf{k}_I = \mathbf{I}_I \neq 0$ ортогональны к плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{k}_R и \mathbf{I}_R , образующие действительный вектор $\mathbf{p} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{I} = \mathbf{k}_R - \mathbf{I}_R$ и, следовательно, вектор $\mathbf{k}_I = \mathbf{I}_I$ ортогонален вектору \mathbf{p} (рис. 9.1б, рис. 9.3). Тогда количество возможных ориентаций вектора \mathbf{k}_I относительно этой плоскости становится равным двум, так же как в двумерном пространстве: $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$ (рис. 9.1б). (Вырожденный случай $\mathbf{k}_R \parallel \mathbf{I}_R$ рассматривается как предельная ситуация для случая неколлинеарных \mathbf{k}_R и \mathbf{I}_R .)

Рис. 9.1. Ориентация взаимно-ортогональных действительной и мнимой частей волновых векторов в двумерном (а) и трехмерном (б) случаях.



Поскольку $\mathbf{k}_I = \mathbf{I}_I$ и $\mathbf{k}_I \perp \mathbf{p}$, то проекция любого вектора \mathbf{k} , образующего фиксированный вектор \mathbf{p} , на направление вектора \mathbf{p} всегда действительна и составляет $|\mathbf{k}_R| \cos \beta = \mathbf{p}/2$ (β – угол между \mathbf{k}_R и \mathbf{p}), что равносильно условию $|\mathbf{I}_R| = |\mathbf{k}_R|$. Следовательно, соотношения (справедливые при любой размерности пространства)

$$\mathbf{k}^2 = k_0^2, \quad 2\mathbf{k}\mathbf{p} = \mathbf{p}^2, \quad \text{где } \mathbf{p} \equiv \mathbf{k} - \mathbf{I} = \mathbf{k}_R - \mathbf{I}_R; \quad \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^3, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3, \quad (9.6)$$

в совокупности с условием (9.4) эквивалентны требованиям (9.5), т.е. требованиям (9.2) и (9.4), переписанным в терминах векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ и \mathbf{p} . Так, подстановка $\mathbf{I} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$ в соотношение $\mathbf{I}^2 = k_0^2$ дает $(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 = k_0^2$, что при учете требования $\mathbf{k}^2 = k_0^2$ приводит к (9.6). При переборе всех возможных направлений векторов \mathbf{k} , соответствующих одному и тому же \mathbf{p} , конец вектора \mathbf{k}_R с фиксированной длиной описывает окружность радиуса $|\mathbf{k}_R| \sin \beta$, лежащую в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{p} . При этом сам вектор \mathbf{k}_R пробегает поверхность конуса (рис. 9.2). Если же при заданном значении k_0^2 перебирать всевозможные направления вектора \mathbf{k}_R при фиксированной его длине $|\mathbf{k}_R|$, в том числе, изменяя угол β , то в случае трехмерного пространства вектор \mathbf{p} будет находиться внутри сферы радиуса $2|\mathbf{k}_R|$.

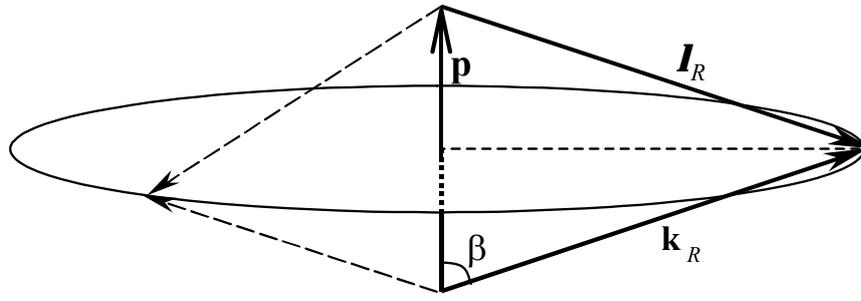


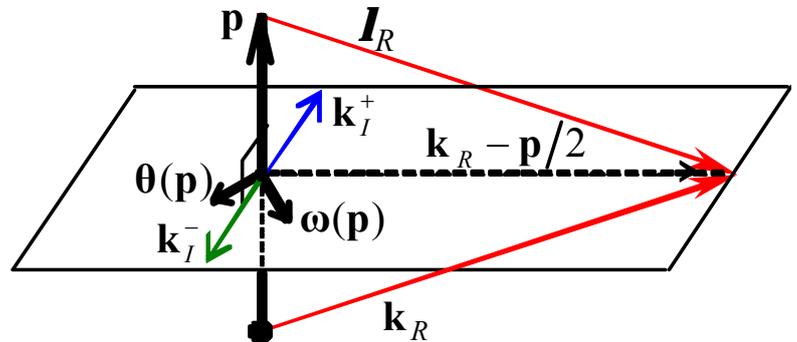
Рис. 9.2. Геометрическая избыточность пар векторов $(\mathbf{k}_R, \mathbf{I}_R)$, порождающих один и тот же вектор $\mathbf{p} = \mathbf{k}_R - \mathbf{I}_R$ в трехмерном пространстве.

Проекция вектора \mathbf{k} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{p} , составляет $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2$, и квадрат проекции равен $(\mathbf{k} - \mathbf{p}/2)^2 = k_0^2 - \mathbf{p}^2/4$ в силу (9.6). Две альтернативные, противоположно направленные ориентации направляющего вектора $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\pm$ мнимой компоненты $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \equiv |\mathbf{k}_I| \boldsymbol{\gamma}^\pm$ (величина которой не бесконечно мала), лежащей в этой плоскости, математически выражаются в виде:

$$\boldsymbol{\gamma}^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \pm \frac{\mathbf{p} \times \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)}{|\mathbf{p}| \cdot \left| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}}{2} \right|} = \pm \frac{\mathbf{p} \times \left(\mathbf{k}_R - \frac{\mathbf{p}}{2} \right)}{|\mathbf{p}| \cdot \sqrt{k_0^2 - \frac{|\mathbf{p}|^2}{4}}}.$$

Геометрическая ситуация пояснена на рис. 9.3.

Рис. 9.3. Взаимная ориентация векторов, используемых в трехмерном алгоритме. Действительные компоненты волновых векторов \mathbf{k}_R и \mathbf{I}_R образуют вектор $\mathbf{p} = \mathbf{k}_R - \mathbf{I}_R$; в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{p} , расположены альтернативные мнимые компоненты волновых векторов $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$ и взаимно ортогональные орты $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$. Единичные векторы $\boldsymbol{\gamma}^\pm$ сонаправлены векторам \mathbf{k}_I^\pm .



Бесконечно малая, но ориентированная вдоль единичного направления $\boldsymbol{\gamma}$, мнимая добавка $\mathbf{k}_I = \boldsymbol{\gamma} |\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$ не обязана быть перпендикулярной к \mathbf{k}_R или \mathbf{I}_R . В этом случае обобщенная амплитуда рассеяния $h(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ переходит в предельные функции

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I}) \equiv h_\gamma(\mathbf{k}_R, \mathbf{I}_R) \equiv \lim_{|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0} h(\mathbf{k}_R + i|\mathbf{k}_I|\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}_R),$$

зависящие от ориентации $\boldsymbol{\gamma}$; $|\mathbf{I}_R| = |\mathbf{k}_R| = k_0$; $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3$. Предельные значения $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ однозначно находятся из экспериментальных данных $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ с помощью уравнений Фаддеева (6.19):

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{I}) + 2\pi i \int_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})] \delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) f(\mathbf{m}, \mathbf{I}) d\mathbf{m},$$

$$\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3; \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{I}| = k_0.$$

Преобразование этих уравнений, принимая во внимание соотношения (6.20), т.е.

$$\delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) = \delta(\mathbf{m}^2 - k_0^2) = \frac{1}{2|\mathbf{m}|} [\delta(|\mathbf{m}| - k_0) + \delta(|\mathbf{m}| + k_0)], \quad d\mathbf{m} = |\mathbf{m}|^2 d|\mathbf{m}| d\mathbf{e}_m,$$

где $\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}$ – единичный вектор, приводит к (6.21):

$$h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{I}) - \pi i k_0 \int_{|\mathbf{m}|=k_0} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma})] f(\mathbf{m}, \mathbf{I}) d\mathbf{e}_m = f(\mathbf{k}, \mathbf{I}); \quad (9.7)$$

$$\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3, \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{I}| = k_0.$$

Функция Хевисайда $\theta(t) = \{1 \text{ при } t > 0; 0 \text{ при } t \leq 0\}$ имеет в качестве аргумента скалярное произведение векторов $\mathbf{m} - \mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Следует иметь в виду, что вектор $\boldsymbol{\gamma}$ *один и тот же* в левой и правой частях уравнений Фаддеева (9.7). По этой причине подынтегральные значения $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m})$ зависят от взаимной ориентации как векторов \mathbf{k} и $\boldsymbol{\gamma}$, так и векторов \mathbf{m} и $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда, при реализации численного решения, значения $h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m})$ находятся из системы уравнений, являющейся дискретным аналогом уравнений (9.7), в которой фиксируются векторы \mathbf{k} и $\boldsymbol{\gamma}$, а вектор \mathbf{I} принимает тот же набор дискретизованных значений, что и вектор \mathbf{m} под интегралом.

Для трехмерного алгоритма Новикова, обсуждаемого ниже в разделе 9.2, требуется знание только значений $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ при бесконечно малой мнимой добавке $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \equiv |\mathbf{k}_I| \boldsymbol{\gamma}^\pm \rightarrow 0$, которая ориентирована в одном из альтернативных направлений

$\gamma^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, ортогональных к фиксированной паре векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R$ и \mathbf{p} , т.е. к фиксированной паре \mathbf{k} и \mathbf{l} . Тогда при решении уравнений Фаддеева (9.7) векторы \mathbf{k} и $\gamma = \gamma^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ фиксируются, а сами уравнения (9.7) рассматриваются в терминах функций $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ и $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{m})$, т.е.

$$h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) - \pi i k_0 \int_{|\mathbf{m}|=k_0} h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{m}) \theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \gamma^\pm)] f(\mathbf{m}, \mathbf{l}) d\mathbf{e}_m = f(\mathbf{k}, \mathbf{l}); \quad (9.8)$$

$$\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3, \quad |\mathbf{k}| = |\mathbf{l}| = k_0.$$

Здесь вектор \mathbf{l} пробегает тот же набор значений, что и вектор \mathbf{m} , причем текущие значения векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} не ортогональны, в общем случае, вектору γ^\pm . Тем самым, уравнения (9.8) решаются относительно неизвестных $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, где γ^\pm уже не будет, вообще говоря, перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{k} и \mathbf{l} или векторы \mathbf{k} и \mathbf{m} . Из-за присутствия в (9.8) функции Хевисайда $\theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \gamma^\pm)]$, при фиксированных \mathbf{k} и $\gamma = \gamma^\pm$ конец вектора \mathbf{m} принадлежит поверхности полусферы, ограниченной плоскостью, ортогональной к γ . Геометрия подобна изображенному на рис. 6.2 двумерному случаю, однако вместо полуокружностей на плоскости будут полусферы в трехмерном случае. После того, как $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ найдены, для реализации следующих этапов алгоритма используются только значения $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l} = \mathbf{l})$ при векторах $\mathbf{l} = \mathbf{l}$, ортогональных вектору γ^\pm .

Далее, для удобства осуществления математических операций над комплексными $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{C}^3$, вводится функция $H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv h(\mathbf{k}, \mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{p})$, удовлетворяющая так называемому $\bar{\partial}$ -уравнению [136]:

$$\frac{\partial H(\mathbf{k}, \mathbf{p})}{\partial \bar{k}_j} = -2\pi \int_{\zeta \in \mathbb{R}^3} \zeta_j H(\mathbf{k}, -\zeta) H(\mathbf{k} + \zeta, \mathbf{p} + \zeta) \delta(\zeta^2 + 2\mathbf{k}\zeta) d\zeta, \quad \mathbf{k} \in \mathcal{M}, \quad (9.9)$$

где $j = 1, 2, 3$ – индекс декартовых компонент вектора; \mathcal{M} – множество всех векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$, которые при любом фиксированном векторе $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ одновременно удовлетворяют двум условиям (9.6). Черта над k_j здесь означает дифференцирование по комплексно сопряженной переменной. Функция $\delta(\zeta^2 + 2\mathbf{k}\zeta)$ выделяет те векторы ζ , для которых

$$\zeta^2 + 2\mathbf{k}\zeta = 0, \quad \text{т.е.} \quad (\mathbf{k} + \zeta)^2 = k_0^2. \quad (9.10)$$

Следовательно, при фиксированном $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ действительный вектор $\boldsymbol{\zeta}$ принадлежит окружности радиуса $|\mathbf{k}_R|$ с центром в точке $-\mathbf{k}_R$, и эта окружность лежит в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k}_I , так как из (9.10) следует, что $\boldsymbol{\zeta} \mathbf{k}_I = 0$.

Раздел 9.2. Уравнения трехмерного алгоритма Новикова

Функция $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ может быть найдена с помощью алгоритма Новикова, обсуждаемого ниже. Когда значения $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ уже известны, пространственный спектр трехмерной функции рассеивателя $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \exp(-i \boldsymbol{\xi} \mathbf{r}) d\mathbf{r}$ (зависимость от частоты ω в аргументе для краткости будет опускаться) восстанавливается на основе следующего асимптотического соотношения:

$$\tilde{v}(\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \lim_{\substack{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty, \\ \mathbf{k} \in \mathcal{M}}} H(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \text{ где } H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv h(\mathbf{k}, \mathbf{I} = \mathbf{k} - \mathbf{p}); \mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{C}^3. \quad (9.11)$$

Надо заметить, что в работах Р. Г. Новикова в определении пространственного спектра присутствует множитель $1/(2\pi)^3$ перед интегралом, а показатель экспоненты $\exp(i \boldsymbol{\xi} \mathbf{r})$

берется со знаком “плюс”: $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \mathbf{r}) d\mathbf{r}$. В настоящей же работе

везде использовано определение прямого фурье-преобразования в виде $\tilde{v}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathfrak{R}} v(\mathbf{r}) \exp(-i \boldsymbol{\xi} \mathbf{r}) d\mathbf{r}$. Этим объясняется различие в написании некоторых соотношений в данной работе и в оригинальных работах Р. Г. Новикова.

Для слабых, борновских, рассеивателей равенство (9.11) справедливо уже при $|\mathbf{k}_I| \rightarrow 0$. По мере увеличения силы рассеивателя становится необходимым учитывать эффекты перерасеяния внутри неоднородности. Именно для “ослабления” эффектов перерасеяния обобщенных полей $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ нужна мнимая добавка $\mathbf{k}_I \neq 0$ к волновым векторам $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$, удовлетворяющим условию (9.6), причем чем сильнее рассеиватель, тем бóльшие значения $|\mathbf{k}_I|$ требуются для достижения асимптотического равенства $\tilde{v}(-\mathbf{p}) = (2\pi)^3 H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$. Соответственно, увеличивается и модуль полного вектора $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I| = \sqrt{\mathbf{k}_R^2 + \mathbf{k}_I^2} = \sqrt{k_0^2 + 2\mathbf{k}_I^2}$. Таким образом, по мере роста $|\mathbf{k}_I|$ и, следовательно, по мере роста $|\mathbf{k}|$ перерасеяние зондирующих обобщенных волн внутри неоднородности играет все меньшую роль, и характер рассеяния приближается к случаю первого приближения Борна, т.е. однократного рассеяния. Эта ситуация противоположна классическому случаю действительных волновых векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, когда с увеличением

$|\mathbf{k}|$ задача становится все более неборновской за счет возрастания роли процессов перерассеяния. Последнее же обстоятельство обусловлено увеличением силы рассеивателя, поскольку в классическом случае увеличение $|\mathbf{k}|$ происходит за счет роста частоты зондирующей волны, а величина рефракционной и поглощающей компонент рассеивателя $\nu(\mathbf{r})$ увеличивается с ростом частоты, согласно (9.1).

В [А 30; 414] оценена минимальная величина $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}^{\min}|$, при которой асимптотическое соотношение $\tilde{\nu}(-\mathbf{p}) = (2\pi)^3 H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ в (9.11) становится в достаточной степени справедливым. Оказывается, что для борновских неоднородностей значение $|\mathbf{k}^{\min}|$ близко к k_0 , а для сильных и средней силы рассеивателей нужно $|\mathbf{k}^{\min}|$ больше k_0 , по крайней мере, в несколько раз. В связи с этим, нахождение функции $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ является наиболее сложным этапом, предшествующим процедуре (9.11) восстановления пространственного спектра рассеивателя.

В [415; 416] предлагается устойчивый алгоритм вычисления $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ в трехмерном случае по полным монохроматическим данным на основе следующего приема. Для построения функционально-аналитических алгоритмов решения обратной задачи в двумерном пространстве использовалось понятие комплексной λ -плоскости, что описано в разделе 6.1. Согласно соотношениям (6.24), (6.25) в разделе 6.1, между каждой точкой данной плоскости $\lambda \in \mathbb{C}$ и *двумерным* комплексным вектором $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющим условию $\mathbf{k}^2 = k_0^2$ и имеющим именно две декартовы компоненты $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ (каждая из компонент k_x, k_y – комплексная величина), существует взаимнооднозначное соответствие:

$$\lambda \equiv \frac{k_x + ik_y}{k_0}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2. \quad (9.12)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$k_x = \frac{k_0}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad k_y = i \frac{k_0}{2} \left(-\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^2. \quad (9.13)$$

Подобным образом для трехмерных комплексных векторов $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$, удовлетворяющих условиям (9.6), вводится своя λ -плоскость по следующему правилу. Пусть $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ – множество действительных трехмерных векторов, параллельных оси, задаваемой некоторым фиксированным вектором \mathbf{v} . Тогда для любого фиксированного вектора \mathbf{p} , непараллельного \mathbf{v} , тройка взаимно ортогональных векторов \mathbf{p} , $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$, где $|\boldsymbol{\theta}| = 1$, $|\boldsymbol{\omega}| = 1$, определяется как (рис. 9.3)

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{p}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{p}|}, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}_v; \quad (9.14)$$

здесь символ “ \times ” обозначает векторное произведение. Как уже упоминалось, проекция любого вектора \mathbf{k} на направление вектора $\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{l}$ составляет $\mathbf{p}/2$, а на плоскость, перпендикулярную \mathbf{p} , составляет $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2$, причем $|\mathbf{k} - \mathbf{p}/2| = \sqrt{k_0^2 - \mathbf{p}^2/4}$. По своему построению (9.14) векторы $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})$ и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$ лежат именно в этой перпендикулярной плоскости; они одни и те же для всех векторов \mathbf{k} , образующих фиксированный \mathbf{p} . Проекции заданного вектора \mathbf{k} , также как и вектора $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2$, на орты $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})$ и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$ составляют, соответственно, $\kappa_1 \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})$ и $\kappa_2 \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$. Далее устанавливается взаимнооднозначное соответствие между *двумерной* векторной проекцией $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2 = \kappa_1 \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}) + \kappa_2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$ и комплексной λ -плоскостью, т.е. взаимнооднозначное соответствие между парой (\mathbf{k}, \mathbf{p}) и парой (λ, \mathbf{p}) . Используются соотношения, аналогичные двумерной задаче, однако вместо k_0^2 участвует величина $k_0^2 - \mathbf{p}^2/4$, так как рассматривается не полный вектор \mathbf{k} , а только его проекция $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2$. Переход $(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \rightarrow (\lambda, \mathbf{p})$ осуществляется по правилу, подобному (9.12):

$$\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{k} \cdot [\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}) + i \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})]}{\sqrt{k_0^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}}}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3. \quad (9.15)$$

Для обратного перехода $(\lambda, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{k}, \mathbf{p})$:

$$\mathbf{k}(\lambda, \mathbf{p}) = \kappa_1(\lambda, \mathbf{p}) \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}) + \kappa_2(\lambda, \mathbf{p}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}}{2}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3, \quad (9.16)$$

где, подобно (9.13),

$$\begin{aligned} \kappa_1(\lambda, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}) &= \frac{\sqrt{k_0^2 - \mathbf{p}^2/4}}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \\ \kappa_2(\lambda, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}) &= i \frac{\sqrt{k_0^2 - \mathbf{p}^2/4}}{2} \left(-\lambda + \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

В (9.15), (9.16) $\lambda \neq 0$; $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}_v$.

Мнимая добавка $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$ комплексного волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$) ориентирована в одном из альтернативных направлений $\gamma^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, ортогональных к \mathbf{k}_R и \mathbf{p} , и так же, как и вектор $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2 = (\mathbf{k}_R - \mathbf{p}/2) + i\mathbf{k}_I$ лежит в плоскости

ортов $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$ (рис. 9.3). Таким образом, имеет место аналогия введения λ -плоскости в двумерном случае для $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^2$ и в трехмерном случае для $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2$. По этой причине в трехмерном случае для величины $|\lambda|$ справедливо соотношение типа (6.29), в котором, однако, роль двумерных векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_R играют векторы $\mathbf{k} - \mathbf{p}/2$ и $\mathbf{k}_R - \mathbf{p}/2$, и тогда величину $\mathbf{k}^2 = k_0^2$ следует заменить на $(\mathbf{k} - \mathbf{p}/2)^2 = k_0^2 - \mathbf{p}^2/4$:

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}}} \left(\left| \mathbf{k}_R - \frac{\mathbf{p}}{2} \right| \mp |\mathbf{k}_I| \right) = \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}}} \left(\sqrt{k_0^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4} + \mathbf{k}_I^2} \mp |\mathbf{k}_I| \right) \quad (9.17)$$

при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm$,

так как $\mathbf{k}_R^2 = k_0^2 + \mathbf{k}_I^2$, согласно (9.3), и $\left| \mathbf{k}_R - \frac{\mathbf{p}}{2} \right| = \sqrt{\mathbf{k}_R^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}} = \sqrt{k_0^2 + \mathbf{k}_I^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}}$. Как

и в двумерном случае, по мере увеличения $|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_I^\pm|$ модуль волнового вектора

$|\mathbf{k}| = \sqrt{|\mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I|^2} = \sqrt{\mathbf{k}_R^2 + \mathbf{k}_I^2} = \sqrt{k_0^2 + 2\mathbf{k}_I^2}$ всегда монотонно увеличивается. При

этом, согласно (9.17), в случае левосторонней (по отношению к направлению вектора $\mathbf{k}_R - \mathbf{p}/2$) мнимой добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$ величина $|\lambda|$ монотонно уменьшается от 1 до 0

($\lim_{|\mathbf{k}_I^+| \rightarrow \infty} |\lambda| = 0$), а в случае правосторонней мнимой добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$ величина $|\lambda|$

монотонно увеличивается от 1 до ∞ ($\lim_{|\mathbf{k}_I^-| \rightarrow \infty} |\lambda| \rightarrow \infty$).

Далее, согласно [415; 416], функция $H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv H(\lambda, \mathbf{p})$ рассматривается в терминах переменных (λ, \mathbf{p}) . Предельные значения функции $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ при бесконечно малой мнимой добавке $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$, ориентированной в одном из альтернативных направлений $\gamma^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, ортогональных к векторам $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R$ и \mathbf{p} , определяются как

$$H^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{I} = \mathbf{k} - \mathbf{p}), \text{ т.е. } H^\pm(\lambda, \mathbf{p}) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 1 \mp 0} H(\lambda, \mathbf{p}),$$

поскольку $\lambda \rightarrow 1 \mp 0$ при $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^\pm \rightarrow 0$. Эти предельные значения рассчитываются с помощью уравнений Фаддеева (9.8), после чего используются для нахождения функции $H(\lambda, \mathbf{p})$ уже при произвольном $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\mathbf{p}| < 2k_0$ из следующего соотношения:

$$H(\lambda, \mathbf{p}) = H_0(\lambda, \mathbf{p}) + P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p}). \quad (9.18)$$

Здесь член $H_0(\lambda, \mathbf{p})$ вычисляется интегрированием предельных значений $H^\pm(\zeta, \mathbf{p})$, определенных на единичной окружности $|\zeta|=1$ комплексной плоскости, причем при численной реализации интегрирование по переменной $\zeta \equiv |\zeta| \exp(i\varphi_\zeta) = \exp(i\varphi_\zeta)$ удобно свести к интегрированию по углу $\varphi_\zeta \in [-\pi; \pi)$:

$$H_0(\lambda, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1-0} \frac{H^+(\zeta, \mathbf{p})}{\zeta - \lambda} d\zeta \quad \text{при } 0 < |\lambda| < 1;$$

$$H_0(\lambda, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1+0} \frac{\lambda}{\zeta(\zeta - \lambda)} H^-(\zeta, \mathbf{p}) d\zeta \quad \text{при } |\lambda| > 1. \quad (9.19)$$

Член $P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p})$ в (9.18) получается интегрированием (по двумерной области комплексных значений) функции $\{H, H\}(\zeta, \mathbf{p}) \equiv \frac{\partial H(\zeta, \mathbf{p})}{\partial \bar{\zeta}}$, представляющей собой квадратичную форму по H , – см. далее (9.21):

$$P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p}) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{\{H, H\}(\zeta, \mathbf{p})}{\zeta - \lambda} d(\operatorname{Re} \zeta) d(\operatorname{Im} \zeta) \quad \text{при } 0 < |\lambda| < 1;$$

$$P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p}) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| > 1} \frac{\lambda}{\zeta(\zeta - \lambda)} \{H, H\}(\zeta, \mathbf{p}) d(\operatorname{Re} \zeta) d(\operatorname{Im} \zeta) \quad \text{при } |\lambda| > 1. \quad (9.20)$$

Интегрирование по комплексной плоскости удобно осуществить в полярной системе координат, используя представление $\zeta \equiv |\zeta| \exp(i\varphi_\zeta)$; тогда $d(\operatorname{Re} \zeta) d(\operatorname{Im} \zeta) = |\zeta| d|\zeta| d\varphi_\zeta$. В свою очередь, присутствующая в (9.20) функция $\{H, H\}$ находится на основе аналога $\bar{\partial}$ -уравнения (9.9), записанного в терминах переменных на λ -плоскости:

$$\{H, H\}(\lambda, \mathbf{p}) \equiv \frac{\partial H(\lambda, \mathbf{p})}{\partial \bar{\lambda}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sqrt{k_0^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{4}} \operatorname{sgn}(|\lambda|^2 - 1) \frac{|\lambda|^2 + 1}{\lambda |\lambda|} (\cos \phi - 1) - \frac{|\mathbf{p}|}{\lambda} \sin \phi \right] \cdot$$

$$\cdot H(z_1, -\zeta) H(z_2, \mathbf{p} + \zeta) d\phi; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \neq 0; 1; \quad |\mathbf{p}| < 2k_0, \quad \mathbf{p} \notin \mathcal{L}_v. \quad (9.21)$$

Здесь положение вектора ζ на окружности (9.10) характеризуется углом $\phi \in [-\pi, \pi)$:

$$\zeta = \operatorname{Re} \mathbf{k} (\cos \phi - 1) + \operatorname{Re} \mathbf{k}^\perp \sin \phi, \quad \text{где } \mathbf{k}^\perp \equiv \frac{\operatorname{Im} \mathbf{k} \times \operatorname{Re} \mathbf{k}}{|\operatorname{Im} \mathbf{k}|}. \quad (9.22)$$

При фиксированных текущих заданных значениях λ и \mathbf{p} соответствующие векторы \mathbf{k} и ζ рассматриваются и рассчитываются в виде зависимости от следующих аргументов: $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\lambda, \mathbf{p})$, $\zeta = \zeta(\lambda, \mathbf{p}, \phi)$. Тогда

$$H(\lambda, \mathbf{p}) \equiv H(\mathbf{k}, \mathbf{p}), \quad H(z_1, -\zeta) \equiv H(\mathbf{k}, -\zeta), \quad H(z_2, \mathbf{p} + \zeta) \equiv H(\mathbf{k} + \zeta, \mathbf{p} + \zeta),$$

и z_1, z_2 определяются согласно (9.15):

$$z_1(\lambda, \mathbf{p}, \phi) = \frac{\mathbf{k} \cdot [\boldsymbol{\theta}(-\zeta) + i \boldsymbol{\omega}(-\zeta)]}{\sqrt{k_0^2 - \frac{\zeta^2}{4}}; \quad (9.23)$$

$$z_2(\lambda, \mathbf{p}, \phi) = \frac{(\mathbf{k} + \zeta) \cdot [\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p} + \zeta) + i \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p} + \zeta)]}{\sqrt{k_0^2 - \frac{(\mathbf{p} + \zeta)^2}{4}}}.$$

Для расчета z_1 и z_2 как функций от аргументов $(\lambda, \mathbf{p}, \phi)$, в (9.23) вектор $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\lambda, \mathbf{p})$ выражается через $\lambda, \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p})$ посредством соотношений (9.16), и далее $\zeta = \zeta(\lambda, \mathbf{p}, \phi)$ выражается из (9.22). Единичные векторы $\boldsymbol{\theta}(-\zeta), \boldsymbol{\omega}(-\zeta), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p} + \zeta), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p} + \zeta)$ рассчитываются для $\mathbf{p}' = -\zeta$ или $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \zeta$ по правилу (9.14):

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}') = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{p}'}{|\mathbf{v} \times \mathbf{p}'|}, \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p}') = \frac{\mathbf{p}' \times \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p}'|}.$$

Надо обратить внимание, что (9.21) справедливо для любых комплексных λ (кроме предельных значений $\lambda = 0$ и $|\lambda| = 1$), но требуется $|\mathbf{p}| < 2k_0$ и $\mathbf{p} \notin \mathcal{L}_v$, в то время как исходное $\bar{\partial}$ -уравнение (9.9) не имеет ограничений на параметры \mathbf{k} и \mathbf{p} . Однако даже при $|\mathbf{p}| < 2k_0$ в правой части (9.21) присутствует нелинейный член $H(\mathbf{k}, -\zeta) H(\mathbf{k} + \zeta, \mathbf{p} + \zeta)$, за счет чего строгое нахождение $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ при $|\mathbf{p}| < 2k_0$ на основе (9.18)–(9.21) нуждается в знании $H(\mathbf{k}, -\zeta)$ и $H(\mathbf{k} + \zeta, \mathbf{p} + \zeta)$, в том числе, при $|\zeta| \geq 2k_0, |\mathbf{p} + \zeta| \geq 2k_0$. Алгоритм Новикова позволяет найти $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ только при $|\mathbf{p}| < 2k_0$, так как он использует соотношение (9.21). По данной причине, в случае, если нужные значения $H(\mathbf{k}, -\zeta)$ и $H(\mathbf{k} + \zeta, \mathbf{p} + \zeta)$ отличны от нуля при $|\zeta| \geq 2k_0$,

$|\mathbf{p} + \boldsymbol{\zeta}| \geq 2k_0$, то при расчете $\{H, H\}(\lambda, \mathbf{p})$ с помощью (9.21) они искусственно обнуляются. За счет этого вносится ошибка в оценку $\{H, H\}(\lambda, \mathbf{p})$ и как следствие, в оценку $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ даже при $|\mathbf{p}| < 2k_0$. Тем самым, нахождение $\{H, H\}(\lambda, \mathbf{p})$ из (9.21) остается строгим до тех пор, пока $H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0$ при $|\mathbf{p}| \geq 2k_0$. Это условие является, фактически, ограничением на область локализации пространственного спектра рассеивателя и его вторичных источников, что подробнее обсуждается далее. Однако такое ограничение не сужает существенным образом область практического использования алгоритма.

Заключительным этапом является оценка пространственного спектра рассеивателя из соотношения (9.11), принимающего в λ -терминах вид

$$\tilde{v}(-\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \lim_{\lambda \rightarrow 0} H(\lambda, \mathbf{p}) . \quad (9.24)$$

В (9.24) для достижения асимптотического условия $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ использовались левосторонние мнимые добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^+$, поскольку $\lambda \rightarrow 0$ при $|\mathbf{k}_I^+| \rightarrow \infty$. Эквивалентно можно было бы использовать правосторонние добавки $\mathbf{k}_I = \mathbf{k}_I^-$; тогда условие $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ или $|\mathbf{k}_I^-| \rightarrow \infty$ в терминах переменной λ принимало бы вид $\lambda \rightarrow \infty$. Наконец, непосредственно искомое пространственное распределение рассчитывается из оцененного пространственного спектра обратным фурье-преобразованием:

$$v(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{v}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}) d\boldsymbol{\xi} . \quad (9.25)$$

Таким образом, в (9.24), (9.25) фигурируют лишь предельные значения $H(\lambda \rightarrow 0, \mathbf{p})$. Однако эти предельные значения могут быть оценены только в совокупности с оценкой $H(\lambda, \mathbf{p})$ из (9.18)–(9.21) при всех остальных значениях λ . Кроме того, расчет члена $P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p})$ согласно (9.20) даже только при $|\lambda| < 1$ требует знания $H(\lambda', \mathbf{p}')$ не только при $|\lambda'| < 1$, но и при $|\lambda'| > 1$, поскольку в (9.21) встречаются значения аргументов $|z_1| > 1$, $|z_2| > 1$. Следовательно, в общем случае необходимо использовать выражения (9.19)–(9.21) для всех λ .

Таким образом, последовательность оценки трехмерной функции рассеивателя в алгоритме Новикова схематически имеет вид:

A)

$$\left(\begin{array}{l} f(\mathbf{k}, \mathbf{l}); \\ \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l}); \\ H^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{l} = \mathbf{k} - \mathbf{p}); \\ \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right) \longrightarrow$$

(9.8)

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{переход от } (\mathbf{k}, \mathbf{p}), \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \\ \kappa(\lambda, \mathbf{p}), \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1; \\ H^\pm(\lambda, \mathbf{p}) \equiv H^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} H_0(\lambda, \mathbf{p}) \\ \text{при любом} \\ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \neq 0, 1 \end{array} \right) \\ (9.14), (9.15) \qquad \qquad \qquad (9.19) \end{array}$$

Б)

$$\left(\begin{array}{l} \text{задается} \\ \lambda \in \mathbb{C} \\ |\lambda| \neq 0, 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} \mathbf{k} = \mathbf{k}(\lambda, \mathbf{p}); \\ \mathbf{k} \in \mathbb{C}^3 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} \zeta = \zeta(\lambda, \mathbf{p}, \phi) \\ \boldsymbol{\theta}(-\zeta), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{p} + \zeta) \\ \boldsymbol{\omega}(-\zeta), \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p} + \zeta) \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} z_1(\lambda, \mathbf{p}, \phi) \\ z_2(\lambda, \mathbf{p}, \phi) \end{array} \right)$$

(9.14), (9.16) \qquad \qquad (9.22), (9.14) \qquad \qquad (9.23)

В)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Итог действий "А)":} \\ \left(\begin{array}{l} H_0(\lambda, \mathbf{p}), \\ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \neq 0, 1 \end{array} \right) \\ \\ \text{Итог действий "Б)":} \\ \left(\begin{array}{l} z_1(\lambda, \mathbf{p}, \phi) \\ z_2(\lambda, \mathbf{p}, \phi) \end{array} \right) \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \{H, H\}(\lambda, \mathbf{p}) \longrightarrow P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p}) \longrightarrow H(\lambda, \mathbf{p}) \longrightarrow \tilde{v}(-\mathbf{p}) \longrightarrow v(\mathbf{r}) \\ (9.21) \qquad \qquad \qquad (9.20) \qquad \qquad \qquad (9.18) \qquad \qquad \qquad (9.24) \qquad \qquad \qquad (9.25) \end{array}$$

Объем вычислений уменьшается, если рассеиватель сферически симметричный. В этом случае $H(\lambda, \mathbf{p}) = H(|\lambda|, |\mathbf{p}|)$, а в (9.19)–(9.21) нужны только соотношения при $|\lambda| < 1$ благодаря свойству $H(\lambda, \mathbf{p}) = H(1/\lambda, \mathbf{p})$ для любого комплексного $\lambda \neq 0$. При этом предельные значения на единичной окружности λ -плоскости совпадают: $H^+(|\zeta|=1, |\mathbf{p}|) = H^-(|\zeta|=1, |\mathbf{p}|)$, и (9.19) дает $H_0(|\lambda|, |\mathbf{p}|) = H^\pm(|\zeta|=1, |\mathbf{p}|)$ для любого $|\lambda|$.

По сравнению с трехмерным алгоритмом Новикова–Хенкина, обсуждавшимся в [А 32], предлагаемый новый вариант решения (9.18)–(9.25) существенно более удобен для практического воплощения, поскольку он не содержит неустойчивых операций. Однако плата за это – использование в алгоритме интегрального соотношения (9.21), нелинейного относительно неизвестной функции H , что, по-видимому, с необходимостью требует применения итерационного метода нахождения $H(\lambda, \mathbf{p})$ из (9.18)–(9.21). Как отмечалось, соотношение (9.21) остается строгим до тех пор, пока $H(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0$ при $|\mathbf{p}| \geq 2k_0$. Следовательно, алгоритм позволяет восстановить основную часть пространственного спектра вторичных источников, возникающих в области рассеяния, компоненты которой лежат в области пространственных частот $|\xi| < 2k_0$, – см. пояснения в конце раздела 6.1. Поэтому при отсутствии более высоких пространственных компонент алгоритм является строгим, и в этом его большое достоинство. Если же высокочастотные пространственные компоненты представлены заметным образом (о чем говорит, в частности, присутствие рассеянного назад поля), получаемая с помощью алгоритма оценка рассеивателя $\hat{v}(\mathbf{r})$ оказывается пространственно-профильтрованной, т.е. в пространственном спектре оценки $\hat{v}(\xi)$ присутствуют только низкие пространственные частоты $|\xi| < 2k_0$. Кроме того, поскольку значения $H(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ при $|\mathbf{p}| \geq 2k_0$ не воспроизводятся, а сам алгоритм нелинейный, то для неборновских рассеивателей возникает определенная ошибка в оценке $\hat{v}(\xi)$ даже при $|\xi| < 2k_0$. Ошибка такого рода тем больше, чем выше значения $|\xi|$ и сильнее рассеиватель. В этом отношении ситуация похожа на случай двумерного алгоритма Новикова–Гриневича–Манаква, описанного в разделе 6.3. Поэтому при численной реализации алгоритма, на этапе нахождения оценки $\hat{H}(\lambda, \mathbf{p})$ функции $H(\lambda, \mathbf{p})$ была введена дополнительная фильтрующая функция $\Pi(|\mathbf{p}|)$ без резкой границы перехода к области подавления. Цель ее введения – фильтрация высших \mathbf{p} -компонент оценки $\hat{H}(\lambda, \mathbf{p})$ (и, следовательно, высших компонент в пространственных спектрах рассеивателя и возбуждаемых в нем вторичных источников) при $|\mathbf{p}| \geq 2k_0\tau$, где фиксированное значение τ принадлежит интервалу $0 < \tau \leq 1$. При этом исходное строгое соотношение (9.18) модифицировалось:

$$\hat{H}(\lambda, \mathbf{p}) = \Pi(|\mathbf{p}|) \cdot H_0(\lambda, \mathbf{p}) + \Pi(|\mathbf{p}|) \cdot P(\{H, H\}; \lambda, \mathbf{p}).$$

Итерационный поиск нахождения $\hat{H}(\lambda, \mathbf{p})$ с использованием нелинейного соотношения (9.21) может быть организован по-разному [260]. При численном моделировании использовался один из наиболее простых его вариантов:

$$\hat{H}_{(j)}(\lambda, \mathbf{p}) = \Pi(|\mathbf{p}|) \cdot H_0(\lambda, \mathbf{p}) + \Pi(|\mathbf{p}|) \cdot P\left(\{\hat{H}_{(j-1)}, \hat{H}_{(j-1)}\}; \lambda, \mathbf{p}\right), \quad (9.26)$$

где $\hat{H}_{(j=0)}(\lambda, \mathbf{p}) = \Pi(|\mathbf{p}|) \cdot H_0(\lambda, \mathbf{p})$; $\hat{H}_{(j)} = (1 - \varepsilon)\hat{H}_{(j-1)} + \varepsilon\hat{H}_{(j)}$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Здесь $\hat{H}_{(j)}$ – оценка функции H , получаемая на итерации с номером $j \geq 1$; полагается $\hat{H}_{(j)}(\lambda, \mathbf{p}) = 0$ при $|\mathbf{p}| \geq 2k_0$. Член $\hat{H}_0 = \Pi H_0$, где H_0 находится из (9.19), не изменяется в процессе итераций. На каждой фиксированной итерации j нелинейная функция $\{\hat{H}_{(j-1)}, \hat{H}_{(j-1)}\}(\lambda, \mathbf{p})$ рассчитывается согласно (9.21) при использовании в правой части функций $\hat{H}_{(j-1)}$, оцененных на предыдущей итерации, и далее рассчитывается $P\left(\{\hat{H}_{(j-1)}, \hat{H}_{(j-1)}\}; \lambda, \mathbf{p}\right)$ согласно (9.20). Уточненная оценка $\hat{H}_{(j)}$ формируется в виде (9.26). Во избежание возможной “раскачки” итерационного решения в случае достаточно сильных рассеивателей в (9.26) вводится прием частичного (“релаксационного”) учета поправки к итерационному решению с помощью весового множителя ε , т.е. $\hat{H}_{(j)}$ – это взвешенная оценка [236]. Введение дополнительной фильтрующей функции $\Pi(|\mathbf{p}|)$ улучшает сходимость итераций, поскольку плавно уменьшает вклад от высоких пространственных частот (которые восстанавливаются тем менее достоверно, чем сильнее рассеиватель) и, в то же время, позволяет увеличить вес ε , что ускоряет сходимость. Экспериментальные данные $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ фильтрации не подвергались, поскольку уравнения Фаддеева (9.7) или (9.8) позволяют строго найти $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{I})$ при любом виде данных $f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$.

Важно, что используемый итерационный алгоритм не нуждается в решении систем уравнений, за исключением начального этапа – нахождения предельных значений $H^\pm \equiv h_{\gamma^\pm}$ из уравнений Фаддеева (9.8). Итоговая итерационная оценка $\hat{H}_{(j)}(\lambda, \mathbf{p})$ должна выходить на практически постоянное по λ значение при малых $|\lambda|$, которые соответствуют уже такому большому $|\mathbf{k}|$, что эффекты перерассеяния компенсируются, и имеет место асимптотическое соотношение (9.24). Это обстоятельство может служить дополнительным критерием контроля сходимости итераций. По завершении итераций из (9.24), (9.25) оцениваются непосредственно пространственный спектр рассеивателя $\hat{v}(-\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{H}_{(j)}(\lambda, \mathbf{p})$ и сама функция рассеивателя $v(\mathbf{r})$.

Раздел 9.3. Численное моделирование алгоритма

В случае рассеивателей произвольной формы или конфигурации решение прямой задачи может быть только приближенным [196; 197]. Поэтому работоспособность трехмерного алгоритма Новикова иллюстрируется на примере рассеивателей в виде шара радиуса a со скоростью звука c и амплитудным коэффициентом поглощения или усиления α внутри шара. Шарообразный рассеиватель не является идеальным модельным примером для иллюстрации качества решения обратной задачи рассеяния, так как он имеет резкие границы. Выбор такого вида объекта связан только с тем, что для него существует строгое аналитическое решение прямой задачи, т.е. возможность вычисления $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ с помощью сходящегося ряда [189 (т. II, § 11.3, с. 452–455 в русском переводе)]. Необходимо подчеркнуть, что алгоритм Новикова может быть применен для решения обратной задачи рассеяния от практически любых рассеивателей, и использование при численном моделировании сферически симметричных объектов не ограничивает общности получаемых результатов. При рассмотрении рассеивателей, обладающих как рефракционной компонентой, так и поглощающей или усиливающей, данные рассеяния моделировались на основе тех же аналитических выражений, что и для чисто рефракционного рассеивателя, но показатель преломления c_0/c становился комплексной величиной $\frac{c_0}{c} + i \frac{\alpha}{k_0}$; тогда

$\alpha > 0$ соответствует поглощению, а $\alpha < 0$ – усилению. Рефракционная компонента такого рассеивателя создает дополнительный набег фазы волны вдоль диаметра рассеивателя

$\Delta\psi \cong 2a |k_0 - k| = 2ak_0 \left| 1 - \frac{c_0}{c} \right|$, где $k = \omega/c$. Сама величина α/k_0 для рассеивателей,

не обладающих очень сильным поглощением или усилением, задавалась следующим образом. Согласно (9.1), мнимая компонента рассеивателя

$-i2\omega \frac{\alpha(\mathbf{r})}{c(\mathbf{r})} = -i2k_0^2 \frac{c_0}{c(\mathbf{r})} \frac{\alpha(\mathbf{r})}{k_0}$ близка по абсолютному значению и, следовательно,

но, по вкладу в рассеянное поле к чисто рефракционному рассеивателю

$\omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) = k_0^2 \left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right)$ со скоростью звука $c = c'$, если

$2k_0^2 \frac{c_0}{c'} \frac{|\alpha|}{k_0} \approx k_0^2 \left| 1 - \left(\frac{c_0}{c'} \right)^2 \right|$. Отсюда $\frac{|\alpha|}{k_0} \approx \left| 1 - c_0/c' \right| \frac{1 + c_0/c'}{2c_0/c'}$, что соответствует

$\frac{|\alpha|}{k_0} \approx \left| 1 - \frac{c_0}{c'} \right|$ при не сильном отличии c_0/c' от 1. Поэтому полагалось $\frac{\alpha}{k_0} \approx \left| 1 - \frac{c_0}{c'} \right|$

при поглощении и $\frac{\alpha}{k_0} \approx - \left| 1 - \frac{c_0}{c'} \right|$ при усилении, где c_0/c' – показатель преломления

рефракционного рассеивателя, создающего, при заданном линейном размере рассеивателя

$2a$, дополнительный набег фазы $\Delta\psi' \cong 2ak_0 \left| 1 - \frac{c_0}{c'} \right|$. Полное амплитудное поглощение (или усиление) вдоль диаметра рассеивателя составляет $2a\alpha$, что соответствует изменению амплитуды волны в $\cong \exp(-2a\alpha)$ раз.

Оценки функции рассеивателя, получаемые на разных этапах восстановления, сопоставлялись с функцией $v_{\text{cut}}(\mathbf{r})$, пространственный спектр которой $\tilde{v}_{\text{cut}}(\boldsymbol{\xi}) = \Pi(|\boldsymbol{\xi}|) \tilde{v}(\boldsymbol{\xi})$ является профильтрованной версией спектра истинного рассеивателя. Фильтрующая функция задавалась в виде

$$\Pi(|\mathbf{p}|) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ при } |\mathbf{p}| < 2k_0\tau; \quad 0 \text{ при } |\mathbf{p}| > 2k_0\tau_1; \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{|\mathbf{p}| - 2k_0\tau}{2k_0(\tau_1 - \tau)} \right) \right] \text{ при } 2k_0\tau \leq |\mathbf{p}| \leq 2k_0\tau_1. \end{array} \right\}$$

Параметры τ и τ_1 ($\tau \leq \tau_1$) определялись силой рассеивателя и уровнем рассеяния назад. Оценка в приближении однократного рассеяния имеет пространственный спектр $\hat{v}_{\text{born } 0}(-\mathbf{p} = \mathbf{I} - \mathbf{k}) = f(\mathbf{k}, \mathbf{I})$; $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3$. Такая борновская оценка после дополнительной фильтрации ее высоких пространственных частот $\hat{v}_{\text{born}}(\boldsymbol{\xi}) = \Pi(|\boldsymbol{\xi}|) \hat{v}_{\text{born } 0}(\boldsymbol{\xi})$ описывается функцией $\hat{v}_{\text{born}}(\mathbf{r})$.

Решением интегрального уравнения Фаддеева (9.8) являются значения $h_{\gamma^\pm}(\mathbf{k}, \mathbf{I} = \mathbf{k} - \mathbf{p}) \equiv H^\pm(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, найденные для действительных $\mathbf{k}, \mathbf{I} \in \mathbb{R}^3$. На их основе получается, согласно (9.19), начальная оценка пространственного спектра рассеивателя

$$\hat{v}_0(-\mathbf{p}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} H_0(\lambda, \mathbf{p}).$$

Для сферически симметричного рассеивателя справедливо $H_0(|\lambda|, |\mathbf{p}|) = H^\pm(|\boldsymbol{\zeta}| = 1, |\mathbf{p}|)$ при любом λ ; тогда $\hat{v}_0(|\mathbf{p}|) = H^\pm(|\lambda| = 1, |\mathbf{p}|)$, и соответствующая оценка рассеивателя $\hat{v}_{\text{fad}}(\mathbf{r})$ (называемая далее фаддеевской) имеет профильтрованный пространственный спектр $\hat{v}_{\text{fad}}(|\boldsymbol{\xi}|) = \Pi(|\boldsymbol{\xi}|) \hat{v}_0(|\boldsymbol{\xi}|)$.

Итерационная оценка $\hat{v}_{(j)}(\mathbf{r})$ с профильтрованным спектром

$$\hat{v}_{(j)}(\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{p}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{H}_{(j)}(\lambda, \mathbf{p}),$$

осуществляемая по схеме (9.26), (9.20), (9.21), сходится достаточно монотонно. В случае сильных рассеивателей, создающих большой дополнительный набег фазы $\Delta\psi \geq \pi$ или обладающих сильным поглощением (усилением), после первой итерации наблюдается

сильное отклонение оценки $\hat{v}_{(j=1)}(\mathbf{r})$ от начальной пространственно-профильтрованной оценки $\hat{v}_0(\mathbf{r})$. Однако при дальнейшем итерировании оценка сходится к итоговому пространственному распределению практически без осцилляций. Как уже упоминалось, присутствие дополнительной фильтрующей функции $\Pi(|\mathbf{p}|)$ заметно уменьшает количество необходимых итераций и ускоряет сходимость. Сама итерационная процедура оказалась устойчивой к выбору начального приближения для итерирования нелинейного члена $\left\{ \hat{H}_{(j-1)} \hat{H}_{(j-1)} \right\}$ в (9.21).

Были восстановлены рассеиватели различной силы и размера при всевозможных сочетаниях знака контраста скорости звука в рассеивателе с присутствием поглощения или усиления [А 30]. Обсуждаемые ниже некоторые характерные примеры свидетельствуют, что итоговая итерационная оценка $\hat{v}(\mathbf{r})$, получаемая из найденного пространственного спектра $\hat{v}(\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{p}) = \hat{H}(\lambda \rightarrow 0, \mathbf{p})$, оказывается наиболее близкой к пространственно-профильтрованной функции истинного рассеивателя $v_{\text{cut}}(\mathbf{r})$. Для борновских рассеивателей $\hat{v}(\mathbf{r})$ совпадает с $v_{\text{cut}}(\mathbf{r})$. Для более сильных рассеивателей могут возникать отличия в виде осцилляций. Это объясняется тем, что рассматриваемые шарообразные рассеиватели создают рассеяние назад за счет резкого изменения акустических характеристик на границе шара. Поэтому пространственные спектры рассеивателя и его вторичных источников содержат компоненты при $|\boldsymbol{\xi}| \geq 2k_0$, которые являются своего рода помехой для алгоритма Новикова и нарушают, в случае неборновских рассеивателей, полное совпадение восстановленной оценки $\hat{v}(\mathbf{r})$ и ожидаемой в идеале функции $v_{\text{cut}}(\mathbf{r})$. Задавались скорость звука $c_0 = 1500$ м/с и длина волны $\lambda_0 = 3 \times 10^{-3}$ м, соответствующие реальной ситуации в ультразвуковой томографии мягких биологических тканей. На рисунках 9.4–9.9 изображены центральные сечения истинного рассеивателя v и его пространственно-профильтрованной версии v_{cut} , а также итоговой итерационной оценки \hat{v} , сравниваемой с фаддеевской \hat{v}_{fad} и борновской \hat{v}_{born} . Параметры τ , τ_1 фильтрующей функции $\Pi(|\mathbf{p}|)$ оговорены в тексте для каждого конкретного рассеивателя.

Чисто рефракционный шарообразный рассеиватель радиуса $a = \lambda_0$ с показателем преломления $c_0/c \approx 1.063$, создающим фокусирующий контраст скорости $\frac{\Delta c}{c_0} \equiv \frac{c - c_0}{c_0} = \frac{c}{c_0} - 1 \approx -0.059$ и набег фазы вдоль диаметра $\Delta\psi \approx \pi/4$, представлен на рис. 9.4а (тонкая сплошная линия). Форма рассеивателя v_{cut} (рис. 9.4а, пунктир) соответствует ограничению полосы частот пространственного спектра истинного рассеивателя сферой радиуса $2k_0$, поскольку дополнительная фильтрация отсутствовала ($\tau = \tau_1 = 1$).

Рассеиватель не является слабым: при $\Delta\psi \approx \pi/4$ эффекты перерассеяния уже существенны, о чем свидетельствует то обстоятельство, что его борновская оценка $\text{Re} \hat{v}_{\text{born}}$

заметно отличается от v_{cut} , и в ней появляется ложная мнимая часть $\text{Im}\hat{v}_{\text{born}}$, хотя $\text{Im}v_{\text{cut}} = 0$ (рис. 9.4б). В фаддеевской оценке \hat{v}_{fad} (рис. 9.4а; линия, составленная из точек) мнимая часть становится близкой к нулю, хотя отличие от v_{cut} еще существенно. Эта оценка \hat{v}_{fad} данного рассеивателя уже приводилась в [А 32] в качестве приближенного решения более раннего варианта трехмерного алгоритма, называемого алгоритмом Новикова–Хенкина. Рассматриваемый в настоящей главе алгоритм Новикова позволяет повысить качество восстановления: итерационный процесс, начинающийся с такой фаддеевской оценки, сошелся за три итерации (при $\varepsilon = 1$) к действительной итоговой оценке \hat{v} (рис. 9.4а, толстая сплошная линия), близкой к v_{cut} .

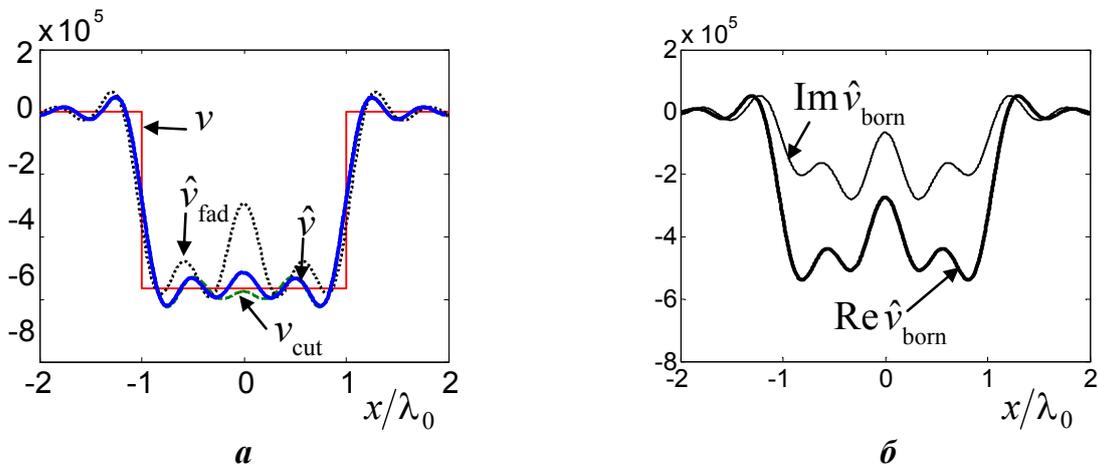


Рис. 9.4. Чисто рефракционный шарообразный рассеиватель радиуса $a = \lambda_0$; фокусирующий контраст скорости звука $\Delta c/c_0 \approx -0.059$, дополнительный набег фазы $\Delta\psi \approx \pi/4$:

- центральные сечения действительной части рассеивателя (а): истинный рассеиватель v (тонкая сплошная линия); форма рассеивателя v_{cut} после ограничения ширины его пространственного спектра (пунктирная линия); оценка рассеивателя из уравнения Фаддеева \hat{v}_{fad} (линия, составленная из точек) и оценка по алгоритму Новикова \hat{v} (толстая сплошная линия) при отсутствии шумовых помех;
- центральные сечения действительной $\text{Re}\hat{v}_{\text{born}}$ (толстая линия) и мнимой $\text{Im}\hat{v}_{\text{born}}$ (тонкая линия) частей оценки рассеивателя в приближении однократного рассеяния (б).

Алгоритм позволяет восстанавливать рассеиватели, обладающие, наряду с рефракцией, поглощением или усилением, что подробно обсуждается в [А 131 (раздел 19.3); 414]. Фокусирующий рассеиватель на рис. 9.5 с радиусом $a = 1.2\lambda_0$ обладает рефракционной компонентой средней силы ($c_0/c \approx 1.104$, $\Delta c/c_0 \approx -0.094$), создающей $\Delta\psi \approx \pi/2$; одновременно этот рассеиватель усиливает амплитуду в 2.2 раза при прохож-

дении волны его диаметра (рис. 9.5б; $\alpha/k_0 \approx -0.052$, эквивалентный набег фазы $\Delta\psi' \cong \pi/4$). Присутствие поглощения или усиления выступает, наряду с рефракцией, своего рода фактором рассеяния волн и усугубляет влияние эффектов перерассеяния. При этом борновская оценка для рассеивателя, обладающего усилением, еще более искажена, по сравнению с v_{cut} ($\tau = 0.68$, $\tau_1 = 1$), чем в случае рассеивателя с эквивалентным по величине поглощением [А 131 (раздел 19.3); 414]. В то же время, фаддеевская оценка существенно лучше борновской, а итоговая итерационная оценка по алгоритму Новикова \hat{v} оказывается близкой к v_{cut} . Сходимость при заданных τ , τ_1 и $\varepsilon = 1$ достигается за пять итераций.

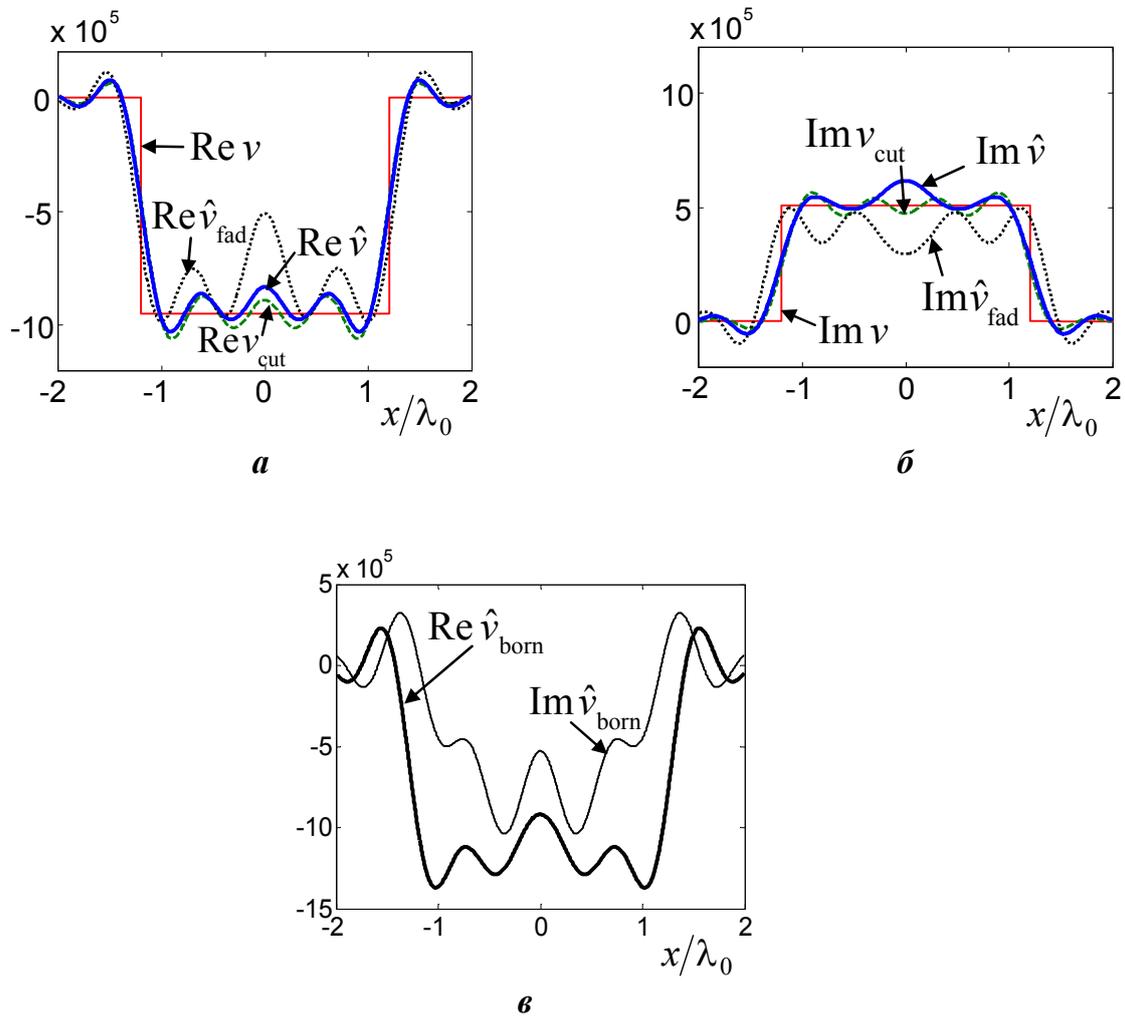


Рис. 9.5. Рефракционно-усиливающий шарообразный рассеиватель радиуса $a = 1.2\lambda_0$; фокусирующий контраст скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.094$, набег фазы $\Delta\psi \approx \pi/2$, амплитудное усиление в рассеивателе – в 2.2 раза: действительная (а) и мнимая (б) части рассеивателя; оценка рассеивателя в приближении однократного рассеяния (в). Тип линий аналогичен рисунку 9.4.

Набег фазы в чисто рефракционном рассеивателе на рис. 9.6 также составляет $\Delta\psi \approx \pi/2$. Размер рассеивателя увеличен до $a = 2\lambda_0$ при $c_0/c \approx 1.063$, $\Delta c/c_0 \approx -0.059$. Ложная мнимая часть в борновской оценке сопоставима с действительной (рис. 9.6б), однако уже фаддеевская оценка не сильно отличается от пространственно-профильтрованной версии истинного рассеивателя v_{cut} , а результат четырех итераций ($\tau = 0.75$, $\tau_1 = 1$, $\varepsilon = 1$) практически совпадает с v_{cut} (рис. 9.6а).

При исследовании помехоустойчивости решения алгоритмом Новикова в данные рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ вносилась нормально распределенная случайная шумовая помеха со стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{\text{ns}} = \varepsilon_{\text{ns}} \bar{f}$ (независимо для действительной и

мнимой части помехи), где $\bar{f} \equiv \sqrt{\frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_0^{4\pi} d\Omega_{\mathbf{l}} |f(\mathbf{k}, \mathbf{l})|^2}$ – среднеквадратичное

значение данных рассеяния (усреднение осуществляется по направлениям векторов $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$; $d\Omega_{\mathbf{k}}, d\Omega_{\mathbf{l}}$ – соответствующие элементарные телесные углы), ε_{ns} – коэффициент зашумления. Отклонение пространственно-профильтрованной оценки пространственного спектра в присутствии помех $\hat{v}_{\text{ns}}(\mathbf{p})$, по сравнению с аналогичной оценкой $\hat{v}(\mathbf{p})$ без помех, характеризовалось относительной среднеквадратичной погрешностью

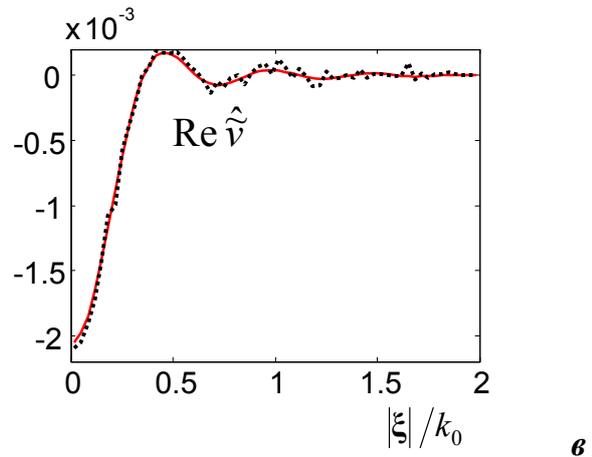
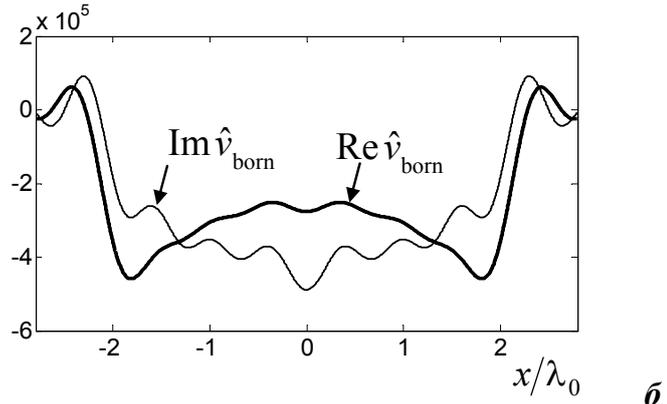
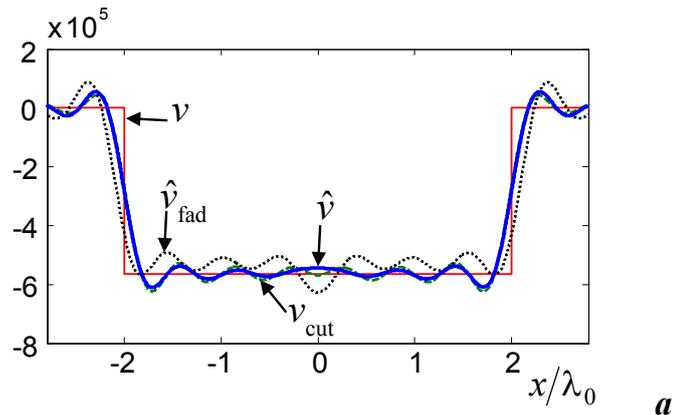
$$\delta_{\text{ns}} \equiv \sqrt{\frac{\int_{|\mathbf{p}| \leq 2k_0} |\hat{v}_{\text{ns}}(\mathbf{p}) - \hat{v}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}}{\int_{|\mathbf{p}| \leq 2k_0} |\hat{v}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}}}. \text{ В модельном эксперименте помеха, вносимая в}$$

$f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, полагалась одинаковой для одинаковых значений угла между \mathbf{k} и \mathbf{l} , что увеличивало значение погрешности δ_{ns} , по сравнению со случаем полностью некоррелированной помехи. Тем не менее, для рассеивателей средней силы величина δ_{ns} оказалась соизмеримой с относительной среднеквадратичной ошибкой ε_{ns} в данных рассеяния. Так, на рис. 9.6в представлен восстановленный пространственный спектр рассеивателя в отсутствие (\hat{v} – сплошная линия) и в присутствии (\hat{v}_{ns} – линия, составленная из точек) шума в данных при $\varepsilon_{\text{ns}} = 0.09$. Погрешность восстановления составила $\delta_{\text{ns}} \approx 0.036$ при $\varepsilon_{\text{ns}} = 0.03$ и $\delta_{\text{ns}} \approx 0.11$ при $\varepsilon_{\text{ns}} = 0.09$. В случае полностью некоррелированной помехи погрешность δ_{ns} будет уменьшаться благодаря избыточности данных $f(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ ($\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$) в трехмерной задаче, что приводит к повышению помехоустойчивости решения [А 32]. Таким образом, как и ожидалось, помехоустойчивость алгоритма к случайным ошибкам в экспериментальных данных рассеяния достаточно высока и пригодна для практических целей диагностики.

Рис. 9.6. Чисто рефракционный шарообразный рассеиватель радиуса $a = 2\lambda_0$; фокусирующий контраст скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.059$, набег фазы $\Delta\psi \approx \pi/2$:

– действительная часть рассеивателя (а) и оценка рассеивателя в приближении однократного рассеяния (б) при отсутствии шумовых помех (тип линий аналогичен рисунку 9.4);

– центральное сечение оценки действительной части пространственного спектра рассеивателя, восстановленной алгоритмом Новикова (в) при отсутствии шумовых помех (сплошная линия) и по зашумленным данным со стандартным амплитудным отклонением $\sigma_{ns} = 0.09 \bar{f}$ (линия, составленная из точек).



В настоящее время не выявлено жестких ограничений на силу рассеивателя, необходимых для обеспечения работоспособности алгоритма. Объекты, сильно отличающиеся от фоновой среды как показателем преломления, так и поглощением, были восстановлены с хорошим качеством. Чисто рефракционный рассеиватель с $a = 1.2\lambda_0$, $c_0/c \approx 0.375$, $\Delta c/c_0 \approx 1.67$ является весьма сильным, создавая $\Delta\psi \approx 3\pi$ (рис. 9.7а). Его борновская оценка \hat{v}_{born} (рис. 9.7в), имеющая профильтрованный пространственный спектр \hat{v}_{born} ($\tau = 0.68$, $\tau_1 = 0.93$), не имеет даже отдаленного сходства с истинными характеристиками рассеивателя. Фаддеевская оценка \hat{v}_{fad} , хотя и заметно лучше, чем \hat{v}_{born} , но существенно отличается от v_{cut} по амплитуде и ширине. Оценка же $\text{Re} \hat{v}$ – результат девяти

итераций ($\varepsilon = 1$) – отличается от v_{cut} только небольшой осцилляцией, являющейся следствием присутствия рассеяния назад. Профильтрованные посредством функции $\Pi(|\mathbf{p}|)$ пространственные спектры соответствующих оценок изображены на рис. 9.7б. Спектр \hat{v} , непосредственно восстановленный алгоритмом Новикова, практически совпадает с профильтрованным спектром истинного рассеивателя \tilde{v}_{cut} (толстая сплошная линия почти совпадает с пунктирной), а его различие с \hat{v}_{fad} и, тем более, с \hat{v}_{born} очевидно.

Чисто поглощающий рассеиватель с $a = 2\lambda_0$ и $\alpha/k_0 \approx 0.063$ ($\Delta\psi' \cong \pi/2$) создает сильное уменьшение амплитуды волны: в 4.8 раза на диаметре (рис. 9.8). Его оценка \hat{v}_{born} отличается по амплитуде от v_{cut} более чем в два раза. Оценка же \hat{v}_{fad} и, тем более, итог четырех итераций \hat{v} ($\tau = 0.6$, $\tau_1 = 1$, $\varepsilon = 1$) близки к v_{cut} .

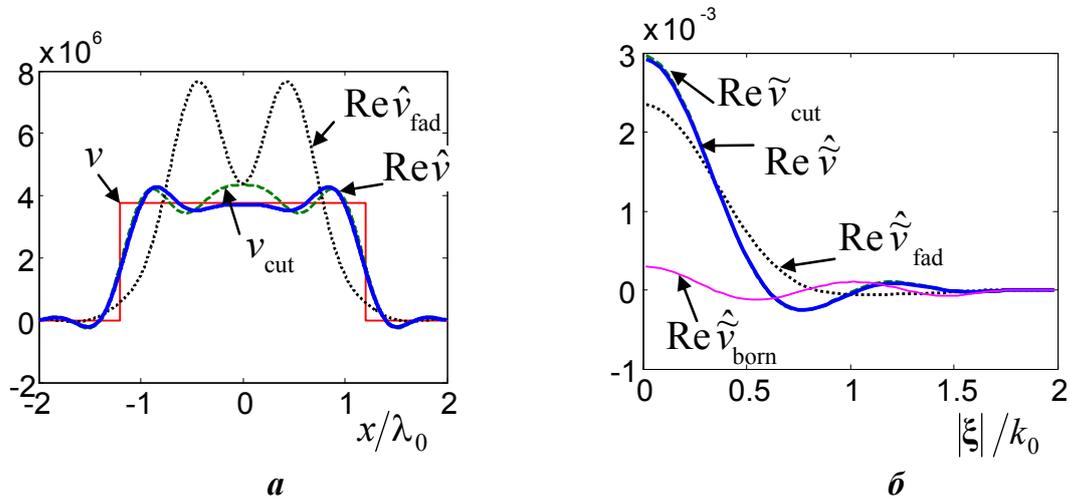


Рис. 9.7. Чисто рефракционный шарообразный рассеиватель радиуса $a = 1.2\lambda_0$; дефокусирующий контраст скорости $\Delta c/c_0 \approx 1.67$, набег фазы $\Delta\psi \approx 3\pi$:

- центральные сечения действительной части рассеивателя (а), тип линий аналогичен рисунку 9.4а;
- центральные сечения действительной части профильтрованного пространственного спектра для истинного рассеивателя \tilde{v}_{cut} (пунктир), его борновской оценки \hat{v}_{born} (тонкая сплошная линия),

оценок из уравнения Фаддеева \hat{v}_{fad} (линия, составленная из точек) и по алгоритму Новикова \hat{v} (толстая сплошная линия) при отсутствии шумовых помех (б);

- оценка рассеивателя в приближении однократного рассеяния (в), тип линий аналогичен рисунку 9.4б.

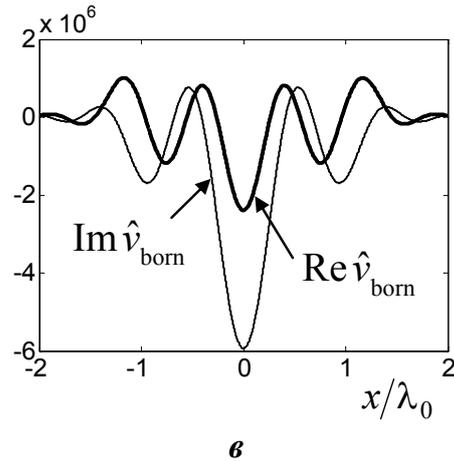
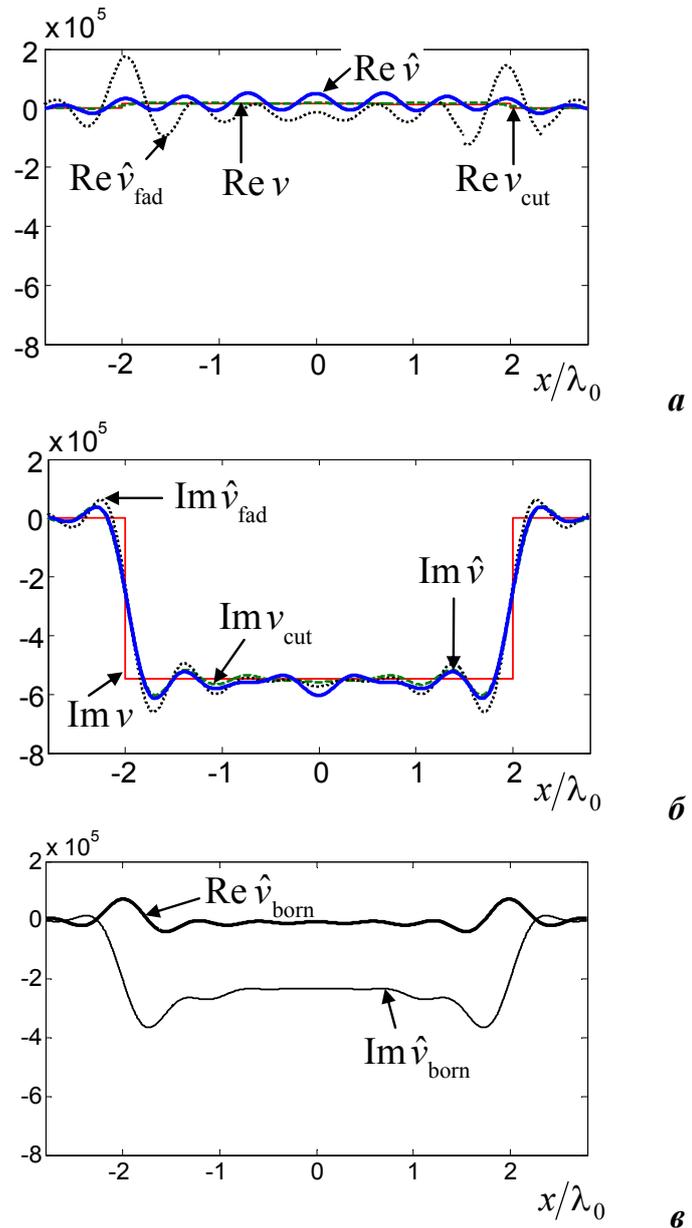


Рис. 9.8. Чисто поглощающий шарообразный рассеиватель радиуса $a = 2\lambda_0$; амплитудное поглощение в рассеивателе – в 4.8 раза: действительная (а) и мнимая (б) части рассеивателя; оценка рассеивателя в приближении однократного рассеяния (в). Тип линий аналогичен рисунку 9.4.



Алгоритм Новикова позволяет численно проиллюстрировать тот факт, что в трехмерной монохроматической задаче рассеяния единственность и устойчивость восстановления могут быть обеспечены для рассеивателей весьма большой силы, в отличие от двумерной монохроматической задачи. Этот строго доказанный факт обсуждался выше в разделе 3.2 [А 2 (глава 6); А 11]. Для иллюстрации значительно большей устойчивости решения трехмерной обратной задачи были рассмотрены два чисто рефракционных фокусирующих рассеивателя. Один – двумерный, цилиндрической формы с радиусом $a = 1.2\lambda_0$; другой – трехмерный, шарообразный, с тем же радиусом. Оба рассеивателя имеют $c_0/c \approx 1.208$, $\Delta c/c_0 \approx -0.172$ и относятся к классу сильных рассеивателей: дополнительный набег фазы вдоль диаметра каждого из них составляет $\Delta\psi \approx \pi$. Оценка цилиндрического рассеивателя, полученная двумерным алгоритмом Новикова–Гриневича–Манаква (см. раздел 6.3), имеет искажения даже в центральной части, а на периферии возникают сильные осцилляции – признак неустойчивости решения обратной задачи (рис. 9.9а). В то же время, шарообразный рассеиватель с той же искажающей силой вос-

производится алгоритмом Новикова после шести итераций ($\tau = 0.68$, $\tau_1 = 1$, $\varepsilon = 1$) вполне удовлетворительно (рис. 9.9б). Это связано с размерностной избыточностью полных трехмерных данных, благодаря которой в трехмерной монохроматической задаче снимается ограничение на силу восстанавливаемого рассеивателя при обеспечении единственности и устойчивости решения.

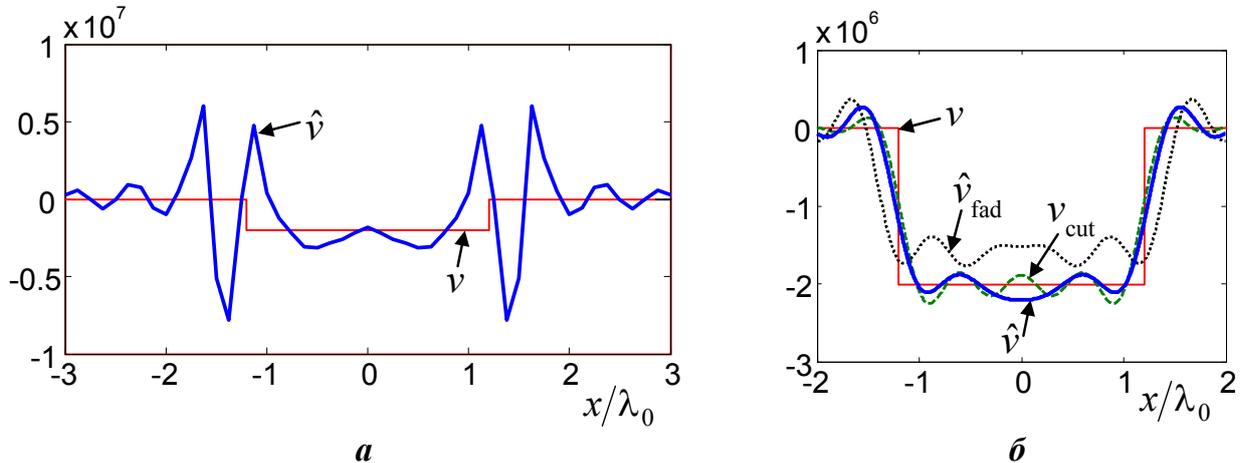


Рис. 9.9. Результат восстановления двумерного цилиндрического рассеивателя (а) и трехмерного шарообразного рассеивателя (б) с одинаковым радиусом $a = 1.2\lambda_0$ и фокусирующим контрастом скорости $\Delta c/c_0 \approx -0.172$, дающими набег фазы $\Delta\psi \approx \pi$; тип линий аналогичен рисунку 9.4а.

Таким образом, алгоритм Новикова учитывает процессы многократного рассеяния, и в настоящее время не видно пределов его работоспособности в случае рассеивателей большой силы. Однако чем сильнее рассеиватель, тем итерационная процедура должна быть организована более тонко для обеспечения ее сходимости. В простейшем случае следует уменьшать весовой коэффициент ε при формировании $\hat{H}_{(j)} = (1 - \varepsilon)\hat{H}_{(j-1)} + \varepsilon\hat{H}_{(j)}$ в (9.26), что приводит к дополнительному увеличению количества итераций. Итоговое решение обратной задачи на основе алгоритма Новикова при существенном влиянии процессов перерассеяния уточняет фаддеевскую оценку (которая, в свою очередь, кардинально улучшает оценку в приближении однократного рассеяния) и приближается к истинной функции рассеивателя после ограничения ширины ее пространственного спектра областью с радиусом, несколько меньшим, чем $2k_0$.

Алгоритм достаточно сложен в вычислительном плане как в силу трехмерности задачи, так и за счет его итерационной структуры. Поэтому целесообразно привлечение специальных вычислительных методов ускорения сходимости, основанных на аналитическом предсказании асимптотики оценки после выполнения нескольких первых итераций. После перехода к монотонному и равномерному движению оценки к асимптотике, численное уточнение итоговой оценки достигается за небольшое число дополнительных итераций [142 (§ 6.3, 6.4); 417].

Введение дополнительной пространственно-спектральной фильтрации представляет собой своего рода регуляризацию решения. Поскольку регуляризация связана с ограничением пространственного спектра решения, то ее влияние в определенной степени зависит от степени вносимого ограничения, а также от способа внесения этого ограничения в процедуру итерационного поиска. Конкретные детали регуляризации достаточно многовариантны, т.е. параметры регуляризации (например, форма фильтрующей функции, ширина полосы фильтруемых пространственных частот и т.д.) не являются однозначно задаваемыми. Численное моделирование показало, что выбор параметров определяется классом рассеивателей, их силой и шириной пространственного спектра, нужной точностью решения. Таким образом, он зависит от характера ожидаемого решения и может опираться на возможную априорную информацию о восстанавливаемом объекте или на субъективные оценки качества решения. Взаимозависимость этих связей изучена в настоящее время не полностью, но достоинство алгоритма в том, что критичность результата к деталям пространственно-спектральной регуляризации невысока.

Приведенные результаты представляют собой первый шаг на пути использования в задачах практической интроскопии строгих функциональных методов решения трехмерной обратной задачи рассеяния. Очень большой объем вычислительных операций, необходимый для восстановления трехмерных рассеивателей сложной формы с большими волновыми размерами, требует привлечения мощной многопроцессорной техники. В случае более скромных вычислительных ресурсов обсуждаемый алгоритм может быть непосредственно применен в задачах восстановления неоднородностей с достаточно простой формой и малыми волновыми размерами, для которых, однако, реально получить полный набор экспериментальных данных в виде амплитуды рассеяния. Особенно реалистично выглядят задачи, обладающие строгой симметрией того или иного вида, в первую очередь, – сферической. Предположительно, подобные условия могут возникнуть при исследовании процессов горения или в модельных задачах гидродинамического типа.

В заключение надо отметить, что в двумерных (см. главы 6, 8) и трехмерном (см. главу 9) алгоритмах и их численных реализациях, направленных на применение функционально-аналитических алгоритмов в акустических приложениях, в качестве исходных данных рассматривалась амплитуда рассеяния. Она является характеристикой результата рассеяния на исследуемом объекте плоской волны и регистрации рассеянного поля плоскими приемниками. Однако на практике в томографических схемах удобнее использовать излучающие и приемные преобразователи, которые эквивалентны точечным преобразователям. В связи с этим, в [А 33; А 34; А 86; А 88–А 91] подробно обсуждается предложенный в [266; 367] функционально-аналитический способ нахождения классической и обобщенной амплитуды рассеяния на основе исходных данных, которые получены с помощью приемоизлучающих квазиточечных преобразователей.

Более того, функционально-аналитические методы позволяют восстанавливать пространственные распределения не только скорости звука, коэффициента поглощения и, в общем случае, плотности среды, но и векторное поле течений (в медицинских приложениях – это карта вектора скорости кровотока). Подобная возможность обсуждается в [А 8; А 35–А 37; А 78; А 94–А 96].

Основные результаты и выводы

1. Разработан двухшаговый алгоритм, предназначенный для восстановления пространственных распределений скорости звука и коэффициента поглощения, знание которых актуально для целей ранней диагностики доброкачественных и злокачественных новообразований в мягких биологических тканях (прежде всего – в молочной железе). С помощью исходных томографических данных, полученных численным моделированием, показано, что восстановленные изображения обладают высокой разрешающей способностью – около одной трети характерной длины волны. При этом проиллюстрирована принципиальная необходимость предварительного восстановления на первом шаге неизвестных крупномасштабных пространственных распределений, имеющих размер не менее нескольких длин волн, и последующего учета их на втором шаге при восстановлении тонкой структуры, т.е. неизвестных мелкомасштабных пространственных деталей.

На основе экспериментальных данных, зарегистрированных с помощью ультразвукового медицинского томографа при работе с объектами-фантомами, показана перспективность внедрения двухшагового алгоритма в реальную томографическую установку. С этой целью разработан и апробирован ряд алгоритмов, предназначенных для обработки реальных томографических данных, полученных в условиях неизбежных отклонений характеристик антенной решетки от идеальных.

2. В рамках решения обратной задачи рассеяния в статистической постановке разработан алгоритм получения регуляризованных оценок характеристик пространственно-распределенных рассеивателей в виде неоднородностей скорости звука и коэффициента поглощения при экспериментальных данных с ошибками. Алгоритм учитывает эффекты перерассеяния и включает в себя полученное нелинейное обобщение процедуры винеровской фильтрации, переходящей в случае слабых рассеивателей в линейную винеровскую фильтрацию. Работоспособность алгоритма подтверждена модельными примерами, имитирующими процесс активного акустического томографирования при различном уровне шумовых помех. Показаны необходимость учета процессов перерассеяния и принципиальная роль нелинейной фильтрации при регуляризации решения в случае рассеивателей, сильно искажающих зондирующее поле. Показано, что при оптимальной регуляризации помехоустойчивость восстановления сильных рассеивателей уступает помехоустойчивости восстановления слабых рассеивателей незначительно.

3. Выполнен анализ проблемы единственности и устойчивости обратной задачи акустического рассеяния, решаемой на основе конечного объема дискретизованных томографических данных. Показано, что именно количество степеней свободы вторичных источников, которые индуцируются в области томографирования, определяет, какой объем дискретизованных данных необходим для обеспечения единственности решения. Показано, что этот объем зависит от пространственного размера области томографирования и от ширины пространственного спектра вторичных источников. Показано, что решение обратной задачи сохраняет как единственность, так и устойчивость, если упомянутый объем дискретизованных данных, во-первых, обеспечен в совокупности проводимых экспериментов, и, во-вторых, для его достижения процесс съема данных не требует превышения

определенного предела “классической” разрешающей способности. Сделаны количественные оценки, позволяющие судить о возможности обеспечения единственного и устойчивого решения в различных практических ситуациях в двумерном и трехмерном пространствах.

4. Предложен простой метод повышения разрешающей способности двумерного акустического томографа в направлении, перпендикулярном плоскости томографирования, за счет наклона преобразователей антенной решетки. В связи с тем, что полные акустические данные рассеяния в полном объеме не всегда доступны в практических условиях по техническим или анатомическим причинам, проанализированы возможности томографических схем с совмещенными приемоизлучающими преобразователями и схем с разделенными группами приемников и излучателей. Для каждой из таких схем показаны преимущества и недостатки случаев односторонних и двусторонних наклонов преобразователей.

5. Показано, что если томографические данные рассеяния не доступны в полном объеме, то аппаратная функция алгоритма обработки таких данных приобретает, в общем случае, мнимую часть, что, в свою очередь, усложняет восстановление правильных количественных значений акустических характеристик в области томографирования. В связи с этой проблемой разработан алгоритм обработки неполных данных, который предназначен для восстановления и последующего разделения томограмм – пространственных распределений скорости звука, плотности среды и коэффициента поглощения. Данный алгоритм основан на различном частотном поведении рассеивающих компонент.

Показано, что в условиях неполных данных (приводящих к комплексной аппаратной функции), но при этом априори *известной* частотной зависимости коэффициента поглощения, раздельное воспроизведение томограмм скорости звука, плотности среды и коэффициента поглощения возможно за счет использования, как минимум, трех частотных спектров. Однако когда зависимость коэффициента поглощения от частоты становится линейной, наличие мнимой части у аппаратной функции приводит к неразделимому “перемешиванию” вкладов в томограмму от скоростного и поглощающего членов. Тем самым, разделение скоростной и поглощающей компонент по частотному признаку становится принципиально невозможным, хотя при этом вклад от плотностной компоненты по-прежнему выделяется правильно.

Для еще более общей ситуации – *неизвестной* частотной зависимости коэффициента поглощения в сочетании с комплексной аппаратной функцией – разработан итерационный алгоритм, позволяющий восстановить отдельно не только вышеупомянутые томограммы скорости звука, плотности и коэффициента поглощения, но и получить оценку дополнительного диагностического параметра – показателя степени частотной зависимости коэффициента поглощения в каждой точке томографируемого объекта. Такой итерационный алгоритм нуждается в данных, полученных минимум для четырех частотных спектров.

6. В целях введения в томографическую установку дополнительного режима, позволяющего получать карту вектора скорости кровотока, разработаны аддитивно-

корреляционный и мультипликативно-корреляционный методы восстановления. Достаточная глубина проникновения зондирующих ультразвуковых импульсов внутрь органа обеспечивается относительно низкими частотами $1 \div 2$ МГц. Для определения вектора скорости предложено использовать факт смещения во времени спекл-структуры на промежуточных изображениях, получаемых по данным рассеяния при фиксированном излучателе с участием селекции движущихся рассеивателей – кластеров крови. При этом количественное значение и направление вектора скорости в каждой точке органа определяются с помощью пространственной фильтрации фрагментов изображений, соответствующих последовательным посылкам зондирующих импульсов. Вектор скорости кровотока оценивается независимо от величины реального перемещения крови за полное время измерений благодаря тому, что при посылках импульсов разными излучателями допустима полная смена движущихся рассеивателей в области томографирования. Численным моделированием подтверждена возможность определения как постоянного, так и переменного пространственного распределения вектора скорости в поперечном сечении кровеносного сосуда, а также проиллюстрирована хорошая помехоустойчивость решения к случайным аппаратным помехам и к случайным смещениям малоподвижного фона.

7. В целях применения строгих функциональных алгоритмов к решению акустической обратной задачи рассеяния проанализирована взаимосвязь между различными функциональными алгоритмами, и исследован вопрос о возможности однозначного восстановления характеристик рассеивателя. Впервые выполнено численное моделирование безытерационного функционального алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова (НГМ-алгоритм), который строго учитывает эффекты многократного рассеяния и позволяет восстанавливать внутреннюю структуру двумерных рассеивателей произвольной формы. Подтверждена высокая точность НГМ-алгоритма при восстановлении акустических рефракционно-поглощающих рассеивателей в прикладных задачах томографического типа. Проиллюстрирована высокая помехоустойчивость алгоритма по отношению к ошибкам воспроизведения рассеивателя, имеющим двоякую природу: во-первых, это случайные шумы эксперимента; во-вторых, это те составляющие данных рассеяния, которые порождены высокочастотными компонентами пространственных спектров рассеивателя и его вторичных источников. Показано, что, в отличие от двухшагового метода, НГМ-алгоритм обеспечивает *одновременное* восстановление как изначально неизвестных крупномасштабных деталей, так и тонкой структуры рассеивателя; при этом разрешающая способность тонкой структуры по-прежнему близка к одной трети длины волны.

8. На моделях акустических идеально жестких и идеально мягких рассеивателей с различными волновыми размерами исследованы пределы практической работоспособности функционального НГМ-алгоритма. Численным моделированием получен приближенный количественный критерий, который свидетельствует о возникновении неустойчивости решения, приводящей к заметному ухудшению качества восстановления НГМ-алгоритмом даже в присутствии регуляризации решения. Данный критерий связан со значением обусловленности линейных систем уравнений, решаемых в процессе восстановления рассеивателя. Одновременно показано, что область устойчивой работоспособности алгоритма в монохроматическом режиме оказывается значительно шире, чем это предпо-

лагалось изначально, и данное обстоятельство делает алгоритм еще более перспективным для применения в практических задачах. Параллельно выявлены особенности рассеяния, присущие собственно граничным рассеивателям. В частности, показано, что рассеивающая способность мягкого цилиндрического рассеивателя, по сравнению с жестким рассеивателем, оказывается гораздо больше при одном и том же малом волновом размере.

9. Предложен, детально разработан и численно апробирован способ обобщения функциональных схем, изначально использующих монохроматический режим зондирования исследуемого объекта, на случай многочастотного режима. В рамках этого, впервые выполнено численное моделирование функционального модифицированного двумерного алгоритма. Выявлены преимущества модифицированного алгоритма, по сравнению с НГМ-алгоритмом: сокращение количества вычислительных операций и возможность эффективного обобщения на многочастотный режим. В процессе решения обратной задачи предложено объединять данные рассеяния, измеренные на разных частотах, на основе априори известных частотных зависимостей различных компонент (рефракционной, плотностной, поглощающей) функции рассеивателя. Показано, что такой прием приводит к уравнениям связи, отсутствующим в монохроматическом варианте. При численной реализации алгоритма разработана схема решения задачи в пространстве, фурье-сопряженном к пространству углов падения зондирующих волн и углов приема рассеянного поля. Показано, что проблема неустойчивости восстановления сильных рассеивателей, возникающая в монохроматическом режиме, может быть снята многочастотным режимом. При этом качество оценки различных компонент рассеивателя в многочастотном режиме значительно лучше оценки в виде простого усреднения монохроматических решений. Показано, что помехоустойчивость алгоритма к случайным ошибкам достаточно высока. В то же время показано, что влияние рассеяния назад, играющее для алгоритма роль помехи другого типа, можно снизить за счет угловой фильтрации обобщенной амплитуды рассеяния в процессе восстановления. В итоге, модифицированный алгоритм оказывается перспективным для его использования в практических целях как в монохроматическом, так и в многочастотном вариантах.

10. В рамках развития алгоритмического обеспечения трехмерных систем акустического томографирования впервые осуществлено численное восстановление модельных трехмерных рассеивателей различной силы, размера и знака контраста на основе монохроматического функционального алгоритма. Показано, что, в отличие от предшествующей приближенной версии трехмерного функционального алгоритма, рассмотренная строгая версия позволяет получать количественные оценки характеристик рассеивателя, близкие к истинным. Показано, что полный объем томографических трехмерных данных в сочетании с полноценным учетом процессов многократного рассеяния волн приводят к тому, что дискретизованная алгоритмическая схема решения практически не имеет жестких ограничений на силу рассеивателей. Предложена регуляризация решения с помощью дополнительной пространственно-спектральной фильтрации; при этом оказалось, что финальная оценка рефракционной и поглощающей компонент рассеивателя почти не зависит от конкретных деталей такой регуляризации, что важно для практики. Дополнительно численным моделированием проиллюстрировано, что трехмерная обратная задача уже в

монохроматическом варианте обладает лучшей помехоустойчивостью решения, чем двумерная обратная задача при одинаковых размерах и контрастах восстанавливаемых рассеивателей. Выявлено, что помехоустойчивость трехмерного алгоритма к случайным ошибкам в исходных данных достаточно высока для практических целей диагностики. Показано, что в случае томографирования рассеивателей несимметричной формы недостатком алгоритма является большое количество вычислительных операций, что обусловлено как большим объемом обрабатываемых исходных данных, так и необходимостью организации при реконструкции итерационного цикла, тем более долгого, чем сильнее восстанавливаемый рассеиватель.

Благодарности

Глубоко благодарю моего научного руководителя – заслуженного профессора кафедры акустики физического факультета МГУ, лауреата Государственной премии СССР Валентина Андреевича Булова. Именно памяти Валентина Андреевича посвящается настоящая работа, все результаты которой получены в научной группе, созданной и долгие годы возглавляемой этим замечательным человеком и ученым.

Искренне благодарю заведующего кафедрой акустики, академика РАН Олега Владимировича Руденко за мудрые советы, поддержку в научной работе, за ту атмосферу доброжелательности и уважения к сотрудникам, которая характерна для нашей кафедры. Без твердости и настойчивости Олега Владимировича, а также без поддержки, внимания и чуткости других сотрудников кафедры вряд ли была бы представлена эта диссертация.

Многолетняя совместная работа по тематике медицинской ультразвуковой томографии связывает группу В. А. Булова с коллективом Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН – членом-корреспондентом РАН Павлом Павловичем Пархоменко, доктором технических наук Михаилом Федоровичем Караваем, доктором технических наук Евгением Георгиевичем Суховым, Борисом Александровичем Фалеевым, Ольгой Ивановной Лапшенкиной и др. Без атмосферы самых теплых человеческих отношений такая совместная работа была бы невозможной.

Отдельная благодарность – профессионалам-математикам, профессорам Роману Геннадьевичу Новикову, Петру Георгиевичу Гриневичу, Михаилу Игоревичу Белишеву, Леониду Николаевичу Пестову за искренние дружеские отношения, многолетнее научное сотрудничество и за прекрасные разработанные ими функциональные алгоритмы, которые, в частности, оказались весьма удобными и перспективными для целей такой трудной, но и такой нужной области, как акустическая томография.

Список публикаций автора по теме диссертации

Монографии:

- А 1. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. I: Обратные задачи излучения в акустике. М.: ЛЕНАНД, 2017, 2018, 2020, 2021. 384 с.
- А 2. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. II: Обратные задачи акустического рассеяния. М.: ЛЕНАНД, 2020, 2021. 768 с.

Публикации в рецензируемых научных журналах, удовлетворяющих Положению о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова:

- А 3. Румянцева О. Д., Буров В. А., Конюшкин А. Л., Шаранов Н. А. Повышение разрешения двумерного томографирования по поперечной координате и отдельное восстановление упругих и вязких характеристик рассеивателя // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 606–622. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Rumyantseva O. D., Burov V. A., Konyushkin A. L., Sharapov N. A.* Increased resolution of two-dimensional tomography imaging along the transverse coordinate and separate reconstruction of elastic and viscous scatterer characteristics // Acoustical Physics. 2009. V. 55. N 4–5. P. 613–629. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 4. Буров В. А., Сергеев С. Н., Румянцева О. Д. Акустическая томография в медицине // Биомедицинская радиоэлектроника. 2000. № 3. С. 61–66. **IF = 0.247 (РИНЦ).**
- А 5. Буров В. А., Сергеев С. Н., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Активная и пассивная акустическая томография сильно неоднородных сред // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2002. № 3. С. 5–13. **IF (РИНЦ) = 0.247.**
- А 6. Буров В. А., Румянцева О. Д. Линеаризованная обратная задача рассеяния в монохроматическом и импульсном режимах // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 1. С. 41–49. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Rumyantseva O. D.* Linearized inverse problem of scattering in monochromatic and pulse modes // Acoustical Physics. 1994. V. 40. N 1. P. 34–42. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 7. Буров В. А., Конюшкин А. Л., Румянцева О. Д. Двумерная и трехмерная акустическая томография многомерных рассеивателей при неполных данных // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 4. С. 463–469. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Konyushkin A. L., Rumyantseva O. D.* Two- and three-dimensional acoustic tomography of multidimensional scatterers with the use on incomplete data // Acoustical Physics. 1997. V. 43. N 4. P. 395–400. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 8. *Rumyantseva O. D., Shurup A. S., Zotov D. I.* Possibilities for separation of scalar and vector characteristics of acoustic scatterer in tomographic polychromatic regime // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2021. V. 29. N 3. P. 407–420. **IF = 1.509 (WoS).**
<https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0141>
- А 9. Буров В. А., Побережская А. Ю., Богатырев А. В., Румянцева О. Д. Особенности расчета процессов рассеяния на контрастных и сильно поглощающих двух- и трехмер-

- ных неоднородностях // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. С. 665–680. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Kasatkina E. E., Poberezhskaya A. Yu., Bogatyrev A. V., Rummyantseva O. D.* Special features of calculation for processes of scattering by contrast and strongly absorbing two- and three-dimensional inhomogeneities // *Acoustical Physics*. 2011. V. 57. N 5. P. 681–695. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 10. Буров В. А., Вечерин С. Н., Румянцева О. Д. Статистическая оценка пространственного спектра вторичных источников // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 14–25. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Vecherin S. N., Rummyantseva O. D.* Statistical estimation of the special spectrum of secondary sources // *Acoustical Physics*. 2004. V. 50. N 1. P. 9–19. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 11. Буров В. А., Румянцева О. Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 590–603. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Rummyantseva O. D.* Uniqueness and stability of the solution to an inverse acoustical scattering problem // *Acoustical Physics*. 2003. V. 49. N 5. P. 496–507. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 12. Буров В. А., Гришина И. М., Лапшенкина О. И., Морозов С. А., Румянцева О. Д., Сухов Е. Г. Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на фоне искажающего влияния его крупномасштабных составляющих // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 738–750. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Grishina I. M., Lapshenkina O. I., Morozov S. A., Rummyantseva O. D., Sukhov E. G.* Reconstruction of the fine structure of an acoustic scatterer against the distorting influence of its large-scale inhomogeneities // *Acoustical Physics*. 2003. V. 49. N 6. P. 627–637. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 13. Буров В. А., Зотов Д. И., Румянцева О. Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в мягких биотканях по модельным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 443–456. **IF (РИНЦ) = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Zotov D. I., Rummyantseva O. D.* Reconstruction of spatial distributions of sound velocity and absorption in soft biological tissues using model ultrasonic tomographic data // *Acoustical Physics*. 2014. V. 60. N 4. P. 479–491. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 14. Зотов Д. И., Румянцева О. Д., Шуруп А. С. Раздельное восстановление скорости звука, плотности среды и поглощения в задачах томографического типа // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2018. Т. 82. № 1. С. 41–46. **IF (РИНЦ) = 0.665 (РИНЦ).**
- Zotov D. I., Rummyantseva O. D., Shurup A. S.* Separate reconstruction of the speed of sound, density of the medium, and coefficient of absorption in tomographic problems // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2018. V. 82. N 1. P. 35–39. **IF = 0.476 (Scopus).**
- А 15. Буров В. А., Зотов Д. И., Румянцева О. Д. Восстановление пространственных распределений скорости звука и поглощения в фантомах мягких биотканей по экспериментальным данным ультразвукового томографирования // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 254–273. **IF = 1.549 (РИНЦ).**

- Burov V. A., Zotov D. I., Rummyantseva O. D.* Reconstruction of the sound velocity and absorption spatial distributions in soft biological tissue phantoms from experimental ultrasound tomography data // *Acoustical Physics*. 2015. V. 61. N 2. P. 231–248. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 16. *Burov V. A., Zotov D. I., Karavay M. F., Rummyantseva O. D.* Ultrasound tomography of soft biological tissues containing strong inhomogeneities // *Physics of Wave Phenomena*. 2013. V. 21. N 1. P. 74–80. **IF = 0.308 (WoS)**.
- A 17. *Буров В. А., Румянцева О. Д., Сасковец А. В.* Акустическая томография и дефектоскопия как обратные задачи рассеяния // *Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия*. 1994. Т. 35. № 6. С. 61–71. **IF = 0.643 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Rummyantseva O. D., Saskovets A. V.* Acoustic tomography and flaw detection as inverse scattering problems // *Moscow University Physics Bulletin (Vestnik Moskovskogo Universiteta. Fizika)*. 1994. V. 49. N 6. P. 47–55. **IF = 0.672 (WoS)**.
- A 18. *Буров В. А., Касаткина Е. Е., Румянцева О. Д.* Статистические оценки в обратных задачах рассеяния // *Акуст. журн.* 1997. Т. 43. № 3. С. 315–322. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Kasatkina E. E., Rummyantseva O. D.* Statistical estimations in inverse scattering problems // *Acoustical Physics*. 1997. V. 43. N 3. P. 270–276. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 19. *Буров В. А., Касаткина Е. Е., Румянцева О. Д., Сухов Е. Г.* Обратная задача статистического оценивания характеристик рассеивателя и модельные примеры ее решения // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 3. С. 348–358. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Kasatkina E. E., Rummyantseva O. D., Sukhov E. E.* Inverse problem of a statistical estimation of scatterer. Characteristics and model examples // *Acoustical Physics*. 2003. V. 49. N 3. P. 290–299. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 20. *Буров В. А., Евтухов С. Н., Матвеев О. В., Румянцева О. Д.* Методы и возможности некогерентной корреляционной акустической томографии // *Биомедицинские технологии и радиоэлектроника*. 2005. № 4–5. С. 55–63. **IF = 0.247 (РИНЦ)**.
- A 21. *Буров В. А., Вечерин С. Н., Морозов С. А., Румянцева О. Д.* Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 4. С. 516–536. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Vecherin S. N., Morozov S. A., Rummyantseva O. D.* Modeling of the exact solution of the inverse scattering problem by functional methods // *Acoustical Physics*. 2010. V. 56. N 4. P. 541–559. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 22. *Буров В. А., Румянцева О. Д.* Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 3. С. 413–420. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Rummyantseva O. D.* Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem on the basis of functional-analytical methods // *Soviet Physics. Acoustics*. 1992. V. 38. N 3. P. 226–230. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 23. *Буров В. А., Румянцева О. Д.* Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов. II. Область эффективного применения // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 5. С. 793–803. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Rummyantseva O. D.* Solution of the two-dimensional acoustical inverse scattering problem on the basis of functional-analytical methods: II. Range of effective application // *Acoustical Physics*. 1993. V. 39. N 5. P. 419–424. **IF = 0.856 (WoS)**.

- A 24. Бадалян Н. П., Буров В. А., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Восстановление акустических граничных рассеивателей с использованием алгоритма Новикова–Гриневича–Манакова // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 990–997. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
Badalyan N. P., Burov V. A., Morozov S. A., Rumyantseva O. D. Reconstruction of acoustic boundary scatterers using the Novikov–Grinevich–Manakov algorithm // *Acoustical Physics*. 2008. V. 54. N 6. P. 862–868. **IF = 0.856 (WoS).**
- A 25. Бадалян Н. П., Буров В. А., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Рассеяние на акустических граничных рассеивателях с малыми волновыми размерами и их восстановление // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 1. С. 3–10. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
Badalyan N. P., Burov V. A., Morozov S. A., Rumyantseva O. D. Scattering by acoustic boundary scatterers with small wave sizes and their reconstruction // *Acoustical Physics*. 2009. V. 55. N 1. P. 1–7. **IF = 0.856 (WoS).**
- A 26. Буров В. А., Глазков А. В., Прудникова И. П., Румянцева О. Д., Тагунов Е. Я. Акустическая дифракционная томография граничных рассеивателей // Вестник Московского университета. Серия 3, Физика, Астрономия. 1990. Т. 31. № 3. С. 57–62. **IF = 0.643 (РИНЦ).**
Burov V. A., Glazkov A. V., Prudnikova I. P., Rumyantseva O. D., Tagunov E. Ya. Acoustic diffraction tomography of boundary scatterers // *Moscow University Physics Bulletin (Vestnik Moskovskogo Universiteta. Fizika)*. 1990. V. 45. N 3. P. 56–60. **IF = 0.672 (WoS).**
- A 27. Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D. Features of solving the direct and inverse scattering problems for two sets of monopole scatterers // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2021. V. 29. N 5. P. 775–789. **IF = 1.509 (WoS).**
<https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0145>
- A 28. Дмитриев К. В., Фадеев Е. В., Румянцева О. Д. Рассеяние запаздывающих волновых полей на точечной акустической неоднородности // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2020. Т. 84. № 2. С. 266–271. **IF = 0.665 (РИНЦ).**
Dmitriev K. V., Fadeev E. V., Rumyantseva O. D. Scattering of retarded wave fields by a point acoustic inhomogeneity // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*. 2020. V. 84. N 2. P. 210–214. **IF = 0.476 (Scopus).**
- A 29. Дмитриев К. В., Румянцева О. Д. Особенности решения прямой и обратной задач рассеяния для неоднородностей малого волнового размера // Доклады Российской Академии Наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. С. 13–20. **IF = 0.679 (РИНЦ).**
Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D. Features of the solution of direct and inverse scattering problems for inhomogeneities with a small wave size // *Doklady Physics*. 2020. V. 65. N 9. P. 301–307. **IF = 0.679 (WoS).**
- A 30. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 469–482. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
Alekseenko N. V., Burov V. A., Rumyantseva O. D. Solution of the three-dimensional acoustic inverse scattering problem. The modified Novikov algorithm // *Acoustical Physics*. 2008. V. 54. N 3. P. 407–419. **IF = 0.856 (WoS).**

- A 31. Буров В. А., Алексеенко Н. В., Румянцева О. Д. Многочастотное обобщение алгоритма Новикова для решения обратной двумерной задачи рассеяния // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 784–798. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Alekseenko N. V., Rummyantseva O. D.* Multifrequency generalization of the Novikov algorithm for the two-dimensional inverse scattering problem // *Acoustical Physics*. 2009. V. 55. N 6. P. 843–856. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 32. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова–Хенкина // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 437–446. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Alekseenko N. V., Burov V. A., Rummyantseva O. D.* Solution of the three-dimensional inverse acoustic scattering problem on the basis of the Novikov–Henkin algorithm // *Acoustical Physics*. 2005. V. 51. N 4. P. 367–375. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 33. Буров В. А., Шуруп А. С., Румянцева О. Д., Зотов Д. И. Функционально-аналитическое решение задачи акустической томографии по данным от точечных преобразователей // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2012. Т. 76. № 12. С. 1524–1529. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Shurup A. S., Rummyantseva O. D., Zotov D. I.* Functional-analytical solution to an acoustic tomography problem, based on data from point transducers // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2012. V. 76. N 12. P. 1365–1370. **IF = 0.476 (Scopus)**.
- A 34. Буров В. А., Шуруп А. С., Зотов Д. И., Румянцева О. Д. Моделирование функционального решения задачи акустической томографии по данным от квазиточечных преобразователей // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 391–407. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Shurup A. S., Zotov D. I., Rummyantseva O. D.* Simulation of a functional solution to the acoustic tomography problem for data from quasi-point transducers // *Acoustical Physics*. 2013. V. 59. N 3. P. 345–360. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 35. Румянцева О. Д., Шуруп А. С. Уравнение для волновых процессов в неоднородных движущихся средах и функциональное решение задачи акустической томографии на его основе // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 94–103. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Rummyantseva O. D., Shurup A. S.* Equation for wave processes in inhomogeneous moving media and functional solution of the acoustic tomography problem based on it // *Acoustical Physics*. 2017. V. 63. N 1. P. 95–103. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 36. Зотов Д. И., Шуруп А. С., Румянцева О. Д. Восстановление векторного поля течений функциональным алгоритмом Новикова–Агальцова и аддитивно-корреляционным способом // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2017. Т. 81. № 1. С. 111–116. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Zotov D. I., Shurup A. S., Rummyantseva O. D.* Vector field reconstruction of flows using the Novikov–Agaltsov functional algorithm and the additive correlation method // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2017. V. 81. N 1. P. 101–105. **IF = 0.476 (Scopus)**.
- A 37. Шуруп А. С., Румянцева О. Д. Совместное восстановление скорости звука, поглощения и течений функциональным алгоритмом Новикова–Агальцова // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 6. С. 700–718. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.

- Shurup A. S., Rumyantseva O. D.* Joint reconstruction of the speed of sound, absorption, and flows by the Novikov–Agaltsov functional algorithm // *Acoustical Physics*. 2017. V. 63. N 6. P. 751–768. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 38. *Burov V. A., Matveev O. V., Zotov D. I., Rumyantseva O. D.* Reconstruction of the blood flow velocity vector as an addition mode of ultrasonic tomograph // *Physics of Wave Phenomena*. 2015. V. 23. N 2. P. 135–142. **IF = 0.308 (WoS)**.
- A 39. *Буров В. А., Зотов Д. И., Румянцева О. Д.* Определение геометрических и фазовых поправок для приемоизлучающих преобразователей кольцевой антенной решетки // *Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия*. 2018. № 5. С. 25–29. **IF = 0.643 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Zotov D. I., Rumyantseva O. D.* Finding geometrical and phase corrections for transmitting–receiving transducers of a ring antenna array // *Moscow University Physics Bulletin (Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 3: Fizika, Astronomiya)*. 2018. V. 73. N 5. P. 470–474. **IF = 0.672 (WoS)**.
- A 40. *Зотов Д. И., Румянцева О. Д.* Коррекция данных акустического томографирования в случае неидеального расположения излучателей и приемников // *Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая*. 2022. Т. 86. № 1. С. 122–127. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Zotov D. I., Rumyantseva O. D.* Correcting data from acoustic tomography with a non-ideal arrangement of transmitters and receivers // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2022. V. 86. N 1. P. 83–87. **IF = 0.476 (Scopus)**.
- A 41. *Буров В. А., Касаткина Е. Е., Румянцева О. Д., Филимонов С. А.* Моделирование томографического восстановления термоакустических источников. Итерационно-корреляционные методы // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 2. С. 167–177. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Kasatkina E. E., Rumyantseva O. D., Filimonov S. A.* Simulation of the tomographic reconstruction of thermoacoustic sources: iteration-correlation methods // *Acoustical Physics*. 2003. V. 49. N 2. P. 134–142. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 42. *Буров В. А., Дариалашвили П. И., Румянцева О. Д.* Активно-пассивная термоакустическая томография // *Акуст. журн.* 2002. Т. 48. № 4. С. 474–484. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Darialashvili P. I., Rumyantseva O. D.* Active-passive thermoacoustic tomography // *Acoustical Physics*. 2002. V. 48. N 4. P. 412–422. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 43. *Буров В. А., Дариалашвили П. И., Евтухов С. Н., Румянцева О. Д.* Экспериментальное моделирование процессов активно-пассивной термоакустической томографии // *Акуст. журн.* 2004. Т. 50. № 3. С. 298–310. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Darialashvili P. I., Evtukhov S. N., Rumyantseva O. D.* Experimental modeling of the processes of active-passive thermoacoustic tomography // *Acoustical Physics*. 2004. V. 50. N 3. P. 243–254. **IF = 0.856 (WoS)**.
- A 44. *Буров В. А., Касаткина Е. Е., Марьин А. О., Румянцева О. Д.* Оценки максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии // *Акуст. журн.* 2007. Т. 53. № 4. С. 580–596. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Kasatkina E. E., Mar'in A. O., Rumyantseva O. D.* Maximum likelihood estimates in correlation acoustic thermotomography // *Acoustical Physics*. 2007. V. 53. N 4. P. 508–523. **IF = 0.856 (WoS)**.

- А 45. Буров В. А., Румянцева О. Д., Дмитриев К. В. Создание управляемой анизотропной подсветки в корреляционных схемах акустической томографии // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 591–597. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Rumyantseva O. D., Dmitriev K. V. Controlled anisotropic illumination in correlation acoustic tomography schemes // Acoustical Physics. 2018. V. 64. N 5. P. 590–595. IF = 0.856 (WoS).*
- А 46. Буров В. А., Дмитриев К. В., Логинов С. В., Румянцева О. Д. Экспериментальное обнаружение термоакустических источников методом фокусирующей корреляционной томографии // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2015. Т. 79. № 10. С. 1413–1419. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Dmitriev K. V., Loginov S. V., Rumyantseva O. D. Experimental determination of thermal-acoustic sources by means of focusing correlation tomography // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2015. V. 79. N 10. P. 1257–1262. IF = 0.476 (Scopus).*
- А 47. Буров В. А., Дмитриев К. В., Румянцева О. Д., Юрченко С. А. Принцип получения изображений в корреляционной акустической термотомографии с фокусировкой // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2019. Т. 83. № 1. С. 70–75. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D., Yurchenko S. A. Principle of obtaining images in correlation acoustic thermotomography with focusing // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2019. V. 83. N 1. P. 59–63. IF = 0.476 (Scopus).*
- А 48. Буров В. А., Евтухов С. Н., Ткачева А. М., Румянцева О. Д. Акустическая томография нелинейного параметра с помощью малого числа преобразователей // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 760–776. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Evtukhov S. N., Tkacheva A. M., Rumyantseva O. D. Acoustic tomography of the nonlinear parameter by a small number of transducers // Acoustical Physics. 2006. V. 52. N 6. P. 655–669. IF = 0.856 (WoS).*
- А 49. Буров В. А., Евтухов С. Н., Матвеев О. В., Румянцева О. Д. Восстановление вектора скорости кровотока в процессе томографирования нелинейного параметра // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2006. Т. 70. № 12. С. 1694–1699. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Evtukhov S. N., Matveev O. V., Rumyantseva O. D. Reconstruction of velocity vector of blood flow during tomography of acoustic nonlinear parameter // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2006. V. 70. N 12. P. 1937–1943. IF = 0.476 (Scopus).*
- А 50. Буров В. А., Матвеев О. В., Румянцева О. Д. Пространственно-корреляционный метод восстановления вектора скорости кровотока в нелинейной томографии // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 268–276. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Matveev O. V., Rumyantseva O. D. A spatial correlation method for reconstructing blood flow velocity vector in the nonlinear tomography // Acoustical Physics. 2010. V. 56. N 2. P. 238–245. IF = 0.856 (WoS).*
- А 51. Буров В. А., Евтухов С. Н., Румянцева О. Д. Восстановление картины кровотока в процессе томографирования акустического нелинейного параметра. Численное и фи-

- зическое моделирование // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 5. С. 712–724. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Evtukhov S. N., Rummyantseva O. D.* Reconstruction of the blood flow pattern by tomography of the acoustic nonlinearity parameter: computer simulation and physical experiment // *Acoustical Physics*. 2008. V. 54. N 5. P. 615–625. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 52. Буров В. А., Матвеев О. В., Нестерова Е. В., Румянцева О. Д. Восстановление картины распределения вектора скорости кровотока в процессе акустического томографирования // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 607–623. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Matveev O. V., Nesterova E. V., Rummyantseva O. D.* Reconstruction of the distribution pattern for the bloodstream velocity vector in the acoustic tomography procedure // *Acoustical Physics*. 2006. V. 52. N 5. P. 518–532. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 53. Буров В. А., Шмелев А. А., Румянцева О. Д. Томография пространственного распределения рассеивателя в нелинейных процессах третьего порядка // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2008. Т. 72. № 1. С. 92–99. **IF = 0.665 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Shmelev A. A., Rummyantseva O. D.* Tomography of the spatial distribution of a scatterer in third-order nonlinear processes // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2008. V. 72. N 1. P. 82–88. **IF = 0.476 (Scopus).**
- А 54. Буров В. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д., Шмелев А. А. Проблемы использования нелинейных коллинеарных процессов в акустической томографии третьего порядка // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 57–79. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Kryukov R. V., Rummyantseva O. D., Shmelev A. A.* Problems in using nonlinear collinear processes in third-order acoustical tomography // *Acoustical Physics*. 2012. V. 58. N 1. P. 48–68. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 55. Буров В. А., Шмелев А. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д. Роль нелинейных взаимодействий в акустической томографии третьего порядка // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 669–684. **IF = 1.549 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Shmelev A. A., Kryukov R. V., Rummyantseva O. D.* Role of nonlinear interactions in third-order acoustic tomography // *Acoustical Physics*. 2015. V. 61. N 6. P. 636–650. **IF = 0.856 (WoS).**
- А 56. Буров В. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д. Принципы акустической томографии третьего порядка на основе нелинейного взаимодействия кодированных волн // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2015. Т. 79. № 12. С. 1676–1681. **IF = 0.665 (РИНЦ).**
- Burov V. A., Kryukov R. V., Rummyantseva O. D.* Principles of third-order acoustic tomography based on nonlinear interaction of coded waves // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2015. V. 79. N 12. P. 1468–1472. **IF = 0.476 (Scopus).**
- А 57. Дмитриев К. В., Зотов Д. И., Румянцева О. Д. Принципы получения и обработки акустических сигналов в линейном и нелинейном томографах // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2017. Т. 81. № 8. С. 1014–1019. **IF = 0.665 (РИНЦ).**
- Dmitriev K. V., Zotov D. I., Rummyantseva O. D.* Principles of obtaining and processing of acoustic signals in linear and nonlinear tomographs // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2017. V. 81. N 8. P. 915–919. **IF = 0.476 (Scopus).**

- А 58. Котельников Е. А., Крюков Р. В., Буров В. А., Дмитриев К. В., Румянцева О. Д. Кодировка зондирующих сигналов при томографировании акустических нелинейных параметров // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2019. Т. 83. № 1. С. 76–82. **IF = 0.665 (РИНЦ)**.
- Kotelnikov E. A., Kryukov R. V., Burov V. A., Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D.* Coding of probe signals in the tomography of acoustic nonlinear parameters // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2019. V. 83. N 1. P. 64–69. **IF = 0.476 (Scopus)**.
- А 59. Буров В. А., Ким Е. Л., Румянцева О. Д. Конфигурационная классификация изображений биологических тканей и технических структур // Информационные технологии и вычислительные системы. 2004. №4. С.41–58. **IF = 0.559 (РИНЦ)**.
- А 60. Буров В. А., Ким Е. Л., Румянцева О. Д. Спектрально-морфологический анализ акустических изображений биологических тканей и композитных структур. I. Статистический подход // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 68–80. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Kim E. L., Rumyantseva O. D.* Spectral-morphological analysis of acoustical images of biological tissues and composite structures: I. Statistical approach // Acoustical Physics. 2005. V. 51. N 1. P. 52–62. **IF = 0.856 (WoS)**.
- А 61. Буров В. А., Ким Е. Л., Румянцева О. Д. Спектрально-морфологический анализ акустических изображений биологических тканей и композитных структур. II. Тестовая классификация акустомикроскопических изображений // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 3. С. 311–322. **IF = 1.549 (РИНЦ)**.
- Burov V. A., Kim E. L., Rumyantseva O. D.* Spectral-morphological analysis of acoustical images of biological tissues and composite structures: II. Test classification of acoustomicroscopic images // Acoustical Physics. 2005. V. 51. N 3. P. 255–264. **IF = 0.856 (WoS)**.

Патенты на изобретения:

- А 62. Пархоменко П. П., Каравай М. Ф., Сухов Е. Г., Фалеев Б. А., Дмитриев О. В., Дроздов С. А., Комаров О. В., Бабин Л. В., Попов А. С., Буров В. А., Раттэль М. И., Бобов К. Н., Конюшкин А. Л., Румянцева О. Д. Ультразвуковой томограф и кольцевая антенная решетка для ультразвукового томографа // Патент на изобретение RU 2145797 С1. Москва, 2000.
- А 63. Буров В. А., Шмелев А. А., Евтухов С. Н., Крюков Р. В., Зотов Д. И., Раттэль М. И., Бобов К. Н., Румянцева О. Д. Ультразвуковой томограф // Патент на изобретение RU 2526424 С2. Москва, 2014.
- А 64. Буров В. А., Шмелев А. А., Евтухов С. Н., Крюков Р. В., Зотов Д. И., Раттэль М. И., Бобов К. Н., Румянцева О. Д. Ультразвуковой томограф // Патент на изобретение RU 2530659 С2. Москва, 2014.

Статьи в трудах конференций:

- A 65. *Burov V. A., Konjushkin A. L., Rumiantseva O. D.* Multi-dimensional acoustical tomography by incomplete data // *Acoustical Imaging*. Eds. Lees S., Ferrari L. A. New York: Plenum Press, 1997. V. 23. P. 589–594.
- A 66. *Burov V. A., Kasatkina E. E., Sukhov E. G., Rumyantseva O. D.* Modeling inverse problems for statistical estimation of scatterer characteristics // *Acoustical Imaging*. Eds. Halliwell M., Wells P. N. T. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2000. V. 25. P. 71–78.
- A 67. *Burov V. A., Rumiantseva O. D.* Influence of the scattering data redundancy on uniqueness and stability in reconstruction of strong and complicated scatterers // *Acoustical Imaging*. Eds. Tortoli P., Masotti L. New York: Plenum Press, 1996. V. 22. P. 107–112.
- A 68. *Burov V. A., Morozov S. A., Rumyantseva O. D., Sukhov E. G., Vecherin S. N., Zhucovets A. Yu.* Exact solution of two-dimensional monochromatic inverse scattering problem and secondary sources space spectrum // *Acoustical Imaging*. Ed. Lee H. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2000. V. 24. P. 73–78.
- A 69. *Burov V. A., Rumiantseva O. D.* The functional-analytical methods for the scalar inverse scattering problems // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Analit. Methods for Opt. Tomography*. 1992. V. 1843. P. 194–205.
- A 70. *Буров В. А., Вечерин С. Н., Румянцева О. Д.* Влияние ширины пространственного спектра вторичных источников на единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // *Физическая и нелинейная акустика. Сборник трудов семинара научной школы проф. В. А. Красильникова*. М.: МГУ, 2002. С. 47–69.
- A 71. *Burov V. A., Konjushkin A. L., Rumyantseva O. D.* Increasing resolution capability of two-dimensional tomograph over third coordinate. Separating reconstruction of $c(\mathbf{r})$ -, $\rho(\mathbf{r})$ -, $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$ -scatterer characteristics // *Acoustical Imaging*. Eds. Halliwell M., Wells P. N. T. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2000. V. 25. P. 109–116.
- A 72. *Буров В. А., Морозов С. А., Румянцева О. Д., Сергеев С. Н.* Медицинская акустическая томография сильно неоднородных сред // *Медицинская физика. Сборник научных трудов*. Под ред. Трухина В. И., Пирогова Ю. А., Кашкарова П. К., Сысоева Н. Н. М.: физич. ф-т МГУ, 2002. 240 с. (С. 35–48).
- A 73. *Буров В. А., Зотов Д. И., Каравай М. Ф., Румянцева О. Д.* Томографическое восстановление акустических характеристик объектов в присутствии сильных и крупных неоднородностей // *Труды XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2012”)*. Секция 5 “Спектроскопия, диагностика и томография”. М.: физич. ф-т МГУ, 2012. С. 9–12.
- A 74. *Буров В. А., Зотов Д. И., Каравай М. Ф., Румянцева О. Д.* Ультразвуковой томограф для восстановления распределений скорости звука и поглощения // *Сборник материалов V Троицкой конференции “Медицинская Физика и Инновации в Медицине” (ТКМФ-5)*. г.Троицк Моск. обл.: ТРОВАНТ, 2012. Т. 1. С. 17–19.
- A 75. *Буров В. А., Зотов Д. И., Каравай М. Ф., Румянцева О. Д.* Двухшаговый метод томографической реконструкции акустически сильно неоднородных сред // *Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени*

- А. С. Попова. Выпуск 5: 5-я Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (ARMIMP-2012). М.: ООО “Информпресс-94”, 2012. С. 21–25.
- A 76. Буров В. А., Зотов Д. И., Румянцева О. Д. Оценка геометро-фазовых поправок для преобразователей кольцевой антенны // Труды XV Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2016”). Секция 5 “Спектроскопия и томография”. 2016. С. 34–37.
- A 77. Зотов Д. И., Румянцева О. Д., Шуруп А. С. Томографическое восстановление скорости звука, плотности среды и поглощения // Труды XVI Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (“Волны-2017”). Секция “Спектроскопия, диагностика и томография”. 2017. С. 52–55.
- A 78. Зотов Д. И., Румянцева О. Д., Шуруп А. С. Разделение составляющих акустического рассеивателя в полихроматическом режиме томографирования // Труды XVI Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2018”). Секция “Спектроскопия и томография”. 2018. С. 37–40.
- A 79. Zotov D. I., Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D. Ultrasonic tomograph for reconstruction of spatial distributions of sound speed and absorption coefficient (ASA Meeting abstract) // Journal of the Acoustical Society of America. 2020. V. 148. № 4. P. 2485–2485.
- A 80. Зотов Д. И., Румянцева О. Д., Аль-Сархани К. Б. Коррекция измеряемых данных при неидеальных положениях излучателей и приемников // Труды XXXII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления: физика и применение” (“Волны-2021”). Секция “Акустика неоднородных сред”. 2021. С. 53–56.
- A 81. Burov V. A., Morozov S. A., Rumiantseva O. D. Reconstruction of inner field by Marchenko–Newton–Rose method and solution of multi-dimensional inverse scattering problem // Acoustical Imaging. Ed. Lee H. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2000. V. 24. P. 101–106.
- A 82. Burov V. A., Rumiantseva O. D. Exact inverse scattering solution in multi-dimensions (perspectives of using in acoustical imaging) // Acoustical Imaging. Ed. J. Jones. Plenum Press: New York, 1995. V. 21. P. 101–111.
- A 83. Burov V. A., Rumiantseva O. D. The solution stability and restrictions on the space scatterer spectrum in the two-dimensional monochromatic inverse scattering problem // Ill-Posed Problems in Natural Sciences. Utrecht, Moscow: VSP / TVP, 1992. P. 463–471.
- A 84. Bogatyrev A. V., Burov V. A., Morozov S. A., Rumyantseva O. D., Sukhov E. G. Numerical realization of algorithm for exact solution of two-dimensional monochromatic inverse problem of acoustical scattering // Acoustical Imaging. Eds. Halliwell M., Wells P. N. T. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2000. V. 25. P. 65–70.
- A 85. Burov V. A., Morozov S. A., Rumyantseva O. D. Reconstruction of fine-scale structure of acoustical scatterer on large-scale contrast background // Acoustical Imaging. Ed. Maev R. G. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2002. V. 26. P. 231–238.
- A 86. Burov V. A., Shurup A. S., Zotov D. I., Rumyantseva O. D. Possibility for application of functional methods in acoustic tomography problems // Acoustical Imaging. Ed. Gan Woon Siong. Singapore: Research Publishing Services, 2015. V. 32. P. 25–30.

- А 87. *Дмитриев К. В., Фадеев Е. В., Румянцева О. Д.* Восстановление точечных акустических неоднородностей и анализ рассеяния на них запаздывающих волновых полей // Труды XVII Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (“Волны-2019”). Секция “Спектроскопия, диагностика и томография”. 2019. С. 15–18.
- А 88. *Буров В. А., Шуруп А. С., Зотов Д. И., Румянцева О. Д.* Строгое решение двумерной задачи акустической томографии на основе функционально-аналитического алгоритма Новикова // Труды XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2012”). Секция 5 “Спектроскопия, диагностика и томография”. М.: физич. ф-т МГУ, 2012. С. 17–20.
- А 89. *Burov V. A., Sergeev S. N., Shurup A. S., Rummyantseva O. D.* Application of functional-analytical Novikov algorithm for the purposes of ocean tomography // Proceedings of the 11th European Conference on Underwater Acoustics. Edinburgh: Digital Print Media, 2012. V. 2. P. 713–718.
- А 90. *Буров В. А., Сергеев С. Н., Шуруп А. С., Румянцева О. Д.* Численная модель акустической томографии на основе функционально-аналитического алгоритма Новикова, использующего данные от точечных преобразователей // Сборник трудов XXV сессии Российского Акустического Общества. Т.2. М.: ГЕОС, 2012. С. 229–232.
- А 91. *Буров В. А., Шуруп А. С., Зотов Д. И., Румянцева О. Д.* Возможности функционального подхода при обработке томографических данных рассеяния // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А. С. Попова. Выпуск 6: 6-я Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (ARMIMP-2013). Суздаль: Российское НТОРЭС им. А. С. Попова, 2013. С. 84–88.
- А 92. *Алексеевко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д.* Моделирование решения трехмерной обратной задачи рассеяния по алгоритму Новикова-Хенкина // Сборник трудов XV сессии Российского Акустического Общества. Т.1. М: ГЕОС, 2004. С. 192–195.
- А 93. *Алексеевко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д.* Решение трехмерной обратной задачи рассеяния по модифицированному алгоритму Новикова // Сборник трудов XIX сессии Российского Акустического Общества. Т.1. М: ГЕОС, 2007. С. 211–215.
- А 94. *Шуруп А. С., Румянцева О. Д.* Численное моделирование функционального подхода для восстановления векторных полей в акустической томографии // Труды 57-й научной конференции МФТИ с международным участием. Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики. Управление и прикладная математика. Т. 1. Москва-Долгопрудный-Жуковский: МФТИ, 2014. С. 36–38.
- А 95. *Зотов Д. И., Румянцева О. Д., Шуруп А. С.* Восстановление векторных акустических неоднородностей при численном моделировании и экспериментальной реализации // Труды XV Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2016”). Секция 8 “Акустика неоднородных сред”. 2016. С. 67–70.
- А 96. *Дмитриев К. В., Зотов Д. И., Румянцева О. Д., Сергеев С. Н., Шуруп А. С.* Развитие методов и алгоритмов решения обратных акустических задач рассеяния // Труды II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества. Секция “Геоакустика”. 2017. С. 141–147.

- A 97. *Burov V. A., Kasatkina E. E., Rumyantseva O. D., Filimonov S. A.* The modeling of correlation-tomography reconstruction of thermoacoustical radiation sources // *Acoustical Imaging*. Ed. Maev R. G. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2002. V. 26. P. 265–272.
- A 98. *Burov V. A., Darialashvili P. I., Evtukhov S. N., Rumyantseva O. D.* New informative possibilities of active-passive thermoacoustic tomography // *Acoustical Imaging*. Eds. Arnold W., Hirsekorn S. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. V. 27. P. 305–313.
- A 99. *Burov V. A., Dmitriev K. V., Evtukhov S. N., Rumyantseva O. D.* Thermoacoustical tomography with arrays focusing by reflection // *Acoustical Imaging*. Eds. Nowicki A, Litniewski J., Kujawska T. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B.V., 2012. V. 31. P. 231–242.
- A 100. *Буров В. А., Касаткина Е. Е., Румянцева О. Д., Филимонов С. А.* Методы повышения разрешающей способности акустических корреляционных термотомографов // *Сборник трудов XI сессии Российского Акустического Общества*. Т. 2. М.: ГЕОС, 2001. С. 30–34.
- A 101. *Буров В. А., Дариалашвили П. И., Евтухов С. Н., Румянцева О. Д.* Активно-пассивная термоакустическая томография: результаты модельных экспериментов // *Сборник трудов XV сессии Российского Акустического Общества*. Т. 1. М.: ГЕОС, 2004. С. 9–12.
- A 102. *Буров В. А., Евтухов С. Н., Марьин А. О., Румянцева О. Д.* Информативные возможности активно-пассивной термоакустической томографии // *Сборник трудов XVI сессии Российского Акустического Общества*. Т.3. М.: ГЕОС, 2005. С. 110–114.
- A 103. *Буров В. А., Дмитриев К. В., Евтухов С. Н., Румянцева О. Д.* Активно-пассивные термотомографические системы с фокусировкой акустических полей // *Труды XI Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2008”)*. Секция 5 “Спектроскопия. Томография. Передача и прием информации”. М.: физич. ф-т МГУ, 2008. С. 20–22.
- A 104. *Буров В. А., Дмитриев К. В., Логинов С. В., Румянцева О. Д.* Перспективы акустической термотомографии // *Труды 54-й научной конференции МФТИ. Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика*. Т. 1. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2011. С. 17–19.
- A 105. *Буров В. А., Дмитриев К. В., Румянцева О. Д.* Регулируемая анизотропная подсветка в корреляционных томографических системах // *Труды XV Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2016”)*. Секция 5 “Спектроскопия и томография”. 2016. С. 23–26.
- A 106. *Буров В. А., Дмитриев К. В., Румянцева О. Д., Юрченко С. А.* Регистрация и корреляционная обработка ультразвуковых термоакустических сигналов // *Труды XVI Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2018”)*. Секция “Спектроскопия и томография”. 2018. С. 17–20.
- A 107. *Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D., Yurchenko S. A.* Correlation signal processing for determination of the spatial distributions of temperature and acoustic characteristics of the

- medium (ASA Meeting abstract) // Journal of the Acoustical Society of America. 2021. V. 149. N 4. P. A56.
- A 108. *Burov V. A., Shmelev A. A., Rumyantseva O. D.* Numerical and physical modeling of tomography process based on third-order nonlinear acoustical effects // Acoustical Imaging. Eds. André M. P., Jones J. P., Lee H. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B. V., 2011. V. 30. P. 379–388.
- A 109. *Burov V. A., Evtukhov S. N., Shmelev A. A., Rumyantseva O. D.* Tomography of spatial distribution of scatterer in nonlinear processes of the second and third orders // Nonlinear Acoustics — Fundamentals and Applications (Proceedings of 18th International Symposium on Nonlinear Acoustics). Eds. Enflo B. O., Hedberg C. M., Kari L. Melville, New York: American Institute of Physics, 2008. P. 440–443.
- A 110. *Burov V. A., Matveev O. V., Evtukhov S. N., Rumyantseva O. D.* Reconstruction of blood velocity vector in nonlinear acoustical tomography // Acoustical Imaging. Eds. Nowicki A., Litniewski J., Kujawska T. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B.V., 2012. V. 31. P. 211–221.
- A 111. *Burov V. A., Matveev O. V., Evtukhov S. N., Rumyantseva O. D.* Reconstruction of spatial distribution of bloodstream vector in ultrasound linear and nonlinear tomographs // PSFVIP-8: The 8th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing. Ed. Znamenskaya I. A. Moscow: Moscow State University, 2011. PSFVIP8-006, 6 p.
- A 112. *Буров В. А., Шмелев А. А., Румянцева О. Д.* Томография распределения нелинейного параметра третьего порядка // Труды XI Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (“Волны-2007”). Секция 6 “Спектроскопия, диагностика и томография. Передача и обработка информации”. М.: физич. ф-т МГУ, 2007. С. 25–27.
- A 113. *Буров В. А., Евтухов С. Н., Шмелёв А. А., Румянцева О. Д.* Модельные эксперименты по томографии распределения нелинейных параметров второго и третьего порядков // Сборник трудов XX сессии Российского Акустического Общества. Т. 1. М: ГЕОС, 2008. С. 142–145.
- A 114. *Буров В. А., Шмелев А. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д.* Возможность томографии на основе нелинейных акустических эффектов третьего порядка // Сборник трудов XXII сессии Российского Акустического Общества. Т. 1. М.: ГЕОС, 2010. С. 183–187.
- A 115. *Буров В. А., Шмелев А. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д.* Акустическая томография с использованием нелинейных эффектов рассеяния второго и третьего порядков // Сборник материалов III Евразийского конгресса по медицинской физике и инженерии “Медицинская Физика – 2010”. М.: Изд-во МГУ, 2010. Т. 1. С. 131–134.
- A 116. *Буров В. А., Шмелев А. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д.* Томография на основе нелинейных акустических эффектов третьего порядка // Труды 54-й научной конференции МФТИ. Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика. Т. 1. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2011. С. 23–25.
- A 117. *Буров В. А., Крюков Р. В., Румянцева О. Д., Шмелев А. А.* Томография распределения нелинейного акустического параметра третьего порядка // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени

- А. С. Попова. Выпуск 5: 5-я Международная конференция “Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации” (ARMIMP-2012). М.: ООО “Информпресс-94”. 2012. С. 16–21.
- А 118. *Крюков Р. В., Румянцева О. Д., Иванова П. А.* Проблемы нелинейной акустической томографии третьего порядка на основе кодированных волн // Труды XV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (“Волны-2015”). Секция 8 “Спектроскопия, диагностика и томография”. 2015. С. 51–54.
- А 119. *Дмитриев К. В., Котельников Е. А., Зотов Д. И., Румянцева О. Д.* Установка для томографирования акустических нелинейных параметров с использованием кодированных сигналов // Труды II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества. Секция “Биомедицинские приложения акустических методов”. 2017. С. 1503–1509.
- А 120. *Котельников Е. А., Крюков Р. В., Буров В. А., Дмитриев К. В., Румянцева О. Д.* Кодирование сигналов в акустической томографии нелинейного параметра // Труды XVI Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах” (“Волны-2018”). Секция “Акустика неоднородных сред”. 2018. С. 26–29.
- А 121. *Kotelnikov E. A., Dmitriev K. V., Rumyantseva O. D.* Experimental results of tomographing the third-order acoustic nonlinear parameter (ASA Meeting abstract) // Journal of the Acoustical Society of America. 2020. V. 148. № 4. P. 2484–2484.
- А 122. *Буров В. А., Ким Е. Л., Румянцева О. Д.* Классификация акустических изображений спектрально-морфологическими методами // Сборник трудов XV сессии Российского Акустического Общества. Т. 3. М: ГЕОС, 2004. С. 88–91.

Список литературы

(нумерация цитируемой литературы продолжает предшествующий список авторских публикаций)

123. *Фаддеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. № 4 (88). С. 57–119.
124. *Фаддеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния II // Сб.: Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 3. С. 93–180.
125. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 408 с.
126. *Намтпер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 288 с.
127. *Newton R. G.* Inverse Schrödinger scattering in three dimensions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989. 170 p.
128. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. (Applied Mathematical Sciences, V. 93) Second edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1998. 334 p.
129. Scattering. Scattering and inverse scattering in pure and applied science. Eds. Pike R., Sabatier P. C. San Diego, San Francisco, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo: Academic Press, 2002. 1831 p.
130. *Devaney A. J.* Mathematical foundations of imaging, tomography and wavefield inversion. Cambridge, New York et al: Cambridge University Press, 2012. 518 p.
- А 131. *Буров В. А., Румянцева О. Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. IV: Функционально-аналитические методы решения многомерной акустической обратной задачи рассеяния. Готовится к изданию.
- А 132. *Буров В. А., Румянцева О. Д.* Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. III: Томография пространственного распределения акустических нелинейных параметров второго и третьего порядков. Готовится к изданию.
133. *Евтухов С. Н.* Томография термоакустических свойств среды и акустического нелинейного параметра: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2007. 200 с.
134. *Крюков Р. В.* Томографическое восстановление акустических нелинейных параметров с помощью трех зондирующих волн: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2020. 183 с.
135. *Ким Е. Л.* Спектральный и морфологический анализ акустических изображений биологических тканей и композитных структур: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2006. 164 с.
136. *Новиков Р. Г., Хенкин Г. М.* $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // Успехи математических наук. 1987. Т. 42. № 3 (255). С. 93–152.
137. *Новиков Р. Г.* Восстановление двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 3. С. 90–91.
138. *Manakov S. V.* The inverse scattering transform for the time dependent Schrödinger equation and Kadomtsev–Petviashvili equation // Physica D. 1981. V. 3 (1, 2). P. 420–427.

139. *Devaney A. J.* Inverse source and scattering problems in ultrasonics // IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics. 1983. V. SU-30. N 6. P. 355–363.
140. *Байков С. В., Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Расширение области сходимости итерационного алгоритма решения обратной задачи рефракции // Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия. 1982. Т. 23. № 6. С. 22–26.
141. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А.* Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор) // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
142. *Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
143. *Johnson S. A., Zhou Y., Tracy M. L., Berggren M. J., Stenger F.* Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method – Part III: Fast algorithms // Ultrasonic Imaging. 1984. V. 6. N 1. P. 103–116.
144. *Скучик Е.* Основы акустики. Под ред. Лямшева Л. М. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. Т. 1. 520 с.; Т. 2. 542 с.
145. *Bergmann P. G.* The wave equation in a medium with a variable index of refraction // J. Acoust. Soc. Amer. 1946. V. 17. N 4. P. 329–333.
146. *Johnson S. A., Tracy M. L.* Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method – Part I: Theory // Ultrasonic Imaging. 1983. V. 5. N 4. P. 361–375.
147. *Lippmann B. A., Schwinger J.* Variational principles for scattering processes. I // Physical Review. 1950. V. 79. N 3. P. 469–480.
148. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. Под ред. Бирмана М. Ш. Пер. с англ. Никольского Н. К. и Павлова Б. С. М.: Мир, 1971. 312 с.
149. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* // Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции (С дополнением Аграновича М. С. “Спектральные свойства задач дифракции”). М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. 416 с.
150. *Березанский Ю. М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Труды Моск. матем. общества. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. Т. 7. С. 3–62.
151. *Kaveh M., Soumekh M., Mueller R. K.* A comparison of Born and Rytov approximations in acoustic tomography // Acoustical Imaging. Ed. Powers J. P. New York, London: Plenum Press, 1982. V. 11. P. 325–335.
152. *Kaveh M., Soumekh M., Lu Z. Q., Mueller R. K., Greenleaf J. F.* Further results on diffraction tomography using Rytov’s approximation // Acoustical Imaging. Eds. Ash E., Hill K. New York, London: Plenum Press, 1982. V. 12. P. 273–280.
153. *Keys R. G., Weglein A. B.* Generalized linear inversion and the first Born theory for acoustic media // J. Math. Phys. 1983. V. 24. N 6. P. 1444–1449.
154. *Kaveh M., Soumekh M., Greenleaf J. F.* Signal processing for diffraction tomography // IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics. 1984. V. SU 31. N 4. P. 230–239.
155. *Rose H.* Exterior reconstruction of a three dimensional scatterer // Wave Motion. 1984. V. 6. N 2. P. 149–154.
156. *Beylkin G.* Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform // J. Math. Phys. 1985. V. 26. N 1. P. 99–108.

157. *Devaney A. J.* A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography // *Ultrasonic Imaging*. 1982. V. 4. N 4. P. 336–350.
158. *Devaney A. J.* A computer simulation of diffraction tomography // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1983. V. BME-30. P. 337–386.
159. *Devaney A. J., Oristaglio M. L.* Inversion procedure for inverse scattering with the distorted-wave Born approximation // *Physical Review Letters*. 1983. V. 51. N 1. P. 237–240.
160. *Slaney M., Kak A. C.* Diffraction tomography // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. Inverse Optics I. Ed. Devaney A. J. 1983. V. 413. P. 2–19.
161. *Kak A. C., Slaney M., Larsen L. E.* Limitations of imaging with first-order diffraction tomography // *IEEE Trans. Microwave and Tech.* 1984. V. 32. N 8. P. 860–874.
162. *Slaney M., Kak A. C.* Imaging with higher-order diffraction tomography // *IEEE Ultrasonic Symposium Proc.* 1985. V. 2. P. 808–813.
163. *Devaney A. J.* Acoustic tomography // *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*. Proceedings in Applied Mathematic Series. Eds. Santosa F., Pap Y.-H., Symes W. W., Holland C. Philadelphia: SIAM, 1984. P. 250–273.
164. *Devaney A. J.* Variable density acoustic tomography // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1985. V. 78. N 1. P. 120–130.
165. *Devaney A. J.* Reconstructive tomography with diffracting wavefields // *Inverse Problems*. 1986. V. 2. N 2. P. 161–183.
166. *Kak A. C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988. 329 p.
167. *Буров В. А., Рычагов М. Н.* Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Линеаризованный вариант // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 4. С. 631–643.
168. *Gelius L.-J., Johansen I., Sponheim N., Stamnes J. J.* A generalized diffraction tomography algorithm // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1991. V. 89. N 2. P. 523–528.
169. *Sponheim N., Gelius L.-J., Johansen I., Stamnes J. J.* Quantitative results in ultrasonic tomography of large objects using line sources and curved detector arrays // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 1991. V. 38. N 4. P. 370–379.
170. *Johansen I., Gelius L.-J., Spjelkavik B., Sponheim N., Stamnes J. J.* Exact and approximate scattering data for testing the filtered backpropagation (FBP) and a hybrid FBP reconstruction algorithm // *Acoustical Imaging*. Eds. Ermert H., Harjes H.-P. New York: Plenum Press, 1992. V. 19. P.17–22.
171. *André M. P., Janée H. S., Martin P. J., Otto G. P., Spivey B. A., Palmer D. A.* High-speed data acquisition in a diffraction tomography system employing large-scale toroidal arrays // *Intl. J. Imaging Systems Technol.* 1997. V. 8. N 1. P. 137–147.
172. *Janée H. S., André M. P., Ysrael M. Z., Martin P. J.* Diffraction tomography breast imaging system: patient image reconstruction and analysis // *Acoustical Imaging*. Ed. Lee H. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2000. V. 24. P. 325–333.
173. *Lin F., Nachman A. I., Waag R. C.* Quantitative imaging using a time-domain eigenfunction method // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2000. V. 108. N 3. Pt. 1. P. 899–912.
174. *Norton S. J.* The three-dimensional inverse-scattering and inverse-source problems with a planar aperture // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2015. V. 137. N 6. P. EL443–EL448.
<http://dx.doi.org/10.1121/1.4921672>

175. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 304 с.
176. *Devaney A. J.* A fast filtered backpropagation algorithm for ultrasound tomography // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 1987. V. 34. N 3. P. 330–340.
- А 177. *Румянцева О. Д.* Решение акустической обратной задачи рассеяния методами функционального анализа: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1992. 179 с.
178. *Beylkin G.* The fundamental identity for iterated spherical means and the inversion formula for diffraction tomography and inverse scattering // J. Math. Phys. 1983. V. 24. N 6. P. 1399–1400.
179. *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989. 351 с.
180. *Конюшкин А. Л.* Трехмерная акустическая томография при неполных данных: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2000. 182 с.
181. *Anderson F.* Active imaging Green's function // Acoustical Imaging. Eds. Ermert H., Harjes H.-P. New York: Plenum Press, 1992. V. 19. P. 53–57.
182. *Roy O., Li C., Duric N.* Travel time denoising in ultrasound tomography // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2012. V. 8320. P. 832006-1 – 832006-9.
183. *Li C., Duric N., Rama O., Burger A., Polin L., Nechiporchik N.* Double difference tomography for breast ultrasound sound speed imaging // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2011: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. D'hooge J., Doyley M. M. 2011. V. 7968. P. 796802-1 – 796802-7.
184. *André M. P., Janée H. S., Otto G. P., Martin P. J., Jones J. P.* Reduction of phase aberration in a diffraction tomography system for breast imaging // Acoustical Imaging. Eds. Tortoli P., Masotti L. New York: Plenum Press, 1996. V. 22. P. 151–157.
185. *Буров В. А., Рычагов М. Н.* Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Учет многократных рассеяний // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 844–854.
186. *Novotný T., Matsumoto E., Shibata T.* Inversion scattering in finite space domain // J. Acoust. Soc. Amer. 1996. V. 100. N 6. P. 3600–3606.
187. *Шарфарец Б. П.* К вопросу о вычислении амплитуды рассеяния объемных и поверхностных рассеивателей // Научное приборостроение. 2007. Т. 17. № 1. С. 62–72.
188. *Бабич В. М., Каплевич М. Б., Михлин С. Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. Справочная математическая библиотека. Под ред. Михлина С. Г. М.: Наука, 1964. 368 с.
189. *Морс Ф. М., Феибах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд. иностранной литературы. Т. I: 1958. 930 с.; Т. II: 1960. 886 с.
190. *Головина С. Г., Никитина Е. В.* Численный анализ методов определения спектральной амплитуды акустического поля // Вестник Московского Университета. Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика. 1997. № 3. С. 20–23.

191. Progress in Electromagnetics Research 2: Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering. Ed. Morgan M.A. New York: Elsevier, 1990.
192. Schmidt F., Friese T., Yevick D. Transparent boundary conditions for split-step Padé approximations of the one-way Helmholtz equation // Journal of Computational Physics. 2001. V. 170. P. 696–719.
193. Canino L. F., Ottusch J. J., Stalzer M. A., Visher J. L., Wandzura S. M. Numerical solution of the Helmholtz equation in 2D and 3D using a high-order Nyström discretization // Journal of Computational Physics. 1998. V. 146. N 2. P. 627–663.
194. Zhang Z., Vlahopoulos N., Raveendra S. T., Allen T., Zhang K. Y. A computational acoustic field reconstruction process based on an indirect boundary element formulation // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 108. N 5. Pt. 1. P. 2167–2178.
195. Авдеев И. С. Применение метода граничных элементов в решении задач о рассеянии звука упругим некруговым цилиндром // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 435–440.
196. Кюркчан А. Г., Скородумова Е. А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 5–14.
197. Румелиотис Дж. А., Котсис А. Д. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 38–49.
198. Шарфарец Б. П. Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 672–681.
199. Prabavathi C., Vendhan C. P. Determination of far-field pattern of rigid scatterers using independent finite element method and eigenfunction expansion. Part 2. Nonaxisymmetric Scattering // J. of Vibration and Acoustics. 1996. V. 118. N 4. P. 583–590.
200. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И. О решении задач дифракции методом нулевого поля // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 691–697.
201. Jost R., Kohn W. Construction of a potential from a phase shift // Physical Review. 1952. V. 87. N 6. P. 977–994.
202. Moses H. E. Calculation of the scattering potential from reflection coefficients // Physical Review. 1956. V. 102. N 2. P. 559–567.
203. Prosser R. T. Formal solutions of inverse scattering problems // J. Math. Phys. 1969. V. 10. N 10. P. 1819–1822.
204. Prosser R. T. Formal solutions of inverse scattering problems. II // J. Math. Phys. 1976. V. 17. N 10. P. 1775–1779.
205. Prosser R. T. Formal solutions of inverse scattering problems. III // J. Math. Phys. 1980. V. 21. N 11. P. 2648–2653.
206. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. Изд. 2-е, переработ. Под ред. Рытова С. М. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
207. Schmidt S., Roy O., Li C., Duric N., Huang Z.-F. Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for tomographic imaging of the breast // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2011: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. D'hooge J., Doyley M. M. 2011. V. 7968. P. 796804-1 – 796804-11.

208. Schmidt S., Duric N., Li C., Roy O., Huang Z.-F. Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for acoustic imaging of media and application to tomographic imaging of the breast // *Medical Physics*. 2011. V. 38. N 2. P. 998–1007.
209. Huthwaite P., Simonetti F. High-resolution imaging without iteration: A fast and robust method for breast ultrasound tomography // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2011. V. 130. N 3. P. 1721–1734.
210. Huthwaite P., Simonetti F., Duric N. Combining time of flight and diffraction tomography for high resolution breast imaging: Initial *in vivo* results (L) // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2012. V. 132. N 3. P. 1249–1252.
211. Dapp R., Gemmeke H., Ruiter N. 3D refraction-corrected transmission reconstruction for 3D ultrasonic computer tomography // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2012. V. 8320. P. 832014-1 – 832014-7.
212. Simonetti F., Huang L., Duric N., Rama O. Imaging beyond the Born approximation: An experimental investigation with an ultrasonic ring array // *Physical Review E*. 2007. V. 76. N 3 (Pt 2). P. 036601-1 – 036601-10.
213. Marmarelis V. Z., Jeong J., Shin D. C., Do S. High-resolution 3-D imaging and tissue differentiation with transmission tomography // *Acoustical Imaging*. Ed. André M. P. Dordrecht: Springer, 2007. V. 28. P. 195–206.
214. Li C., Huang L., Duric N., Zhang H., Rowe C. An improved automatic time-of-flight picker for medical ultrasound tomography // *Ultrasonics*. 2009. V. 49. N 1. P. 61–72.
215. Hopp T., Duric N., Ruiter N. V. Automatic multimodal 2D/3D image fusion of Ultrasound Computer Tomography and X-ray mammography for breast cancer diagnosis // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2012. V. 8320. P. 83200P-1 – 83200P-8.
216. Зотов Д. И. Принципы получения и обработки акустических сигналов в линейном и нелинейном томографах с нерегулярной структурой антенных систем: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2013. 162 с.
217. Хорн Б. К. П. Восстановление внутренней структуры объектов с помощью различных схем многолучевого просвечивания // *ТИИЭР*. 1978. Т. 66. № 5. С. 27–40.
218. Хорн Б. К. П. Методы восстановления внутренней структуры объектов при просвечивании расходящимся пучком // *ТИИЭР*. 1979. Т. 67. № 12. С. 40–48.
219. Goss S. A., Johnston R. L., Dunn F. Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978. V. 64. N 2. P. 423–457.
220. Goss S. A., Johnston R. L., Dunn F. Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. II // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68. N 1. P. 93–108.
221. Зотов Д. И. Принципы функционирования линейного акустического томографа // *Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая*. 2018. Т. 82. № 1. С. 36–40.
222. Roy O., Jovanovic I., Duric N., Poulo N., Vetterli M. Robust array calibration using time delay with application to ultrasound tomography // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2011: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*. Eds. D'hooge J., Doyley M. M. 2011. V. 7968. P. 796806-1 – 796806-11.

223. *Munk W., Worcester P., Wunsch C.* Ocean acoustic tomography, New York: Cambridge University Press, 1995. 433 p.
224. *Кирьянов Д. В., Кирьянова Е. Н.* Вычислительная физика. М.: Полибук Мультимедиа, 2006. 352 с.
225. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 430 с.
226. *Jones J. P., Leeman S., Nolan E., Lee D.* Reflection and scattering of acoustical waves from a discontinuity in absorption // *Acoustical Imaging*. Eds. André M. P., Jones J. P., Lee H. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B. V., 2011. V. 30. P. 279–283.
227. *Burov V. A., Saskovets A. V.* Scalar inverse scattering problems (iterative methods of solution). // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. Analyt. Methods for Opt. Tomography. 1992. V. 1843. P. 206–217.
228. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В.* Итерационный алгоритм решения обратной задачи рассеяния // *Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия*. 1982. Т. 23. № 6. С. 87–89.
229. *Сасковец А. В.* Влияние избыточности данных на сходимость итерационного алгоритма решения обратных задач рассеяния // *Акуст. журн.* 1987. Т. 33. № 4. С. 740–742.
230. *Burov V. A., Rychagov M. N., Saskovets A. V.* Iterative methods for the reconstruction of characteristics of strong inhomogeneities by the data of acoustic scattering // *Ultrasonic International 91 Conference Proceedings*. Oxford, UK: Butterworth Heinemann Publ., 1992. P. 201–206.
231. *Burov V. A., Rychagov M. N., Saskovets A. V.* Account of multiple scattering in acoustical inverse problems of tomographic type // *Acoustical Imaging*. Eds. Ermert H., Harjes H.-P. 1992. V. 19. P. 35–39.
232. *Tracy M. L., Johnson S. A.* Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method – Part II: Numerical evaluations // *Ultrasonic Imaging*. 1983. V. 5. N 4. P. 376–392.
233. *Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А.* Обратная задача рассеяния в ультразвуковой технике и медицине // *Вопросы судостроения. Сер. Акуст.* 1985. Вып. 20. N 1. С. 32–46.
234. *Буров В. А., Сасковец А. В.* Поэтапный учет перерассеяния при решении обратных задач для сильных неоднородностей // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. № 3. С. 529–531.
235. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 199 с.
236. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 448 с.
237. *Буров В. А., Сасковец А. В., Фаткуллина И. О.* Локальная сходимость итерационных решений обратных задач рассеяния при постепенном учете перерассеяния // *Акуст. журн.* 1991. Т. 37. № 1. С. 30–34.
238. *Norton S. J.* Iterative inverse scattering algorithms: Methods of computing Fréchet derivatives // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1999. V. 106. N 5. P. 2653–2660.
239. *Pratt R. G., Huang L., Duric N., Littrup P.* Sound-speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data // *Proceedings of SPIE*

- (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2007: Physics of Medical Imaging. Eds. Hsieh J., Flynn M. 2007. V. 6510. P. 65104S-1 – 65104S-12.
240. Duric N., Littrup P., Rama O., Holsapple E. Computerized ultrasound risk evaluation (CURE): first clinical results // Acoustical imaging. Ed. André M. P. Dordrecht: Springer, 2007. V. 28. P. 173–181.
 241. Duric N., Littrup P., Chandiwala-Mody P., Li C., Schmidt S., Myc L., Rama O., Bey-Knight L., Lupinacci J., Ranger B., Szczepanski A., West E. In-vivo imaging results with ultrasound tomography: Report on an ongoing study at the Karmanos Cancer Institute // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2010: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. D'hooge J., McAleavey S. A. 2010. V. 7629. P. 76290M-1 – 76290M-9.
 242. Boyd N. F., Martin L. J., Bronskill M., Yaffe M. J., Duric N., Minkin S. Breast tissue composition and susceptibility to breast cancer // Journal of the National Cancer Institute. 2010. V. 102. N 16. P. 1224–1237.
 243. Wiskin J., Borup D. T., Johnson S. A., Berggren M., Abbott T., Hanover R. Full-wave, non-linear, inverse scattering // Acoustical Imaging. Ed. André M. P. Dordrecht: Springer, 2007. V. 28. P. 183–193.
 244. Johnson S. A., Borup D. T., Wiskin J., Berggren M. J. Apparatus and method for imaging objects with wavefields // Patent No: US 7,570,742 B2. Aug. 4, 2009.
 245. Johnson S. A., Borup D. T., Wiskin J., Berggren M. J. Apparatus and method for imaging objects with wavefields // Patent No: US 7,684,846 B2. Mar. 23, 2010.
 246. Wiskin J., Borup D. T., Johnson S. A., Berggren M. Non-linear inverse scattering: High resolution quantitative breast tissue tomography // J. Acoust. Soc. Amer. 2012. V. 131. N 5. P. 3802–3813.
 247. Wiskin J., Borup D., Johnson S., Berggren M., Robinson D., Smith J., Chen J., Parisky Y., Klock J. Inverse scattering and refraction corrected reflection for breast cancer imaging // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2010: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. D'hooge J., McAleavey S. A. 2010. V. 7629. P. 76290K-1 – 76290K-11.
 248. Wiskin J., Borup D., Johnson S. Inverse scattering theory // Acoustical Imaging. Eds. André M. P., Jones J. P., Lee H. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B. V., 2011. V. 30. P. 53–59.
 249. Wiskin J., Borup D., Callahan K., Parisky Y., Smith J., André M. P., Johnson S. Inverse scattering results // Acoustical Imaging. Eds. André M. P., Jones J. P., Lee H. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B. V., 2011. V. 30. P. 61–68.
 250. André M., Wiskin J., Borup D., Johnson S., Ojeda-Fournier H., Olson L. Quantitative volumetric breast imaging with 3D inverse scatter computed tomography // Proceedings of Annual International Conference of the IEEE. Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). 2012. P. 1110–1113. PMID: 23366090.
 251. Wiskin J., Borup D., Johnson S., André M., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J. Three-dimensional nonlinear inverse scattering: Quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design and clinical results // Proceedings of Meetings on Acoustics. 2013. V. 19. P. 075001-1 – 075001-9.

252. *Lenox M. W., Wisikin J., Lewis M. A., Darrouzet S., Borup D., Hsieh S.* Imaging performance of quantitative transmission ultrasound // *International Journal of Biomedical Imaging*. 2015. V. 2015. P. 454028-1 – 454028-8.
253. *Wisikin J. W., Borup D. T., Iuanow E, Klock J., Lenox M. W.* 3-D nonlinear acoustic inverse scattering: Algorithm and quantitative results // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2017. V. 64. N 8. P. 1161–1174.
254. *Malik B., Terry R., Wisikin J., Lenox M.* Quantitative transmission ultrasound tomography: Imaging and performance characteristics // *Medical Physics*. 2018. V. 45. N 7. P. 3063–3075.
255. *Гончарский А. В., Романов С. Ю.* Суперкомпьютерные технологии в разработке методов решения обратных задач УЗИ-томографии // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. Т. 13. № 1. С. 235–238.
256. *Natterer F.* Image reconstruction in transmission ultrasound tomography // *Acoustical Imaging*. Eds. Arnold W., Hirsekorn S. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. V. 27. P. 245–253.
257. *Сасковец А. В.* Об ускорении счета при решении обратных задач рассеяния итерационными методами // *Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия*. 1987. Т. 28. № 2. С. 87–90.
258. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
259. *Федотов А. М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. 280 с.
260. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
261. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995. 312 с.
262. *Буров В. А., Горюнов А. А.* Статистические оценки в обратной задаче рассеяния скалярных волн // *Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия*. 1977. Т. 18. № 6. С. 95–99.
263. *Касаткина Е. Е.* Статистические оценки в акустических обратных задачах излучения и рассеяния: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2000. 212 с.
264. *Longji Tang.* Iterative method for acoustical wave inversion with sparse data // *Acoustical Imaging*. Eds. Y. Wei, B. Gu. 1993. V. 20. P. 141–144.
265. *Kim W. W., Borup D. T., Johnson S. A., Berggren M. J., Zhou Y.* Accelerated inverse scattering algorithms for higher contrast objects // *Proc. 1987 IEEE Ultrasonics Symposium*. 1987. P. 903–906.
266. *Novikov R. G., Santacesaria M.* Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems // *International Mathematics Research Notices*. 2013. V. 2013. N 6. P. 1205–1229.
<http://imrn.oxfordjournals.org/content/2013/6/1205.abstract>
267. *Novikov R. G.* The inverse scattering problem at fixed energy for the three-dimensional Schrödinger equation with an exponentially decreasing potential // *Commun. Math. Phys*. 1994. V. 161. N 3. P. 569–595.

268. *Grinevich P. G., Novikov R. G.* Transparent potentials at fixed energy in dimension two. Fixed-energy dispersion relations for the fast decaying potentials // (Preprint Université de Nantes 1994.) Commun. Math. Phys. 1995. V. 174. N 2. P. 409–446.
269. *Bukhgeim A. L.* Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. V. 16. N 1. P. 19–33.
270. *Novikov R. G., Santacesaria M.* Global uniqueness and reconstruction for the multi-channel Gel'fand–Calderón inverse problem in two dimensions // Bulletin des Sciences Mathématiques. 2011. V. 135. N 5. P. 421–434.
<https://arxiv.org/abs/1012.4667>
<http://www.cmap.polytechnique.fr/preprint/repository/706.pdf>
271. *Novikov R. G.* Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2 // Physics Letters A. 1998. V. 238. N 2–3. P. 73–78.
272. *Isaev M. I., Novikov R. G.* Stability estimates for determination of potential from the impedance boundary map // Algebra and Analysis. 2013. V. 25. N 1. P. 37–63.
<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00652562>, version 3 – 22 Feb. 2012
273. *Рычагов М. Н.* Учет многократных рассеяний в акустических обратных задачах томографического типа: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1989. 177 с.
274. *Benli Gu, Dongyun Deng.* Inversion of acoustic velocity with moment multi-grid algorithm // Acoustical Imaging. Ed. Wei Yu., Benli Gu. New York: Plenum Press, 1993. V. 20. P. 111–117.
275. *Devaney A. J.* Nonuniqueness in the inverse scattering problem // J. Math. Phys. 1978. V. 19. N 7. P. 1526–1531.
276. *Burov V. A., Rychagov M. N., Saskovets A. V.* Account of multiple scattering in acoustic inverse problems of tomographic type // Acoustical Imaging. New York: Plenum Press, 1992. V. 19. P. 35–39.
277. *Devaney A. J.* The inverse problem for random sources // J. Math. Phys. 1979. V. 20. N 8. P. 1687–1691.
278. *Devaney A. J.* Fundamental limitations in inverse source and scattering problems in NDE // Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. Eds. Tompson D. O., Chimenti D. E. New York: Springer Science + Business Media, 1986. V. 48. P. 303–316.
279. *Ramm A. G.* Completeness of the products of solutions to PDE and uniqueness theorems in inverse scattering // Inverse Problems. 1987. V. 3. N 4. P. L77–L82.
280. *Weder R.* Global uniqueness at fixed energy in multidimensional inverse scattering theory // Inverse Probl. 1991. V. 7. N 6. P. 927–938.
281. *Franceschini E., Mensah S., Amy D., Lefebvre J.-P.* Breast ductal computer phantom // Acoustical Imaging. Ed. André M. P. Dordrecht: Springer, 2007. V. 28. P. 213–221.
282. *Stotzka R., Widmann H., Müller T., Schlote-Holubek K., Gemmeke H., Ruiter N., Göbel G.* Prototype of a new 3D ultrasound computer tomography system: transducer design and data recording // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2004: Ultrasonic Imaging and Signal Processing. Eds. Walker W. F., Emelianov S. Y. Bellingham, WA: SPIE, 2004. V. 5373. P. 70–79.
283. *Hopp T., Schwarzenberg G. F., Zapf M., Ruiter N. V.* A MATLAB GUI for the analysis and reconstruction of a signal and image data of a SAFT-based 3D Ultrasound Computer Tomograph // International Journal on Advances in Software. 2009. V. 2. N 1. P. 11–21.

284. *Ruiter N. V., Zapf M., Hopp T., Dapp R., Göbel G.* 3D ultrasound computer tomography (USCT) // *European Radiology*. 2009. V. 19, Suppl. 4. P. S913–S918.
285. *Ruiter N. V., Göbel G., Berger L., Zapf M., Gemmeke H.* Realization of an optimized 3D USCT // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2011: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*. Eds. D’hooge J., Doyley M. M. 2011. V. 7968. P. 796805-1 – 796805-8.
286. *Ruiter N. V., Zapf M., Hopp T., Dapp R., Gemmeke H.* Phantom image results of an optimized full 3D USCT // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2012. V. 8320. P. 832005-1 – 832005-6.
287. *Kretzek E., Zapf M., Birk M., Gemmeke H., Ruiter N. V.* GPU based acceleration of 3D USCT image reconstruction with efficient integration into Matlab // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2013: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy*. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2013. V. 8675. P. 86750O-1 – 86750O-10.
288. *Zapf M., Hopp T., Ruiter N. V.* Glasses for 3D ultrasound computer tomography: phase compensation // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2016: Image Processing*. Eds. Styner M. A., Angelini E. D. 2016. V. 9784. P. 97843P-1 – 97843P-6.
289. *Ruiter N. V., Kretzek E., Zapf M., Hopp T., Gemmeke H.* Time of flight interpolated synthetic aperture focusing technique // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2017: Ultrasonic Imaging and Tomography*. Eds. Duric N., Heyde B. 2017. V. 10139. P. 10139Q-1 – 10139Q-6.
290. *Hopp T., Zapf M., Gemmeke H., Ruiter N. V.* Experimental evaluation of straight ray and bent ray phase aberration correction for USCT SAFT imaging // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2018: Ultrasonic Imaging and Tomography*. Eds. Duric N., Byram B. C. 2018. V. 10580. P. 105800M-1 – 101390M-12.
291. *Zapf M., Hohlfeld K., Ruiter N. V., Pfistner P., van Dongen K. W. A., Gemmeke H., Michaelis A., Gebhardt S. E.* Development of single-fiber piezocomposite transducers for 3-D ultrasound computer tomography // *Advanced Engineering Materials*. 2018. P. 1800423-1 – 1800423-8.
292. *Ruiter N. V., Zapf M., Hopp T., Gemmeke H., van Dongen K. W. A., Camacho J., Herreira J. L., Perez Liva M., Udías J. M.* USCT reference database: conclusions from the first SPIE USCT data challenge and future directions // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical Imaging 2018: Ultrasonic Imaging and Tomography*. Eds. Duric N., Byram B. C. 2018. V. 10580. P. 105800Q-1 – 101390Q-7.
293. *Johnson S. A., Abbott T., Bell R., Berggren M., Borup D., Robinson D., Wiskin J., Olsen S., Hanover B.* Non-invasive breast tissue characterization using ultrasound speed and attenuation // *Acoustical Imaging*. Ed. André M. P. Dordrecht: Springer, 2007. V. 28. P. 147–154.
294. *Duric N., Li K.* Resolution limitation of travel time tomography: beyond the first Fresnel zone // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. *Medical*

- Imaging 2013: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2013. V. 8675. P. 86751D-1 – 86751D-10.
295. *Duric N., Littrup P., Schmidt S., Li C., Roy O., Bey-Knight L., Janer R., Kunz D., Chen X., Goll J., Wallen A., Zafar F., Allada V., West E., Jovanovic I., Li K., Greenway W.* Breast imaging with the SoftVue Imaging system: First results // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2013: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. Bosch J. G., Doyley M. M. 2013. V. 8675. P. 86750K-1 – 86750K-8.
 296. *Duric N., Littrup P., Roy O., Schmidt S., Li C., Bey-Knight L., Chen X.* Breast imaging with ultrasound tomography: Initial results with SoftVue // IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS). Ed. Saniie J. 2013. P. 382–385.
 297. *Wang K., Matthews T., Anis F., Li C., Duric N., Anastasio M. A.* Waveform inversion with source encoding for breast sound speed reconstruction in ultrasound computed tomography // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2015. V. 62. N 3. P. 475–493.
 298. *Matthews T., Wang K., Li C., Duric N., Anastasio M. A.* Regularized dual averaging image reconstruction for full-wave ultrasound computed tomography // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2017. V. 64. N 5. P. 811–825.
 299. *Sandhu G. Y. S., Li C., Roy O., Schmidt S., Duric N.* High-resolution quantitative whole-breast ultrasound: In vivo application using frequency-domain waveform tomography // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2015: Ultrasonic Imaging and Tomography. Eds. Bosch J. G., Duric N. 2015. V. 9419. P. 94190D-1 – 94190D-9.
 300. *Sandhu G. Y. S., Li C., Roy O., West E., Montgomery K., Boone M., Duric N.* Frequency-domain ultrasound waveform tomography breast attenuation imaging // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2016: Ultrasonic Imaging and Tomography. Eds. Duric N., Heyde B. 2016. V. 9790. P. 97900C-1 – 97900C-12.
 301. *Roy O., Zuberi M. A. H., Pratt R. G., Duric N.* Ultrasound breast imaging using frequency domain reverse time migration // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2016: Ultrasonic Imaging and Tomography. Eds. Duric N., Heyde B. 2016. V. 9790. P. 97900B-1 – 97900B-9.
 302. *Sandhu G. Y., West E., Li C., Roy O., Duric N.* 3D Frequency-domain ultrasound waveform tomography breast imaging // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2017: Ultrasonic Imaging and Tomography. Eds. Duric N., Heyde B. 2017. V. 10139. P. 1013909-1 – 1013909-14.
 303. *Yu S., Wu S., Zhuang L., Wei X., Sak M., Duric N., Hu J., Xie Y.* Efficient segmentation of a breast in B-mode ultrasound tomography using three-dimensional GrabCut (GC3D) // Sensors. 2017. V. 17. N 8. P. 1827-1 – 1827-18.
 304. *Duric N., Littrup P.* Breast ultrasound tomography // Breast Imaging. Ed. Kuzmiak C. M. London: IntechOpen, 2018. P. 111–131.
 305. *Klock J., Iuanow E., Malik B., Obuchowski N., Wiskin J., Lenox M.* Anatomy-correlated breast imaging and visual grading analysis using quantitative transmission ultrasound // International Journal of Biomedical Imaging. 2016. V. 2016. P. 7570406-1 – 7570406-9.

306. *Sak M., Duric N., Littrup P., Sherman M., Gierach G.* Ultrasound tomography imaging with waveform sound speed: Parenchymal changes in women undergoing tamoxifen therapy // Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering). Medical Imaging 2017: Ultrasonic Imaging and Tomography. Eds. Duric N., Heyde B. 2017. V. 10139. P. 101390W-1 – 101390W-11.
307. *Tournois P., Calisti S., Doisy Y., Bureau J. M., Bernard F.* A 128x4 channels 1.5 D curved linear array for medical imaging // IEEE Ultrasonic Symposium. 1995. P. 1331–1335.
308. *Huang S.-W., Li P.-C.* Computed tomography sound velocity reconstruction using incomplete data // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2004. V. 51. N 3. P. 329–342.
309. Ультразвук в медицине. Физические основы применения. Изд. 2-е. Под ред. Хилла К., Бембера Дж., тер Хаар Г. Пер. с англ. М.: Физматлит, 2008. 544 с.
310. *Рычагов М. Н.* Разделение вкладов ρ - и c -компонент неоднородностей в акустических обратных задачах зондированием в двух средах // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 570–573.
311. *Липовко П. О.* Отражение звука от межтканевых границ // Биофизика. 1988. Т. 33. № 4. С. 686–691.
312. *Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др.* Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
313. *Ferrara K. W., Zagar B.* High resolution 3D color flow mapping of breast vasculature // IEEE Ultrasonic Symposium. 1995. P. 1467–1470.
314. *Баранник Е. А.* Об оптимальной разрешающей способности импульсно-доплеровских систем // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 4. С. 453–457.
315. *Svensson W. E., Humphries K., Stanley P., Holt P., Cosgrove D. O., Forouhi P.* Combined/split three-dimensional greyscale/colour Doppler imaging shows detail of breast lesions vascular morphology // Ultrasound in Medicine & Biology. 2003. V. 29. P. 105–106.
316. *André M. P., Janée H. S., Barrett T. K., Spivey B. A., Martin P. J.* Simultaneous spatial and velocity vector mapping with diffraction tomography // Acoustical Imaging. Eds. Lees S., Ferrari L. A. New York: Plenum Press, 1997. V. 23. P. 583–588.
317. *Jensen J. A.* A new estimator for vector velocity estimation // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2001. V. 48. N 4. P. 886–894.
318. *Исумару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. В 2-х тт.
319. *Матвеев О. В.* Восстановление распределения вектора скорости кровотока в линейном и нелинейном акустических томографах: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2014. 165 с.
320. *Phillips P. J.* Contrast pulse sequences (CPS): imaging nonlinear microbubbles // IEEE Ultrasonics Symposium. 2001. P. 1739–1745.
321. *Зуйкова Н. В., Кондратьева Т. В., Свет В. Д.* Получение изображения кровотока методом ультразвуковой спекл-интерферометрии // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 664–670.

322. *Bohs L. N., Friemel B. H., McDermott B. A., Trahey G. E.* Lateral velocity profile and volume flow measurements via 2-D speckle tracking // *Acoustical Imaging*. Ed. Jones J. P. New York: Plenum Press, 1995. V. 21. P. 503–507.
323. *Jacobson M. J.* Output probability distribution of a correlation detector with signal-plus-noise input // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1963. V. 5. N 7. P. 1041–1048.
324. *Savéry D., Cloutier G.* A point process approach to assess the frequency dependence of ultrasound backscattering by aggregating red blood cells // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2001. V. 110. N 6. P. 3252–3262.
325. *Чалый А. В., Цехмистер Я. В., Агапов Б. Т.* и др. Медицинская и биологическая физика: Учебник для студентов высших мед. учебных заведений. Под ред. Чалого А. В. Перевод с англ. языка. Винница: Нова книга, 2011. 568 с.
<https://books.google.ru/books?id=sVDXCQAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>
326. *Duck F. A.* Physical Properties of Tissue. London: Academic Press, 1990. 346 p.
327. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 240 с.
328. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // *Сб.: Известия АН СССР, Серия Математическая*. 1951. Т. 15. С. 309–360.
329. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах для неоднородной струны // *ДАН СССР*. 1952. Т. 82. № 5. С. 669–672.
330. *Sabatier P. C.* Spectral and scattering inverse problems // *J. Math. Phys.* 1978. V. 19. N 12. P. 2410–2425.
331. *DeFacio B., Moses H. E.* The Gel'fand–Levitan equation can give simple examples of non-self-adjoint operators with complete eigenfunctions and spectral representations. I. Ghosts and resonances // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. N 7. P. 1716–1723.
332. *Regge T.* Introduction to complex orbital momenta // *Nuovo Cimento*. 1959. V. 14. N 5. P. 951–976.
333. *Gelfand I. M.* Some aspects of functional analysis and algebra // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954*. Amsterdam: Groningen North-Holland publishing Co., E. P. Noordhoff, 1957. V. 1. P. 253–276.
334. *Фаддеев Л. Д.* Растущие решения уравнения Шредингера // *ДАН СССР*. 1965. Т. 165. № 3. С. 514–517.
335. *Фаддеев Л. Д.* Факторизация S -матрицы многомерного оператора Шредингера // *ДАН СССР*. 1966. Т. 167. № 1. С. 69–72.
336. *Newton R. G.* Inverse scattering II. Three dimensions // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. N 7. P. 1698–1715.
337. *Newton R. G.* Inverse scattering III. Three dimensions, continued // *J. Math. Phys.* 1981. V. 22. N 10. P. 2191–2200.
338. *Newton R. G.* Inverse scattering IV. Three dimensions: generalized Marchenko construction with bound states, and generalized Gel'fand–Levitan equations // *J. Math. Phys.* 1982. V. 23. N 4. P. 594–604.

339. *Newton R. G.* The Marchenko and Gel'fand methods in the inverse scattering problem in one and three dimensions // Conf. on Inverse Scattering: Theory and Applications. Eds. Bednar J. B. et al. Philadelphia: SIAM, 1983. P. 1–74.
340. *Newton R. G.* An inverse spectral problem in three dimensions // Inverse Problems, SIAM-AMS Proceedings. 1984. V. 14. P. 81–90.
341. *Newton R. G.* A Faddeev–Marchenko method for inverse scattering in three dimensions // Inverse Problems. 1985. V. 1. P. 127–132.
342. *Newton R. G.* Variational principles for inverse scattering // Inverse Problems. 1985. V. 1. P. 371–380.
343. *Lavine R. B., Nachman A. I.* The Faddeev–Lippmann–Schwinger equation in multidimensional quantum inverse scattering // Inverse Problems: an interdisciplinary study (Montpellier, 1986). Adv. Electron. Electron Phys. 1987. Suppl. 19. P. 169–174. London: Academic Press.
344. *Beals R., Coifman R. R.* Multidimensional inverse scattering and nonlinear partial differential equations // Proc. Symp. Pure Math. 1985. V. 43. P. 45–70.
345. *Ablowitz M. J., Bar Yaacov D., Fokas A. S.* On the inverse scattering transform for the Kadomtsev–Petviashvili equation // Studies in Appl. Math. 1983. V. 69. N 2. P. 135–143.
346. *Fokas A. S.* Inverse scattering of first-order systems in the plane related to nonlinear multidimensional equations // Physical Review Letters. 1983. V. 51. N 1. P. 3–6.
347. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane // J. Math. Phys. 1984. V. 25. N 8. P. 2494–2505.
348. *Nachman A. I., Ablowitz M. J.* A multidimensional inverse-scattering method // Studies in Applied Mathematics. 1984. V. 71. P. 243–250.
349. *Nachman A. I., Ablowitz M. J.* Multidimensional inverse-scattering for first-order systems // Studies in Applied Mathematics. 1984. V. 71. P. 251–262.
350. *Beals R., Coifman R. R.* The $\bar{\partial}$ -bar approach to inverse scattering and nonlinear evolutions // Physica. 1986. V. 18D. P. 242–249.
351. *Nachman A. I.* Reconstruction from boundary measurements // Annals of Math. 1988. V. 128. N 3. P. 531–576.
352. *Гриневич П. Г., Манаков С. В.* Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar{\partial}$ -метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 2. С. 14–24.
353. *Knudsen K., Mueller J., Siltanen S.* Numerical solution method for the dbar-equation in the plane // Journal of Computational Physics. 2004. V. 198. N 2. P. 500–517.
354. *Белишев М. И.* Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 524–527.
355. *Белишев М. И.* Уравнение типа Гельфанда–Левитана в многомерной обратной задаче для волнового уравнения // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. Л., 1987. Т. 165. № 17. С. 15–20.
356. *Белишев М. И.* Волновые базисы в многомерных обратных задачах // Математ. сборник. 1989. Т. 180. № 5. С. 584–602.
357. *Белишев М. И.* Граничное управление и продолжение волновых полей // Препринт ЛОМИ. 1990. С. 1–90.

358. *Belishev M. I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method) // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. N 5. P. R1–R45.
359. *Белишев М. И., Благовецковский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. С.-Петербург: Изд. С.-Петерб. университета, 1999. 268 с.
360. *Belishev M. I., Gotlib V. Yu.* Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 1999. V. 7. N 3. P. 221–240.
361. *Belishev M. I.* How to see waves under the Earth surface (the BC-method for geophysicists) // *Ill-Posed and Inverse Problems*. Eds. Kabanikhin S. I., Romanov V. G. Utrecht, Boston: VSP, 2002. P. 67–84.
362. *Belishev M. I.* Boundary control method and inverse problems of wave propagation // *Encyclopedia of Mathematical Physics*. V. 1. P. 340–345. Eds. Francoise J.-P., Naber G. L., Tsou S. T. Oxford: Elsevier, 2006. (ISBN 978-0-1251-2666-3).
363. *Belishev M. I.* Recent progress in the boundary control method // *Inverse Problems*. 2007. V. 23. N 5. P. R1–R67.
364. *Pestov L. N.* On reconstruction of the speed of sound from a part of boundary // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 1999. V. 7. N 5. P. 481–486.
365. *Pestov L., Bolgova V., Kazarina O.* Numerical recovering of a density by the BC-method // *Inverse Problems and Imaging*. 2010. V. 4. N. 4. P. 703–712.
366. *Pestov L., Bolgova V., Danilin A.* Numerical recovering of a speed of sound by the BC-method in 3D // *Acoustical Imaging*. Eds. Nowicki A., Litniewski J., Kujawska T. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer Science+Business Media B.V., 2012. V. 31. P. 201–209.
367. *Новиков Р. Г.* Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(\mathbf{x}) - Eu(\mathbf{x}))\psi = 0$ // *Функцион. анализ и его прил.* 1988. Т. 22. № 4. С. 11–22.
- Novikov R. G.* Multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(\mathbf{x}) - Eu(\mathbf{x}))\psi = 0$ // *Functional Analysis and its Applications*. 1988. V. 22. N 4. P. 263–272.
368. *Pestov L. N.* Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2012. V. 20. N 1. P. 103–110.
369. *Pestov L. N.* On determining an absorption coefficient and a speed of sound in the wave equation by the BC method // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2014. V. 22. N 2. P. 245–250.
370. *Захарьев Б. Н., Мельников В. Н., Рудяк Б. В., Сузько А. А.* Обратная задача рассеяния (конечно-разностный подход) // *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 1977. Т. 8. № 2. С. 290–329.
371. *Захарьев Б. Н., Ниязгулов С. А., Сузько А. А.* Приближенные методы обратной задачи теории ядра // *Ядерная физика*. 1974. Т. 20. № 12. С. 1273–1281.
372. *Захарьев Б. Н., Сузько А. А.* Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985. 221 с.
373. *Захарьев Б. Н., Чабанов В. М.* Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 300 с.
374. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтера и обратные задачи // *Новосибирск: Наука*, 1983. 208 с.

375. *Rose J. H., Cheney M.* Self-consistent equations for variable-velocity three-dimensional inverse scattering // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 59. N 9. P. 954–957.
376. *Budreck D., Rose J. H.* Three-dimensional inverse scattering in anisotropic elastic media // *Inverse Problems.* 1990. V. 6. P. 331–348.
377. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 200 с.
378. *Танана В. П.* Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 156 с.
379. *Федотов А. Н.* Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск.: Наука, 1982. 190 с.
380. *Морозов С. А.* Моделирование строгих методов решения обратных двумерных задач акустического рассеяния: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2007. 194 с.
381. *Rose J. H., Cheney M., DeFacio B.* The connection between time- and frequency-domain three-dimensional inverse scattering methods // *J. Math. Phys.* 1984. V. 25. N 10. P. 2995–3000.
382. *Rose J. H., Cheney M., DeFacio B.* Three-dimensional inverse scattering: plasma and variable velocity wave equations // *J. Math. Phys.* 1985. V. 26. N 11. P. 2803–2813.
383. *Rose J. H., Cheney M., DeFacio B.* Determination of the wave field from scattering data // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57. N 7. P. 783–786.
384. *Cheney M., Rose J. H.* Generalization of the Fourier transform: implications for inverse scattering theory // *Phys. Rev. Lett.* 1988. V. 60. N 13. P. 1221–1224.
385. *Cheney M., Beylkin G., Somersalo E., Burridge R.* Three-dimensional inverse scattering for the wave equation with variable speed: near-field formulae using point sources // *Inverse Problems.* 1989. V. 5. P. 1–6.
386. *Novikov R. G.* The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // *Journal of Functional Analysis.* 1992. V. 103. N 2. P. 409–463.
387. *Novikov R. G.* The two-dimensional inverse scattering problem at fixed positive energy and the Riemann generalized non-local problem // *C. R. Acad. Sci. Paris. Série I.* V. 312. P. 675–680.
388. *Гриневич П. Г., Новиков Р. Г.* Аналогии многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера и нелокальная задача Римана // *ДАН. Математика.* 1986. Т. 286. № 1. С. 19–22.
389. *Новиков Р. Г.* Обратная задача рассеяния для двумерного уравнения Шредингера при фиксированной энергии и нелинейные уравнения: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1989. 87 с.
390. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 2-е изд., переработанное. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1962. 599 с.
391. *Новиков Р. Г.* Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии // *Теорет. и мат. физика.* 1986. Т. 66. № 2. С. 234–240.
392. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // *ДАН.* 1984. Т. 279. С. 20–24.

393. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Выделение потенциальных операторов. Вещественная теория // ДАН. 1984. Т. 279. С. 784–788.
394. *Буров В. А., Рычагов М. Н., Сасковец А. В.* Учет многократных рассеяний в задачах дифракционной томографии: T -матричный подход // Вестник Московского Университета. Серия 3, Физика, Астрономия. 1989. Т. 30. № 1. С. 44–48.
395. *Novikov R. G.* $\bar{\partial}$ -method with nonzero background potential. Application to inverse scattering for the two-dimensional acoustic equation // Commun. Partial Diff. Eq. 1996. V. 21. N 3. P. 597–618.
396. *Novikov R. G.* Formulae and equations for finding scattering data from the Dirichlet–Neumann map with nonzero background potential // Inverse Problems. 2005. V. 21. N 1. P. 257–270.
397. *Морз Ф.* Колебания и звук. Пер. со 2-го англ. издания., под ред. Ржевкина С. Н. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. 496 с.
398. *Ржевкин С. Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд. Моск. университета. 1960. 336 с.
399. *Крылов В. В.* Основы теории излучения и рассеяния звука. М.: Изд-во МГУ, 1989. 118 с.
400. *Горюнов А. А.* Обратная задача дифракции на акустически мягких и жестких рассеивателях // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 6. С. 1043–1049.
401. *Bostrom A.* The null-field approach in series form – the direct and inverse problems // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79. N 5. P. 1223–1229.
402. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – Перевод с англ. М.: Мир, 1987. 311 с.
403. *Ogam É., Scotti T., Wirgin A.* Non-ambiguous boundary identification of a cylindrical object by acoustic waves // C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b. 2001. V. 329. P. 61–66.
404. *Gubernatis J. E., Barker G. A.* Elastic wave scattering calculations, the Born series and the matrix variational Padé approximant method // Rev. Progr. Quant. Nondestructive Eval. Proc. 8th Air Force/Defense Adv. Res. Proj. Agency Symp. Boulder. Colo. 2–7 Aug. 1981. V. 1. New York-London. 1982. P. 111–118.
405. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // ДАН. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
406. *Grinevich P. G., Novikov R. G.* Faddeev eigenfunctions for point potentials in two dimensions // Physics Letters A. 2012. V. 376. N 12–13. P. 1102–1106.
407. *Tolstoy I.* Compact sound scatterers with constraints // J. Acoust. Soc. Amer. 1983. V. 74. N 3. P. 1068–1070.
408. *Буров В. А., Морозов С. А.* Связь между амплитудой и фазой сигнала, рассеянного “точечной” акустической неоднородностью // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 6. С. 751–756.
409. *Агальцов А. Д., Новиков Р. Г.* Примеры решения обратной задачи рассеяния и уравнений иерархии Веселова–Новикова по данным рассеяния точечных потенциалов // Успехи математических наук. 2019. Т. 74. № 3 (447). С. 3–16.

410. *Дмитриев К. В.* Матричные функции Грина и их использование при анализе рассеяния на неоднородности плотности и скорости звука // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 656–668.
411. *Дмитриев К. В.* Максимальная мощность, рассеиваемая точечной неоднородностью в случаях разной пространственной размерности // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2015. Т. 79. № 12. С. 1700–1703.
412. *Дмитриев К. В.* Рассеяние акустического поля на рефракционно-плотностных неоднородностях малого волнового размера и решение прямой задачи рассеяния в неоднородной среде // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 125–138.
413. *Новиков Р. Г.* Приближенное решение обратной задачи квантовой теории рассеяния при фиксированной энергии в размерности 2 // Сб.: Труды Математического института им. В. А. Стеклова. Солитоны, геометрия, топология – на перекрестках. М.: Наука, 1999. Т. 225. С. 301–318.
414. *Алексеевко Н. В.* Моделирование функциональных методов решения двумерных и трехмерных обратных задач акустического рассеяния: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2008. 155 с.
415. *Novikov R. G.* The $\bar{\partial}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions // International Mathematics Research Papers. 2005. N 6. P. 287–349.
416. *Novikov R. G.* The $\bar{\partial}$ -approach to monochromatic inverse scattering in three dimensions // J. Geom. Anal. 2008. V. 18. N 2. P. 612–631.
417. *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.