

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ И КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ

**Учебное пособие для физического практикума
по акустике**

К.В. Дмитриев, Д.И. Зотов, А.И. Коробов,
Н.И. Одина, О.В. Руденко, О.Д. Румянцева,
О.А. Сапожников, В.А. Хохлова, А.С. Шуруп

Под общей редакцией

А.И. Коробова, О.В. Руденко, О.А. Сапожникова



Москва

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2024

ББК 22.32
УДК 534

Коллектив авторов:

К.В. Дмитриев, Д.И. Зотов, А.И. Коробов, Н.И. Одина, О.В. Руденко,
О.Д. Румянцева, О.А. Сапожников, В.А. Хохлова, А.С. Шуруп.

Нелинейные акустические и капиллярные волны в жидкостях.
Учебное пособие для физического практикума по акустике / Под ред.
А.И. Коробова, О.В. Руденко, О.А. Сапожникова — М.: Физический
факультет МГУ, 2024, 114 с.

ISBN 978-5-8279-0301-7

В учебном пособии представлены практические задачи, посвященные эффектам, связанным с распространением волн конечной амплитуды в нелинейных средах с учетом поглощения, дисперсии и дифракции. Задачи реализованы в специальном практикуме кафедры акустики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Изучаемые нелинейные явления присущи не только акустическим волнам; поэтому знакомство происходит с универсальными особенностями поведения интенсивных скалярных волн безотносительно к их физической природе. Описание экспериментальных установок и практических упражнений предваряется теоретическим материалом. Сборник предназначен для обучения студентов старших курсов естественных факультетов изучающих основы физики и математического описания нелинейных волновых процессов. Кроме того, он может служить практическим пособием для лиц, заинтересованных в повышении квалификации в области акустики.

Рецензенты:

Профессор, доктор физ.-мат. наук *В.П. Митрофанов*

Профессор, доктор физ.-мат. наук *В.И. Балакиев*

*Печатается по решению Ученого совета физического факультета МГУ
им. М.В. Ломоносова*

ISBN 978-5-8279-0301-7

© А.И. Коробов, О.В. Руденко,

О.А. Сапожников, отв. редакторы, 2024 г.

© Физический факультет МГУ, 2024 г.

Введение

Волновые процессы активно изучаются в самых различных разделах физики: акустике, оптике, физике плазмы, радиофизике, гидродинамике и других областях. Характерной особенностью волнового движения является то, что если некоторый сигнал зарегистрирован в какой-то точке пространства, то с некоторой временной задержкой в другой точке можно обнаружить похожий сигнал. Во многих случаях основное различие между двумя указанными сигналами заключается в их уровне (амплитуде), что вызывается, например, расхождением волны от источника или, наоборот, фокусировкой, а также затуханием в среде. Однако кроме простых амплитудных изменений возможны различные изменения формы волны. Одной из фундаментальных причин, вызывающих искажение начальной формы волн, является нелинейность среды.

Нелинейные искажения могут проявиться по-разному в зависимости от того, каковы диссипативные и дисперсионные свойства среды. В качестве простого примера можно привести задачу о распространении монохроматической плоской продольной волны в неограниченной среде. Много лет назад было показано, что такая волна при распространении изменяет форму профиля так, что некоторые участки становятся всё более и более крутыми, и, наконец, на некотором расстоянии образуются скачки (ударные фронты) – волна превращается в периодическую пилообразную волну. В реальных условиях, однако, всегда имеются вязкость и теплопроводность среды. Волна может также расходиться из-за дифракции или геометрических условий распространения. Эти процессы замедляют развитие различных нелинейных эффектов. Ещё одной причиной, в существенной мере влияющей на протекание нелинейных эффектов, является дисперсия скорости волны. В простейшем случае бегущей волны, когда нелинейное искажение профиля волны обусловлено генерацией гармоник, дисперсия скорости приводит к тому, что фазовые соотношения для гармоник

все время меняются в процессе распространения волны, т.е. меняются и условия передачи энергии в более высокие гармоники. В условиях сильной дисперсии развитие нелинейных эффектов может быть заметно подавлено.

Все указанные особенности протекания нелинейных волновых процессов могут быть продемонстрированы с использованием волн миллиметрового и сантиметрового диапазона длин, так что волновые явления можно наблюдать на масштабе лабораторного стола в рамках задач физического практикума. В настоящем сборнике рассматриваются несколько лабораторных работ, иллюстрирующих основные свойства нелинейных волн. Знакомство происходит с универсальными особенностями поведения интенсивных волн безотносительно к их физической природе. Описание экспериментальных установок и практических упражнений предваряется теоретическим материалом.

Методические аспекты некоторых задач частично были разработаны на кафедре акустики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова много лет назад К.М. Ивановым-Шицом и В.А. Буровым. Настоящее пособие отражает произошедшие за последние годы изменения как в преподавании акустики (что нашло отражение в теоретической части описаний задач), так и в усовершенствовании приборной базы практикума.

Часть 1

ИСКАЖЕНИЕ ФОРМЫ И ПОГЛОЩЕНИЕ МОЩНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

1.1. Введение

Процессы, сопровождающие распространение мощных ультразвуковых волн, относятся к нелинейной акустике. Интерес к ней вызван тем, что мощные источники ультразвуковых волн являются эффективным средством исследования различных веществ, а также средством воздействия на ряд физических, химических и биологических процессов.

Интенсивные волны обладают рядом совершенно новых свойств, резко отличных от свойств волновых процессов малой интенсивности.

Цель настоящей работы – качественное наблюдение некоторых из этих особенностей на примере распространения плоских акустических волн большой интенсивности в воде, а также сравнение количественных оценок, получаемых при теоретическом рассмотрении процесса распространения волн в недиспергирующих средах, с результатами эксперимента.

1.2. Теория

В случае одномерного движения уравнения гидродинамики идеальной жидкости могут быть записаны в виде $\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial x}$, т.е.

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

– уравнение движения жидкости (уравнение Эйлера),

и в виде $\rho \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$, т.е.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

– *уравнение непрерывности*. Здесь ρ – плотность, v – скорость частиц среды (колебательная скорость), p' – избыточное звуковое давление (акустическое давление).

Уравнения (1.1) и (1.2) должны быть дополнены уравнением состояния среды, связывающим давление с плотностью среды. В случае идеального газа и адиабатического процесса в нем *уравнение состояния* имеет вид

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

где p и p_0 – полное давление и его невозмущенное (т.е. в отсутствие акустической волны) значение, $\gamma = C_p/C_v$ – отношение теплоемкостей при постоянном давлении (C_p) и при постоянном объеме (C_v). Поскольку $p \equiv p_0 + p'$, то $p' = p_0 \left[\left(\rho/\rho_0 \right)^\gamma - 1 \right]$.

Для жидкости можно записать эмпирическое уравнение состояния в аналогичной форме (уравнение Тэта)

$$p' = P_* \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma - 1 \right], \quad (1.3)$$

где P_* и Γ – константы (для данной жидкости), определяемые из экспериментов. Нелинейный параметр Γ имеет порядок нескольких единиц (до десяти), хотя $C_p/C_v \approx 1$. Внутреннее давление в жидкости P_* определяется межмолекулярным взаимодействием. Для воды $P_* \approx 3 \times 10^8$ Н/м², $\Gamma \approx 7$.

Введем величину c , которая удовлетворяет соотношению

$$c^2 = \frac{\partial p'}{\partial \rho} \quad (1.4)$$

и имеет смысл локальной скорости звука в возмущенной среде. Тогда уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Впервые строгое решение для этой системы нелинейных уравнений было дано Риманом в 1860 г. Им была введена функция σ , имеющая размерность скорости:

$$\sigma = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho, \tag{1.6}$$

где $\rho_0 \equiv \text{const}$ – невозмущенное значение плотности среды. Для функции σ выполняются соотношения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

и тогда система (1.6) принимает вид [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Введём вспомогательные функции $R = \sigma + v$ и $L = \sigma - v$. Складывая друг с другом и вычитая друг из друга получившиеся выше уравнения, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial R}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial L}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Операторы $\partial/\partial t + (v \pm c)\partial/\partial x$ описывают дифференцирование по времени в системах отсчёта, движущихся со скоростями $v \pm c$.

Отсюда видно, что величина R не меняется при движении со скоростью $v + c$, а величина L – при движении со скоростью $v - c$. Иначе говоря, возмущения R и L переносятся со скоростями $v \pm c$, т.е. описывают волны, распространяющиеся влево и вправо. Функции R и L называются инвариантами Римана. Если интересоваться волной, распространяющейся в положительном направлении, то волна L отсутствует, т.е. $L = \sigma - v = 0$. Тогда $R = 2v$, и таким образом приходим к нелинейному уравнению для колебательной скорости [2 (гл. 3, § 1)]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

Решение этого уравнения при гармоническом возбуждении $v|_{x=0} = v_0 \sin \omega t$ можно записать в виде

$$v = v_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c + v} \right).$$

Используя определение скорости звука (1.4) и уравнение состояния (1.3), найдем связь между c и v (с точностью до члена, линейного по v) [3 (гл. IV)]: $v \approx 2(c - c_0)/(\Gamma - 1)$, где $c_0^2 = \partial p / \partial \rho|_{\rho=\rho_0}$. Здесь c_0 – скорость звука в случае малой амплитуды волны, т.е. без учета нелинейных эффектов, в отличие от скорости c – см. (1.4), где нелинейные эффекты учитываются. Тогда

$$c = c_0 + \frac{\Gamma - 1}{2} v,$$

и решение уравнения (1.7) запишется так:

$$v = v_0 \sin \omega \left[t - \frac{x}{c_0 \left(1 + \frac{\Gamma + 1}{2} \frac{v}{c_0} \right)} \right]. \quad (1.8)$$

Решение в этой форме выражено неявно. При $v \rightarrow 0$ оно переходит в обычное решение линейной акустики.

Важно отметить, что, даже при линейном уравнении состояния ($\Gamma=1$), нелинейность в (1.8) не исчезает и определяется нелинейными членами уравнений гидродинамики.

Вид полученного решения (1.8) говорит о том, что участки волнового возмущения, имеющие различные значения колебательной скорости v , распространяются с различной скоростью, т.е. точки с $v > 0$ обгоняют точки с $v < 0$.

Число Маха определяется как $M \equiv v_0/c_0$, где v_0 – амплитудное значение колебательной скорости. Для малых чисел Маха $M \ll 1$ можно считать, что скорость распространения участков возмущения, имеющих колебательную скорость v , будет определяться величиной

$$c+v=c_0+\frac{\Gamma+1}{2} v$$

и мало отличаться от значения c_0 . Это означает, что при перемещении волны на небольшие (сравнимые с длиной волны) расстояния изменения в ее форме будут незначительны. Однако эти небольшие различия в скорости приводят к постепенно накапливающемуся искажению ее формы, которое на больших расстояниях может стать очень заметным. Таким образом, при любом конечном v и достаточно большом x начинает сказываться нелинейность полученного решения.

Проследим за *искажением формы волны* по мере ее распространения [4 (гл. I)], причем пока без учета процесса поглощения волны. Это удобно сделать графически (рис. 1.1). Так как излучатель (источник), находящийся в точке $x=0$, совершает колебания по закону

$$v(t)|_{x=0} = v_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

($T=2\pi/\omega$ и λ – период волны и длина волны на частоте ω), то пространственная форма волны у излучателя будет

$$v(x) = v_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right), \quad x \leq \lambda.$$

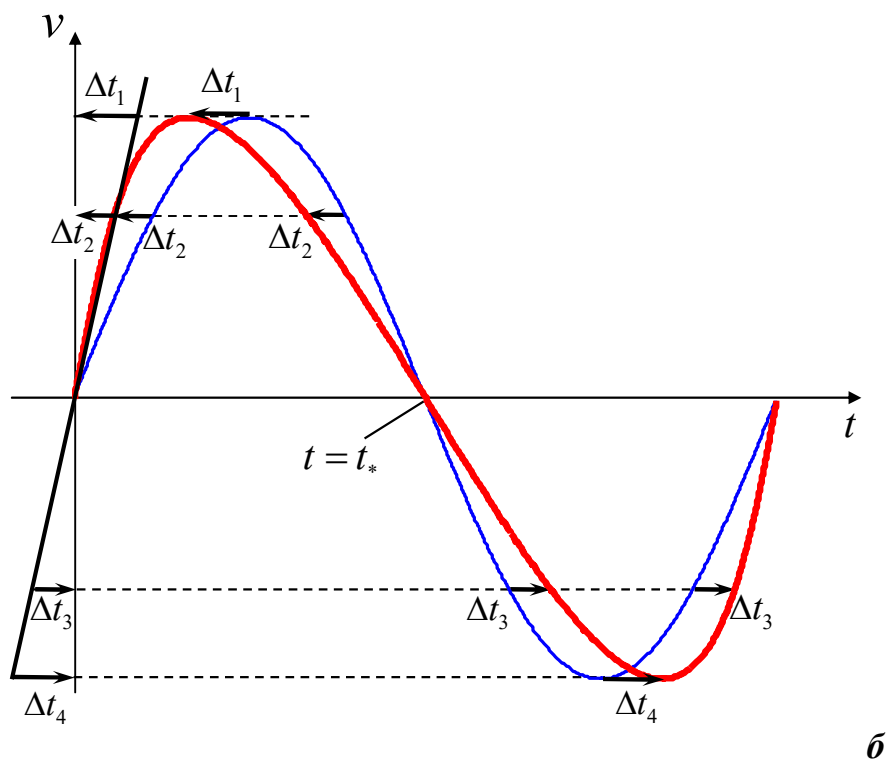
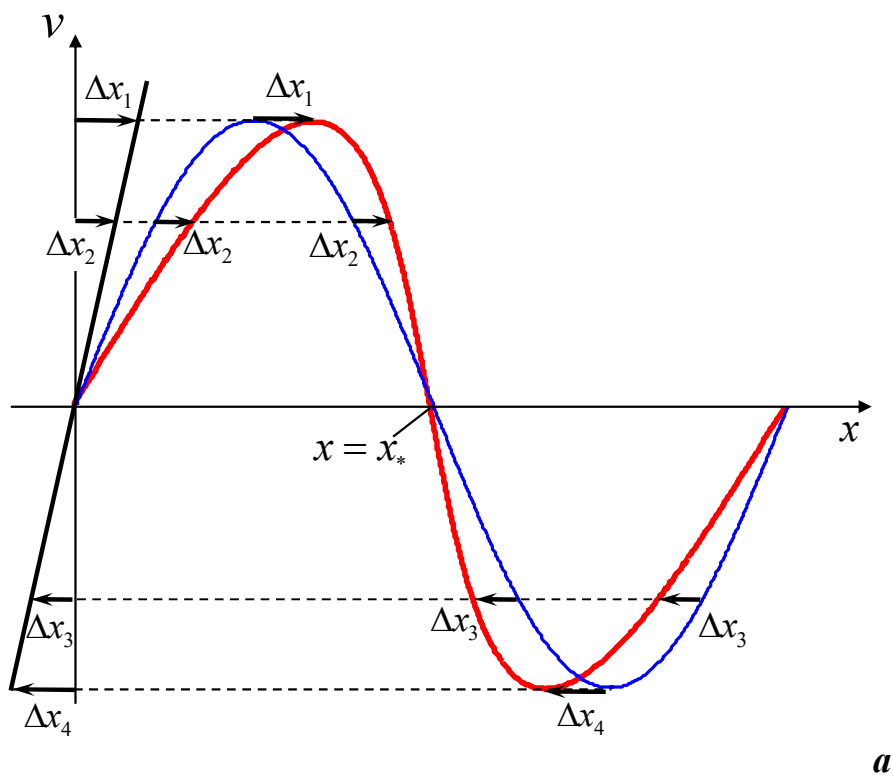


Рис. 1.1. Искажение формы волны по мере ее распространения, как функция координаты в фиксированный момент времени t_* (а) и как функция времени при фиксированной координате $x_* = c_0 t_*$ (б). Форма волны в отсутствие нелинейных искажений изображена тонкой линией, в присутствии нелинейных искажений – толстой линией

Через время $t_* \gg T$ точки волны с нулевой колебательной скоростью ($v=0$) переместятся на расстояние $x_* = c_0 t_*$; остальные точки ($v \neq 0$) переместятся на расстояние

$$x = \left(c_0 + \frac{\Gamma + 1}{2} v \right) t_* .$$

Следовательно, точка волны, соответствующая колебательной скорости v , окажется смещенной (относительно точки с нулевой колебательной скоростью) на

$$\Delta x = \frac{\Gamma + 1}{2} v t_* = \frac{\Gamma + 1}{2} \frac{v}{c_0} x_* . \quad (1.9)$$

Таким образом, новую форму волны (через время t_*), как функцию координаты x (рис. 1.1 а) можно получить, построив синусоиду, соответствующую начальному виду волны, и сдвинув (вдоль оси абсцисс) все ее точки на соответствующие величины Δx , согласно (1.9). На рис. 1.1 а для удобства построения сначала из точки пересечения оси абсцисс и оси ординат проведена прямая

$$v = K x, \text{ где } K = \frac{2}{\Gamma + 1} \frac{c_0}{x_*} ;$$

коэффициент наклона прямой K зависит от выбранного и зафиксированного значения $t_* = x_*/c_0$. Выражение для этой прямой получается из выражения (1.9), однако переписанного в виде зависимости v от координаты (фактически, роль координаты x для этой прямой играет Δx). На основе такой прямой легко строятся графически смещения Δx , которые тем больше по величине, чем больше текущее значение колебательной скорости v , а направление смещения определяется знаком v (рис. 1.1 а). Тогда новая форма волны получается смещением каждой точки синусоиды начального вида на соответствующую величину Δx .

Аналогично можно построить новую форму волны, как функцию времени t , в точке с фиксированной координатой x_*

(рис. 1.1 б). Так, если точки волны с нулевой колебательной скоростью ($v=0$) достигнут точку x_* через время $t_* = x_*/c_0$, то остальные точки ($v \neq 0$) – через время

$$t = \frac{x_*}{c_0 + \frac{\Gamma+1}{2} v}.$$

При $\frac{\Gamma+1}{2} \frac{|v|}{c_0} \ll 1$ имеем

$$t \approx \left(1 - \frac{\Gamma+1}{2} \frac{v}{c_0}\right) \frac{x_*}{c_0}.$$

Тем самым, точка волны, соответствующая колебательной скорости v , окажется смещенной по времени прихода в точку x_* (относительно точки с нулевой колебательной скоростью) на

$$\Delta t \approx - \frac{\Gamma+1}{2} \frac{v}{c_0} \frac{x_*}{c_0}. \quad (1.10)$$

Графическое построение новой формы волны (рис. 1.1 б) выполняется по описанной выше методике, с той лишь разницей, что пространственное смещение (1.9) и временное смещение (1.10) отличаются знаком.

Итак, из этих построений видно, что по мере распространения волны ее форма будет все время изменяться. При фиксировании момента времени и увеличении x передний участок волны становится более крутым, а задний – более пологим. Наоборот, при фиксировании координаты и увеличении t передний участок волны становится более пологим, а задний – более крутым. Это объясняется тем, что участки волны перемещаются тем быстрее, чем больше (с учетом знака) их колебательная скорость.

Рассмотрим форму волны как функцию координаты x . В отсутствие поглощения, на некотором расстоянии – так называемом расстоянии образования разрыва x_p – в точке с нулевой

колебательной скоростью ($v = 0$) фронт волны испытает разрыв. Это означает, что в точке x_p фронт волны становится вертикальным, т.е. возникает бесконечная производная функции v по координате x . Тем самым, расстояние образования разрыва x_p можно найти из условия, что угол наклона прямой $v = Kx$ становится равным углу наклона исходной синусоиды (синусоиды при $v = 0$):

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{v=0} = K \big|_{x=x_p}, \text{ т.е. } v_0 \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2}{\Gamma+1} \frac{c_0}{x_p}.$$

Отсюда

$$x_p = \frac{2}{\Gamma+1} \frac{c_0^2}{\omega v_0}. \quad (1.11)$$

Если продолжать такое построение и далее (рис. 1.2), то появится неоднозначность в поведении функции $v(x)$. Этого в реальной среде не произойдет. Необходимо учитывать наличие вязких потерь, которыми теперь пренебрегать нельзя, так как появляются очень большие перепады скорости.

Для рассмотрения этих особенностей, в исходных уравнениях следует учесть диссипацию энергии за счёт вязкости, т.е. использовать уравнение Навье–Стокса. Тогда уравнение движения (1.1) примет вид

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 ;$$

здесь $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$ – коэффициент сдвиговой вязкости, η – коэффициент сдвиговой вязкости, ξ – коэффициент объёмной вязкости. Уравнение непрерывности (1.2) в данном случае остается без изменений. Уравнение состояния для большинства жидкостей также можно оставить прежним.

Решение для малых амплитуд (т.е. теперь, наоборот, не будут приниматься во внимание нелинейные эффекты) имеет вид затухающих волн:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{b\omega^2}{2c_0^3\rho_0}x\right) \cdot \sin\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right).$$

Из этого выражения видно, что заметное затухание (в e раз по амплитуде) будет наблюдаться на расстоянии

$$x_{\text{зат}} = 2c_0^3\rho_0/(b\omega^2).$$

Поглощение энергии препятствует накоплению нелинейных искажений. Влияние поглощения на процесс формирования разрыва будет существенным, если $x_{\text{зат}} < x_p$, в противном случае ($x_{\text{зат}} > x_p$) разрывная форма волны успеет сформироваться. Сравнение $x_{\text{зат}}$ и x_p приводит к соотношению

$$\frac{x_{\text{зат}}}{x_p} = \frac{\rho_0 c_0 v_0}{b\omega}(\Gamma + 1) \equiv Re \cdot (\Gamma + 1).$$

Надо еще раз обратить внимание, что значение x_p формируется без учета поглощения, а значение $x_{\text{зат}}$ – без учета нелинейных эффектов.

Величина

$$Re \equiv \frac{v_0 \rho_0 c_0}{b\omega} = \frac{p_0}{b\omega} \quad (1.12)$$

носит название *акустического числа Рейнольдса* и обозначается символом Re . Его структура аналогична гидродинамическому числу Рейнольдса, равному $\frac{v \cdot d}{\nu_{\text{кин}}}$, где v – скорость потока, d –

характеристический размер, а $\nu_{\text{кин}} = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость.

Действительно, учитывая, что $c_0/\omega = \lambda/(2\pi)$, получим $Re \equiv \frac{v_0 \lambda \rho_0}{2\pi b}$, т.е.

роль d играет длина волны, а амплитуда колебательной скорости v_0 заменяет скорость потока.

Таким образом, при $Re \ll 1$ нелинейные эффекты подавляются вязким затуханием, и линейный подход к задаче будет правомерен.

Анализ уравнений для вязкой жидкости при $Re \gg 1$ показывает, что вплоть до x_p форма волны меняется практически так

же, как в случае идеальной жидкости. Однако дальнейший анализ эволюции формы волны требует учёта вязкости среды. Система уравнений, аналогичная (1.5), но дополненная вязким членом, уже не может быть сведена строго к паре идентичных уравнений. Действительно, (1.6) приводит к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \frac{b}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

Если снова ввести $R = \sigma + v$ и $L = \sigma - v$, то получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{b}{2\rho} \frac{\partial^2 (R - L)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial L}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{b}{2\rho} \frac{\partial^2 (R - L)}{\partial x^2},\end{aligned}$$

т.е. R и L уже не являются инвариантами. Можно показать, что в предположении малости числа Маха $M \equiv v_0/c_0$ взаимодействие встречных волн, описываемых функциями R и L , пренебрежимо мало. Поэтому, если интересоваться волной, распространяющейся вправо, то можно принять $L=0$, т.е., как и раньше, $R=2v$. В итоге получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{b}{2\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

носящее название *уравнения Бюргерса*. Поскольку имеет место соотношение

$$c = c_0 + \frac{\Gamma - 1}{2} v,$$

то уравнению Бюргерса можно придать вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \varepsilon v) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{b}{2\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\Gamma + 1}{2}.$$

Для решения задач с излучателями (источниками), заданными на границе, удобно вместо переменных x и t использовать переменные x и

$$\tau = t - x/c_0.$$

Последняя запись позволяет в явном виде учесть задержку волны из-за конечности скорости распространения (именно переменные x и τ используются при описании в части 2 и части 3 настоящего сборника). Переходя к новым переменным и учитывая, что при этом зависимость формы волны от x получается очень «медленной» (амплитуда и форма волны меняется мало на расстоянии, сравнимом с λ), получим следующую форму уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0,$$

где учтено, что $\frac{b}{2\rho c_0^3} \approx \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}$.

Граничное условие, соответствующее гармоническому возбуждению первичной волны колебательной скорости (не смещения частиц!), будет:

$$v|_{x=0} = v_0 \sin(\omega t) \quad (1.13)$$

($t = \tau$ при $x = 0$). Подстановка вида

$$v = \frac{b}{\varepsilon c_0 \rho_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (\ln U)$$

упрощает уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}. \quad (1.14)$$

Граничное условие (1.13) при этом переходит в

$$U|_{x=0} = \exp\left(-\varepsilon \frac{\rho_0 c_0 v_0}{b \omega} \cos(\omega \tau)\right) \equiv \exp(-\varepsilon \cdot Re \cdot \cos(\omega \tau)). \quad (1.15)$$

Зависимость от времени такого граничного возбуждения представляет собой при больших значениях $\varepsilon \cdot Re$ последовательность коротких импульсов очень малой длительности.

Уравнение (1.14) является уравнением типа уравнения теплопроводности, и его решение для приведенного граничного условия получается с помощью функции Грина соответствующего уравнения [5]:

$$U = \frac{1}{\sqrt{4\pi b x / (2c_0^3 \rho_0)}} \int \exp(-\varepsilon \cdot Re \cdot \cos \omega \tau') \cdot \exp\left(-\frac{(\tau' - \tau)^2}{4bx / (2c_0^3 \rho_0)}\right) d\tau' .$$

Специфический вид граничного условия определяет весь характер полученного решения, поскольку значение интеграла определяется величиной и формой упомянутого короткого импульса. Приближённая оценка полученного интеграла и переход к исходной переменной v позволяет провести анализ решения для больших значений $\varepsilon \cdot Re$. Особенность подынтегрального выражения заключается в малой ширине и большой амплитуде первого экспоненциального множителя, что позволяет использовать методы приближённого интегрирования.

Основным результатом этого анализа, после обратного перехода к переменной v , является вывод, что по мере распространения волна приближается по своей форме к пилообразной.

Из (1.15) следует, что величина $1/(\varepsilon \cdot Re)$ определяет долю периода волны $\Delta_{\text{фр}}/\lambda$, занимаемую каждым импульсом (1.15); эта же величина $1/(\varepsilon \cdot Re)$ определяет долю периода волны $\Delta_{\text{фр}}/\lambda$, занимаемую фронтом волны, близкой к пилообразной; здесь $\Delta_{\text{фр}}$ – *ширина фронта волны*. Как показывают более точные расчёты, при $x > x_p$ и значениях $Re \cong (50 - 100)$, которые соответствуют интенсивностям ультразвука, используемого в задаче, эта величина составляет тысячные доли периода [1 (гл. 3, § 2)]:

$$\frac{\Delta_{\text{фр}}}{\lambda} = \frac{1 + \frac{\Gamma + 1}{2c_0^2} \omega v_0 x}{\pi \frac{\Gamma + 1}{2} \cdot Re} . \quad (1.16)$$

А именно, ширина фронта пилообразной волны определяется функцией $\sim \text{th}\left(\frac{\omega \tau}{\Delta_{\text{фр}}/\lambda}\right)$, причем $\text{th}(\pm 1) \approx \pm 0.76$; тем самым, на расстоянии $2\Delta_{\text{фр}}$ происходит переход от значения пилообразной волны, близкого к максимальному, к значению, близкому к минимальному. Длительность ударного фронта составляет, таким образом, несколько наносекунд, и на имеющейся аппаратуре не может быть измерена. Этому препятствует конечная ширина полосы акустического приёмника (не превосходящая нескольких МГц) и усилителя осциллографа (около 100 МГц).

Тем самым, для определения формы волны можно продолжить начатые построения, пренебрегая шириной фронта и оставляя только те участки волны, которые не заходят за границы начального разрыва при $x \geq x_p$ (рис. 1.2). При этом будем считать, что избыточная энергия, «соответствующая» заштрихованным участкам, поглощается средой.

Из рис. 1.2 следует, что величина перепада скорости в разрыве v_p будет расти и достигнет максимальной величины $2v_0$, когда волна приобретёт пилообразную форму. Назовем расстояние, на котором это произойдет, *расстоянием формирования пилообразной волны* x_ϕ ; его можно найти из условия

$$\Delta x|_{v=v_0} = \frac{\lambda}{4}$$

($\Delta x|_{v=v_0}$ – смещение за счет нелинейных эффектов в точке, где $v = v_0$), что непосредственно видно на рис. 1.2 б. Тогда из (1.9) следует, что

$$x_\phi = \frac{2}{\Gamma + 1} \frac{c_0^2}{\omega} \frac{1}{v_0} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} x_p . \quad (1.17)$$

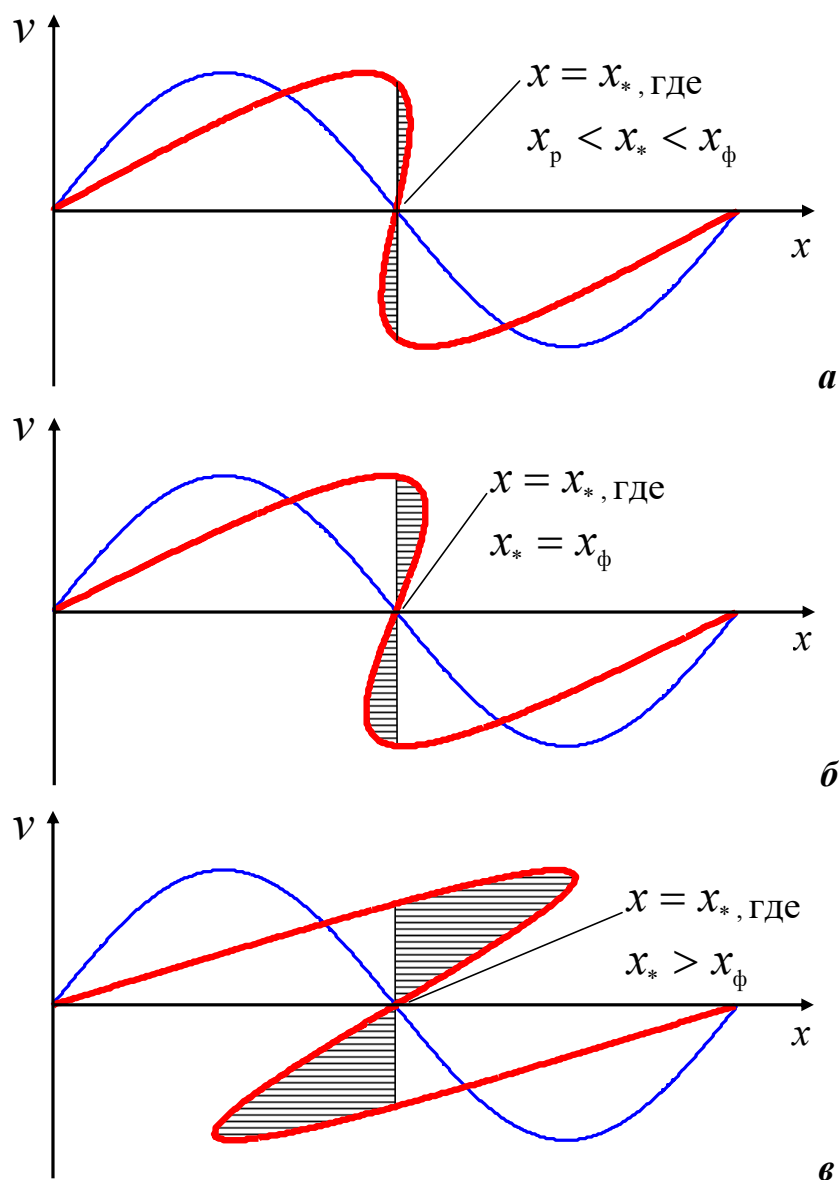


Рис. 1.2. Графики перепада колебательной скорости в разрыве

При дальнейшем распространении волны величина перепада скорости v_p будет уменьшаться. Эта величина v_p определяется скоростью v того начального участка исходной синусоиды, который, смещаясь на Δx (при данном x), догоняет участки волны с нулевой колебательной скоростью $v = 0$. Обозначим абсциссу точки синусоиды, обладающей этой скоростью, через ξ . Тогда для определения v_p получим равенство

$$\xi + \Delta x = \frac{\lambda}{2} .$$

Простое выражение для v_p можно найти для расстояний $x > (3-4)x_p$. Считая ξ/λ малой величиной, найдем

$$\frac{v_p}{2} = v = v_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \xi \approx v_0 \frac{2\pi}{\lambda} \xi , \text{ откуда } \xi \approx \frac{v_p}{v_0} \frac{\lambda}{4\pi} .$$

Подставив в вышеприведенное равенство значение Δx из (1.9) при $v = v_p/2$, т.е. $\Delta x = \frac{\Gamma+1}{2} \frac{v_p}{2c_0} x$, и найденное значение ξ , получим

$$v_p \approx 2v_0 \frac{\pi}{1 + \frac{\Gamma+1}{2} v_0 \frac{\omega}{c_0^2} x} . \quad (1.18)$$

В отсутствие вязкости далее на всех расстояниях будет наблюдаться затухающая пилообразная волна. В реальной среде, как это следует из соотношения (1.16), на расстоянии $x > x_p$ ширина фронта постепенно увеличивается, и на некотором расстоянии $x_{\text{л}}$ она станет сравнима с длиной волны ($\Delta_{\text{фр}}/\lambda \approx 0.5$); волна вновь станет почти синусоидальной. Это расстояние можно определить из условия $\Delta_{\text{фр}}/\lambda \approx 0.5$, используя выражение (1.16):

$$\frac{\Delta_{\text{фр}}}{\lambda} \approx 0.5 , \quad x_{\text{л}} \approx \frac{\rho_0 c_0^3}{8\pi b f^2} . \quad (1.19)$$

Если на излучателе задано $v|_{x=0} = v_0 \sin \omega t$, то на этом расстоянии от излучателя $x_{\text{л}}$, независимо от начальной амплитуды колебательной скорости v_0 ультразвуковая волна неизбежно ослабевает настолько, что практически вновь возвращается к синусоидальной форме.

Можно оценить амплитуду v'_0 почти гармонической волны при $x \approx x_{\text{л}}$, подставив значение $x_{\text{л}}$ в (1.18) и учитывая при этом, что $v_p/2 \approx v'_0$:

$$v'_0 \approx \frac{v_p}{2} \Big|_{x=x_l} \approx \frac{b\omega}{\rho_0 c_0} \frac{4}{\Gamma+1} .$$

Дальнейшее распространение этой волны близко к случаю малой амплитуды.

При $x \geq x_l$ амплитуда волны вообще не зависит от v_0 . Этот неожиданный, на первый взгляд, результат свидетельствует о том, что, независимо от начальной мощности, на расстояниях от излучателя, определяемых лишь частотой и параметрами жидкости, нелинейные эффекты и вязкие потери приводят к тому, что мощность не превышает некоторой предельной величины.

Все предыдущее рассмотрение проводилось в предположении о плоском характере волны. Однако обычно работа ведется с пучками ультразвуковых волн ограниченного сечения. Поэтому наши оценки всех характерных расстояний x_p , x_f и x_l будут справедливы, если эти расстояния находятся в пределах *области дифракции Френеля* (прожекторная зона) используемого излучателя, *длина которой*

$$l \approx r_0^2 / \lambda , \quad (1.20)$$

где r_0 – радиус излучателя. За этой зоной пучок начинает заметно расходиться, что ускоряет процесс убывания энергии волны, и при $x_p \gg l$ разрыв вообще не образуется.

Структура звукового поля в прожекторной зоне очень сложна. Как показывают расчеты, в различных точках ультразвукового пучка амплитуда колебательной скорости изменяется от 0 до $2v_0$. Однако средняя по сечению амплитуда остается в линейном приближении постоянной, как у плоской волны. Строгого решения аналогичной задачи с граничными условиями для нелинейных уравнений гидродинамики в настоящее время не существует, а имеющиеся экспериментальные результаты находятся в удовлетворительном согласии с изложенной здесь теорией.

1.3. Экспериментальная установка и методика измерений

Установка предназначена для наблюдения и измерения искажения и поглощения ультразвуковых волн в воде (рис. 1.3, рис. 1.4). Используется импульсный режим работы генератора. Это позволяет избавиться от кавитации (возникновение в жидкости газовых пузырей), возникающей при длительном и непрерывном воздействии ультразвуковых колебаний на среду; в результате кавитации появляется значительное дополнительное поглощение, сильно искажающее изучаемые явления. Этот режим позволяет также использовать сравнительно небольшой генератор, обладающий большим значением мощности в импульсе.

Генератор электрических импульсов создает радиоимпульсы длительностью в несколько микросекунд и частотой заполнения 1 МГц (рис. 1.5). Задающий генератор ($f = 1$ МГц) подключен к делителю частоты (коэффициент деления $2^{11} = 2048$), на выходе которого имеется формирующее устройство. С формирующего устройства снимаются видеоимпульсы длительностью 8 мкс и 16 мкс и частотой повторения около 500 Гц (период повторения $T_{\text{повт}} = 2.048$ мс). Этими импульсами модулируются сигналы частотой 1 МГц, поступающие на модулятор с задающего генератора. Такая схема модуляции позволяет получить постоянную начальную фазу высокочастотного сигнала $f = 1$ МГц относительно модулирующего импульса, что необходимо для получения стабильной картины на экране осциллографа. С модулятора радиоимпульсы поступают на усилитель мощности (выходная мощность в импульсе около 2500 Вт), а затем на пьезокерамический излучающий преобразователь (диаметром около 4 см). Огибающая электрического импульса, подаваемого на излучатель, имеет несколько отличную от прямоугольной форму, поскольку используется усилитель мощности резонансного типа. Излучатель создает в кювете пучок ультразвуковых волн, который на другом конце кюветы практически полностью поглощается за счет имеющегося там поглощающего материала.

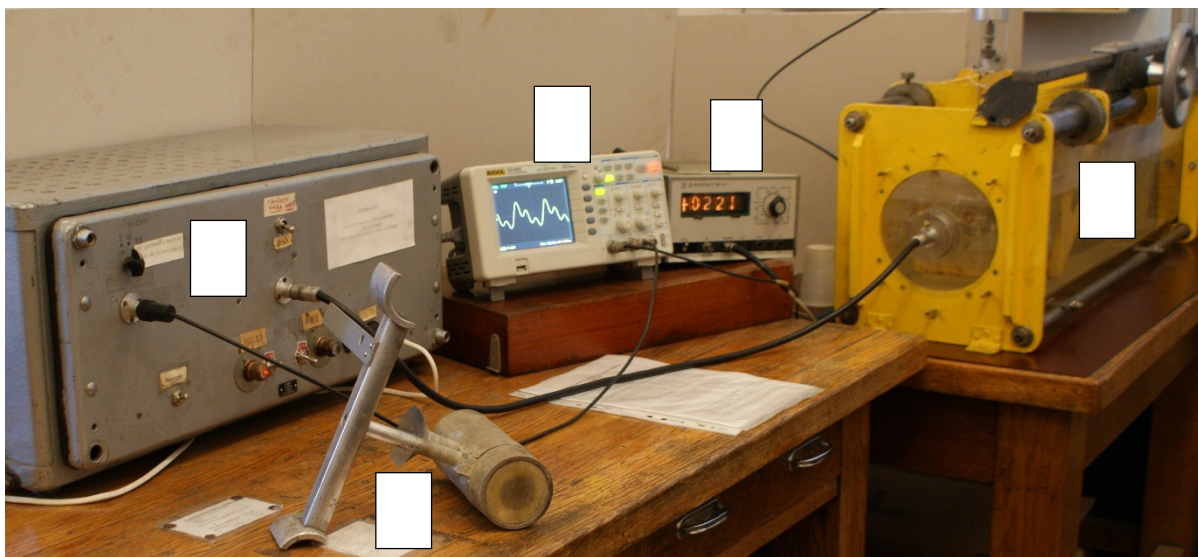


Рис. 1.3. Фотография экспериментальной установки: 1 - генератор импульсов; 2 - цифровой осциллограф; 3 – кювета с водой; 4 - калориметр; 5 - цифровой термометр

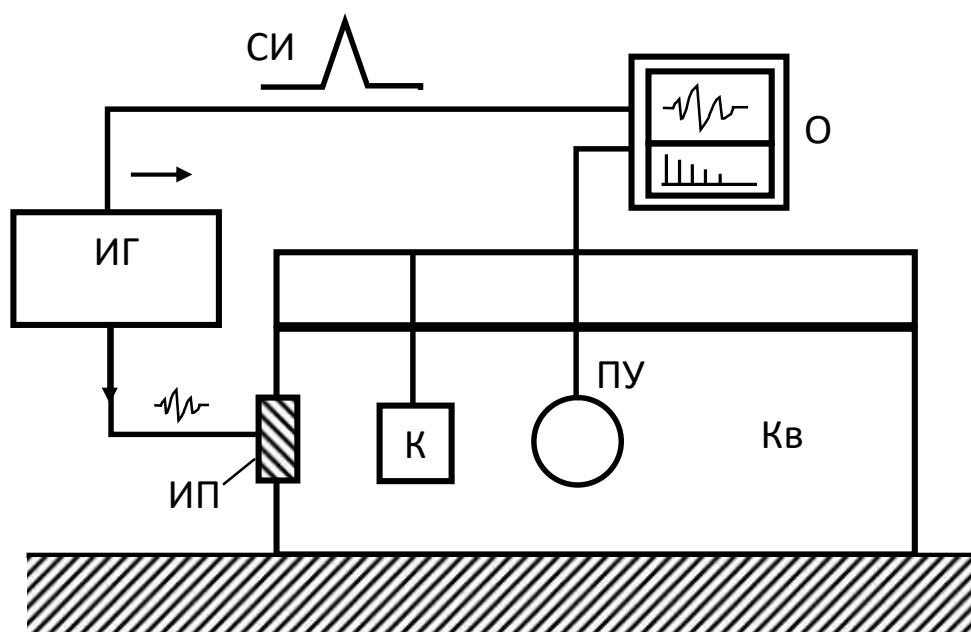


Рис. 1.4. Блок-схема измерительной установки: Кв – кювета, укрепленная в жесткой раме и заполненная водой; ИП – излучающий преобразователь, установленный в торце кюветы; ПУ – приемное устройство, укрепленное в подвижной каретке; ИГ – импульсный генератор; СИ – синхронизирующий импульс; О – цифровой осциллограф с анализатором спектра; К – калориметр

На раме, в которой укреплена кювета, имеется каретка с приемным устройством, перемещающаяся по всей длине кюветы. Большая жесткость рамы и каретки позволяет сохранять высокую степень параллельности приемника и излучателя на всей длине перемещения каретки (около 60 см). Это очень существенно, так как малая длина волны ультразвука ($\lambda \approx 1.5$ мм) и достаточно большой размер приемника ($d \approx 20$ мм) могут привести к резкому снижению чувствительности при появлении даже малых углов между плоскостями приемника и излучателя. Действительно, если угол будет $\approx 4^\circ$, то колебания основной частоты в разных точках приемника будут сдвинуты на π и чувствительность упадет до нуля. Нетрудно видеть, что еще более жесткие требования к параллельности предъявляют высшие гармоники.

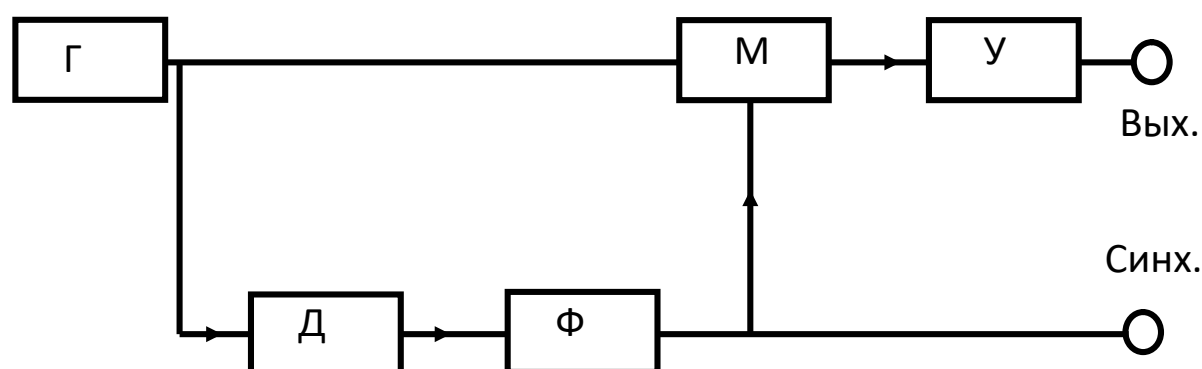


Рис. 1.5. Блок-схема генератора ультразвуковых импульсов: Г – задающий генератор, Д – делитель, Ф – формирователь, М – модулятор, У – усилитель мощности

Приемник – тонкая пластина из пьезокерамики – имеет высокую резонансную частоту (≈ 5 МГц), что позволяет принимать сигналы не только основной частоты ультразвука, но и гармонические составляющие, которые в конечном итоге определяют форму волны. Частотная характеристика приемника равномерна (в идеале) вплоть до частот, близких к резонансной. Значительные размеры пластины (около 1.5–2 см) обусловлены двумя причинами: необходимостью

получить достаточно низкий электрический импеданс приемника и требованием к усреднению принимаемых колебаний по сечению пучка ультразвуковых волн.

Сигнал с приемника поступает на широкополосный осциллограф. Осциллограф имеет ждущую развертку с задержкой, величина которой может плавно изменяться в широких пределах. Это позволяет компенсировать время распространения сигнала от излучателя до приемника и получать на экране нужный участок импульса; при этом большая скорость развёртки позволяет детально рассмотреть форму колебаний в волне. Кроме того, в осциллографе имеется режим визуализации спектра наблюдаемого сигнала.

Для калибровки приемного тракта применяется *калориметрический метод*. С помощью калориметра измеряется поглощенная в нем энергия ультразвуковой волны, по величине которой определяются акустические характеристики волны. Калориметр – цилиндрический сосуд из пенопласта объемом около 100 см^3 , с толстыми стенками, одна из торцевых сторон которого открыта, а другая сторона – дно – имеет сферическую форму. Высокий коэффициент отражения пенопласта и выбранная форма калориметра обеспечивает фокусировку и многократное отражение падающей звуковой волны, которая при этом практически полностью поглощается в воде, заполняющей калориметр. Открытая сторона (диаметром 3 см), затянутая тонкой пленкой, прозрачна для ультразвуковых волн, но препятствует теплообмену между калориметром и окружающей жидкостью. Эта сторона в процессе измерений подводится вплотную к излучателю, так что выходящая из калориметра волна (существенно ослабленная после переотражений внутри калориметра) отражается от поверхности излучателя и вновь возвращается в калориметр. Таким образом, для излучаемой волны калориметр является акустическим чёрным телом, поглощающим практически всю попадающую в него акустическую энергию. В стенке калориметра имеется отверстие для термометра.

Искажение формы ультразвуковой волны по мере ее распространения определяется в эксперименте по временной зависимости колебаний, наблюдаемой на экране осциллографа. Как уже было показано, можно считать, что пространственная форма волны мало меняется на расстояниях порядка её длины (при $M \ll 1$). Отсюда следует, что пространственная форма волны в окрестности некоторой точки x_0 будет мало отличаться от временной зависимости колебаний в этой точке и, следовательно,

$$v(x_0 + \Delta x, t_0) \approx v(x_0, t_0 - \Delta t) \quad \text{при} \quad |\Delta x| = |c_0 \Delta t| \leq \lambda.$$

Надо упомянуть, что в рассматриваемом эксперименте приемник реагирует именно на акустическое давление, а не на колебательную скорость. Уравнение Бюргерса, записанное в терминах колебательной скорости, является строгим, т.е. оно описывает нелинейные эффекты всех порядков малости при учете в c поправок соответствующих порядков. В то же время, аналогичное по форме уравнение, но записанное в терминах акустического давления, является строгим при описании нелинейных эффектов не выше второго порядка малости [Hamilton M.F., Blackstock D.T. On the coefficient of nonlinearity β in nonlinear acoustics. – J. Acoust. Soc. Amer., 1988, v. 83, N 1, p. 74–77]. Тем не менее, на качественном уровне форма наблюдаемых сигналов давления не будет отличаться от проанализированной выше формы сигналов колебательной скорости.

1.4. Последовательность выполнения эксперимента

Включить осциллограф, включив тумблер на раздаточной колодке и нажав кнопку, расположенную на верхней крышке осциллографа.

Подключить к входам CH1 и CH2 кабели, идущие, соответственно, от приемного преобразователя и с выхода синхронизации генератора.

Включить тумблером генератор, потом “Накал”, и только через 5–7 минут включить “Анод”. Помните, что *нельзя подавать анодное напряжение дольше 5-ти минут!*

Исследования начинают с получения на экране осциллографа четкой, неискаженной и неподвижной картины импульса с канала СН1 при максимальном приближении приемника к излучателю. Для этого нужно:

- Провести автонастройку осциллографа (Приложение 1.1, п. 1.1.1). Импульс имеет колоколообразную огибающую (рис. 1.6 а), что обусловлено не только характеристикой усилителя мощности, но и ограниченной полосой пропускания резонансного излучателя.

- Осуществить синхронизацию сигнала. Сначала выполнить синхронизацию по сигналу с генератора, т.е. в качестве источника синхронизации выбрать канал СН2 (Приложение 1.1, п. 1.1.2а). Убедившись в том, что имеется хорошее изображение импульса, начинают плавно передвигать каретку; при этом для наблюдения одного и того же участка импульса необходимо вводить дополнительную задержку (поскольку выбрана синхронизация от сигнала с генератора). Понаблюдать, как при перемещении приемника смещается и наблюдаемый сигнал.

- Затем, для удобства наблюдения изменения формы волны по мере ее распространения, выполнить синхронизацию по сигналу с приемника, т.е. в качестве источника синхронизации выбрать канал СН1 (Приложение 1.1, п. 1.1.2б). Тогда при изменении расстояния от излучателя до приемника наблюдаемый сигнал остается неподвижным, что удобно для наблюдения изменения формы волны.

- При необходимости провести подстройку масштабирования изображения на экране (Приложение 1.1, п. 1.1.3). Нужно, чтобы было видно изображение высокочастотной “набивки” импульса, а при дальнейшем масштабировании по горизонтали – форма волны на протяжении одного–двух периодов с максимальным значением амплитуды колебаний в импульсе, по которой можно

наблюдать процесс образования разрыва и формирования пилообразного профиля.

Правильная форма одного периода сигнала при образовании пилообразного профиля – N-образная. Критерием образования разрыва служит появление первых признаков «звона» у сигнала; на расстоянии формирования пилообразной волны наблюдается стабилизация формы сигнала (см. подробнее ниже).

Если форма колебаний изменяется в соответствии с теоретическими выводами, то можно приступить к калибровке приемного тракта. Для этого вблизи от излучателя при выключенном генераторе устанавливают калориметр, ориентируя его открытый конец на излучатель. Калориметр через отверстие заливается водой из кюветы, и в нем замеряется температура. Затем включают генератор на фиксированное время $t_{\text{изл}}$ (100–200 с), после чего вновь измеряется температура. При работе генератора термометр можно не вынимать из калориметра. Для более равномерного распределения поглощенной энергии в воде кюветы необходимо перед финальным замером температуры перемешивать воду в течение 10–20 с.

Определив приращение температуры ΔT° , можно рассчитать энергию E , поглощенную за время $t_{\text{изл}}$:

$$E = V_{\text{к}} \rho_0 C_{\text{в}} \Delta T^\circ ,$$

где $C_{\text{в}}$ – теплоемкость воды (4200 Дж/кг·К); $V_{\text{к}}$ – объем калориметра; ΔT° – изменение температуры воды; ρ_0 – плотность воды.

Интенсивность звука в импульсе (удельная акустическая мощность) может быть найдена из соотношения

$$I = \frac{E Q}{t_{\text{изл}} S_{\text{к}}} = \frac{V_{\text{к}} \rho_0 C_{\text{в}} \Delta T^\circ Q}{t_{\text{изл}} S_{\text{к}}} , \quad (1.21)$$

где Q – скважность импульсов – см. ниже (1.23) и (1.24); $S_{\text{к}}$ – сечение калориметра.

По известному соотношению для плоских синусоидальных волн [1]

$$I = \frac{v_0^2}{2} \rho_0 c_0 = \frac{(p'_0)^2}{2 \rho_0 c_0} \quad (1.22)$$

можно определить амплитудные значения акустического давления p'_0 и колебательной скорости v_0 .

Описанная методика расчета относится к импульсам с огибающей прямоугольной формы, т.е. к импульсам с постоянной амплитудой колебаний основного сигнала. Тогда *скважность* Q определяется как отношение периода повторения импульсов $T_{\text{повт}}$ к длительности излучаемого импульса с прямоугольной огибающей. В случае же импульса с огибающей произвольной формы (в нашем эксперименте импульс имеет колоколообразную форму – см. рис. 1.6 а) необходимо определить эффективную длительность $t_{\text{имп.экв}}$ прямоугольного импульса, энергия которого равнялась бы энергии реального импульса. Тогда скважность определяется как

$$Q_{\text{экв}} = \frac{T_{\text{повт}}}{t_{\text{имп.экв}}} . \quad (1.23)$$

Для определения $t_{\text{имп.экв}}$ измеряют «амплитуды» всех колебаний в импульсе A_i (амплитуда, которой можно пренебречь при измерениях, должна быть меньше, чем 0.1 от максимальной амплитуды A_{max} , чтобы ошибка в определении $t_{\text{имп.экв}}$ не превышала 1% ÷ 2%) и подсчитывают эквивалентное количество колебаний в импульсе прямоугольной формы, имеющих амплитуду A_{max} :

$$n_{\text{экв}} = \frac{\sum_i A_i^2}{A_{\text{max}}^2} .$$

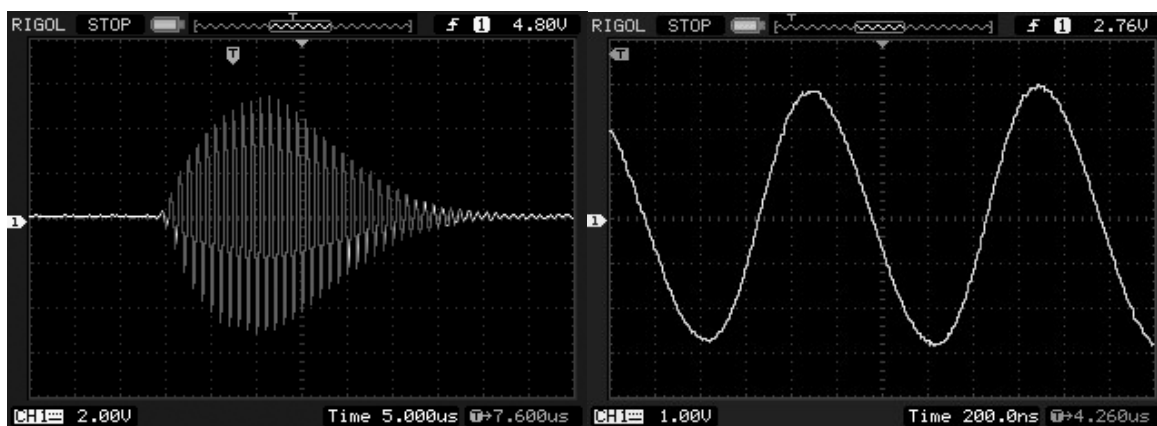
Затем определяют длительность эквивалентного импульса, имеющего частоту f :

$$t_{\text{имп.экв}} = \frac{n_{\text{экв}}}{f} ,$$

откуда, согласно (1.23),

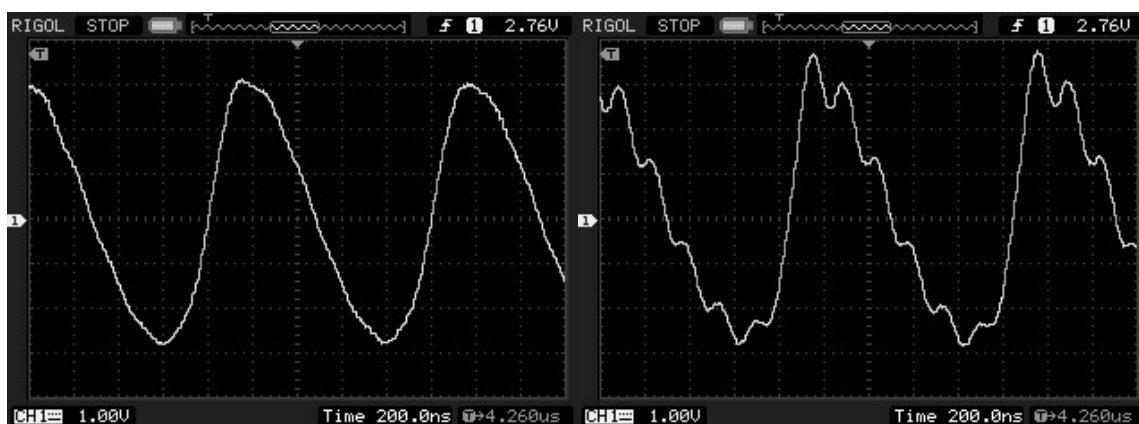
$$Q_{\text{ЭКВ}} = \frac{T_{\text{ПОВТ}}}{t_{\text{ИМП.ЭКВ}}} = \frac{f T_{\text{ПОВТ}}}{n_{\text{ЭКВ}}} . \quad (1.24)$$

Точность определения звукового давления и колебательной скорости определяется точностью измерения разности температур, точностью измерения рабочего объема калориметра, а также качеством теплоизоляции калориметра. Ошибку, вносимую несовершенством теплоизоляции, можно оценить, если вновь измерить температуру в калориметре через интервал времени, равный времени излучения $t_{\text{изл}}$.



а

б



в

г

Рис. 1.6. Осциллограммы сигналов: общий вид сигнала (*а*) и несколько периодов сигнала при $x=0$ (*б*), $x=x_p$ (*в*), $x=x_\phi$ (*г*)

Определив по описанным измерениям максимальную величину колебательной скорости, можно подсчитать характерные расстояния, на которых должен произойти разрыв (x_p), а также сформироваться пилообразный сигнал (x_ϕ).

Экспериментальное определение этих расстояний связано с определенными трудностями, так как наблюдаемая на осциллографе форма колебаний несколько искажается приемным устройством, частотная характеристика которого имеет область резонансного подъема. Скорость развертки и задержка подбираются таким образом, чтобы на экране осциллографа получить одно–два колебания с максимальным значением амплитуды колебаний в импульсе (Приложение 1.1, п. 1.1.3). До появления разрыва приемник передает форму волны без искажения (рис. 1.6 б). При появлении в волне разрыва (что соответствует быстрому перепаду давления) приемная пластинка начинает интенсивно колебаться на собственной частоте («звенеть»). Эти колебания появляются в момент разрыва и медленно затухают со временем, налагаясь на колебания, вызванные ультразвуковой волной. На рис. 1.6 б, в, г приведены характерные кривые формы волны, наблюдаемые на разных расстояниях от излучателя. При $x=x_p$ (рис. 1.6 в) осциллирующий процесс начинается на участке нарастания колебаний (крутой участок), т.е. в момент разрыва. Появление осциллирующего процесса при удалении приемника от излучателя может служить *критерием появления разрыва*, т.е. определением точки x_p . Действительно, по мере роста крутизны фронта в спектре волны появляются гармоники высших порядков. При длительности фронта $\tau_{\text{фр}} = \frac{\Delta_{\text{фр}}}{c_0} < \frac{1}{f_{\text{рез}}}$ возникнут гармоники, частота которых близка к собственной частоте приемника, и произойдет заметная раскачка колебаний на резонансной частоте приемника $f_{\text{рез}}$. При дальнейшем удалении приемника от излучателя момент вступления осцилляции начинает сдвигаться по крутому фронту нарастания колебаний к вершине, а сами колебания

переходят на участок плавного спада пилообразного сигнала (рис. 1.6 з).

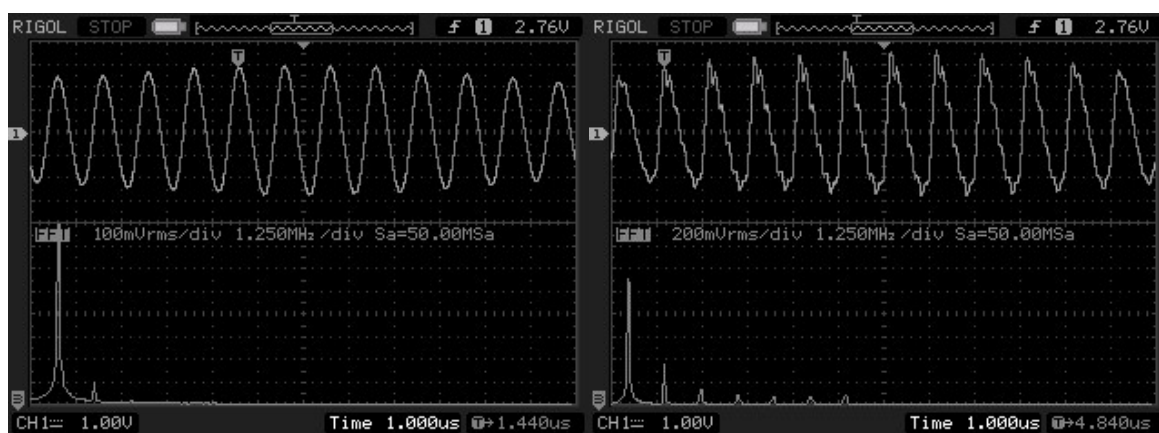
Расстояние *формирования пилообразной волны* x_{ϕ} (рис. 1.6 з) целесообразно определять по сдвигу осцилляции на самый верхний участок колебания, а также по стабилизации формы (т.е. при дальнейшем увеличении расстояния между излучателем и приемником форма сигнала долго не изменяется).

После визуального наблюдения формы и определения характерных расстояний следует приступить к зарисовке формы колебаний на различных расстояниях. При обработке осциллограмм, для исключения искажений, вносимых приемником, нужно выполнить сглаживание наблюдаемой кривой. При построении соответствующих теоретических кривых формы волны, аналогичных рис. 1.1, для удобства их сравнения с экспериментальными кривыми, надо выбирать такой масштаб, чтобы амплитуда и период колебаний начальной синусоиды теоретической кривой равнялись, соответственно, максимальной амплитуде и периоду колебаний экспериментальной кривой.

Итак, учёт нелинейности уравнений, лежащих в основе волнового уравнения, приводит к изменению формы колебаний в волне. Охарактеризовать эти изменения можно в рамках временного описания (что сделано выше); при таком подходе определяются изменения, которые претерпевает заданная у излучателя гармоническая форма колебаний по мере распространения волны. Возможен и другой *подход* к тому же явлению – *спектральный*; им обычно пользуются, когда необходимо проводить количественную оценку нелинейных искажений профиля волны. В этом случае оценка определяется по изменению спектра колебаний, или, как принято говорить, по обогащению гармонического колебания («основной», т.е. первой, гармоники) высшими гармониками по мере распространения волны [4 (гл. I)]. Так, если исходно в спектре волны присутствует единственная гармоника на основной частоте ω , то по мере искажения формы волны ее спектральный состав обогащается: сначала возникает вторая гармоника

2ω , потом третья 3ω и т.д. Процесс возникновения новых гармоник сопровождается перераспределением энергии между ними.

Измерения спектральных характеристик сигнала проводят путем включения режима визуализации спектра в осциллографе (Приложение 1.1, п. 1.1.4). Для наблюдения характера изменения спектра сигнала выберем две точки: первая – у излучателя (рис. 1.7 а), и вторая – на расстоянии около x_ϕ (рис. 1.7 б). Колебание в первой точке будет иметь форму, близкую к синусоидальной, а во второй точке – пилообразную форму. Со спектральной точки зрения это означает, что амплитудный спектр сигнала вблизи излучателя можно представить в виде: $A_1 \neq 0$, $A'_n \approx 0$ (при $n \neq 1$); здесь $n=1,2,3,\dots$ – номера гармоник, $A'_n \equiv A_n/A_1$ – значения нормированных амплитуд гармоник. Для второй точки амплитудный нормированный спектр будет $A'_n \sim 1/n$ ($n=1,2,3,\dots$) – см. формулу (2.11) в части 2 настоящего сборника.



a

б

Рис. 1.7. Осциллограмма сигнала (верхняя половина изображения) и его спектра (нижняя половина изображения) при $x \ll x_p$ (а) и $x \approx x_\phi$ (б)

1.5. Упражнения

1. Провести измерение мощности ультразвуковых импульсов с помощью калориметра (см. описание после рис. 1.5). По этим измерениям рассчитать скважность импульсов (1.24), интенсивность волны (1.21), амплитуды колебательной скорости и акустического давления (1.22); оценить точность определения этих величин.
2. Определить число Рейнольдса Re (1.12), длину зоны Френеля l (1.20), а также расстояния x_p (1.11), x_f (1.17), x_l (1.19); оценить ширину фронта $\Delta_{фр}$ (1.16) при $x=x_f$ (1.17).
3. Экспериментально определить величины x_p и x_f и сравнить с расчетом.
4. Зарисовать с экрана осциллографа форму ультразвуковых колебаний при различных расстояниях приемника от излучателя:
а) $x=x_{min}$ (x_{min} – наименьшее расстояние от излучателя); б) $x=x_p/2$;
в) $x=x_p$; г) $x=x_f$ и еще в трех точках между x_f и x_{max} (x_{max} – максимальное удаление от приемника).
5. Пользуясь графическим методом, построить теоретическую форму волны для тех же расстояний (см. рис. 1.1 и описание к нему); амплитуду колебательной скорости теоретической кривой принять равной амплитуде, оцененной из эксперимента. Сравнить теоретические кривые с экспериментальными.
6. Определить резонансную частоту приёмного устройства (по периоду осцилляции принимаемого сигнала).
7. Проследить на экране осциллографа эволюцию спектра сигнала по мере удаления приёмника от излучателя и зарисовать вид спектра на следующих расстояниях: $x=x_{min}$, $x=x_p/2$, $x=x_p$, $x=x_f$, $x=3x_f$.
8. Измерить и изобразить графически зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния. Объяснить, со спектральной точки зрения, причину того, что после участка роста этой гармоники при увеличении расстояния наблюдается насыщение и спад.

Параметры установки:

Частота генератора $f = 1 \text{ МГц}$

Период повторения импульсов $T_{\text{повт}} = 2.048 \text{ мс}$

Объем калориметра 110 см^3

Диаметр калориметра 3 см

Диаметр излучателя 4 см

Некоторые свойства воды (при температуре около 20° С):

Теплоемкость $C_v = 4200 \text{ Дж/(кг·К)}$

Эффективный коэффициент вязкости

$$b = \xi + \frac{4}{3}\eta = 4 \cdot 10^{-2} \text{ пуаз} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м·с)} ; \quad 1 \text{ пуаз} = 0.1 \text{ Па·с}$$

Плотность $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$

Скорость звука $c_0 = 1500 \text{ м/с}$

1.6. Контрольные вопросы

1. Написать уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Как определяется число Маха?
2. Написать связь скорости звука при учете нелинейных эффектов со скоростью звука в отсутствие нелинейных эффектов и с колебательной скоростью.
3. За счет чего происходит искажение формы волны по мере ее распространения?
4. Построить профиль волны на характерных расстояниях от излучателя.

5. Как определяется акустическое число Рейнольдса, и от каких параметров волны и среды оно зависит?
6. Каков физический смысл следующих характерных расстояний: расстояние образования разрыва; расстояние формирования пилообразного профиля; расстояние, на котором волна вновь становится практически синусоидальной? Как зависят эти расстояния от частоты и амплитуды волны, от коэффициента вязкости?
7. Что такое область дифракции Френеля; чем определяется ее длина?
8. Что такое скважность сигнала и как она определяется в эксперименте?
9. В чем состоит суть спектрального подхода при изучении нелинейных явлений?
10. Как изменяется спектральный состав исходно гармонической волны по мере ее распространения?

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.1

Инструкция пользования осциллографом

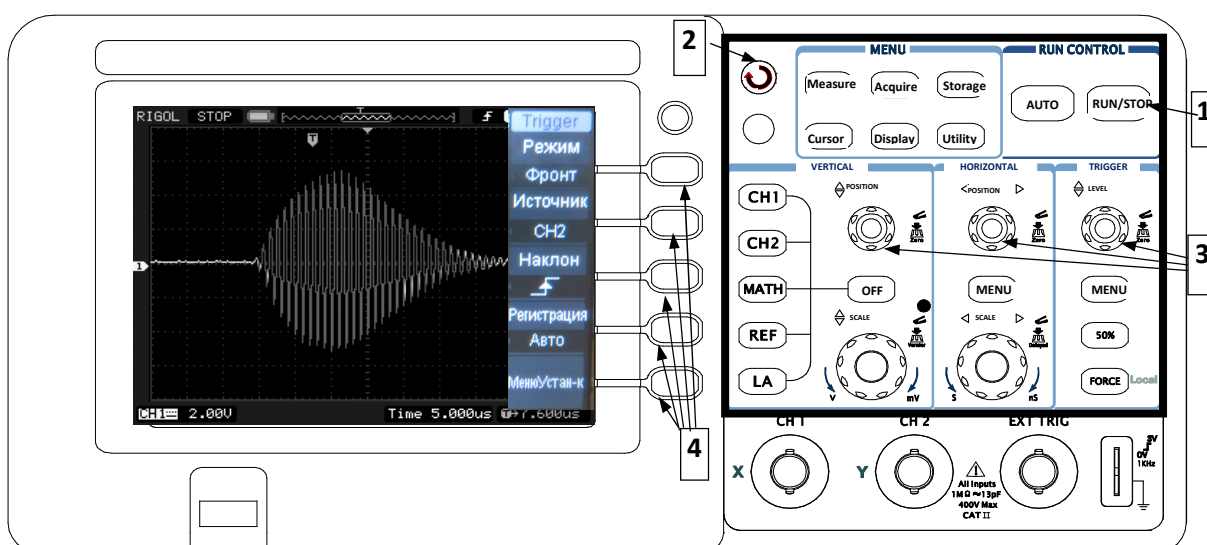


Рис. 1.8. Лицевая панель осциллографа

Обозначения, используемые далее в описании:

- Панель управления осциллографа (обведена жирной черной рамкой на рис. 1.8) поделена на секции, выделенные цветными прямоугольными рамками. Названия секций (MENU, RUN CONTROL, VERTICAL, HORIZONTAL, TRIGGER) расположены в верхней части рамок.
- Названия кнопок на панелях приборов даются в тексте в прозрачной рамке. Например, RUN/STOP обозначает кнопку 1 осциллографа на рис. 1.8.
-  – многофункциональная поворотной-нажимная ручка управления осциллографом (рис. 1.8, цифра 2).
- SCALE, POSITION, LEVEL обозначают соответствующие ручки панели управления осциллографом (рис. 1.8, цифра 3).
- Надписи в тексте приложения, выделенные серым – например, Источник – обозначают кнопки экранного меню (появляются в правой части экрана) и соответствуют отображаемой на экране надписи. Для активации экранной кнопки необходимо нажать физическую кнопку из группы 4, расположенную на одном уровне с экранной.

П. 1.1.1. Автонастройка осциллографа для наблюдения сигнала с входа CH1

- Нажать AUTO секции RUN CONTROL. Подождать 10–15 с для сброса настроек и автоподбора параметров под наблюдаемый сигнал.
- Двукратным нажатием CH2 отключить режим наблюдения второго канала (первое нажатие служит для выбора CH2 текущим каналом, второе – отключает его). При этом CH2 должна погаснуть. В

результате на экране останется изображение сигнала желтым цветом, а голубым уберется. Главный импульс будет показан в центре экрана (за ним можно видеть и отраженный).

П. 1.1.2. Синхронизация принимаемого сигнала

Возможны два режима синхронизации сигнала – синхронизация по сигналу с генератора и синхронизация по сигналу с приемника. Первый режим характеризуется стабильностью наблюдаемого сигнала (т.е. практически отсутствием “рывков” сигнала по горизонтальной оси), но при изменении расстояния от излучателя до приемника наблюдаемый сигнал также смещается и необходимо корректировать (ручкой  POSITION секции HORIZONTAL) положение наблюдаемого импульса на экране. Второй режим менее стабилен, но при изменении расстояния от излучателя до приемника наблюдаемый сигнал остается неподвижным.

а) Для синхронизации по сигналу с генератора нужно выбрать (или убедиться, что выбран) в качестве источника синхронизации канал CH2. С этой целью:

- Нажав MENU секции TRIGGER, войти в экранное меню настроек синхронизации.
- Нажимать **Источник** (или же, нажав один раз **Источник**, вращать многофункциональную ручку ) , пока не будет выбран CH2.
- Повторно нажать MENU секции TRIGGER для выхода из экранного меню.
- Ручкой  LEVEL секции TRIGGER установить такой уровень порога синхронизации, при котором изображение устойчиво.

б) Для синхронизации по сигналу с приемника нужно:

- Выбрать (или убедиться, что выбран) в качестве источника синхронизации канал CH1, аналогично синхронизации по сигналу с генератора (см. выше).
- Ручкой  LEVEL секции TRIGGER установить такой уровень порога синхронизации, при котором достигается приемлемое качество изображения (желательно брать уровень порога, близкий к максимуму сигнала).

II. 1.1.3. Подстройка параметров текущего канала

Нижеописанные операции применяются к текущему каналу. Для выбора текущего канала необходимо однократно нажать на кнопку с его названием (CH1, CH2 или MATH). Однако если канал уже был выбран текущим, то после нажатия кнопки он отключится. Для его включения необходимо еще раз нажать кнопку канала.

Подстройка параметров выбранного канала выполняется вращением ручек секций HORIZONTAL и VERTICAL. Так, ручками  POSITION секций HORIZONTAL и VERTICAL выполняется *сдвиг* сигнала, соответственно, вправо/влево и вверх/вниз. Ручками  SCALE выполняется масштабирование сигнала, т.е. его сжатие/растяжение. Причем масштабирование сигнала по горизонтали происходит относительно центральной вертикальной линии сетки экрана.

В самой нижней строке экрана показана информация о размерах ячеек сетки для текущего масштаба. Например, надпись «CH1 1V» желтого цвета означает, что высота одного квадрата сетки составляет 1 Вольт, а надпись «Time 10.00 ms» белого цвета означает, что ширина одного квадрата сетки составляет 10 мс.

Нажатием кнопки RUN/STOP можно зафиксировать изображение импульса; повторное нажатие этой кнопки возвращает изображение в режим реального времени.

П. 1.1.4. *Наблюдение спектра сигнала*

- Включить канал **MATH** осциллографа в секции VERTICAL.
- Выбрать функцию FFT в поле **Функция** экранного меню.
- Выбрать канал CH1 в поле **Источник** экранного меню.
- Выбрать желаемый режим отображения спектра: в вольтах (V_{RMS} , рекомендуется использовать именно этот режим) или в децибелах ($dB V_{RMS}$) в поле **Шкала** экранного меню.
- Последовательной подстройкой изображений каждого из каналов CH1 и MATH (п. 1.1.3; переключение между каналами осуществляется однократным нажатием кнопок CH1 и MATH) необходимо добиться, чтобы на экране одновременно полностью отображались как сигнал, так и его спектр.
- Операция БПФ берется от той последовательности сигналов, которая отображена на экране. Поэтому, переключившись на канал CH1 (п. 1.1.3, первый абзац), подстройкой параметров этого канала по горизонтали (п. 1.1.3, второй абзац) надо добиться на экране достаточно большого числа периодов сигнала (в рамках одного импульса!) с одинаковой амплитудой – амплитуда не должна уменьшаться на краях видимого временного интервала.

Часть 2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И ДИФРАКЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ В ЗВУКОВЫХ ПУЧКАХ

2.1. Введение

Одним из важных объектов волновой физики являются *волновые пучки*. Они создаются источниками конечных размеров и характеризуются выделенным направлением распространения волны. В волновом пучке можно выделить три характерных масштаба, на которых происходит изменение его характеристик – длину волны λ , поперечный размер пучка $L_{\perp}$ и его продольный размер $L_{\parallel}$, причем $L_{\parallel} \gg L_{\perp} \gg \lambda$ (рис. 2.1). Основное отличие несфокусированного волнового пучка от плоской волны обусловлено конечностью размера излучателя и связано с возникающим из-за этого явлением дифракции, приводящим к расхожимости пучка. Исследование дифракции связано с большими математическими сложностями, и поэтому важно использовать разумные упрощения, основанные на наличии разных масштабов в исследуемой волне. Значительный прогресс в этом направлении был достигнут благодаря использованию так называемого «параболического» (или «квазиоптического») приближения [5].

Большой класс задач современной волновой физики связан с исследованием пучков высокой интенсивности. В акустике это ультразвуковые пучки, создаваемые мощными пьезоэлектрическими излучателями. Использование интенсивных акустических пучков связано как с задачами подводной связи и промышленной ультразвуковой диагностики, так и с применением мощного ультразвука в медицине для лечебного или хирургического воздействия на биологическую ткань, безоперационного разрушения почечных камней, остановки кровотечений.

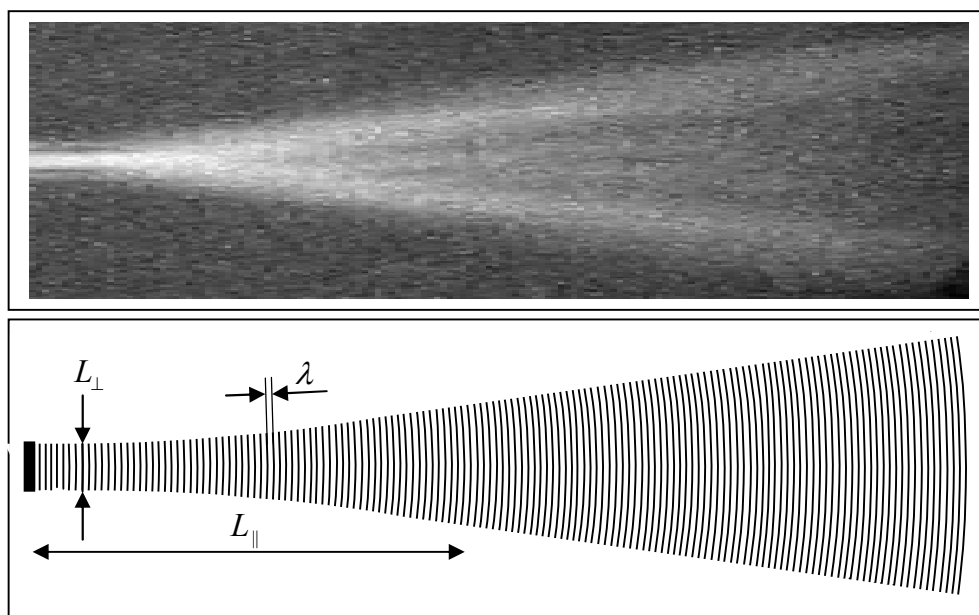


Рис. 2.1. Пояснение структуры волнового пучка. На верхнем рисунке приведена фотография теневой картины, которую создаёт ультразвуковой пучок в воде. Более светлые области соответствуют более высокой интенсивности волны. На нижнем рисунке поясняется тонкая структура пучка. Излучатель ультразвука расположен слева, волна распространяется слева направо. Тонкими частыми линиями показаны волновые фронты внутри пучка. Поперечный размер пучка $L_{\perp}$ много больше длины волны λ , а его характерный продольный размер $L_{\parallel}$ намного превышает оба этих масштаба: $L_{\parallel} \gg L_{\perp} \gg \lambda$

Аналогичные задачи существуют в оптике, где мощные световые пучки создаются лазерами. Для решения таких разных задач требуется как понимание свойств самих пучков, так и умение предсказывать эффекты, которые они могут вызывать при распространении в различных средах. Поведение интенсивных пучков, наряду с дифракцией, подвержено влиянию нелинейных эффектов, которые проявляются тем сильнее, чем больше амплитуда волны в пучке или его интенсивность. Нелинейные эффекты для акустических волн обусловлены нелинейностью уравнений гидродинамики, а также нелинейными свойствами среды, т.е. зависимостью отклика среды от амплитуды волны (см. часть 1 настоящего сборника, а также приложение 2.1).

Отметим, что учет конечности амплитуды даже в случае плоских волн требует использования нелинейных уравнений, решение которых является непростой задачей. Описание нелинейных акустических волн дополнительно осложняется тем, что в акустике дисперсия скорости звука очень мала, поэтому все гармоники исходной волны находятся в фазовом синхронизме и эффективно обмениваются энергией. Образование большого количества гармоник при нелинейном распространении акустических волн делает неудобным спектральное описание, широко использующееся в нелинейной оптике. Необходимо использовать так называемый полевой подход, т.е. описывать поведение временного профиля волны, который за счет нелинейных эффектов искажается, на нем образуются крутые участки – ударные фронты. Совместное действие нелинейных и дифракционных эффектов еще более усложняет задачу.

К настоящему времени методы описания интенсивных акустических пучков довольно хорошо разработаны. Базовым уравнением здесь является уравнение Хохлова – Заболотской (ХЗ) [6]. Поскольку возможности аналитических методов решения уравнения ХЗ очень ограничены, важную роль играют численные методы.

Настоящая задача практикума посвящена знакомству с основными свойствами нелинейных акустических пучков и математическим аппаратом для их исследования. Численный алгоритм и соответствующая база данных решений уравнения ХЗ для использования в интерфейсе были созданы при активном участии аспиранта кафедры акустики А.Е. Пономарёва.

2.2. Теория

2.2.1. Уравнение Хохлова – Заболотской для нелинейных дифрагирующих акустических пучков

Последовательный вывод уравнения Хохлова – Заболотской из полной системы уравнений гидродинамики приведен в Приложении 2.1. Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p', \quad (2.1)$$

где p' – акустическое (избыточное) давление, c_0 – скорость звука, ρ_0 – плотность, ε – параметр акустической нелинейности среды. Предполагается, что ось пучка направлена вдоль оси Ox , т.е. x – координата в направлении распространения волны. Переменная $\tau = t - x/c_0$ имеет смысл времени в «бегущей» в направлении x со скоростью звука c_0 системе координат, $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – лапласиан по поперечным координатам y и z . Для важного случая аксиально-симметричных пучков, которые и будут рассматриваться далее в данной работе, поперечный лапласиан имеет вид $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ – расстояние от оси в поперечном направлении.

Параметр ε является безразмерным и характеризует нелинейные свойства среды. Для газов, подчиняющихся адиабатическому уравнению состояния, нелинейный параметр равен $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$, $\gamma = C_p/C_v$ – отношение удельных теплоемкостей. Таким образом, для воздуха (двухатомный газ) нелинейный параметр равен $\varepsilon = 1.2$. Для конденсированных сред величина ε обычно составляет 3–10. В структурно-неоднородных средах (газированная вода, твердое тело с трещинами) значения ε могут достигать $10^3 - 10^4$.

Правая часть уравнения (2.1) описывает дифракционные эффекты, второе слагаемое в левой части – нелинейные эффекты. Общего аналитического решения уравнения (2.1) не существует, поэтому для предсказания поведения нелинейных пучков приходится обращаться к численному моделированию. В некоторых случаях возможно получение приближенных аналитических решений. Рассмотрим вначале два таких предельных случая: распространение плоской нелинейной волны (когда отсутствует дифракция) и поведение линейного дифрагирующего пучка (когда отсутствует нелинейность) [4].

2.2.2. Нелинейные эффекты при распространении плоских волн в отсутствие дифракции

Распространению нелинейных плоских волн посвящен начальный раздел настоящего сборника, поэтому некоторые из выписанных ниже соотношений будут повторять выражения, уже обсужденные в части 1 настоящего сборника.

Плоскую волну можно считать предельным частным случаем волнового пучка. Если пучок с равномерным поперечным распределением акустического давления имеет достаточно большие размеры, то в уравнении Хохлова – Заболотской (2.1) можно считать $\Delta_{\perp} p' \approx 0$, т.е. пренебречь эффектами дифракции. Этот случай соответствует приближению плоской волны, в которой акустическое давление не зависит от поперечных координат: $p' = p'(x, \tau)$. Интегрируя уравнение (2.1) с нулевой правой частью по времени, получим: $\partial p' / \partial x - (\varepsilon / \rho_0 c_0^3) p' \partial p' / \partial \tau = C(x)$, где константа интегрирования C не зависит от времени τ . Поскольку статическое избыточное давление предполагается отсутствующим $p'(\tau \rightarrow \pm \infty) = 0$, то указанная константа равна нулю. Получившееся уравнение

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} = 0 \quad (2.2)$$

называется *уравнением простых* или *римановых волн*. Уравнение (2.2) имеет точное аналитическое решение:

$$p' = \Phi \left(\tau + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' x \right), \quad (2.3)$$

где функция $\Phi(t) = p'(x=0, t=\tau)$ описывает временной профиль волны на входе в нелинейную среду. Это решение имеет неявный вид, поскольку искомое акустическое давление $p' = p'(x, \tau)$ присутствует также в аргументе функции Φ . Однако эту трудность можно обойти, если решение $p' = p'(x, \tau)$ записать в виде $\tau = \tau(x, p')$. Из решения (2.3) следует:

$$\tau = \Phi^{-1}(p') - (\varepsilon / \rho_0 c_0^3) p' x, \quad (2.4)$$

где Φ^{-1} – функция, обратная к функции Φ (не путать с $1/\Phi$!). Получившееся выражение (2.4) является уже явным, и для построения решения нужно просто сложить исходный профиль волны $\tau = \Phi^{-1}(p')$ с линейной функцией

$$\Delta \tau = -(\varepsilon / \rho_0 c_0^3) p' x.$$

Описанное построение следует и из формулы (2.3): нелинейное искажение профиля происходит таким образом, что различные его участки испытывают различную задержку $p' = \Phi[\tau - \Delta \tau(p')]$. Это означает, что скорость распространения участка с локальным давлением p' отличается от скорости звука c_0 : участки с более высоким положительным давлением распространяются быстрее, а участки с отрицательным давлением (области разрежения), наоборот, распространяются медленнее.

На рис. 2.2 показано характерное искажение волны, форма которой на входе в среду является синусоидальной:

$$\Phi(t) = p'(x=0, t) = p_0 \sin \omega_0 t. \quad (2.5)$$

По мере распространения участки с положительным давлением «набегают» на участки с отрицательным давлением, в результате чего

участки с увеличивающимся давлением становятся более крутыми, а участки со спадающим давлением, напротив, более пологими. Согласно формуле (2.4), на расстоянии

$$x_p = \frac{\rho_0 c_0^3}{\varepsilon \omega_0 p_0} \quad (2.6)$$

профиль в точках $\tau = (2\pi/\omega_0) \cdot n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ становится вертикальным, а при дальнейшем увеличении расстояния возникает неоднозначность – «перехлест». На рис. 2.2 подобный профиль изображен для $x = 4x_p$. Такое неоднозначное решение физически невозможно, поскольку акустическое давление в заданный момент времени в заданной точке пространства должно иметь однозначно определенное значение. Это противоречие указывает на нарушение использованного приближения идеальной среды на крутых участках профиля волны. Более точный анализ с учетом диссипативных эффектов (вязкости и теплопроводности) показывает, что, начиная с расстояния $x = x_p$, профиль волны становится разрывным. Поэтому расстояние x_p называется *длиной образования разрыва*, или *нелинейной длиной*. Области разрывов (скачков давления) называют *ударными фронтами*, а волну называют *ударной волной*.

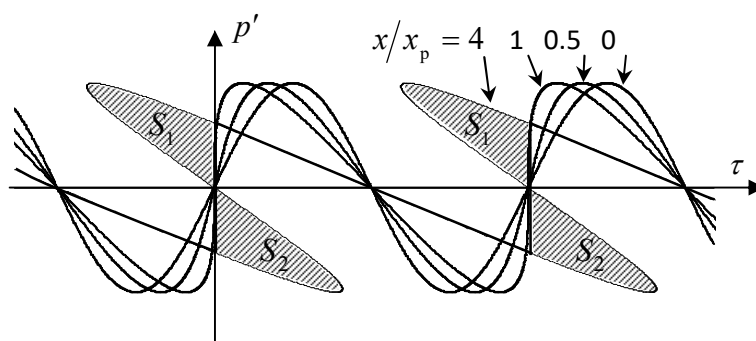


Рис. 2.2. Искажение формы исходно синусоидальной плоской волны при распространении в нелинейной среде. Показаны два периода волны на различных расстояниях $x/x_p = 0, 0.5, 1$ и 4

Положение ударного фронта может быть найдено из закона сохранения импульса, который приводит к «правилу равных площадей»: разрыв проводится так, чтобы площади S_1 и S_2 , которые он отсекает от участков неоднозначности, были равны (на рис. 2.2 указанные площади заштрихованы). Отметим, что после образования разрыва начинается диссипация энергии волны. Физически это связано с проявлением диссипативных эффектов на ударных переходах. Интересно, что диссипация энергии волны на разрывах не зависит от самих значений коэффициентов вязкости и теплопроводности при условии их достаточной малости. Поэтому такое поглощение называют *нелинейным поглощением*.

При $x > x_p$ амплитуда разрыва возрастает от нуля (при $x = x_p$) до максимального значения p_0 , которое достигается на расстоянии $x = \frac{\pi}{2} x_p$, когда максимум исходно гармонической волны «набегает» на разрыв. При $x > 2x_p$ волна приобретает пилообразную форму, периодические скачки давления в которой соединяются почти линейными участками (см. рис. 2.2, профиль при $x = 4x_p$). Нетрудно показать, что амплитуда пилообразной волны уменьшается по закону:

$$p'_{\max} = p_0 \cdot \frac{\pi}{1 + x/x_p} . \quad (2.7)$$

Заметим, что поскольку $x/x_p \sim x \cdot p_0$, то, согласно (2.7), амплитуда волны $p'_{\max}$ уменьшается тем быстрее, чем больше исходная амплитуда p_0 . Таким образом, затухание пилообразной волны действительно носит нелинейный характер.

Во многих случаях интерес представляет поведение спектра волны. Примечательно, что при граничном условии (2.5) спектр волны с профилем (2.3) может быть описан аналитически:

$$p' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0\tau), \quad (2.8)$$

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{2J_n(nx/x_p)}{nx/x_p} \quad (x < x_p), \quad (2.9)$$

где J_n – функции Бесселя порядка n . Решение (2.9) для спектральных амплитуд нелинейной волны называется *решением Бесселя – Фубини*. Оно не учитывает возможность образования разрывов и поэтому справедливо лишь при $x < x_p$. Из формулы (2.9) следует, что на малых по сравнению с нелинейной длиной расстояниях зависимость амплитуд гармоник от расстояния является степенной:

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{1}{n!} \left(\frac{nx}{2x_p} \right)^{n-1}, \quad x \ll x_p. \quad (2.10)$$

Таким образом, на малых расстояниях $A_n \sim x^{n-1}$, т.е. амплитуда гармоник возрастает тем быстрее, чем ниже ее номер. Вторая гармоника растет линейно с расстоянием, третья – квадратично, и т.д. При $x \rightarrow x_p$ амплитуды разных гармоник уже становятся сравнимыми по величине, хотя более высокие гармоники по-прежнему имеют меньшую амплитуду (см. рис. 2.3). На расстояниях $x \geq x_p$ решение также можно выразить через специальные функции, но эта форма записи менее удобна и проще получить решение численно. При $x > 2x_p$, как уже отмечалось, форма волны становится близкой к пилообразному профилю с линейными участками. На этом этапе спектр можно записать в следующем виде:

$$\frac{A_n}{p_0} \approx \frac{2}{n(1+x/x_p)} \quad (x > 2x_p), \quad (2.11)$$

т.е. спектр волны приобретает асимптотику $A_n \sim A_p n^{-1}$, для которой амплитуда гармоник пропорциональна амплитуде разрыва и обратно пропорциональна номеру гармоники. Зависимость амплитуд первых пяти гармоник от расстояния приведена на рис. 2.3.

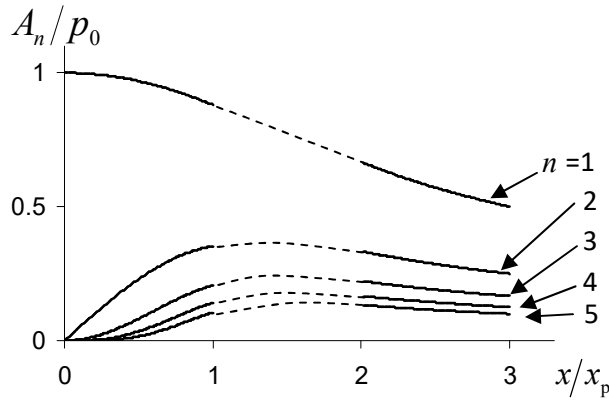


Рис. 2.3. Амплитуды первых пяти гармоник, нормированные на амплитуду исходной волны, в зависимости от расстояния. При $x < x_p$ кривые соответствуют точному решению (2.9), а при $x > 2x_p$ построены на основе асимптотики (2.11)

Особенностью спектра нелинейно искаженной плоской волны является отсутствие косинусных составляющих в выражении (2.8), что означает синфазность всех появляющихся в результате нелинейных взаимодействий гармоник. Это свойство является следствием того, что акустические волны разных частот распространяются с одинаковыми скоростями, т.е. не испытывают дисперсии.

2.2.3. Дифракционные эффекты в линейных пучках. Гауссовский пучок

В предыдущем разделе мы рассмотрели нелинейное распространение плоской волны в отсутствие дифракции. Другим интересным предельным случаем является дифракция пучков при отсутствии нелинейности, т.е. для волн бесконечно малой амплитуды. Пренебрегая в уравнении Хохлова – Заболотской (2.1) нелинейным членом, получим

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau \partial x} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p' . \quad (2.12)$$

Поскольку уравнение (2.12) линейно, то его произвольное решение можно представить в виде суперпозиции невзаимодействующих гармонических волн. Поэтому достаточно рассмотреть решение для гармонического во времени сигнала $p' = A \cdot \sin(\omega_0 \tau - \varphi)$, где $A(x, y, z)$ и $\varphi(x, y, z)$ – амплитуда и фазовая задержка волны. Это представление удобно переписать с использованием комплексной записи:

$$p' = A \cdot \sin(\omega_0 \tau - \varphi) = \text{Im}(C \cdot e^{-i\omega_0 \tau}), \quad (2.13)$$

где $C = A \cdot e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда волны. Подставляя решение (2.13) в уравнение (2.12), получим следующее уравнение для комплексной амплитуды $C = C(x, y, z)$:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = i \frac{c_0}{2\omega_0} \Delta_{\perp} C. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) называется *параболическим уравнением теории дифракции* и широко используется, например, при исследовании световых пучков и процессов в открытых резонаторах лазеров [Когельник Х., Ли Т. Резонаторы и световые пучки лазеров. – ТИИЭР, 1966, т. 54, № 10, с. 95–113].

Особый интерес представляют так называемые гауссовские пучки. Они создаются источниками, поперечное распределение амплитуды на которых имеет аксиально-симметричный колоколообразный вид, описываемый гауссовским распределением:

$$C(x=0, y, z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a_0^2}\right) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right). \quad (2.15)$$

Здесь $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ – поперечная координата, отсчитываемая от оси пучка; p_0 – начальная амплитуда волны на оси пучка при $r=0$; a_0 – характерный поперечный размер пучка, называемый *радиусом пучка*. Решение параболического уравнения дифракции (2.14) при граничном условии (2.15) имеет следующий вид [5]:

$$C = \frac{p_0}{1 + ix/x_d} \cdot \exp\left(-\frac{r^2/a_0^2}{(1 + ix/x_d)}\right), \quad (2.16)$$

где введено обозначение:

$$x_d = \frac{\omega_0 a_0^2}{2c_0}. \quad (2.17)$$

Как видно из решения (2.16), пространственный масштаб x_d характеризует расстояние, на котором дифракционные эффекты становятся заметными, поэтому он называется *дифракционной* или *френелевской длиной*. Область $x < x_d$ называется *ближней зоной* излучателя; используется также название *прожекторная зона*, отражающее слабую расходимость пучка на этих расстояниях. Область $x \gg x_d$ называется *зоной дифракции Фраунгофера* или *дальней зоной* дифракции. Заметим, что, согласно выражению (2.17) для x_d , дифракционные искажения быстрее проявляются для более низких частот. В то же время важным является и размер источника: дифракционная длина пропорциональна квадрату его диаметра, т.е. чем меньше размер источника, тем на меньших расстояниях проявляется дифракция.

Учитывая соотношение (2.13), запишем решение линейной задачи дифракции для гармонического сигнала (2.16) в действительной форме:

$$p' = \frac{p_0 e^{-\frac{r^2/a_0^2}{1+(x/x_d)^2}}}{\sqrt{1+(x/x_d)^2}} \cdot \sin\left[\omega_0 \tau + \arctan(x/x_d) - \frac{x/x_d}{1+(x/x_d)^2} \cdot \frac{r^2}{a_0^2}\right]. \quad (2.18)$$

Как видно из решения (2.18), гауссовская поперечная структура пучка сохраняется, однако его характерные параметры изменяются по мере распространения волны.

Выпишем в явном виде выражения, описывающие изменение основных характеристик пучка с расстоянием:

$$A(x,0) = \frac{P_0}{\sqrt{1 + (x/x_d)^2}} \quad \text{— амплитуда волны на оси пучка;} \quad (2.19)$$

$$a(x) = a_0 \sqrt{1 + (x/x_d)^2} \quad \text{— радиус пучка;} \quad (2.20)$$

$$\varphi(0,x) = \arctg(x/x_d) \quad \text{— дифракционный набег фазы на оси пучка;} \quad (2.21)$$

$$R = x + \frac{x_d^2}{x} \quad \text{— радиус кривизны волнового фронта.} \quad (2.22)$$

Как видно из формул (2.19)–(2.22), все характеристики волны в гауссовском пучке зависят от координаты распространения x , причем характерные изменения происходят на масштабе x_d (рис. 2.4).

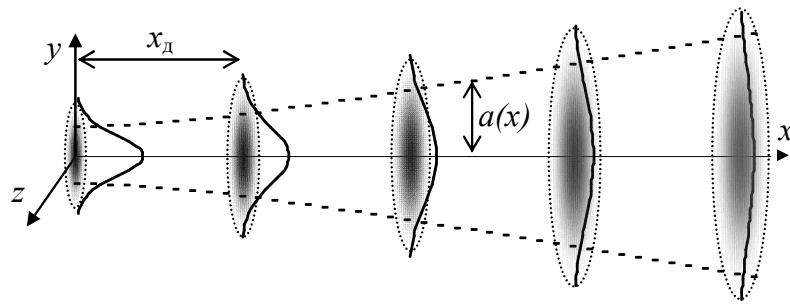


Рис. 2.4. Наглядное представление дифрагирующего гауссовского пучка

Отметим коротко основные особенности поведения пучка по сравнению с плоской волной. На малых расстояниях, $x < x_d$, в ближней зоне источника, амплитуда волны на оси пучка (2.19) почти не изменяется. При увеличении расстояния амплитуда начинает уменьшаться и на больших расстояниях, $x \gg x_d$, начинает спадать обратно пропорционально расстоянию, т.е. ведет себя как амплитуда в сферически расходящейся волне. Поперечный радиус пучка (2.20) в ближней зоне также почти не изменяется, а на больших расстояниях возрастает линейно с расстоянием, т.е. граница пучка принимает вид конуса с малым углом раскрытия $2a/x = 2a_0/x_d$. Несколько необычным является поведение фазы волны на оси (2.21): в отличие от амплитуды

и радиуса пучка, которые в ближней зоне почти постоянны, фаза волны на оси, напротив, заметно изменяется именно в ближней зоне. При выходе из ближней зоны ($x = x_d$) волна приобретает фазовый сдвиг, равный $\pi/4$, а в дальней зоне ($x \gg x_d$) – постоянный сдвиг, равный $\pi/2$. На малых расстояниях дополнительный набег фазы на оси растет линейно с расстоянием $\varphi(0, x) \approx x/x_d$, т.е. фазовая скорость волны превышает величину c_0 . Это «дифракционное ускорение» волны является частотно зависящим: низкие частоты распространяются вблизи источника быстрее, чем высокие частоты. Что касается радиуса кривизны волнового фронта (2.22), то он равен бесконечности на излучателе, где фазовый фронт является плоским, затем радиус начинает уменьшаться, при этом фазовый фронт становится выпуклым, и на больших расстояниях радиус вновь увеличивается, причем пропорционально расстоянию, как и должно быть в сферически расходящейся волне. Именно превращением плоского фронта в выпуклый в ближней зоне можно объяснить дифракционное ускорение фронта волны в приосевой области.

Напомним, что выписанные формулы описывают лишь медленно изменяющиеся в пространстве амплитудно-фазовые параметры. Полное же акустическое давление является осциллирующей во времени и в пространстве функцией и локально выглядит как плоская синусоидальная волна. Пучок по мере распространения расширяется, т.е. происходит его дифракционное расхождение.

Удобство гауссовского поперечного профиля заключается в том, что в линейном приближении пучок при своем распространении сохраняет гауссовский профиль. Благодаря этому свойству гауссовские пучки намного проще исследовать, чем пучки другой пространственной структуры. В оптике, кроме того, гауссовские пучки часто реализуются и в эксперименте, поскольку поле вида (2.15) соответствует так называемой нулевой поперечной моде лазерных резонаторов [Гончаренко А.М. Гауссовы пучки света. – Минск: Наука и техника, 1977]. В акустике распределение давления

на излучателе, как правило, отличается от гауссовского. Так, например, на поверхности пьезоэлектрических источников распределение амплитуды близко к равномерному («поршневые» излучатели). Из-за резких границ излучателя и возникающих краевых эффектов акустическое поле вблизи таких источников оказывается сильно осциллирующим и поэтому трудным для точного анализа. В то же время многие эффекты в реальных пучках и в гауссовских пучках происходят похожим образом, поскольку колоколообразное распределение правильно учитывает главную особенность в структуре пучка: его амплитуда максимальна вблизи оси и уменьшается на краях. В данной задаче практикума мы будем рассматривать именно гауссовские пучки.

Как отмечалось во введении (п. 2.1) и использовалось при выводе уравнения ХЗ (Приложение 2.1), в пучке можно выделить три характерных масштаба – длину волны λ , поперечный размер пучка $L_{\perp}$ и его продольный размер $L_{\parallel}$, причем $L_{\parallel} \gg L_{\perp} \gg \lambda$. С учетом полученных выше результатов можно количественно проверить справедливость этих предположений. Действительно, для гауссовского пучка $L_{\perp} = 2a_0$ – это начальный диаметр пучка, а $L_{\parallel} = x_d$ – длина дифракционной расходимости. Учитывая, что длина волны связана с частотой как $\lambda = 2\pi c_0/\omega_0$, получим: $L_{\perp}/L_{\parallel} = (4/\pi)\lambda/L_{\perp} \approx \lambda/L_{\perp}$, т.е. если диаметр источника намного превышает длину волны, то продольная протяженность пучка будет намного превышать его диаметр.

2.2.4. Запись уравнения Хохлова – Заболотской в безразмерных переменных

Выше было показано, что эффекты нелинейности и дифракции проявляются, соответственно, на масштабах x_p и x_d – см. выражения (2.6) и (2.17). От соотношения этих масштабов зависит, какой из указанных двух эффектов оказывает большее влияние на поведение

акустического пучка. Это становится более понятным, если привести уравнение Хохлова – Заболотской к безразмерному виду. Разделим входящие в уравнение величины на их характерные значения: акустическое давление – на начальную амплитуду волны: $V = p'/p_0$, поперечную координату – на начальный радиус пучка: $R = r/a_0$, продольную координату – на дифракционную длину: $z = x/x_d$, время домножим на циклическую частоту: $\theta = \omega_0 \tau$. Заметим, что для безразмерных координат здесь использованы те же обозначения z и R , что и выше, где они обозначали одну из поперечных координат и радиус кривизны волнового фронта. Это не должно вызвать недоразумений, поскольку последние две величины далее упоминаться не будут. В новых переменных уравнение Хохлова – Заболотской принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial z} - N \cdot V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V, \quad (2.23)$$

где $\Delta_{\perp} V = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right)$, а единственный безразмерный параметр N равен отношению дифракционной (2.17) и нелинейной (2.6) длин:

$$N = \frac{x_d}{x_p} = \frac{\varepsilon \omega_0^2 a_0^2 p_0}{2 \rho_0 c_0^4}. \quad (2.24)$$

Из записи уравнения Хохлова – Заболотской в виде (2.23) видно, что параметр N , пропорциональный амплитуде волны p_0 , характеризует относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов. Безразмерная запись уравнений оказывается особенно удобной при численном моделировании. В этом случае результат вычислений зависит лишь от величины N , а не от большого количества размерных параметров p_0 , ω_0 , ρ_0 , a_0 , c_0 и коэффициента нелинейности ε , совокупность которых определяют значение N . Иначе говоря, решение, полученное для одного значения N ,

соответствует не одному случаю, а целому набору физических ситуаций.

Отметим, что иногда продольную координату нормируют не на дифракционную длину, а на длину образования разрыва: $\sigma = x/x_p$, а безразмерный параметр вводится как $N_1 = 1/N = x_p/x_d$ – так называемый параметр Хохлова. Тогда уравнение (2.23) можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{N_1}{4} \Delta_{\perp} V$. Здесь мы будем использовать обозначения (2.23) и (2.24).

2.2.5. Нелинейные и дифракционные эффекты в мощных пучках. Плоский источник гармонических волн с гауссовским поперечным распределением амплитуды

В мощном акустическом пучке проявляются многие особенности как нелинейной плоской волны, так и линейного дифрагирующего пучка. Возникают и новые интересные волновые явления, обусловленные совместным действием нелинейности и дифракции. Для их анализа требуется решить уравнение Хохлова – Заболотской (2.23). Общее решение этого уравнения получить не удастся, поэтому приходится обращаться к его численному моделированию, чему и посвящена практическая часть данной задачи практикума. Однако в некоторых предельных случаях можно получить приближенные аналитические решения, позволяющие сделать полезные качественные выводы. Рассмотрим применительно к пучку с исходно гауссовским поперечным профилем амплитуды и синусоидальной временной формой два таких случая: случай преобладания нелинейных эффектов над дифракционными, $N \gg 1$, и обратный этому случай слабой нелинейности $N \ll 1$.

Если нелинейность существенно преобладает над дифракцией (т.е. рассматривается широкий пучок, нелинейные искажения в котором происходят до того, как проявится дифракционная

расходимость), то $N \gg 1$, и в пренебрежении правой частью уравнение (2.23) переходит в уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \text{ где } \sigma = N \cdot z = x/x_p. \quad (2.25)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (2.25) представляет собой запись в безразмерном виде уравнения простых волн (2.2). Таким образом, в этом приближении решение будет зависеть от поперечной координаты R лишь как от параметра, т.е. все происходит так, как если вдоль лучей, параллельных оси пучка, независимо распространяются нелинейные плоские волны с различными начальными амплитудами на различных лучах. В размерных переменных амплитуда волны меняется в зависимости от r как $p_0 \exp(-r^2/a_0^2)$, поэтому длина образования разрыва на различных лучах также будет зависеть от поперечной координаты:

$$x_p(r) = x_p(0) \cdot \exp(r^2/a_0^2), \quad (2.26)$$

где $x_p(0) = \rho_0 c_0^3 / (\varepsilon \omega_0 p_0)$ (см. формулу (2.6)). Ниже вместо $x_p(0)$ для краткости будем писать просто x_p , в соответствии с формулой (2.6). Как видно из (2.26), вблизи оси, где амплитуда волны максимальна, нелинейные эффекты проявляются на меньших расстояниях. По мере удаления от оси пучка амплитуда волны уменьшается, нелинейные эффекты ослабевают, и длина образования разрыва увеличивается. С этим обстоятельством связан ряд интересных нелинейных эффектов, таких, как уменьшение поперечного размера пучков высших гармоник с ростом номера гармоник; более интенсивное затухание амплитуды волны вблизи оси пучка и связанное с этим явление выравнивания (изотропизации) поперечного распределения амплитуды волны по сравнению с линейным случаем. Рассмотрим эти эффекты более подробно.

Уменьшение поперечных размеров пучков высших гармоник.
Амплитуды гармоник в точке с координатами (x, r) можно получить

из формулы (2.9) с учетом выражения (2.26) для длины образования разрыва:

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{2J_n(\exp(-r^2/a_0^2) \cdot nx/x_p)}{nx/x_p} . \quad (2.27)$$

Как видно, зависимость амплитуд гармоник от поперечной координаты не является гауссовской, т.е. нелинейный пучок, в отличие от линейного, не сохраняет свою поперечную структуру. Свойство гауссовости выполняется лишь на малых расстояниях, при $x \ll x_p$. Действительно, разлагая в (2.27) функции Бесселя при малых значениях x/x_p , получим:

$$\left. \frac{A_n}{p_0} \right|_{x \ll x_p} \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{nx}{2x_p} \right)^{n-1} \cdot \exp(-nr^2/a_0^2), \quad (2.28)$$

Отсюда видно, что зависимость амплитуды n -й гармоники от поперечной координаты имеет вид $A_n \sim \exp(-r^2/a_n^2)$, где $a_n = a_0/\sqrt{n}$. Таким образом, при преобладании нелинейных эффектов $N \gg 1$ структура пучка каждой из гармоник на малых расстояниях $x \ll x_p$ является гауссовской, причем поперечный радиус пучка уменьшается с ростом номера гармоники как $1/\sqrt{n}$.

Изотропизация (выравнивание) поперечного распределения амплитуды волны. Этот эффект проявляется на этапе, когда заметным становится нелинейное затухание волны, т.е. после образования пилообразного профиля на расстояниях $x/x_p > \pi/2$. Поскольку вблизи оси пучка разрыв образуется на меньших расстояниях, чем на его периферии, то эффективное поглощение энергии на разрывах и быстрое уменьшение амплитуды волны также начинается раньше вблизи оси. Согласно (2.7) и (2.26), поперечное распределение амплитуды волны при $x > 2x_p$ выглядит так:

$$p'_{\max} \approx p_0 \cdot \exp(-r^2/a_0^2) \cdot \frac{\pi}{1 + \exp(-r^2/a_0^2) \cdot x/x_p} . \quad (2.29)$$

Если обозначить $V_{\max} = p'_{\max}/p_0$, то в безразмерном виде формула (2.29) принимает вид

$$V_{\max} \approx \exp(-R^2) \cdot \frac{\pi}{1 + \sigma \cdot \exp(-R^2)}. \quad (2.30)$$

Распределение (2.30) показано на рис. 2.5 для трех различных расстояний. Как видно из рисунка, с увеличением расстояния исходное колоколообразное распределение постепенно превращается в равномерное (П - образное). Эффект изотропизации наглядно проявляется на расстояниях $x \gg x_p$ (т.е. $\sigma \gg 1$), когда $V_{\max} \rightarrow \pi/\sigma$ независимо от R , и в пределах основной центральной части пучка амплитуда волны практически не зависит от поперечной координаты. При этом, как следует из (2.7) и (2.11), эффект изотропизации имеет место и для амплитуд гармоник. Как следствие, пучки всех гармоник с увеличением расстояния приобретают примерно одинаковую структуру и ширину.

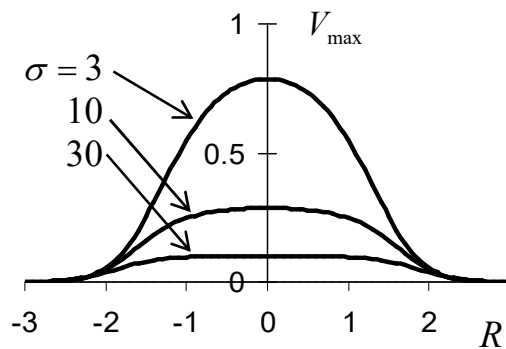


Рис. 2.5. Поперечное распределение амплитуды волны в нелинейном пучке на различных расстояниях $\sigma = x/x_p$

Рассмотрим теперь другой предельный случай малой нелинейности $N \ll 1$. В этом случае решение уравнения (2.23) можно искать методом последовательных приближений, используя разложение по малому параметру N : $V = V_0 + N \cdot V_1 + N^2 \cdot V_2 + \dots$ Подставив это представление в уравнение (2.23) и приравнивая члены при одинаковых степенях N , получим бесконечную цепочку

уравнений. Выпишем здесь лишь два первых уравнения этой цепочки, соответствующих нулевому и первому приближениям:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V_0 = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (V_0^2). \quad (2.32)$$

Граничное условие (2.15), соответствующее гауссовскому пучку, в безразмерных обозначениях будет выглядеть для V_0 и V_1 следующим образом: $V_0(z=0, R, \theta) = \exp(-R^2) \sin \theta$, $V_1(z=0, R, \theta) = 0$. Уравнение нулевого приближения (2.31) есть безразмерная запись уравнения (2.12), т.е. согласно соотношениям (2.13) и (2.16) его решением является функция

$$V_0 = \frac{i}{2} \left\{ \frac{e^{-R^2/(1+iz)}}{1+iz} \cdot e^{-i\theta} - \frac{e^{-R^2/(1-iz)}}{1-iz} \cdot e^{i\theta} \right\}. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.32) тогда принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V_1 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{e^{-2R^2/(1+iz)}}{(1+iz)^2} \cdot e^{-2i\theta} + \frac{e^{-2R^2/(1-iz)}}{(1-iz)^2} \cdot e^{2i\theta} \right\}. \quad (2.34)$$

Источник в правой части (2.34) имеет удвоенную частоту, поэтому в первом приближении влияние нелинейности сводится к возникновению пучка второй гармоники. Решение естественно искать в виде, учитывающем структуру источника: $V_1 = F(z) \cdot e^{-2R^2/(1+iz)} \cdot e^{-2i\theta} + F^*(z) \cdot e^{-2R^2/(1-iz)} \cdot e^{2i\theta}$, где F — неизвестная функция, F^* — ее комплексное сопряжение. Подставляя это выражение в уравнение (2.34), для функции F получим обыкновенное дифференциальное уравнение $dF/dz + i(1+iz)^{-1} F = (i/4)(1+iz)^{-2}$, решение которого при граничном условии $F(0)=0$ легко находится: $F = (1/4) \cdot \ln(1+iz) \cdot (1+iz)^{-1}$. Таким образом, поправка 1-го приближения выражается так:

$$V_1 = \frac{\ln(1+iz) \cdot e^{-2R^2/(1+iz)}}{4(1+iz)} \cdot e^{-2i\theta} + \frac{\ln(1-iz) \cdot e^{-2R^2/(1-iz)}}{4(1-iz)} \cdot e^{2i\theta} . \quad (2.35)$$

При записи в действительном виде это выражение приобретает чуть более громоздкий вид:

$$V_1 = \frac{e^{-\frac{2R^2}{1+z^2}}}{2} \sqrt{\frac{\arctan^2 z + \frac{1}{4} \ln^2(1+z^2)}{1+z^2}} \times \\ \times \sin \left\{ 2 \left[\theta - \frac{R^2 z}{1+z^2} + \frac{1}{2} \arctan z + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\ln(1+z^2)}{2 \arctan z} \right) \right] \right\} \quad (2.36)$$

Согласно (2.33), структура пучка первой гармоники выглядит следующим образом:

$$V_0 = \frac{e^{-\frac{R^2}{1+z^2}}}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \sin \left\{ \theta - \frac{R^2 z}{1+z^2} + \arctan z \right\} . \quad (2.37)$$

Сравнивая (2.36) и (2.37), можно заключить, что пучок второй гармоники также является гауссовским, причем его радиус в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса пучка основной частоты. Можно показать, что в рассматриваемом приближении $N \ll 1$ пучки остальных высших гармоник в первом исчезающем приближении также являются гауссовскими, причем радиус пучка n -й гармоники в $\sqrt{n}$ раз меньше радиуса пучка первой гармоники, т.е. пучки гармоник оказываются «вложенными» друг в друга: $a_n = a_0 / \sqrt{n}$. Заметим, что при этом эффективные дифракционные длины разных гармоник оказываются одинаковыми: $x_d^{(n)} = n \omega_0 a_n^2 / (2c_0) = \omega_0 a_0^2 / (2c_0)$. Казалось бы, из этого следует, что разные гармоники должны дифрагировать одинаково. Отчасти это так: например, из (2.36) и (2.37) можно показать, что радиус кривизны волнового фронта и угол дифракционной расходимости (эти параметры обсуждались выше при анализе линейного пучка) оказываются действительно одинаковыми для обеих гармоник.

В то же время фазовые сдвиги для различных гармоник оказываются разными. Как следует из (2.36) и (2.37), вторая гармоника отстает по времени от первой на величину $\Delta t_{21} = \Delta \theta_{21} / \omega_0$, где фазовая задержка равна:

$$\Delta \theta_{21} = \frac{1}{2} \arctan z - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\ln(1+z^2)}{2 \arctan z} \right). \quad (2.38)$$

Согласно этому выражению, относительная задержка монотонно увеличивается в пределах всей ближней зоны, при $z \approx 3.75$ достигает максимального значения $\Delta \theta_{21} \approx 0.25$, а затем начинает очень медленно стремиться к нулю. Амплитуда второй гармоники A_2 на оси пучка, согласно (2.36), зависит от расстояния следующим образом:

$$\frac{A_2}{p_0} = \frac{N}{2} \sqrt{\frac{\arctan^2 z + \frac{1}{4} \ln^2(1+z^2)}{1+z^2}}. \quad (2.39)$$

Как видно из (2.39), на малых расстояниях амплитуда A_2 растет линейно $A_2/p_0 \approx Nz/2 = \sigma/2$, как и в приближении плоской волны (см. (2.10)). Монотонный рост продолжается до $z \approx 1.5$, где амплитуда второй гармоники достигает величины $A_2^{(\max)} \approx 0.32 N p_0$, а затем из-за расходимости пучка уменьшается приблизительно обратно пропорционально расстоянию.

Возникновение сдвига фаз между гармониками, приводящее к несимметричному искажению формы нелинейной волны — это принципиальный эффект, характерный для нелинейных дифрагирующих пучков. Фактически он означает появление дисперсии, обусловленной геометрией пучка и не связанной со свойствами среды. На рис. 2.6 построен профиль нелинейной волны, состоящей из первой и второй гармоник, между которыми имеется сдвиг фаз. Как видно, исходно синусоидальная волна искажается несимметрично: фаза сжатия ($V > 0$) оказывается более короткой и имеет большее пиковое значение, чем фаза разрежения ($V < 0$). Напомним, что в плоской волне все гармоники синфазны и поэтому фазы сжатия и разрежения искажаются одинаково.

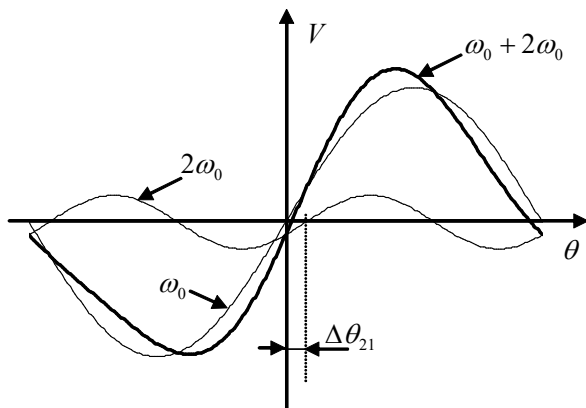


Рис. 2.6. Асимметричное искажение профиля нелинейной волны, вызванное отставанием второй гармоники от первой. Тонкими линиями показаны профили 1-й и 2-й гармоник, а толстой линией – суперпозиция этих профилей, т.е. полный профиль волны. Фазовый сдвиг между гармониками $\Delta\theta_{21}$ вызван дифракцией

Асимметричное искажение профиля, вызванное дифракцией, почти всегда наблюдается в экспериментах с нелинейными волнами. Типичная осциллограмма сигнала акустического давления, создаваемого в воде мощным ультразвуковым источником, показана на рис. 2.7. В отличие от рис. 2.6, параметры пучка на рис. 2.7 соответствуют случаю сильной нелинейности, когда в профиле волны образуется разрыв. Однако наблюдаемая асимметрия профиля также обусловлена дифракционными фазовыми сдвигами между гармониками волны. Результаты численного моделирования в случае $N = 1$, приведенные на рис. 2.8, подтверждают наблюдаемые особенности искажения профиля волны.

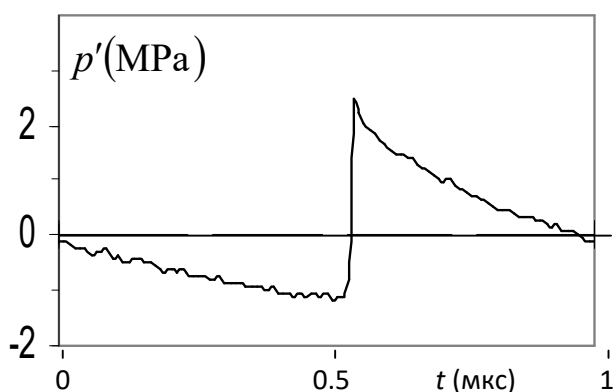


Рис. 2.7. Экспериментальная осциллограмма, иллюстрирующая асимметричное искажение профиля исходно гармонической волны на оси пучка. Показан один период волны

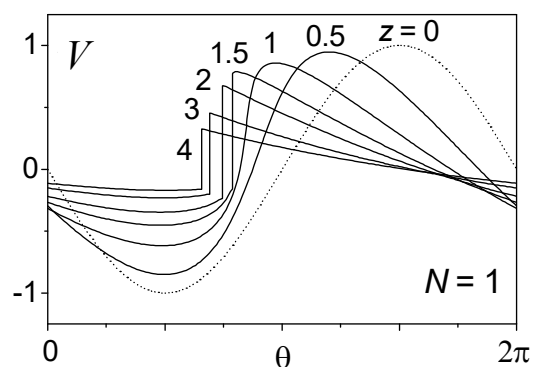


Рис. 2.8. Временные профили исходно гармонического сигнала на оси пучка ($r = 0$) на различных расстояниях z , рассчитанные численно для $N = 1$

2.3. Практическая работа

2.3.1. Последовательность действий при выполнении задачи

Для выполнения упражнений следует запустить программу “physprak.exe”. Сначала Вам будет предложено повторить основные формулы, приведенные в описании (основные уравнения, переменные, характеристики пучка). Для перехода на следующую страницу используйте кнопку «Далее».

После нескольких страниц введения появится диалоговое окно, в котором нужно ввести свою фамилию, номер группы, а также номер Вашего варианта, который следует узнать у преподавателя перед началом выполнения работы. После ввода Вами всех данных, программа распечатает лист с основными формулами и параметрами того излучателя, который будет исследоваться в работе. После этого следует перейти к выполнению упражнений.

Перед каждым упражнением на экране монитора будет показано, что изучается в данном упражнении: вид излучателя, основное уравнение, изучаемые эффекты, а также будет проведена демонстрация изменения параметров волны при ее распространении. Для управления демонстрациями используйте следующие кнопки:

 – «пуск», «пауза» и «стоп».

Далее необходимо сдать компьютерный допуск. Чтобы приступить к допуску, нажмите на соответствующую кнопку на текущей панели на мониторе. В появившемся диалоговом окне необходимо правильно ввести значения характерных пространственных масштабов, которые следует предварительно рассчитать. До тех пор, пока требуемые величины не будут вычислены правильно, невозможно продолжить выполнение упражнения. Проверенные в ходе допуска правильные величины необходимо вписать в распечатанный первый лист с параметрами задачи.

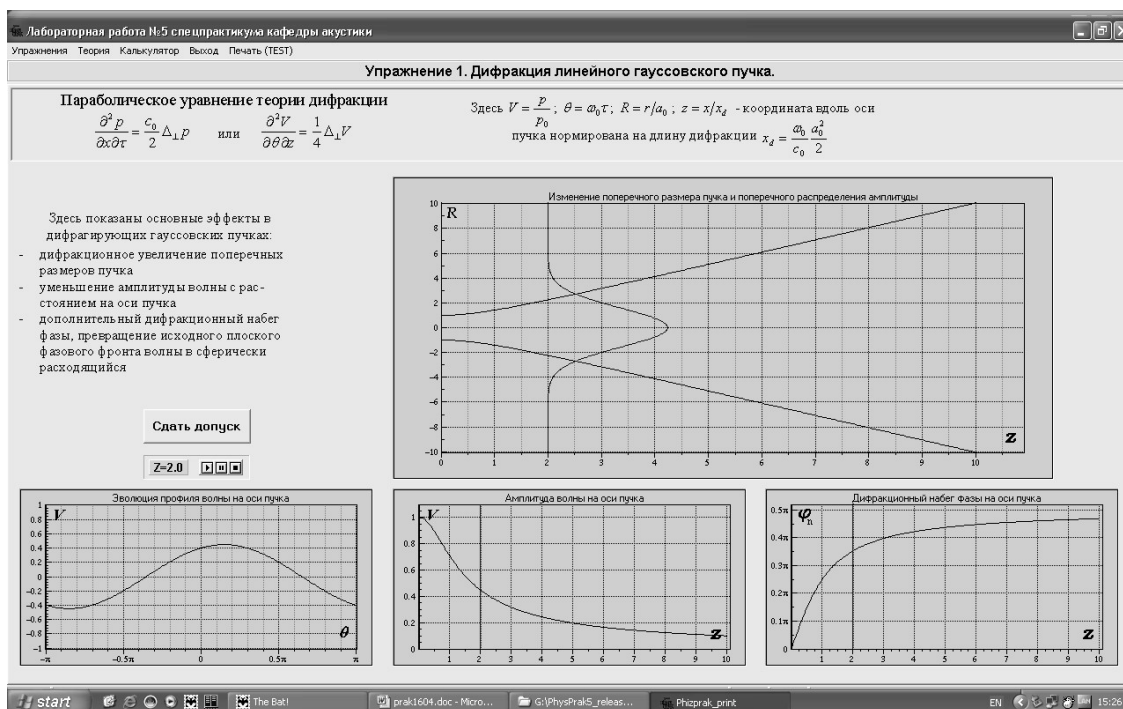
После сдачи допуска следует приступить к выполнению самого упражнения. Каждое упражнение состоит из одного или нескольких

заданий. Внимательно прочитайте текст задания на экране и подпишите ко всем представленным графикам. После того как Вы выполните упражнение и вычислите все требуемые величины, введите их в поля для ввода ответов и нажмите кнопку «Проверить ответы». Будьте внимательны, не путайте безразмерные и размерные величины. Если Вы вычислили всё без ошибок, то Вас поздравят с выполненным упражнением, и будет распечатано домашнее задание по выполненному упражнению.

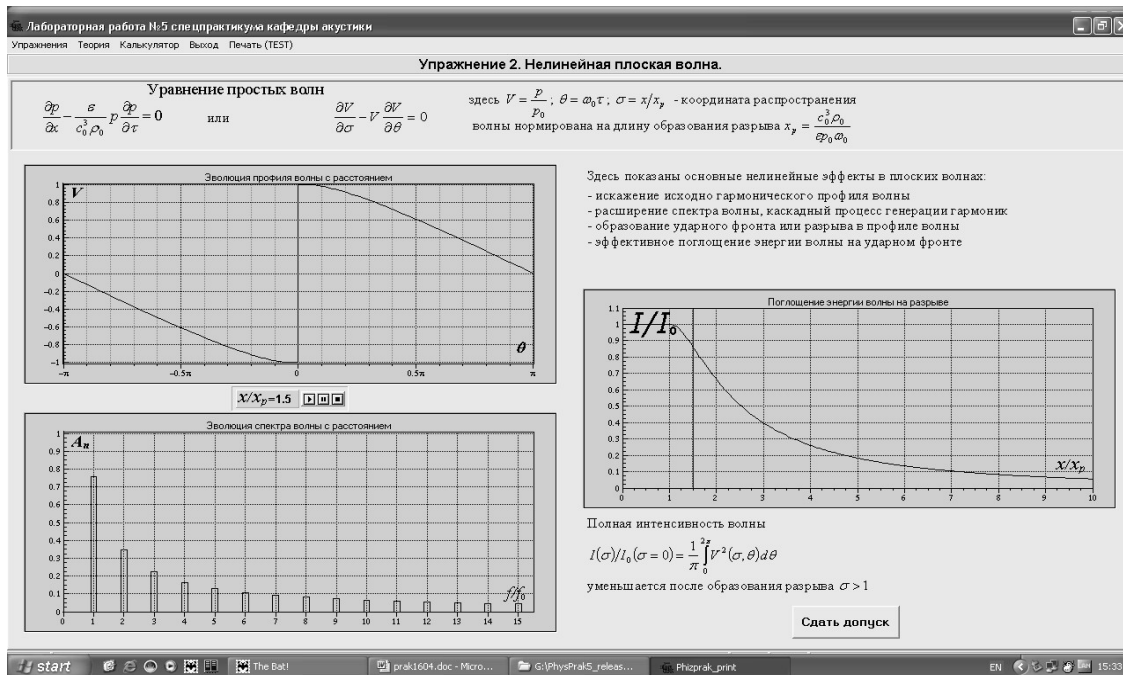
После выполнения всех упражнений у Вас должно быть 5 распечатанных листов: лист с параметрами Вашего излучателя и 4 листа, распечатанные после выполнения каждого из упражнений. С указанными пятью листами нужно подойти к преподавателю, чтобы он расписался на каждом из них. Для окончательной сдачи работы Вам необходимо выполнить все задания, указанные на этих листах.

2.3.2. Упражнения

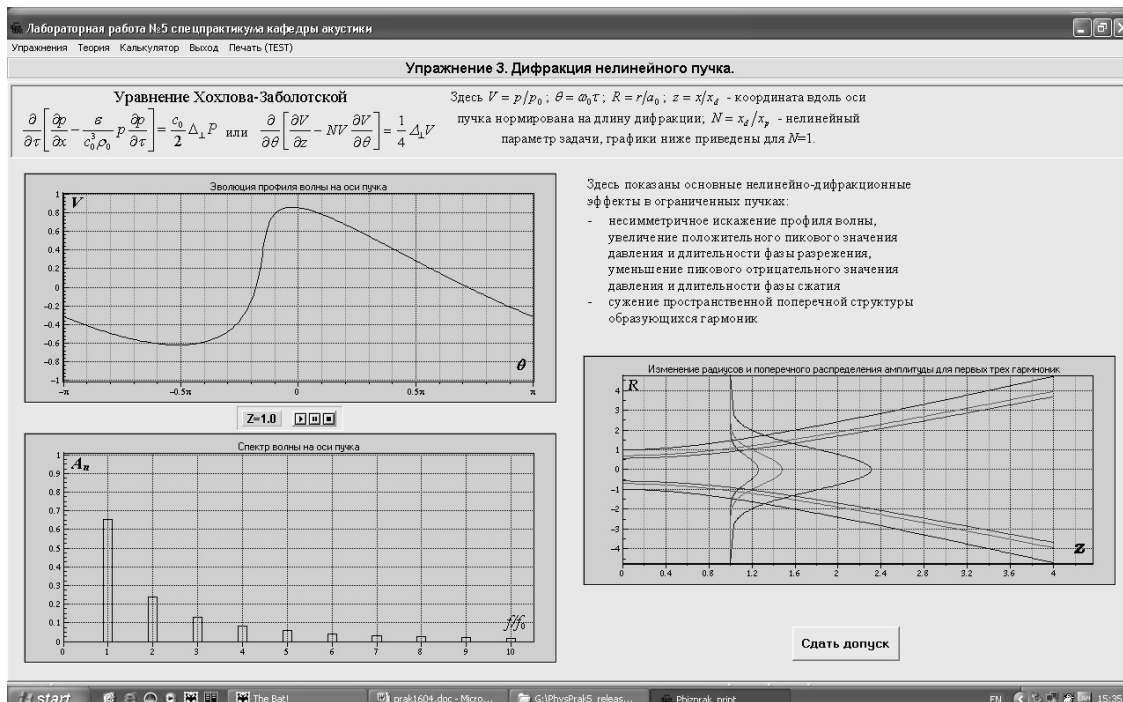
Упражнение 1. Дифракция линейного гауссовского пучка. В этом упражнении изучается дифракция пучка в отсутствие нелинейных эффектов (см. раздел 2.3).

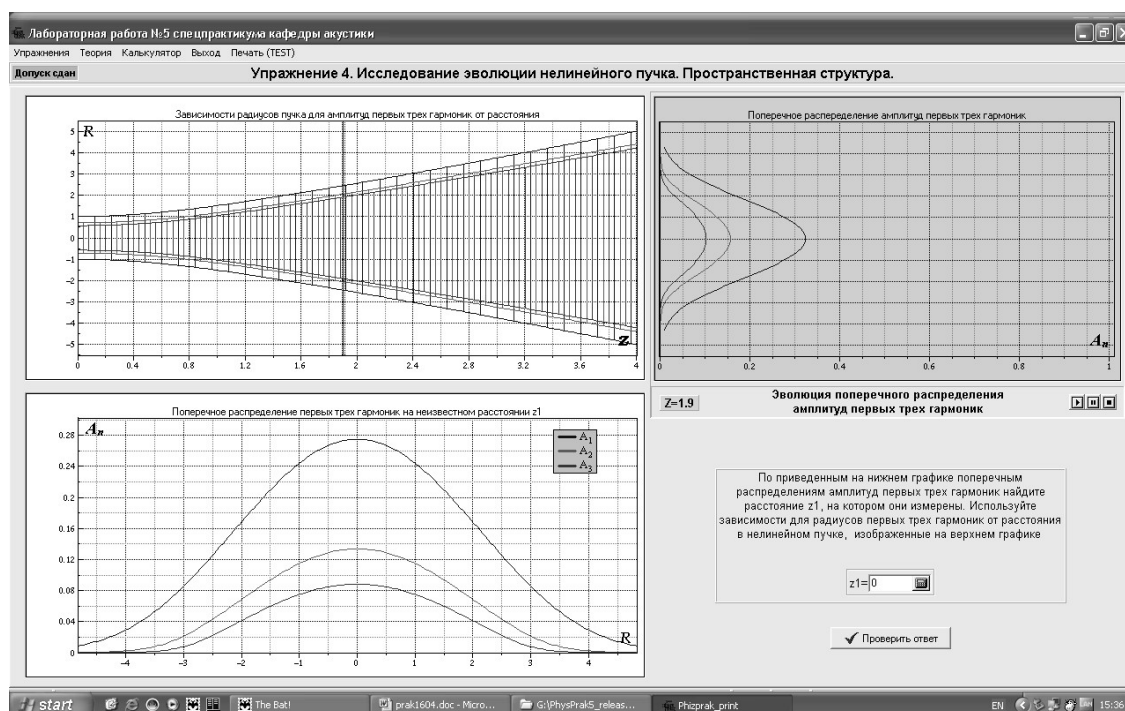


Упражнение 2. Распространение плоской нелинейной волны. В этом упражнении изучаются нелинейные эффекты для плоских волн в отсутствие дифракционных эффектов (см. раздел 2.2.2).



Упражнения 3 и 4. Дифракция нелинейного пучка. В этих упражнениях изучается совместное влияние нелинейных и дифракционных эффектов в пучках большой интенсивности. В отличие от первого и второго упражнений, в которых используются точные аналитические решения, задача об эволюции нелинейного пучка требует численного моделирования.





2.3.3. Комментарии по интерфейсу программы

1. При движении курсора мыши над любым графиком в правом нижнем углу экрана появляются координаты положения мыши в системе координат соответствующего графика.
2. Для проведения вычислений используйте встроенный простейший калькулятор, вызываемый нажатием на кнопку рядом с каждым полем ввода, или воспользуйтесь стандартным калькулятором Windows, который можно запустить через меню «Пуск».
3. В меню «Теория» Вы можете посмотреть основные уравнения, безразмерные переменные и формулы для вычисления основных характеристик пучка.
4. Не закрывайте программу до завершения всех упражнений, **иначе Вам придется все начинать заново!**

2.4. Контрольные вопросы

1. Что такое волновой пучок?
2. Написать уравнение Хохлова – Заболотской. В каких предположениях оно получено?

3. Показать, в каком приближении из уравнения Хохлова – Заболотской получается уравнение простых волн.
4. Особенности эволюции нелинейной плоской волны. Что такое длина образования разрыва?
5. Как ведет себя спектр нелинейной плоской волны?
6. Что такое пилообразная волна?
7. Что такое нелинейное поглощение?
8. Показать, в каком приближении из уравнения Хохлова – Заболотской получается параболическое уравнение теории дифракции.
9. Что такое гауссовский пучок? Какова структура акустического давления в гауссовском пучке (пояснить рисунком)?
10. Что такое длина дифракции и как она зависит от параметров источника (написать формулу)?
11. Нарисовать график зависимости от расстояния радиуса пучка и амплитуды волны на оси линейного гауссовского пучка.
12. Нарисовать график зависимости дифракционного сдвига фазы на оси гауссовского пучка. Ускорению или замедлению фазового фронта соответствует этот сдвиг? Как он зависит от частоты?
13. Запись уравнения Хохлова – Заболотской в безразмерном виде. На что нормируются параметры задачи? Чем определяется параметр подобия N ?
14. Качественное объяснение эффекта изотропизации (выравнивания) поперечного распределения в нелинейном пучке.
15. Генерация гармоник в слабонелинейном пучке. Как зависит радиус пучка n -й гармоники от номера n ? Пояснить качественно причину такой зависимости для второй гармоники. Как соотносятся длины дифракции для пучков разных гармоник?
16. Дифракционный фазовый сдвиг между гармониками. Отстает или опережает вторая гармоника первую? Как сказывается фазовый сдвиг между гармониками на форме нелинейной волны в пучке?

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.1

Вывод уравнения Хохлова – Заболотской из уравнений гидродинамики

При последовательном теоретическом описании нелинейных акустических волн следует исходить из системы уравнений гидродинамики [Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. – Л.: Судостроение, 1981]. Для идеальной жидкой или газообразной среды эта система включает в себя уравнение Эйлера, уравнение неразрывности и уравнение состояния:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p, \quad (\text{П.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{П.2})$$

$$p = p(\rho). \quad (\text{П.3})$$

Здесь p – давление, $\mathbf{u}$ – скорость, ρ – плотность среды. Уравнение (П.1) – это закон изменения количества движения (2-й закон Ньютона); уравнение неразрывности (П.2) – закон сохранения массы. Конкретный вид уравнения состояния (П.3) зависит от типа среды. Например, для идеального газа это уравнение адиабаты $p \sim \rho^\gamma$. Как видно, все три уравнения системы (П.1) – (П.3) являются *нелинейными* по переменным $\mathbf{u}$, ρ и p . Это означает, что акустические волны, которые описываются этими уравнениями, в общем случае имеют нелинейный характер.

Пусть исходное равновесное состояние среды характеризуется параметрами $\mathbf{u} = 0$, $\rho = \rho_0$ и $p = p(\rho_0) = p_0$. При наличии акустических волн среда приходит в движение и начинает сжиматься или растягиваться, т.е. изменяются все три указанных параметра $\mathbf{u}$, ρ и p . Обозначим отклонения плотности и давления от равновесных значений как ρ' и p' : $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$. Система уравнений гидродинамики с учетом этих обозначений будет иметь вид:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho' (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (\text{П.1a})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho' \nabla \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho', \quad (\text{П.2a})$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \rho'^2 + \dots \quad (\text{П.3a})$$

В первых двух уравнениях линейные по возмущениям $\mathbf{u}$, ρ' и p' члены собраны в левой части, а все нелинейные члены – в правой части уравнений. Уравнение состояния представлено в виде разложения функции $p(\rho)$ в ряд Тейлора; а соответствующие производные заданы при $\rho = \rho_0$. Введем следующие обозначения:

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0, \quad (\text{П.4})$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0. \quad (\text{П.5})$$

Как будет показано ниже, величина c_0 есть не что иное, как скорость звука. Безразмерный параметр ε характеризует нелинейные свойства среды и называется *коэффициентом акустической нелинейности*. Важной особенностью акустических волн является тот факт, что возмущения $\mathbf{u}$, ρ' и p' обычно малы: $|\mathbf{u}/c_0|$, $|\rho'/\rho_0|$, $|p'/p_0| \ll 1$, поэтому линейные и нелинейные члены в уравнениях (П.1a) – (П.3a) имеют разный порядок малости. Линейные члены являются главными, квадратично нелинейные члены имеют следующий порядок малости, а кубично нелинейные и, тем более, члены более высоких степеней играют несущественную роль. Поэтому для описания нелинейных эффектов можно ограничиться записью уравнений в квадратично нелинейном приближении. Исключая с помощью уравнения (П.3a) возмущения плотности, перепишем уравнения (П.1a) и (П.2a), сохраняя линейные и квадратичные по переменным $\mathbf{u}$ и p' члены:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx -\frac{p'}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{(\varepsilon - 1)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial}{\partial t} (p'^2) - \frac{p' \nabla \cdot \mathbf{u}}{c_0^2} - \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla) p'}{c_0^2}. \quad (\text{П.7})$$

Применим теперь к уравнению (П.6) оператор ∇ , а к уравнению (П.7) – оператор $\partial/\partial t$. Вычитая получившиеся уравнения одно из другого, придем к следующему уравнению:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = Q, \quad (\text{П.8})$$

в котором в правой части собраны все квадратично нелинейные члены:

$$Q = -\frac{1}{c_0^2} \nabla \left(p' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \rho_0 \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \frac{(\varepsilon - 1)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p'^2) + \\ + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (p' \nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) p'). \quad (\text{П.9})$$

В линейном приближении $Q = 0$ и уравнение (П.8) переходит в классическое волновое уравнение, решением которого являются волны, распространяющиеся в среде со скоростью c_0 . В частности, таким решением является плоская волна вида $p' = P(t - x/c_0)$, где функция $P(t)$ описывает временной профиль волны. При этом, как следует из (П.1а) и (П.2а), $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$ и $u_x = P(t - x/c_0)/(\rho_0 c_0)$. Если использовать указанные выражения для плоской волны в формуле (П.9) для плотности нелинейных источников Q , то получим более

компактное выражение: $Q = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P^2)$. Если волна – не плоская, но

близка к ней (волновой пучок), то формула для Q будет несколько отличаться от указанного выражения. Однако это отличие будет «поправкой к поправке», т.е. соответствующие эффекты будут более высокого порядка малости. Таким образом, при исследовании нелинейных квазиплоских акустических волн можно исходить из модельного волнового уравнения:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p'^2) \quad (\text{П.10})$$

Это уравнение часто называется *уравнением Вестервельта* [Westervelt P.J. Acoust. Soc. Am., 1963, v. 35, N 4, p. 535–537]. Из уравнения (П.10) становится ясным смысл введенного в (П.5) коэффициента акустической нелинейности ε : согласно (П.10), именно этот коэффициент характеризует совокупное действие нелинейных эффектов.

Волновое уравнение (П.10) является нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка по всем пространственным координатам и времени. При выводе правой части этого уравнения учитывался квазиплоский характер распространения волны. Соответствующее преобразование левой части уравнения позволяет получить нелинейное уравнение эволюционного типа с производной первого порядка по координате распространения (вдоль оси пучка).

Как уже отмечалось, в случае распространения линейной плоской волны решение (П.8) имеет вид $p'(x, y, z, t) = P(t - x/c_0)$, т.е. зависит лишь от величины $\tau = t - x/c_0$, имеющей смысл времени в «бегущей» в направлении x со скоростью c_0 системе координат. В случае нелинейной квазиплоской волны (нелинейного пучка) это не так. Акустическое давление p' уже будет зависеть не только от времени в бегущей системе координат τ , но и от пространственных переменных x, y, z . Однако, поскольку соответствующие эффекты малы, то зависимость p' от x, y, z оказывается гораздо более слабой, чем зависимость от задержанного времени τ . Имея это в виду, перейдем в уравнении (П.10) от переменных x, y, z, t к новым переменным x, y, z, τ :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau \partial x} + \Delta_{\perp} p' = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (p'^2), \quad (\text{П.11})$$

где введено обозначение для лапласиана по поперечным координатам: $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Уравнение (П.11) тождественно

(П.10), оно лишь записано в других переменных. Однако в таком виде уже удобно учесть квазиплоский характер волны и медленность изменения профиля волны. Как уже отмечалось во введении (п. 2.1), характерной особенностью пучков является тот факт, что масштаб изменения амплитуды волны в поперечном направлении гораздо меньше масштаба изменений в направлении распространения волны: $L_{\perp} \ll L_{\parallel}$. Поскольку быстрые пространственные осцилляции, происходящие на масштабе порядка длины волны, учтены переходом к «задержанному» времени $\tau = t - x/c_0$, то при оценке величины первого и третьего слагаемых в левой части уравнения (П.11) можно считать $|\partial^2 p' / \partial x^2| \approx |p'| / L_{\parallel}^2$, $|\Delta_{\perp} p'| \approx |p'| / L_{\perp}^2$. Более быстрое изменение давления поперек пучка по сравнению с изменением в продольном направлении означает, что $|\partial^2 p' / \partial x^2| \ll |\Delta_{\perp} p'|$. Тогда можно пренебречь соответствующим малым членом $\partial^2 p' / \partial x^2$ в левой части уравнения (П.11). Соответствующее приближение называется *приближением квазиоптики*. В результате приходим к следующему приближенному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p' \quad (\text{П.12})$$

Переход от уравнения Вестервельта к более простому уравнению Хохлова – Заболотской можно сделать и более формальным образом, вводя малый параметр $\mu \ll 1$, учитывающий малость амплитуды волны, медленность изменения профиля и слабую расходимость пучка. Будем искать решение уравнения (П.10) в следующем виде:

$$p' = \mu P \left(\tau = t - \frac{x}{c_0}, x_1 = \mu x, y_1 = \sqrt{\mu} y, z_1 = \sqrt{\mu} z \right). \quad (\text{П.13})$$

Ограничиваясь формой решения (П.13), мы предполагаем, что волна распространяется в положительном направлении оси x , а ее форма в системе координат, перемещающейся вместе с волной со скоростью c_0 , медленно изменяется как вдоль, так и поперек оси пучка. «Медленность» означает, что изменение характеристик волны на

масштабе длины волны малы. Учет преимущественного направления распространения волны вдоль оси Ox сделан путем перехода от времени t к «задержанному» времени $\tau = t - x/c_0$ и использованием предположения о медленности изменения формы волны вдоль направления распространения: $x_1 = \mu x$. Приближение квазиоптики содержится в допущении, что изменение профиля волны в поперечном направлении также происходит медленно, но в то же время эти изменения являются более быстрыми по сравнению с изменениями вдоль оси пучка: $y_1 = \sqrt{\mu}y$, $z_1 = \sqrt{\mu}z$. Переходя в уравнении (П.11) к новым переменным (П.13), получим:

$$\begin{aligned} \mu^3 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{2\mu^2}{c_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \tau} + \mu \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \mu \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = \\ = -\mu^2 \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (P^2). \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Видно, что в уравнении (П.14) члены порядка μ взаимно сокращаются. Первым слагаемым в правой части, имеющим порядок μ^3 , мы пренебрегаем. Оставшиеся члены имеют одинаковый порядок μ^2 . Возвращаясь к исходным пространственным координатам x, y, z и акустическому давлению p' , получим уравнение Хохлова – Заболотской (П.12).

Уравнение (П.12) применительно к нелинейным акустическим пучкам было впервые получено в 1969 г. в работе [Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. – Акуст. журн., 1969, т. 15, № 1, с. 40–47] и было впоследствии названо уравнением Хохлова – Заболотской (ХЗ) [6]. Поскольку уравнение ХЗ является уравнением эволюционного типа (содержит лишь первую производную акустического давления по координате распространения x), оно является гораздо более легким для аналитического и численного анализа по сравнению с нелинейным волновым уравнением (П.10). Уравнение Хохлова – Заболотской и его модификации, учитывающие различные диссипативные свойства среды и присутствие неоднородностей, широко используется в современной нелинейной акустике.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.2

Численный алгоритм решения уравнения Хохлова – Заболотской

Как уже отмечалось, для уравнения Хохлова – Заболотской (П.12) не удастся найти точного аналитического решения, и поэтому его приходится интегрировать численно. Это задача достаточно сложная, требующая разработки специальных алгоритмов, учитывающих специфику конкретной задачи [Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. – М.: Наука, 1982]. В данной задаче практикума используется модифицированный спектральный метод, позволяющий описывать сильно искаженные волны с разрывами с помощью небольшого количества гармоник [Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами. – Акуст. журн., 1996, т. 42, № 3, с. 412–417]. Расчеты проводятся на неоднородной пространственной сетке, учитывающей геометрию расходящегося пучка (рис. 2.9). Такой подход позволяет существенно сократить время вычислений. При выполнении задачи в практикуме используется заранее созданная база данных с результатами моделирования в широком диапазоне значений параметра N .

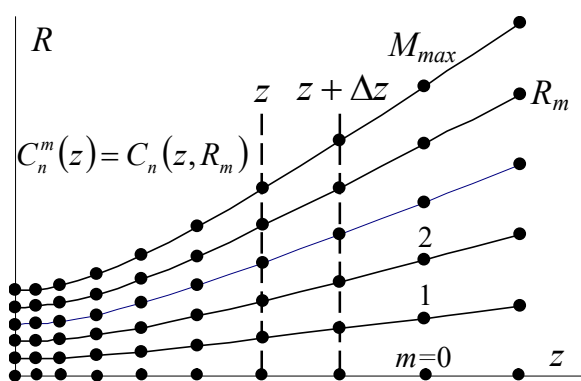


Рис. 2.9. Неоднородная пространственная сетка, учитывающая геометрию дифрагирующего пучка

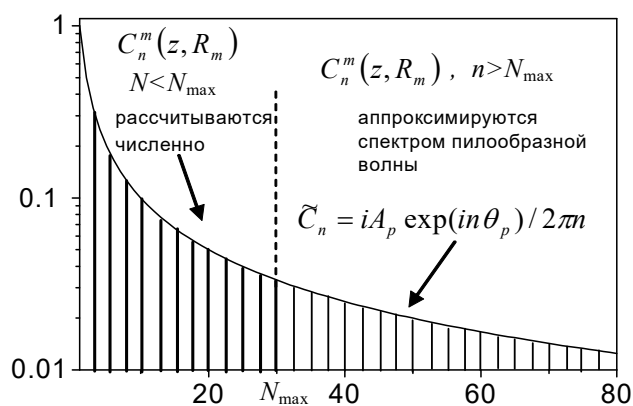


Рис. 2.10. Использование высокочастотной асимптотики спектра пилообразной волны для численного моделирования волн с разрывами

Рассмотрим здесь кратко основные идеи используемого метода. Будем искать решение уравнения ХЗ (2.26) в виде разложения в ряд Фурье:

$$V(z, R, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z, R) \exp(-in\theta). \quad (\text{П.15})$$

Если подставить разложение (П.15) в уравнение (2.23) и приравнять члены при одинаковых экспонентах, то получится бесконечная система связанных уравнений для комплексных амплитуд гармоник распространяющейся волны:

$$\frac{\partial C_n}{\partial z} = -N \frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} + \frac{i}{4n} \Delta_{\perp} C_n = L_{\text{нел}} + L_{\text{диф}}. \quad (\text{П.16})$$

Здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем $C_{-n} = C_n^*$, где звездочка означает комплексное сопряжение, а нелинейный и дифракционный операторы обозначены символами $L_{\text{нел}}$ и $L_{\text{диф}}$.

Численное интегрирование уравнений (П.16) проводится методом конечных разностей. Величины $C_n^m(z, R)$ рассчитываются, начиная от входа в среду $z = 0$, пошагово путем последовательных переходов от текущей плоскости z к следующей плоскости $z + \Delta z$ в узлах неоднородной пространственной сетки, которая вводится в поперечном направлении. Таким образом, непрерывное поперечное распределение амплитуд гармоник заменяется набором дискретных функций $C_n^m(z)$, соответствующих $C_n(z, R_m)$, где $m = 0, 1, 2, \dots, M_{\text{max}}$. Величина M_{max} выбирается достаточно большой, чтобы амплитуда волны на расстоянии $R_{M_{\text{max}}}$ от оси была пренебрежимо мала. На каждом шаге интегрирования вдоль оси от слоя z к слою $z + \Delta z$ используется метод расщепления по физическим факторам, который реализуется в два этапа.

На первом этапе делается шаг $z \rightarrow z + \Delta z$, на котором учитываются только нелинейные эффекты. Для этого необходимо для каждого из узлов R_m решить связанную систему бесконечного числа нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит в правой части бесконечные суммы:

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial z} = -N \frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^m C_{n-k}^m, \quad -\infty < n < \infty. \quad (\text{П.17})$$

Чтобы проинтегрировать такую систему численно, необходимо ограничить количество гармоник. Однако спектр волны, содержащей разрыв, как и спектр пилообразной волны (2.11), формально бесконечен: амплитуда высших гармоник пропорциональна амплитуде разрыва и обратно пропорциональна номеру гармоники (рис. 2.10). Для корректного описания разрывных волн с использованием конечного спектра обычно вводится искусственная вязкость, которая сглаживает разрыв, и приходится использовать очень большое число гармоник (порядка 1000), что требует больших затрат компьютерного времени.

Чтобы упростить задачу, здесь используется априорное знание поведения амплитуд гармоник высокочастотного спектра. Заметим, что до момента образования разрыва амплитуды гармоник с очень большими номерами пренебрежимо малы. Существенное обогащение спектра высшими гармониками происходит лишь после образования разрыва. Можно показать, что спектр произвольной разрывной периодической волны на высоких частотах асимптотически стремится к спектру пилообразной волны (2.11) $\sim 1/n$

$$\tilde{C}_n = iA_p \exp(in\theta_p) / 2\pi n, \quad (\text{П.18})$$

где A_p – амплитуда разрыва, θ_p – его положение внутри одного из периодов волны.

Основная идея модифицированного спектрального подхода заключается в замене точной системы бесконечного числа уравнений (П.17) приближенной системой для амплитуд первых $N_{\max}$ гармоник

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dz} = \\ = -inN \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N_{\max}} C_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N_{\max}+1}^{N_{\max}-n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* + \left(\frac{A_p}{2\pi} \right)^2 \frac{\exp(in\theta_p)}{n} \sum_{k=N_{\max}+1}^{N_{\max}+n} \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

В правой части (П.19) амплитуды гармоник с номерами $n > N_{\max}$ на каждом шаге вычислений аппроксимируются их асимптотическими

значениями спектра пилообразной волны (П.18). Такая замена позволяет вычислить бесконечные суммы в правой части (П.17) аналитически, а необходимые параметры разрыва A_p и θ_p определяются из значений последних двух спектральных компонент системы $C_{N_{\max}-1}$ и $C_{N_{\max}}$ в предположении, что при $n \approx N_{\max}$ вид спектра уже мало отличается от его высокочастотной асимптотики:

$$A_p = 2\pi N_{\max} |C_{N_{\max}}|, \quad \theta_p = \arg(C_{N_{\max}} / C_{N_{\max}-1}). \quad (\text{П.20})$$

Развитый метод позволяет с высокой точностью моделировать распространение волн с узкими ударными фронтами, используя небольшое количество гармоник $N_{\max}$, порядка 30–50. Уравнения (П.19) интегрировались численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности при $N_{\max}=50$. Для каждого последующего шага счета по z значения $A_s(z)$ и $\theta_s(z)$ восстанавливались (П.20) из рассчитанных на предыдущем шаге значений коэффициентов $C_{N_{\max}-1}$ и $C_{N_{\max}}$.

Полученное решение дифракционной задачи берется в качестве начального условия для второго этапа учета дифракционных эффектов, описываемых оператором $L_{\text{диф}}$: $\partial C_n / \partial z = i\Delta_{\perp} C_n / 4n$. Система решается независимо для каждой из гармоник с использованием схемы Кранка–Николсона.

После нахождения амплитуд гармоник может быть рассчитано не только акустическое давление (по формуле (П.15)), но и энергетические характеристики пучка. Например, полную интенсивность в пучке можно найти, суммируя интенсивности гармоник:

$$I(z, R) = 4I_0 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(z, R)|^2, \quad (\text{П.21})$$

где $I_0 = p_0^2 / (2\rho_0 c_0)$ – интенсивность на оси пучка на входе в среду.

Часть 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

3.1. Волны на поверхности жидкости

Широкое использование источников волн большой интенсивности привело к появлению таких новых разделов физики, как нелинейная электродинамика, нелинейная оптика, нелинейная акустика. Обобщение результатов экспериментальных и теоретических работ в этих областях способствовало формированию физики и теории нелинейных волн. Среди всех нелинейных волновых задач можно выделить два предельных класса проблем, относящихся к волнам в средах с малой дисперсией с одной стороны, и к волнам в средах с сильной дисперсией, с другой стороны. Нелинейные волновые процессы различной физической природы имеют много общих черт и описываются похожими нелинейными уравнениями. Указанная общность характера нелинейных явлений, возникающих при распространении волн различной физической природы, позволяет рассматривать волны на поверхности жидкости как удобную модель для исследования нелинейных волновых процессов. При этом поверхностные волны на мелкой воде (глубины слоя жидкости значительно меньше длины волны) позволяет моделировать среды без дисперсии, а на глубокой воде (глубины слоя жидкости больше длины волны) – дисперсионные среды. Можно без преувеличения сказать, что значительный круг вопросов теории волн (линейных и нелинейных) удалось бы изложить, ограничившись только волнами на поверхности жидкости.

Волны на поверхности жидкости, для которых возвращающей силой (т.е. стремящейся «выровнять» поверхность) является сила тяжести, называются гравитационными волнами. Если поверхность выравнивается под действием сил поверхностного натяжения, то

такие волны называются капиллярными. В общем случае, когда существенны оба типа сил, мы имеем дело с гравитационно-капиллярными волнами.

Капиллярные волны удобны для проведения экспериментальных исследований. Они обладают ярко выраженной дисперсией, и их нелинейность проявляется при легко достижимых амплитудах колебаний. Поскольку длины капиллярных волн менее сантиметра, то экспериментальная установка для их наблюдения имеет небольшие размеры. Исследования капиллярных волн позволяют проанализировать общие закономерности распространения нелинейных волн в сильно диспергирующих средах при значениях безразмерных параметров, которые в других областях трудно достижимы.

3.2. Распространение волн малой амплитуды на поверхности жидкости

Для описания движения жидкости без учета процессов диссипации используются уравнения гидродинамики, которые описывают распределение колебательной скорости $\mathbf{v}$, давления p и плотности ρ :

уравнение непрерывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

уравнение движения Эйлера

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p \quad (3.2)$$

и уравнение состояния

$$p = p(\rho). \quad (3.3)$$

В случае распространения волн малой амплитуды решение системы (3.1)–(3.3) обычно проводится с использованием линеаризации [4, 5]. Предполагается, что давление p и плотность ρ могут быть представлены в виде $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. При этом возмущения $p', \rho', \mathbf{v}'$ равновесного состояния $p_0, \rho_0, \mathbf{v} = 0$, создаваемые волной, малы, т.е. $p'/p_0 \approx \rho'/\rho_0 \approx \mu$, где μ – малый параметр. Разложение каждого из уравнений системы (3.1)–(3.3) по малому параметру и отбрасывание членов второго порядка малости $\sim \mu^2$ позволяет получить систему линеаризованных уравнений:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (3.4a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p', \quad (3.4б)$$

$$p' = \gamma \left(\frac{p_0}{\rho_0} \right) \rho'. \quad (3.4в)$$

Здесь оператор набла $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ задаёт дифференцирование по пространственным переменным x, y, z . Уравнение (3.4в) является линеаризованным уравнением состояния для адиабатического процесса.

Рассмотрим задачу распространения плоской волны, бегущей вдоль оси x по поверхности жидкости, занимающей полупространство $z \leq 0$ (рис. 3.1). Для простоты рассмотрения ограничимся следующими приближениями: волновое движение происходит с малыми амплитудами $\xi_0/\lambda \ll 1$ (ξ_0 – амплитуда волны, λ – длина волны), жидкость считается невязкой (отсутствует диссипация) и несжимаемой: $\rho' = 0$. Из условия несжимаемости жидкости следует: $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$. Таким образом, линеаризованные уравнения (3.4a) и (3.4б) имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 , \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} . \quad (3.5b)$$

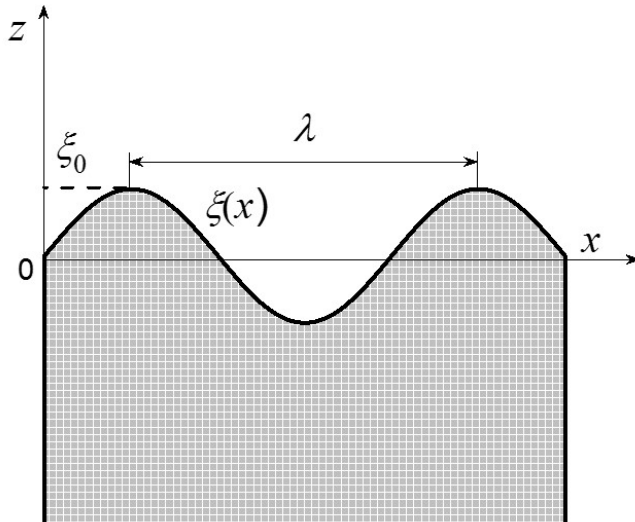


Рис. 3.1. Система координат для описания распространения волн по поверхности жидкости

Применяя к обеим частям уравнения (3.5б) операцию дивергенции и учитывая условие несжимаемости жидкости, можно получить уравнение Лапласа для поля возмущения давлений:

$$\Delta p' = 0 , \quad (3.6)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ – оператор Лапласа.

Полное давление в точках плоскости $z = 0$ определяется двумя типами возвращающих сил: силой тяжести и силой поверхностного натяжения. Давление p_g , создаваемое гравитационной силой, определяется вертикальным смещением частиц жидкости в волне $\xi(x)$: $p_g = \rho_0 g \xi$, где g – ускорение свободного падения. Давление, создаваемое капиллярными силами, определяется локальным искривлением поверхности жидкости: $p_\sigma = -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Таким образом, граничное условие для давления на плоскости $z = 0$ запишется в виде:

$$p'(z=0, x, t) = \rho_0 g \xi - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . \quad (3.7)$$

При $z=0$ из уравнения (3.5б) следует:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} .$$

Продифференцировав (3.7) два раза по t , получим динамическое граничное условие для давления на плоскости $z=0$:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \left(g - \frac{\sigma}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 . \quad (3.8)$$

Невозрастающее решение уравнения Лапласа (3.6) при $z \rightarrow -\infty$ с граничными условиями (3.8) в виде плоской неоднородной волны имеет вид:

$$p' = p_0 \exp(kz) \exp(i\omega t - ikx) . \quad (3.9)$$

где p_0 – амплитуда давления в волне, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, $k = \omega / c_{\text{фаз}} = 2\pi / \lambda$ – волновое число, $c_{\text{фаз}} \equiv c$ – фазовая скорость волны.

Подставив решение (3.9) в граничное условие (3.8), получим закон дисперсии волн, распространяющихся по поверхности жидкости большой глубины $h \gg \lambda$ [7]:

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho_0} k^3 . \quad (3.10)$$

Дисперсионное уравнение (3.10) позволяет определить фазовую скорость поверхностной волны

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho_0} + \frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho_0\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}} . \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что скорость волн на поверхности жидкости большой глубины зависит от длины волны (или частоты), т.е. такие волны обладают дисперсией. Дисперсионные кривые для волн на

поверхности дистиллированной воды в глубоком водоёме при комнатной температуре ($\sigma = 74$ мН/м, $\rho_0 = 1$ г/см³, $g = 9.8$ м/с²) показаны на рис. 3.2. На частоте $f_{\text{гр}} = (1/\sqrt{2\pi})^4 \sqrt{\rho_0 g^3 / \sigma}$ фазовая скорость волны имеет минимум, равный $c_{\text{фаз}}^{\text{min}} = \sqrt[4]{4\sigma g / \rho_0}$. Длина волны на этой частоте определяется выражением $\lambda = 2\pi \sqrt{\sigma / \rho_0 g}$.

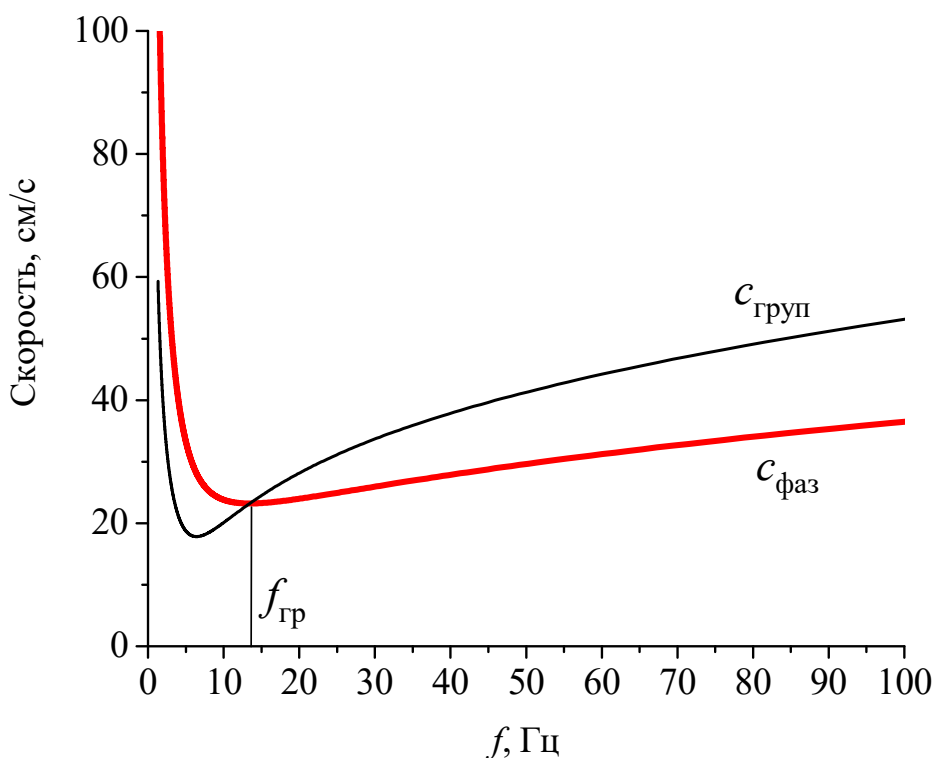


Рис. 3.2. Дисперсионные кривые для гравитационно-капиллярных волн на поверхности дистиллированной воды

Для дистиллированной воды эти величины имеют следующие численные значения $f_{\text{гр}} = 13.4$ Гц, $c_{\text{фаз}}^{\text{min}} = 23.2$ см/с, $\lambda = 1.73$ см. Таким образом, на поверхности чистой воды не могут распространяться волны, скорость которых меньше 23 см/с. Величина поверхностного натяжения σ сильно зависит от чистоты жидкости и наличия в ней различных растворенных примесей. В обычной водопроводной воде величина σ может быть на 15–20% меньше. Измерение скорости

капиллярных волн является одним из методов определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей.

В длинноволновой области ($f \ll f_{\text{гр}}$) возвращающая сила, возникающая за счёт поверхностного натяжения, мала по сравнению с гравитационной – это область гравитационных волн. На этих частотах в (3.11) можно пренебречь членом, учитывающим поверхностное натяжение и получить выражение для фазовой скорости гравитационных волн: $c_{\text{фаз}}^{\text{грав}} = g / \omega$. В области малых длин волн, когда $f \gg f_{\text{гр}}$, роль сил поверхностного натяжения становится преобладающей, что создает условия для распространения капиллярных волн. Фазовую скорость капиллярных волн можно найти, если пренебречь гравитационным членом в (3.11):

$$c_{\text{фаз}}^{\text{кап}} = (\sigma k / \rho_0)^{1/2} = (\sigma \omega / \rho_0)^{1/3}. \quad (3.12)$$

Вблизи частоты $f_{\text{гр}}$ находится область смешанных гравитационно-капиллярных волн, скорость которых определяется формулой (3.11).

Существует важный класс волн, называемых волновыми пакетами, которые представляют собой суперпозицию монохроматических волн с близкими частотами. Спектр волнового пакета локализован вблизи некоторой центральной частоты. Высокочастотное заполнение пакета и его огибающая по отдельности имеют неизменный вид и перемещаются с вполне определенными значениями скоростей. Высокочастотное заполнение

распространяется с фазовой скоростью $c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$. Скорость огибающей называется групповой скоростью $c_{\text{груп}}$, которая выражается из закона дисперсии следующим образом: $c_{\text{груп}} = d\omega/dk$. Групповую скорость нетрудно выразить через фазовую:

$$c_{\text{груп}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_{\text{фаз}}}{1 - \frac{\omega}{c_{\text{фаз}}} \frac{dc_{\text{фаз}}}{d\omega}},$$

откуда следует, что для среды без дисперсии ($dc_{\text{фаз}}/d\omega = 0$) эти скорости совпадают, а в среде с дисперсией — отличаются. Полученное выражение для групповой скорости справедливо для любого узкополосного сигнала, например, для радиоимпульса — локализованного во времени импульса с высокочастотным заполнением. В диспергирующей среде огибающая сигналов не остаётся неизменной, волновые пакеты испытывают расплывание и изменяют свой вид.

Закон дисперсии для капиллярных волн может быть записан в виде $\omega^2 = \sigma k^3 / \rho_0$, откуда находится выражение для групповой скорости капиллярной волны

$$c_{\text{груп}}^{\text{кап}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho_0}} = \frac{3}{2} c_{\text{фаз}}^{\text{кап}}. \quad (3.13)$$

Групповая скорость гравитационных волн $c_{\text{груп}}^{\text{грав}} = c_{\text{фаз}}^{\text{грав}} / 2$ меньше, чем их фазовая скорость, в то время как у капиллярных волн групповая скорость больше фазовой скорости. Это указывает на то, что для капиллярных волн на поверхности жидкости наблюдается аномальная дисперсия (рис. 3.2).

При измерении групповой скорости капиллярная волна возбуждается в виде последовательности волновых пакетов с длительностью τ , следующих с периодом повторения $T_{\text{повт}}$ (частотой $f_{\text{повт}}$). Длительность волнового пакета τ составляет несколько периодов капиллярной волны $T = 1/f_0$ ($\tau = n/f_0$), и она мала по сравнению с периодом повторения $T_{\text{повт}}$ ($T_{\text{повт}} \gg \tau$). Импульсная модуляция гармонического сигнала с частотой f_0 приводит не только к изменению формы, но и к изменению его спектра. Соотношение между временным и спектральным представлением сигнала дается прямым преобразованием Фурье

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad (3.14)$$

где $F(t)$ – аналитическое представление сигнала как функции времени, $S(f)$ – его спектральная плотность, i – мнимая единица. Функция $F(t)$ может быть выражена через спектральную плотность $S(f)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df . \quad (3.15)$$

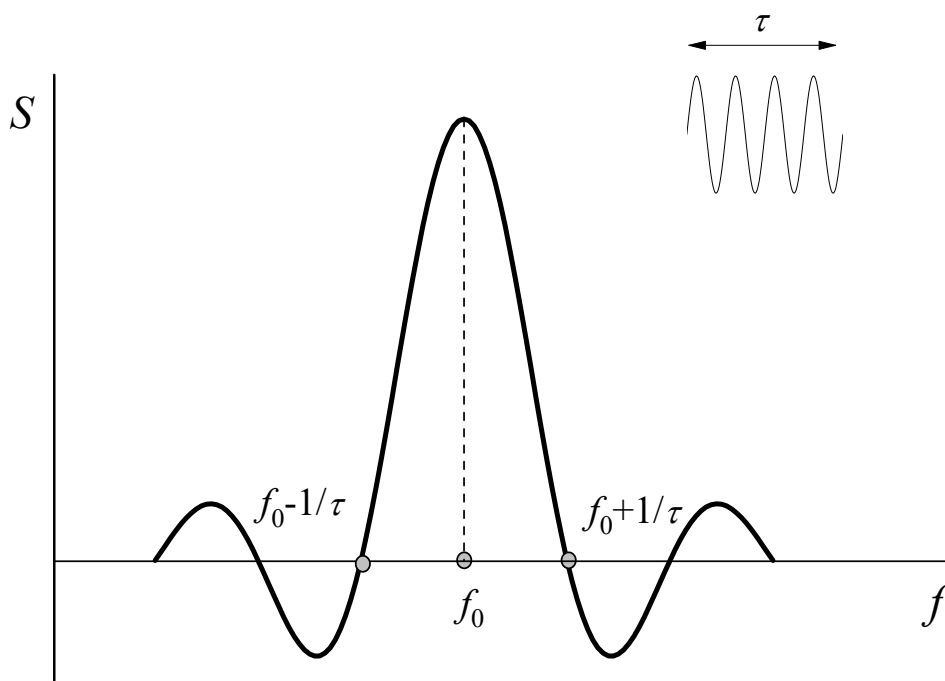


Рис. 3.3. Спектральная плотность $S(f)$ импульса длительности τ с прямоугольной огибающей (форма импульса показана в верхней части рисунка)

На рис. 3.3 схематично показана спектральная плотность $S(f)$ импульса длительности τ с прямоугольной огибающей. Спектр такого импульса представляется функцией вида $\sin x/x$ и состоит из бесконечного набора гармонических волн с амплитудами $S(f)$. Главный максимум соответствует частоте заполнения импульса f_0 . Ширину спектра такого импульса можно оценить как частотный диапазон между первыми нулями спектра, т.е. $\Delta f = 2/\tau$. Для

импульса, состоящего из четырех периодов капиллярной волны, $\Delta f = f_0/2$. Таким образом, импульс представляет совокупность монохроматических волн с частотами, лежащими в указанной спектральной полосе. При этом каждая из этих волн распространяется со своей фазовой скоростью, что приводит к дисперсионному искажению формы огибающей прямоугольного импульса. Групповая скорость измеряется по времени распространения максимума огибающей импульса капиллярной волны.

3.3. Нелинейные явления в средах с дисперсией

Распространение волны конечной амплитуды в среде сопровождается локальными изменениями свойств среды, что приводит к нелинейным эффектам. К ним относятся искажение формы волны, генерация высших гармоник, возникновение волн комбинационных частот, параметрические эффекты и др. Нелинейные явления в средах без дисперсии и в средах с дисперсией существенно отличаются. Наглядную картину особенностей волновых явлений в диспергирующей среде можно проследить, изучая капиллярные волны конечной амплитуды на поверхности жидкости, для которых характерны сильная дисперсия и ярко выраженные нелинейные свойства. Наличие дисперсии у волн на поверхности жидкости приводит к существенному отличию протекания нелинейных процессов в них по сравнению со случаем, когда дисперсия отсутствует. Гармоники волны распространяются с различными фазовыми скоростями, что приводит к изменению соотношений между фазами гармоник при их распространении в пространстве. Вследствие нарушения фазового синхронизма нелинейные эффекты не накапливаются и обмен энергии между гармониками незначителен, поэтому заметных искажений формы волны не происходит.

Распространение волны конечной амплитуды сопровождается генерацией волны второй гармоники. Для анализа распространения волн конечной амплитуды необходимо использовать

нелинеаризованные уравнения гидродинамики (3.1)–(3.3). Выражение для волны второй гармоники $\xi_{2\omega}$ в отсутствие диссипации можно записать в виде [2]:

$$\begin{aligned}\xi_{2\omega} &\sim \varepsilon \frac{\xi_0^2}{(k_{2\omega}^2 - 4k_{1\omega}^2)} \sin\left(\frac{k_{2\omega} - 2k_{1\omega}}{2}x\right) \cos(2\omega t - k_{2\omega}x + \varphi) = \\ &= A_{2\omega} \cos(2\omega t - k_{2\omega}x + \varphi),\end{aligned}\quad (3.16)$$

где ε – эффективная константа нелинейности среды для поверхностных волн; ξ_0 – амплитуда волны основной частоты; $k_{1\omega}$ и $k_{2\omega}$ – волновые числа волны основной частоты ω и её второй гармоники 2ω , соответственно; φ – фазовый сдвиг. Согласно выражению (3.16), амплитуда второй гармоники $A_{2\omega}$ не остаётся постоянной, а испытывает биения в пространстве (рис. 3.4) по закону

$$A_{2\omega} \sim \varepsilon \frac{\xi_0^2}{(k_{2\omega}^2 - 4k_{1\omega}^2)} \left| \sin\left(\frac{k_{2\omega} - 2k_{1\omega}}{2}x\right) \right|. \quad (3.17)$$

Амплитуда и пространственный период этих биений определяется величиной расстройки $\Delta k = |k_{2\omega} - 2k_{1\omega}|$. С уменьшением величины расстройки Δk период биений и амплитуда второй гармоники возрастают. Предельный случай $\Delta k \rightarrow 0$ соответствует синхронному, накапливающемуся взаимодействию.

Раскрытие неопределённости в (3.16) и (3.17) при $\Delta k \rightarrow 0$ приводит к выражению для амплитуды второй гармоники, которая растёт с увеличением расстояния: $A_{2\omega} \sim \varepsilon \frac{\xi_0^2 x}{2(k_{2\omega} + 2k_{1\omega})}$. Из этого следует, что при $x \geq L_{\text{нел}}$ амплитуда второй гармоники $A_{2\omega}$ сравнивается и может даже превысить амплитуду волны основной частоты A_ω , что противоречит закону сохранения энергии. Это

противоречие объясняется тем, что выражение (3.16) получено в приближении заданного поля, т.е. считалось, что амплитуда основной волны A_{ω} при её распространении не меняется. Поэтому оно справедливо только на расстояниях $x \ll L_{\text{нел}}$, где амплитуду волны основной частоты можно считать постоянной (рис. 3.4). При $\Delta k \neq 0$ монотонное возрастание амплитуды происходит только на отрезке $0 \leq x \leq L_{\text{ког}}$, где $L_{\text{ког}}$ – длина когерентности взаимодействия волн основной и второй гармоники:

$$L_{\text{ког}} = \frac{\pi}{|2k_{1\omega} - k_{2\omega}|} = \frac{\pi c_{1\omega} c_{2\omega}}{2\omega |c_{1\omega} - c_{2\omega}|} . \quad (3.18)$$

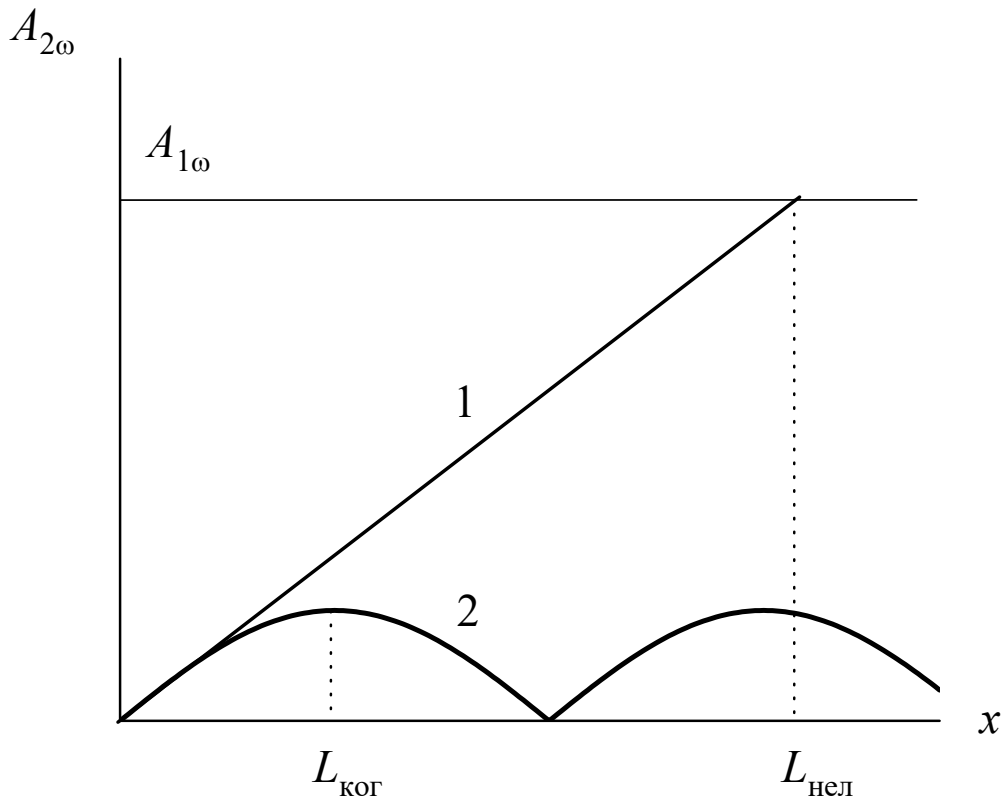


Рис. 3.4. Зависимость амплитуды второй гармоники от расстояния в недиспергирующей (график 1) и диспергирующей (график 2) средах

При $x = L_{\text{ког}}$ наблюдается первый максимум амплитуды второй гармоники в несинхронном режиме. Период пространственных биений волны второй гармоники равен

$$\Delta_{2\omega} = 2L_{\text{ког}} = \frac{2\pi}{|2k_{1\omega} - k_{2\omega}|} . \quad (3.19)$$

Для характеристики процесса генерации второй гармоники в средах с дисперсией часто используется дисперсионное число

$$D = \frac{c_{2\omega} - c_{1\omega}}{c_{1\omega}} .$$

Капиллярные волны на поверхности жидкости обладают дисперсией, позволяющей достаточно четко наблюдать периодические биения амплитуды второй гармоники в пространстве. Используя выражение для скорости капиллярных волн, выражение (3.19) можно свести к приближенной формуле, удобной для проведения оценок:

$$\Delta_{2\omega} \approx 2.42 \lambda_{1\omega} = 2.42 \frac{c_{\text{фаз}}^{\text{кап}}(f)}{f} , \quad (3.20)$$

где $\lambda_{1\omega}$ – длина волны основной частоты.

В практической части работы измеряются длины капиллярных волн на различных частотах. Для проведения сравнения полученных экспериментальных результатов с теоретическими удобно формулу (3.19) записать с использованием значений длин волн:

$$\Delta_{2\omega} = \frac{\lambda_{1\omega} \lambda_{2\omega}}{|2\lambda_{2\omega} - \lambda_{1\omega}|} . \quad (3.21)$$

3.4. Экспериментальная установка для исследования капиллярных волн

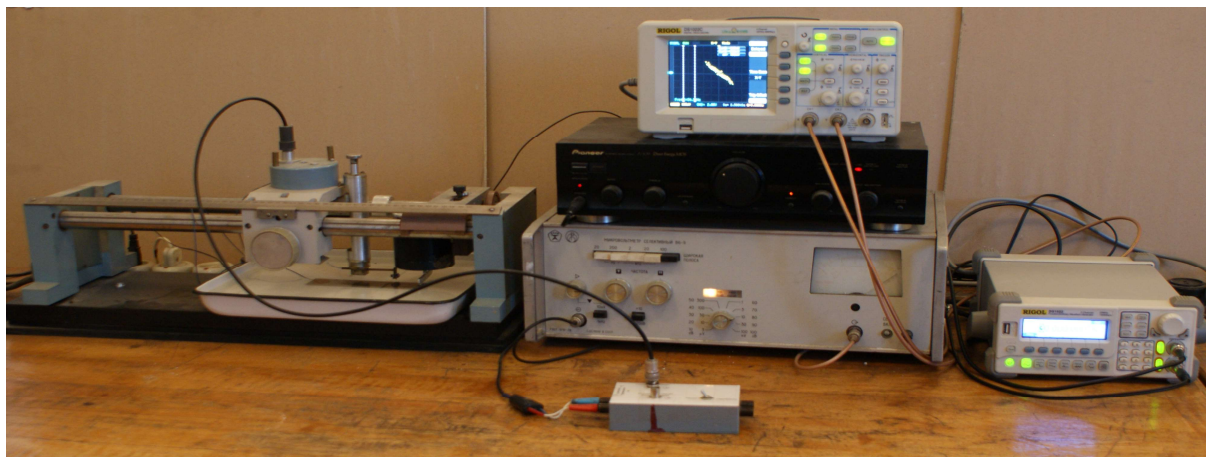


Рис. 3.5. Фотография экспериментальной установки для возбуждения и регистрации капиллярных волн

Фотография экспериментальной установки для исследования распространения капиллярных волн приведена на рис. 3.5. Блок-схема экспериментальной установки показана на рис. 3.6. Капиллярные волны возбуждаются в металлической кювете 1, наполненной водой. Колебания бойка в виде легкой алюминиевой пластины 2 обеспечивают возбуждение плоской волны. Толщина слоя воды в кювете ($h \geq 2$ см) достаточна для того, чтобы пренебречь влиянием дна на распространение волн в диапазоне частот 40–200 Гц. Боёк крепится к подвижной системе электродинамического вибратора 3 и колеблется нормально к поверхности жидкости. Вибратор закреплен на координатном устройстве и может перемещаться в вертикальной плоскости с помощью микрометрической подачи. Чтобы колебания вибратора не передавались на остальную часть экспериментальной установки, он отделен от стальных направляющих толстым слоем резины. Вибратор возбуждается напряжением, подаваемым с первого канала генератора электрических колебаний 4 после его усиления линейным усилителем 11. Используемый усилитель PIONEER предназначен для усиления сигналов звуковой частоты. Генератор подключается к входу LINE усилителя, а вибратор – к выходу PHONE.

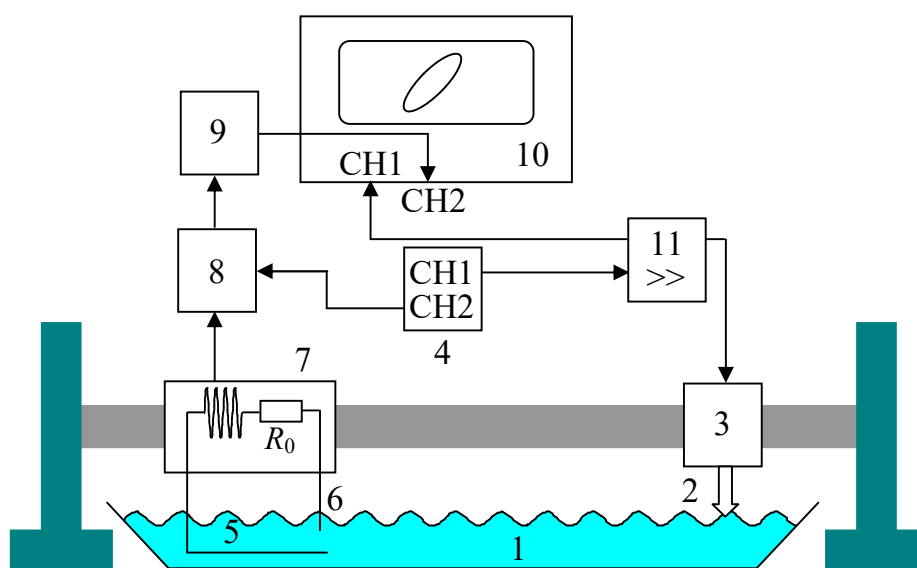


Рис. 3.6. Блок-схема экспериментальной установки для возбуждения и регистрации капиллярных волн

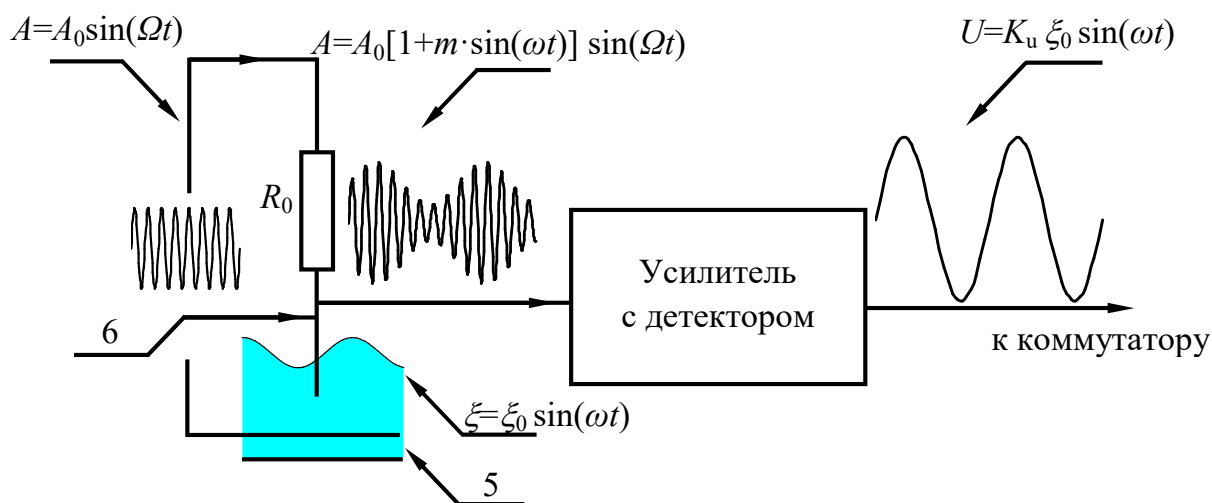


Рис. 3.7. Схема, поясняющая принцип работы приёмного устройства для регистрации капиллярных волн

Для регистрации капиллярной волны используется приёмное устройство 7, которое может перемещаться вдоль направления распространения волны. Его положение измеряется с помощью линейки с нониусом. Приёмное устройство состоит из медной пластины 5, расположенной на дне кюветы, зонда 6, изготовленного

из тонкой позолоченной проволочки, и электронного устройства. Детально работа приёмного устройства показана на рис. 3.7. На проводящую пластину 5 и зонд 6 с электронного устройства подаётся переменное напряжение постоянной амплитуды $A = A_0 \sin(\Omega t)$ и с частотой $\Omega \approx 20 \text{ кГц}$. Колебания поверхности жидкости $\xi = \xi_0 \sin(\omega t)$, вызванные капиллярной волной с частотой ω , изменяют глубину погружения зонда в жидкость, что приводит к изменению электрического сопротивления в промежутке между зондом 6 и пластиной 5. Величина этого изменения пропорциональна смещению жидкости в капиллярной волне. В результате на сопротивлении нагрузки R_0 создаётся переменное напряжение $A = A_0[1 + m \sin(\omega t)] \sin(\Omega t)$, амплитуда которого промодулирована частотой капиллярной волны. Глубина амплитудной модуляции m пропорциональна амплитуде капиллярной волны ξ_0 . Амплитудно-модулированный сигнал поступает в усилитель с коэффициентом усиления $K \approx 100$. После усиления сигнала в K раз он демодулируется с помощью амплитудного детектора [8], т.е. выделяется напряжение $U = K_u \xi_0 \sin(\omega t)$, пропорциональное изменению уровня жидкости, вызванному поверхностной волны. Этот сигнал U далее поступает на один из входов коммутатора 8. На второй вход коммутатора поступает калибровочное напряжение со второго канала генератора электрических колебаний. На панели коммутатора размещён тумблер с двумя положениями: «калибровка» и «приём». Когда тумблер находится в положении «калибровка», на выход коммутатора поступает напряжение с генератора. Если тумблер в положении «приём», на выход коммутатора подаётся напряжение с приёмного устройства. С выхода коммутатора напряжение поступает на селективный вольтметр. Селективный вольтметр 9 усиливает переменное напряжение определённой частоты, задаваемой при его настройке. Напряжение с выхода первого канала генератора поступает на вход первого канала осциллографа 10. На вход второго канала осциллографа подаётся электрическое

напряжение с выхода селективного вольтметра, амплитуда которого пропорциональна смещению частиц в капиллярной волне.

3.5. Методика измерения фазовой скорости капиллярных волн

С первого канала СН1 генератора 4 гармоническое напряжение заданной частоты усиливается и подается на электродинамический вибратор 3 для возбуждения колебаний бойка и генерации капиллярной волны. Одновременно это же напряжение поступает на вход первого канала осциллографа 10. На вход второго канала осциллографа поступает напряжение, пропорциональное смещению в капиллярной волне. В режиме X-Y на экране осциллографа наблюдается фигура Лиссажу, форма которой зависит от разности фаз $\Delta\varphi$ напряжений, поданных на входы первого и второго каналов. Для удобства наблюдения фигуры Лиссажу и измерения фазовой скорости капиллярной волны рекомендуется предварительно в режиме Y-T установить скорость развёртки осциллографа 5 мс/дел.

В общем случае фигура Лиссажу имеет форму эллипса, размеры которого определяются амплитудами напряжений, поданных на входы первого и второго каналов осциллографа. При разности фаз $\Delta\varphi = 2\pi n$ и $\Delta\varphi = \pi(2n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ – целое число, фигура Лиссажу вырождается в отрезок прямой линии (рис. 3.8). Перемещение каретки с приёмником на расстояние, равное длине волны, соответствует полному циклу изменения формы эллипса.

Перед началом измерений на первом канале генератора 4 устанавливается амплитуда и частота напряжения, которое подается на вибратор 3, в результате чего возбуждается капиллярная волна. Следует учесть, что при распространении капиллярной волны её амплитуда не остаётся постоянной, а вследствие затухания убывает при удалении от колеблющегося бойка. Поэтому необходимо установить такое выходное напряжение на вибраторе, чтобы при проведении измерений не требовалось изменять амплитуду

выходного сигнала и чувствительность приемного тракта. Кроме того, необходимо иметь в виду, что при больших амплитудах колебаний бойка на поверхности жидкости возникают стационарные потоки, существенно искажающие картину волнового поля поверхностных волн.

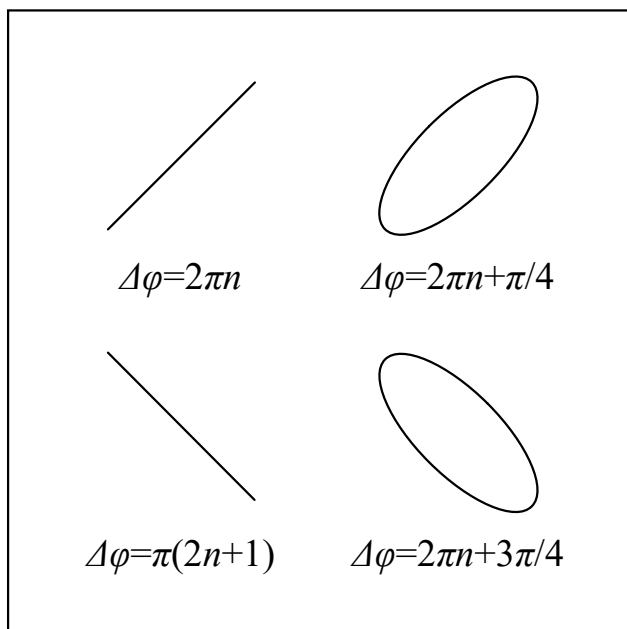


Рис. 3.8. Форма фигур Лиссажу при различной разности фаз $\Delta\varphi$ напряжений одинаковой частоты

Определение фазовой скорости капиллярной волны на частоте f проводится путём измерения её длины волны $\lambda(f)$. Изменяя расстояние между преобразователем и приёмником, находят два положения приёмника, при которых фигуры Лиссажу имеют одинаковую форму. Наименьшее расстояние между этими точками равно длине волны $\lambda(f)$. Наиболее удобно проводить измерения, когда фигура Лиссажу вырождается в прямую линию. Для повышения точности измерений и исключения люфта перемещение приёмника производится в одном направлении на расстояние примерно десяти длин волн. По результатам измерений вычисляется средняя длина волны. Затем вычисляется фазовая скорость волны по формуле $c_{\text{фаз}} = \lambda(f) \cdot f$. Результаты измерений сравниваются с теоретическим расчётом по формуле

$$c_{\text{фаз}}^{\text{кап}} = \sqrt[3]{\frac{\sigma \omega}{\rho_0}}.$$

3.6. Измерение групповой скорости капиллярных волн

Для измерения групповой скорости волны используется импульсный режим работы генератора 4, при котором на вибратор подается напряжение в виде импульсов с прямоугольной огибающей и длительностью τ , равной четырем периодам колебаний $\tau = 4/f_0$, где f_0 – частота заполнения. Импульсы следуют с периодом повторения $T_{\text{повт}} \approx 0.5 \text{ с}$ ($T_{\text{повт}} \gg \tau$) – см. рис. 3.9. При импульсном возбуждении вибратора 3 по поверхности жидкости распространяется волновой пакет со скоростью $c_{\text{груп}}^{\text{кап}}$, который можно наблюдать на экране осциллографа.

Форма импульса капиллярной волны имеет колоколообразный вид, что связано с конечным временем реакции бойка на подаваемый сигнал (рис. 3.10). Групповая скорость $c_{\text{груп}}(f)$ определяется по скорости распространения максимума огибающей импульса капиллярной волны. Для этого измеряется временная задержка Δt максимума огибающей импульса при перемещении приёмного устройства на известное расстояние Δx (рис. 3.10). Измерение величин Δx и Δt на различных частотах позволяет определить зависимость групповой скорости $c_{\text{груп}} = \Delta x / \Delta t$ от частоты.

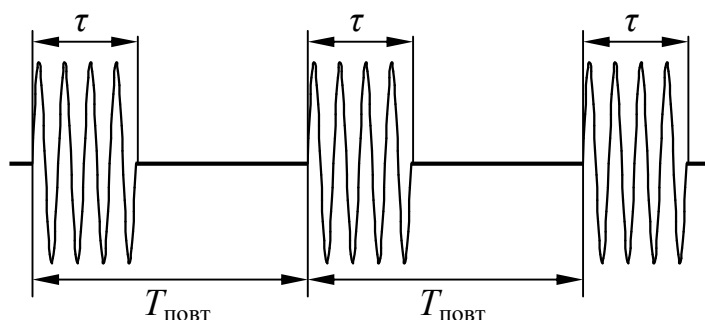


Рис. 3.9. Форма радиоимпульсов с прямоугольной огибающей, подаваемых на преобразователь для возбуждения капиллярных волн

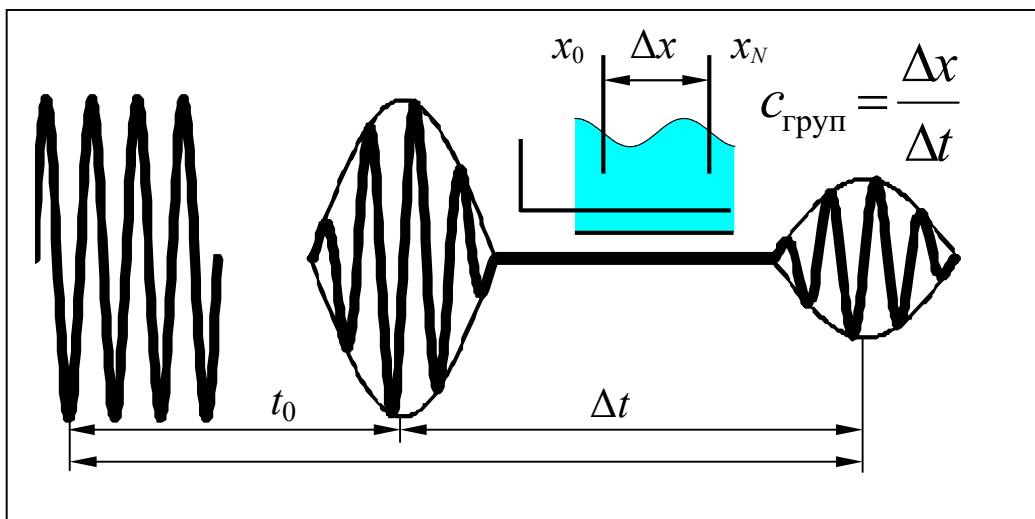


Рис. 3.10. Экспериментальное определение групповой скорости капиллярных волн

3.7. Исследование генерации второй гармоники в средах с дисперсией

В задаче экспериментально изучается зависимость амплитуды второй гармоники капиллярной волны от проходимого ею расстояния. Из-за наличия дисперсии скорости капиллярных волн будут наблюдаться биения амплитуды второй гармоники в зависимости от расстояния. Следует, однако, учесть, что амплитуда основной гармоники спадает с расстоянием, что приводит к уменьшению эффективности генерации второй гармоники. Поэтому в данных экспериментальных условиях должны наблюдать биения амплитуды второй гармоники на фоне ее уменьшения с расстоянием.

Перед началом измерений приёмный тракт настраивается на удвоенную частоту излучаемого сигнала. Амплитуда волны основной частоты выбирается достаточно большой, чтобы происходила генерация волны второй гармоники. При сложении колебаний с частотами, отличающимися в 2 раза, фигура Лиссажу будет иметь вид, представленный на рис. 3.11.

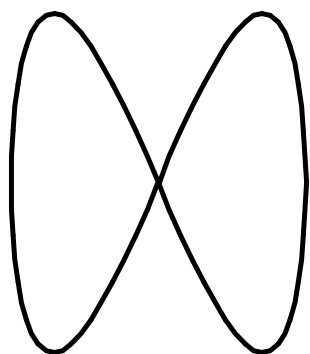


Рис. 3.11. Фигура Лиссажу, образованная при сложении двух колебаний с частотами, отличающимися в 2 раза

Период пространственных биений находится путём измерения расстояния между двумя первыми максимумами волны второй гармоники. Максимум амплитуды определяется по максимальному отклонению стрелки селективного вольтметра. Из-за малой точности нецелесообразно проводить измерения с помощью фигуры Лиссажу. В данном случае фигура Лиссажу на экране служит лишь для качественного наблюдения эффекта генерации второй гармоники и её пространственных биений.

3.8. Упражнения

Перед выполнением заданий следует внимательно ознакомиться с Приложением 3.1, где подробно описываются настройки цифровых приборов и даются рекомендации по выбору режимов измерений.

3.8.1. Измерение фазовой и групповой скорости капиллярных волн

1. Проверить правильность подключения приборов в соответствии с блок-схемой экспериментальной установки. Включить и выполнить необходимые настройки приборов (см. Приложение 3.1).
2. Установить на обоих каналах генератора непрерывные синусоидальные сигналы частотой 50 Гц. На первом канале установить выходное сопротивление 50 Ом и амплитуду напряжения 2 В (2 V_{pp}). На втором канале установить амплитуду напряжения

20 мВ (20 mVpp). Подключить кабель с выхода второго канала генератора к гнезду коммутатора «калибровочный сигнал с генератора». Перевести коммутатор в положение «калибровка». Включить второй канал генератора и выполнить настройку селективного милливольтметра на выбранную частоту по максимальному отклонению стрелки милливольтметра при установленном на нём пределе измерений 1 или 3 мВ. Настройку производить с помощью регулировок «частота грубо» (▼) и «частота точно» (▲). Перевести тумблер коммутатора в положение «приём» и отсоединить кабель от гнезда «калибровочный сигнал с генератора». Включить первый канал генератора и визуально убедиться, что в кювете происходит возбуждение капиллярных волн. Для уверенного возбуждения капиллярной волны боёк 2 следует опустить в воду на глубину 1–2 мм. Регулировкой глубины погружения бойка добиваются максимальной амплитуды генерируемой волны. При этом необходимо следить за тем, чтобы нижний край бойка был параллелен поверхности воды. Если на осциллографе наблюдается неустойчивый приём сигнала, необходимо изменить в небольших пределах глубину погружения зонда с помощью микрометрического винта. При отклонении формы фигуры Лиссажу от эллиптической нужно уменьшить амплитуду излучаемого сигнала путем поворота регулятора громкости (VOLUME) на усилителе.

3. Измерения фазовой скорости начать в непосредственной близости от бойка, при этом выбрать положение приёмного устройства, при котором фигура Лиссажу вырождается в прямую. Записать показание x_0 в начале отсчёта на линейке, вдоль которой перемещается приёмное устройство.

4. Передвигать приёмное устройство по направлению от бойка до тех пор, пока фигура Лиссажу не совершит полный оборот, т.е. приёмник сместится на одну длину волны. Записать в таблицу 3.1 раздела 3.8.3 показание x_1 . Вновь продолжить перемещение приёмника и провести аналогичные измерения x_N ($N = 2, 3, \dots$) вплоть до $N = 10$ оборотов фигуры Лиссажу.

5. В процессе измерений приёмное устройство следует перемещать в одном и том же направлении. Этим исключается погрешность измерения перемещения, связанная с люфтом микрометрической подачи.
6. Не меняя настройки селективного вольтметра, выполнить измерение групповой скорости волны на частоте 50 Гц. Для этого установить на первом канале генератора импульсный режим работы (Burst). Выбрать период повторения 500 мс, число периодов в импульсе – 4. Перевести осциллограф в режим Y-T и получить на втором канале осциллограмму, представленную на рис. 3.9.
7. За начало отсчёта расстояния выбрать положение приёмного устройства, при котором оно находится ближе всего к бойку. Записать показания на линейке x_0 в начале отсчёта. В этом же положении записать задержку максимума огибающей капиллярной волны на втором канале относительно одного из максимумов заполнения сигнала на первом канале осциллографа t_0 (см. рис. 3.10).
8. Передвигая приёмное устройство по направлению от бойка на расстояние, кратное 5 мм, измерять и записывать в таблицу 3.2 раздела 3.8.3 задержку t_N прихода максимума огибающей капиллярной волны. Всего провести 5 измерений.
9. Выполнить аналогичные измерения для частот 30, 40, и 60 Гц. Результаты измерений занести в таблицы 3.1 и 3.2.

3.8.2. *Определение периода пространственных биений второй гармоники капиллярных волн*

Для частот 30, 40, 50 и 60 Гц определить период пространственных биений второй гармоники капиллярных волн. Для этого после выполнения заданий раздела 3.8.1 на частотах 60, 80, 100 и 120 Гц, не меняя настроек селективного вольтметра, следует измерить расстояния между двумя первыми максимумами волны

второй гармонике. Например, частота 60 Гц, на которой измерены фазовая и групповая скорость в разделе 3.8.1, соответствует второй гармонике для волны на частоте 30 Гц. Поэтому, прежде чем переходить к измерениям фазовой и групповой скорости на частоте 80 Гц, следует выполнить задания данного раздела для частоты 30 Гц. При этом селективный вольтметр должен быть настроен на частоту 60 Гц.

1. Сохраняя на первом канале генератора напряжение амплитудой 2 В (2 Vpp), поместить приёмное устройство ближе всего к бойку. Затем двигать приёмное устройство по направлению от бойка до положения x_1 , в котором стрелка милливольтметра покажет первый максимум. Записать это положение в таблицу 3.3 раздела 3.8.3. Продолжать двигать приёмное устройство по направлению от бойка до положения x_2 , в котором стрелка милливольтметра покажет второй максимум. Записать это положение в таблицу 3.3 раздела 3.8.3. Для более точного определения максимумов можно менять предел измерений селективного вольтметра.

2. Повторить измерения, предварительно увеличив амплитуду на первом канале до 2.5 В (2.5 Vpp).

После измерений на частоте 30 Гц настроить селективный вольтметр на частоту 80 Гц и выполнить задания раздела 3.8.1. Прежде чем переходить к измерениям фазовой и групповой скорости на частоте 100 Гц, следует выполнить задания данного раздела для частоты 40 Гц. При этом селективный вольтметр должен быть настроен на частоту 80 Гц. В такой же последовательности выполняются задания после настройки селективного вольтметра на частоту 100 и 120 Гц.

3.8.3. Обработка полученных результатов

1. По таблице 3.1 для каждой частоты построить зависимость x_N от N и аппроксимировать её линейной зависимостью по методу наименьших квадратов (МНК). По наклону полученной прямой найти

значение длины волны на данной частоте в мм и определить фазовую скорость $c_{\text{фаз}}^{\text{кап}}(f)$ в мм/с. Используя выражение (3.12), построить теоретическую кривую $c_{\text{фаз}}^{\text{кап}}(f)$ (для $\sigma = 74$ мН/м). Нанести на построенный график экспериментальные точки.

Таблица 3.1

Номер измерения N	Показания микрометра (мм)	Частота f (Гц)						
		30	40	50	60	80	100	120
0	x_0							
1	x_1							
...	...							
10	x_{10}							

2. Для каждого измеренного значения фазовой скорости определить коэффициент поверхностного натяжения. Рассчитать среднее значение σ для воды, используемой в эксперименте. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м³.

Таблица 3.2

f , Гц	30			40			...	120		
Δx , мм	x_N , мм	t_N , мс	Δt , мс	x_N , мм	t_N , мс	Δt , мс		x_N , мм	t_N , мс	Δt , мс
0										
5										
10										
15										
20										
25										

3. По таблице 3.2 вычислить Δt как разность задержек при текущем Δx и $\Delta x = 0$. Для каждой частоты точками построить зависимость Δx от Δt и аппроксимировать её линейной зависимостью по методу наименьших квадратов (МНК). По наклону полученной прямой найти значение групповой скорости $c_{\text{груп}}^{\text{кап}}(f)$ на данной частоте в мм/с. Используя те же координаты, в которых построена зависимость фазовой скорости от частоты, построить теоретическую кривую зависимости для $c_{\text{груп}}^{\text{кап}}(f)$ по формуле (3.13). Точками нанести на график экспериментальные значения $c_{\text{груп}}^{\text{кап}}(f)$.
4. По таблице 3.3 определить значения периода пространственных биений $\Delta_{2\omega}(f)$ второй гармоники капиллярных волн для частот 30, 40, 50 и 60 Гц.

Таблица 3.3

Номер измерения	f , Гц	30	40	50	60	70
1	x_1 , мм					
	x_2 , мм					
2	x_1 , мм					
	x_2 , мм					

5. Согласно формуле (3.18), построить теоретическую зависимость $\Delta_{2\omega}(f)$ и нанести на график экспериментальные точки.
6. Определить дисперсионное число D .

3.9. Контрольные вопросы

1. Определить частоту волны в глубокой кювете с оливковым маслом ($\sigma = 33 \text{ мН/м}$, $\rho_0 = 0.9 \text{ г/см}^3$), соответствующую минимуму фазовой скорости.
2. Какой толщины должен быть слой оливкового масла, чтобы его можно было считать глубоким для капиллярных волн?
3. Вывести формулу (3.20), которая используется для оценки периода пространственных биений волны второй гармоники.
4. Предложить способ приближённого определения глубины водоёма по характеристикам гравитационно-капиллярных волн на его поверхности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.1

Инструкция к осциллографу и генератору

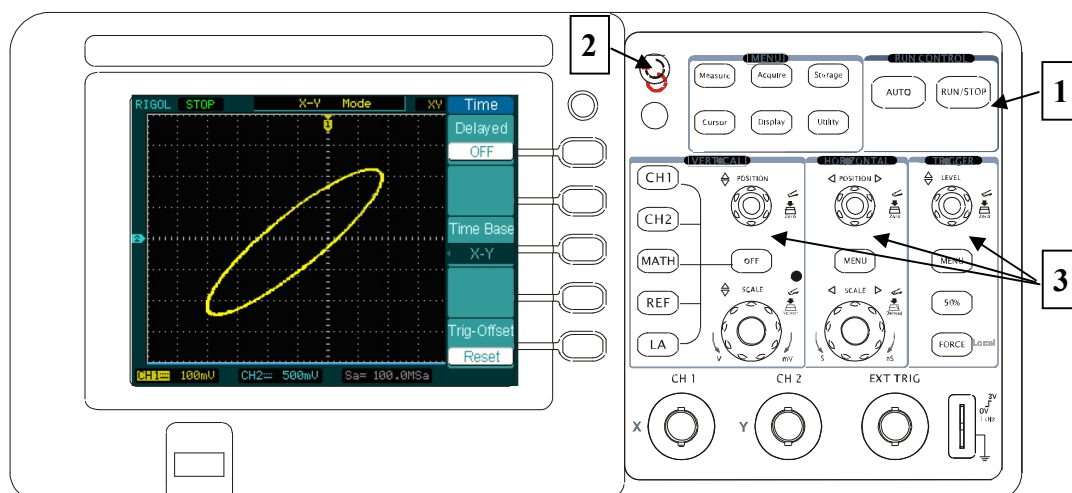


Рис. 3.12. Лицевая панель осциллографа

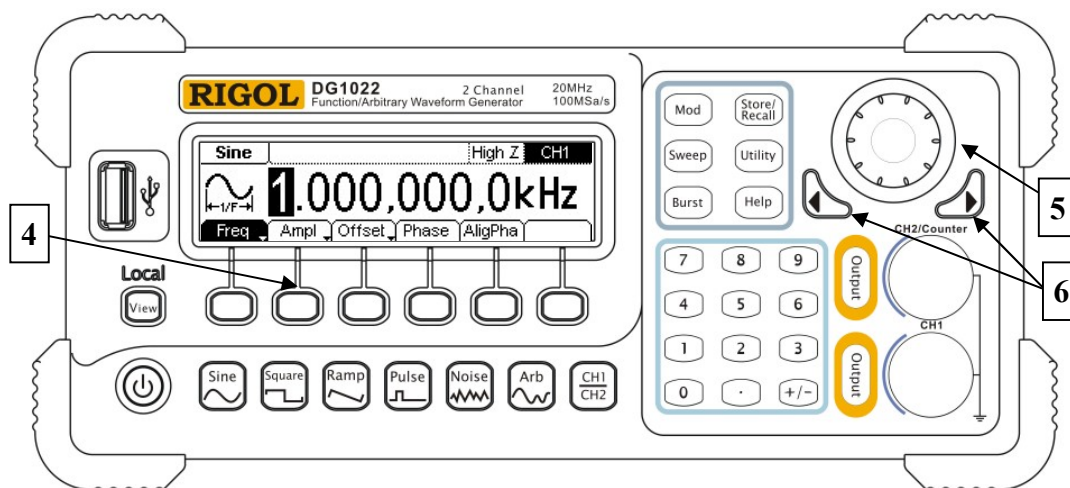


Рис. 3.13. Лицевая панель генератора

Обозначения, используемые далее в описании:

- Названия кнопок на панелях приборов даются в прозрачной рамке. Например, RUN/STOP обозначает кнопку 1 осциллографа.
-  – многофункциональная поворотно-нажимная ручка управления осциллографом 2.
-  SCALE,  POSITION,  LEVEL обозначают соответствующие ручки панели управления осциллографом 3.
- Названия экранных кнопок даются в серой рамке и соответствуют отображаемой на экране надписи (например, Time Base). Экранные кнопки синего цвета. На осциллографе они расположены справа от экрана, на генераторе – под экраном. В случае, изображённом на рис. 3.13, Ampl соответствует кнопка 4.
- Регулятором 5 и стрелками 6 можно плавно менять частоту или амплитуду.

Настройки приборов и рекомендации по выбору режимов измерений при выполнении работы

1. Не включая генератор, включить осциллограф (кнопка сверху слева на крышке);
2. Проверить, что для обоих каналов X и Y установлена минимальная чувствительность на осциллографе (надпись слева внизу экрана CH1 ~ 5.00V и CH2 ~ 5.00V). Если установки отличаются, установить минимальную чувствительность, руководствуясь нижеследующими подсказками.
 - Установить горизонтальную развертку в режим наблюдения фигуры Лиссажу, нажав **MENU** раздела HORIZONTAL. В появившемся меню нажать **Time Base**. Поворотом  выбрать значение «X-Y». Нажать на .
 - Нажать **CH1**, повернуть регулятор  **SCALE** раздела VERTICAL против часовой стрелки до чувствительности 5.0 В/дел.
 - Нажать **CH2**, повернуть регулятор  **SCALE** раздела VERTICAL против часовой стрелки до чувствительности 5.0 В/дел.
3. Проверить правильность подключения приборов в соответствии с блок-схемой экспериментальной установки.
4. Включить генератор, установить выходное сопротивление на канале CH1 50 Ом. Подать на выход CH1 сигнал необходимой амплитуды и частоты. На канале CH2 при нагрузке High Z установить напряжение амплитудой 20 мВ. Значение частоты на канале CH2 установить таким же, как на канале CH1 при измерении фазовой и групповой скорости. При измерении периода пространственных осцилляций на канале CH2 установить значение частоты вдвое большее, чем на канале CH1. Установки производятся в соответствии с инструкцией, изложенной далее.

- Нажать клавишу **Utility** и войти в одноимённое меню. Нажать экранную кнопку **CH1**, названия экранных кнопок изменятся, после чего нажать экранную кнопку **High Z**. Вместо кнопки **High Z** появится кнопка **Load**, а значение High Z изменится на 50 Ω .
- Проверить, что выбран первый канал (надпись в правом верхнем углу экрана CH1 или CH2). Если горит CH2, то выбрать CH1 нажатием кнопки

CH1
CH2

.
- Для измерения фазовой скорости выбрать непрерывный режим генерации. Если включён импульсный режим (подсвечена зелёным кнопка **Burst**), выключить его нажатием кнопки **Burst**.
- Нажать **Sine**, выбрав синусоидальную форму сигнала.
- Проверить, что подсвечена экранная кнопка **Freq**. Подсвеченной экранной кнопкой является та, название которой написано белыми буквами на чёрном фоне. При нажатии на подсвеченную кнопку, на которой после названия изображён символ ▼, её название и назначение меняется. Перебор всех назначений подсвеченной кнопки осуществляется последовательными нажатиями на неё. При нажатии на неподсвеченную кнопку она подсвечивается.
- Установить частоту 40 Гц. Для этого при подсвеченной экранной кнопке **Freq** нажать последовательно на цифровой панели кнопки **40**. Стереть цифры при ошибочном вводе можно стрелкой влево (**◀**), отменить ввод – экранной кнопкой **Cancel**. Размерность устанавливается экранной кнопкой **Hz**. Плавное изменение частоты можно производить вращением регулятора, выбирая разряд изменения частоты с помощью кнопок **◀** и **▶**.
- Установить максимальную амплитуду выходного сигнала. Для этого при подсвеченной экранной кнопке **Ampl** установить вращением ручки по часовой стрелке максимальное значение

2 Vpp. Можно установить амплитуду при помощи цифровой панели аналогично п. 4.

- Кнопкой

CH1
CH2

 выбрать канал CH2 и установить на нём необходимое значение амплитуды и частоты.
- Для измерения групповой скорости выбрать импульсный режим генерации нажатием **Burst** (в импульсном режиме кнопка **Burst** подсвечена зелёным). Частота заполнения f и амплитуда будут иметь те значения, которые были установлены в непрерывном режиме. Изменить эти значения можно только в непрерывном режиме. Вместо длительности устанавливается число циклов. Для установки числа циклов и периода повторения следует при подсвеченной кнопке **Burst** нажать экранную кнопку **Cycles**. Затем регулятором или с цифровой панели установить 4 цикла (см. инструкцию по установке частоты). Период повторения устанавливается аналогичным образом после нажатия экранной кнопки **Period** при подсвеченной кнопке **Burst**. Установленные значения хранятся до выключения генератора. Поэтому после настройки переход от непрерывного режима к импульсному и обратно осуществляется нажатием кнопки **Burst**.
- Только убедившись, что параметры сигналов установлены правильно, следует включить нужный выход кнопкой **Output** рядом с ним (если канал включён, кнопка **Output** подсвечена зелёным). Этой же кнопкой осуществляется выключение канала.
- Если действия с генератором не производятся, он переходит в энергосберегающий режим, который сопровождается отключением дисплея. Для включения дисплея необходимо нажать кнопку **Output** около любого канала.

5. Выполнить необходимые настройки осциллографа.

- Вращением ручки  **SCALE** раздела **VERTICAL** после нажатия кнопки **CH1** на осциллографе производится масштабирование эллипса по ширине, а после нажатия кнопки **CH2** – по высоте.
- Для включения и отключения меню следует нажать кнопку **MENUON/OFF** (круглая кнопка справа сверху от экрана).
- Вращая ручку  **SCALE** раздела **HORIZONTAL** в режиме X-Y, можно менять частоту обновления экрана осциллографа.
- При измерении групповой скорости величина задержки Δt определяется по экрану осциллографа в режиме Y-T с помощью курсоров, вызов которых осуществляется нажатием кнопки **Cursor**. Параметры курсоров устанавливаются экранными кнопками. Перемещение между возможными значениями каждого параметра осуществляется вращением многофункциональной поворотной-нажимной клавиши . Выбор параметра происходит нажатием на эту ручку. Для проведения измерений значение параметра **Mode** должно быть **Manual**, **Type** – **X**, **Source** – **CH2**. Перемещение курсоров осуществляется также вращением многофункциональной поворотной-нажимной ручки. При вращении ручки перемещается курсор, который в меню на экране осциллографа помечен белым или оба курсора, если они помечены одновременно. В последнем случае расстояние между курсорами не меняется. Поставить нужный курсор можно экранной кнопкой (**CurA** или **CurB**). Положение каждого курсора и расстояние между курсорами отображается на экране осциллографа.
- При измерении времени задержки с помощью курсоров может быть удобно остановить развёртку нажатием кнопки **RUN/STOP**. В режиме запуска эта кнопка подсвечена зелёным. Если развёртка остановлена, кнопка подсвечена красным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966, 520 с.
2. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 400 с.
3. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973, 176 с.
4. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука. 1975. 288 с.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990, 432 с.
6. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова – Заболотской, 2010, т. 56, № 4, с. 452–462.
7. Воронов Б.Б., Коробов А.И., Руденко О.В. Нелинейные акустические волны в средах с поглощением и дисперсией // Успехи физических наук. 1992. Т. 162. № 9. С. 159–176.
8. Харкевич А.А. Избранные труды в трех томах. Том 2. Линейные и нелинейные системы. – М.: Наука, 1973, 566 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Часть 1. Искажение формы и поглощение мощных ультразвуковых волн в жидкости.....	5
1.1. Введение	5
1.2. Теория	5
1.3. Экспериментальная установка и методика измерений	22
1.4. Последовательность выполнения эксперимента	26
1.5. Упражнения	34
1.6. Контрольные вопросы	35
Приложение 1.1. Инструкция пользования осциллографом	36
П 1.1.1. <i>Автонастройка осциллографа для наблюдения сигнала с входа СНИ</i>	<i>37</i>
П 1.1.2. <i>Синхронизация принимаемого сигнала</i>	<i>38</i>
П 1.1.3. <i>Подстройка параметров текущего канала</i>	<i>39</i>
П 1.1.4. <i>Наблюдение спектра сигнала</i>	<i>40</i>
Часть 2. Численное моделирование нелинейных и дифракционных эффектов в звуковых пучках	41
2.1. Введение.....	41
2.2. Теория.....	44
2.2.1. <i>Уравнение Хохлова – Заболотской для нелинейных дифрагирующих акустических пучков.....</i>	<i>44</i>
2.2.2. <i>Нелинейные эффекты при распространении плоских волн в отсутствие дифракции.....</i>	<i>45</i>
2.2.3. <i>Дифракционные эффекты в линейных пучках. Гауссовский пучок.....</i>	<i>50</i>
2.2.4. <i>Запись уравнения Хохлова – Заболотской в безразмерных переменных.....</i>	<i>55</i>
2.2.5. <i>Нелинейные и дифракционные эффекты в мощных пучках. Плоский источник гармонических волн с гауссовским поперечным распределением амплитуды... 57</i>	<i>57</i>

2.3. Практическая работа.....	65
2.3.1. Последовательность действий при выполнении задачи	65
2.3.2. Упражнения.....	66
2.3.3. Комментарии по интерфейсу программы.....	68
2.4. Контрольные вопросы.....	68
Приложение 2.1. Вывод уравнения Хохлова – Заболотской из уравнений гидродинамики	70
Приложение 2.2. Численный алгоритм решения уравнения Хохлова – Заболотской.....	76
Часть 3. Нелинейные волны в средах с дисперсией	80
3.1. Волны на поверхности жидкости	80
3.2. Распространение волн малой амплитуды на поверхности жидкости	81
3.3. Нелинейные явления в средах с дисперсией	89
3.4. Экспериментальная установка для исследования капиллярных волн	93
3.5. Методика измерения фазовой скорости капиллярных волн	96
3.6. Измерение групповой скорости капиллярных волн	98
3.7. Исследование генерации второй гармоники в средах с дисперсией	99
3.8. Упражнения	100
3.8.1. Измерение фазовой и групповой скорости капиллярных волн	100
3.8.2. Определение периода пространственных биений второй гармоники капиллярных волн	102
3.8.3. Обработка полученных результатов	103
3.9. Контрольные вопросы	106
Приложение 3.1. Инструкция к осциллографу и генератору	106
Литература	112

Учебное издание

**НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ И КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ
В ЖИДКОСТЯХ**

Учебное пособие для физического практикума по акустике

Ответственные редакторы:

Коробов Александр Иванович

Руденко Олег Владимирович

Сапожников Олег Анатольевич

Подписано в печать 25.04.2024 г.

Формат А5. Объем 7,25 п.л. Тираж 100 экз.

Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова