

Рабочая программы дисциплины

1. Название дисциплины: Введение в методы возмущений.

2. Лекторы.

2.1. д.ф.-м.н., доцент Шанин Андрей Владимирович, кафедра акустики, andrey_shanin@mail.ru, тел. 939-30-81.

3. Аннотация дисциплины.

Курс посвящен асимптотическим методам, имеющим отношение к теории колебаний, радиофизике, акустике и теории волн. Вводится понятие асимптотического ряда, подробно обсуждаются свойства таких рядов. Показывается, как асимптотические ряды возникают при оценке дифракционных интегралов, при выполнении преобразования Фурье, а также при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Демонстрируются основные современные методы теории возмущений.

4. Цели освоения дисциплины.

Цели освоения дисциплины следующие: научиться выделять пертурбативные задачи среди остальных, научиться пользоваться асимптотическими рядами, приобрести навыки в построении решений задач теории колебаний и теории волн с помощью основных методов теории возмущений.

5. Задачи дисциплины.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен научиться решать типовые пертурбативные задачи теории колебаний и теории волн, оценивать типовые интегралы с большим параметром, а также строить асимптотики решений в особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. Компетенции.

6.1. Компетенции, необходимые для освоения дисциплины.

М-ОНК-2, М-ИК-2.

Студент должен обладать знаниями в рамках стандартного университетского курса по математическому анализу, теории функций комплексной переменной, дифференциальным уравнениям, теории колебаний.

6.2. Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины.

М-ОНК-2; М-ИК-2; М-ИК-3; М-ПК-1; М-ПК-2; М-ПК-3; М-ПК-5; М-ПК-6; М-СПК-9.

Студент научится строить асимптотические оценки интегралов и решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а также решать задачи физической и прикладной акустики, теории колебаний и волн, содержащие малый параметр.

7. Требования к результатам освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен знать основные понятия теории возмущений (асимптотического ряда, остаточного члена, анзаца разложения), асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в особых точках, основные методы построения решений задач теории колебаний; уметь строить асимптотические оценки интегралов, асимптотические разложения решений в особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, уметь строить решения задач теории колебаний и волн с помощью изученных методов теории возмущений; иметь опыт самостоятельного решения задач.

8. Содержание и структура дисциплины.

Вид работы	Семестр				Всего
	1	2	3	4	
Общая трудоёмкость, акад. часов	...		72	...	72
Аудиторная работа:	...				
Лекции, акад. часов	...		18	...	18
Семинары, акад. часов	...		18	...	18
Лабораторные работы, акад. часов
Самостоятельная работа, акад. часов	...		36	...	36
Вид промежуточной аттестации (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)	...		Зач.

№ раздела, название раздела	№ темы	Название темы	Структура и содержание дисциплины				Форма текущего контроля успеваемости
			Содержание темы	Аудиторная нагрузка, отводимая на лекционный материал темы, ак.ч.	Названия семинаров по теме. Аудиторная нагрузка, отводимая на каждый семинар темы, ак.ч.	Самостоятельная работа: название темы самостоятельной работы; трудоемкость темы, ак.ч.	
1. Введение	1	Введение	Понятие асимптотического ряда по Пуанкаре. Примеры асимптотических рядов	2 часа	Понятие асимптотического ряда по Пуанкаре. Примеры асимптотических рядов 2 часа	Асимптотический ряд. 4 часа	ДЗ, КР
2. Асимптотическое вычисление интегралов	2	Вычисление интегралов типа Лапласа	Интегралы типа Лапласа. Метод перевала	1 час	Интегралы типа Лапласа. Метод перевала 1 час	Вычисление интегралов типа Лапласа. 4 часа	ДЗ, КР
	3	Вычисление интегралов типа Фурье	Интегралы типа Фурье. Фазовые интегралы в теории дифракции	2 часа	Интегралы типа Фурье. Фазовые интегралы в теории дифракции 2 часа	Вычисление интегралов типа Фурье. 2 часа	ДЗ, КР
	4	Спектр частотно-модулированного сигнала	Вычисление спектра частотно-модулированного сигнала.	1 час	Вычисление спектра частотно-модулированного сигнала. 1 час	Спектр частотно-модулированного сигнала. 4 часа	ДЗ, КР
3. Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений	5	Классификация особых точек ОДУ	Особые точки обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры и классификация	1 час	Особые точки обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры и классификация. 1 час	Классификация особых точек ОДУ. 4 часа	ДЗ, КР
	6	Асимптотики решений в особых точках	Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений в особых точках	2 часа	Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений в особых точках. 2 часа.	Асимптотики решений в особых точках. 4 часа	ДЗ, КР
4. Решение задач теории колебаний и волн	7	Прямое разложение	Метод прямого разложения. Границы применимости. Понятие равномерного разложения.	1 час	Метод прямого разложения. Границы применимости. Понятие равномерного разложения. 1 час	Прямое разложение. 2 часа	ДЗ, КР
	8	Метод медленно меняющейся амплитуды и фазы	Метод прямого разложения. Границы применимости. Понятие равномерного разложения	1 час	Метод прямого разложения. Границы применимости. Понятие равномерного разложения. 1 час	Метод медленно меняющейся амплитуды и фазы. 2 часа	ДЗ, КР
	9	Метод усреднения	Метод медленно меняющейся амплитуды и фазы, метод многих масштабов.	1 час	Метод медленно меняющейся амплитуды и фазы, метод многих масштабов. 1 час	Метод усреднения. 2 часа	ДЗ, КР

10	ВКБ разложение	ВКБ разложение, Точки поворота, функция Эйри, каустики. 1 час	2 час	ВКБ разложение, Точки поворота, функция Эйри, каустики. 2 часа	ВКБ разложение. 4 часа	<i>ДЗ, КР</i>
11	Сингулярно-возмущенные задачи	Сингулярно возмущенные задачи. Метод сращивания асимптотических разложений, пограничный слой, краевые эффекты.	2 часа	Сингулярно возмущенные задачи. Метод сращивания асимптотических разложений, пограничный слой, краевые эффекты. 2 часа	Сингулярно-возмущенные задачи. 4 часа	<i>ДЗ, КР</i>
12	Безразмерные параметры	Безразмерные параметры в физических задачах.	1 час	Безразмерные параметры в физических задачах. 1 час	Безразмерные параметры. 2 часа	<i>ДЗ, КР</i>

Предусмотрены следующие формы текущего контроля успеваемости.

Домашнее задание (ДЗ);
Контрольная работа (КР);

9. Место дисциплины в структуре ООП ВПО

1. Дисциплина является обязательной.
2. Вариативная часть, профессиональный блок, научно-исследовательский семинар.
3. Курс содержит дополнения к курсам "Теория функций комплексной переменной" и "Дифференциальные уравнения". Кроме того, курс дает теоретическое обоснование для курсов "Теория колебаний" и "Нелинейная акустика"

3.1. Перечислить дисциплины и практики, которые должны быть освоены для начала освоения данной дисциплины.

Математический анализ, теория функций комплексной переменной, дифференциальные уравнения

3.2. Указать дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее. Перечень
Научно-исследовательская практика.

10. Образовательные технологии

Указать образовательные технологии, используемые при реализации различных видов учебной работы и дающие наиболее эффективные результаты освоения дисциплины.

Изложение ведётся традиционным способом (с использованием мела и доски).

11. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Пример домашнего задания:

1. Оценить интеграл

$$I(s) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} e^{sx} dx$$

при больших положительных s

2. Исследовать нелинейный осциллятор

$$u + (1 + \varepsilon u^2)u = 0$$

при малых ε методом многих масштабов. Найти поправку к частоте колебаний в первом приближении.

Пример заданий для контрольной работы

1. Найти особые точки и указать анзацы решений в этих особых точках для уравнения Куммера

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0$$

2. Исследовать уравнение

$$\ddot{u} + [1 + \delta + \varepsilon \cos(2t)]u = 0$$

с помощью метода усреднения, полагая

$$u = a(t) \cos(t + \beta(t))$$

Задачи к экзамену:

1. Оценить интеграл при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. Оценить интеграл при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{-\lambda x} \sqrt{1-x^2} dx$$

3. Построить асимптотику функции ошибок

$$\operatorname{Erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$$

при больших действительных отрицательных z

4. Функция Эйри $Ai(z)$ определяется интегралом

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(t^3/3 + zt) dt$$

Найти ее асимптотики при больших положительных и больших отрицательных z

5. . Функция Эйри $Bi(z)$ определяется интегралом

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\exp(-t^3/3 + zt) + \sin(t^3/3 + zt)] dt$$

Найти ее асимптотики при больших положительных и больших отрицательных z

6. Найти поправку к собственной частоте колебаний для нелинейного осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^5 = 0$$

при малом ε

7. Записать укороченные уравнения и описать поведение системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \varepsilon \operatorname{sign}(u) = 0$$

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

при малом ε

8. Записать укороченные уравнения и описать поведение системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \varepsilon \operatorname{sign}(\dot{u}) = 0$$

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

при малом ε

9. Вывести и решить укороченные уравнения для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \varepsilon (\dot{u})^3 = 0$$

при малом ε

10. Вывести и решить укороченные уравнения для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{u} + u + \varepsilon \dot{u} u^4 = 0$$

при малом ε

11. Вывести укороченные уравнения и найти поправку к собственной частоте для системы, описываемой уравнением

$$u + u + \varepsilon (\dot{u})^2 u = 0$$

при малом ε

12. Исследовать особые точки уравнения (определить тип особых точек и найти показатели) для уравнения

$$(1 - z^2)u''' - 2zu' + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right) u = 0$$

относительно функции $u(z)$

13. Решить краевую задачу для уравнения

$$\varepsilon y'' + y' = 1$$

на отрезке $x \in [0,1]$ с граничными условиями

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

Здесь ε - малый параметр

14. Решить краевую задачу для уравнения

$$\varepsilon y'' + y' = x$$

на отрезке $x \in [0,1]$ с граничными условиями

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

Здесь ε - малый параметр

15. Решить краевую задачу для уравнения

$$\varepsilon y'' + iy = 1$$

на отрезке $x \in [-1,1]$ с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Здесь ε - малый параметр

16. Оценить значение интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-1}^2 \cos(\lambda \cos x) dx$$

при больших положительных λ

Теоретические вопросы к экзамену:

1. Понятие асимптотического ряда по Пуанкаре
2. Асимптотическая оценка интегралов Лапласа
3. Метод перевала
4. Спектр частотно-модулированного сигнала
5. Классификация особых точек обыкновенных дифференциальных уравнений

6. Асимптотические разложения в регулярных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений
7. Асимптотические разложения в иррегулярных особых точках ранга один обыкновенных дифференциальных уравнений
8. Прямое асимптотическое разложение в задачах теории колебаний. Понятие равномерности разложения и секулярных членов
9. Метод усреднения
10. Метод многих масштабов
11. Метод ВКБ
12. Сингулярно-возмущенные задачи. Метод сращиваемых асимптотических разложений
13. Асимптотики функций Эйри

12. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Основная литература

1. А.Найфэ. Введение в методы возмущений. М.Мир. 1984 535 с.
2. Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции. М.Наука 1990, 528 с.

Дополнительная литература

1. А.Эрдейи. Асимптотические разложения. М.Физматгиз, Москва 1962, 128с.
2. Н.Н. Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. М.Наука. 1974, 504 с.

Интернет-ресурсы

Методическое пособие по теории возмущений

http://acoustics.phys.msu.ru/teachers/shanin_files/perturbation_book.pdf

Видеозапись лекций по распространению и рассеянию волн:

http://acoustics.phys.msu.ru/teachers/shanin_files/diffraction_video.htm

13. Материально-техническое обеспечение

В соответствии с требованиями п.5.3. образовательного стандарта МГУ по направлению подготовки «Физика».

Курс читается в аудитории кафедры.