

Корольков Андрей Игоревич

**Новые решения двумерных задач дифракции
акустических волн на периодических решетках из
поглощающих экранов и на импедансной полосе**

Специальность: 01.04.06 – акустика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре акустики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: Шанин Андрей Владимирович, д.ф.-м.н.,
доцент кафедры акустики физического,
факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Кюркчан Александр Гаврилович
доктор физико-математических наук,
профессор Андронов Иван Викторович

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение математического ин-
ститута им. В.А.Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «_____» _____ 2016 г. в _____ часов на заседании
Диссертационного совета Д. 501.001.67 в МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991,
г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы д. 1, стр. 2, физический факультет, аудитория имени
Р. В. Хохлова.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного
университета имени М. В. Ломоносова

Автореферат разослан «_____» _____ 2016 г.

Ученый секретарь

Диссертационного совета Д 501.001.67,

к.ф.-м.н., доцент,

А. Ф. Королев

Общая характеристика работы

Цели и задачи диссертационной работы. В данной работе рассмотрены некоторые двумерные задачи теории дифракции. А именно, рассмотрена задача дифракции на импедансном отрезке и задача дифракции высокочастотной волны на решетке, состоящей из периодически расположенных поглощающих экранов разной высоты.

В качестве цели настоящего исследования ставилось аналитическое и численное рассмотрение этих задач с помощью метода формулы расщепления, спектрального уравнения и ОЕ—уравнения, а также метода параболического уравнения. Основные задачи, которые решались в рамках поставленной цели, следующие:

1. Получение аналитического выражения для коэффициента генерации главного дифракционного максимума (коэффициента зеркального отражения) при дифракции высокочастотной плоской волны, на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты.
2. Построение численного алгоритма, позволяющего вычислять коэффициенты генерации всех дифракционных максимумов при дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты.
3. Установление связи между методом Винера—Хопфа—Фока, традиционно применяемым для решения задач дифракции на периодических решетках, и методом спектрального уравнения и ОЕ—уравнения.
4. Получение простого выражения для диаграммы направленности поля, рассеянного на импедансном отрезке, справедливого в параболическом приближении, т. е. при скользящем падении высокочастотной волны.
5. Исследование задачи дифракции на импедансном отрезке в точной постановке в рамках метода формулы расщепления и ОЕ—уравнения. Разработка на основе метода ОЕ—уравнения нового алгоритма численного решения задачи. ОЕ—уравнение – это метод, развитый в [8, 9].

Актуальность темы исследования. Задача дифракции на отрезке (см. Рис. 1) привлекает внимание исследователей уже более века. Данная задача является канонической задачей дифракции в том смысле, что ее решение может быть использовано как часть решения более сложной задачи, например, в рамках методов геометрической теории дифракции (ГТД) и физической теории дифракции (ФТД) [1, 2], и, возможно [3]. Задача дифракции на отрезке

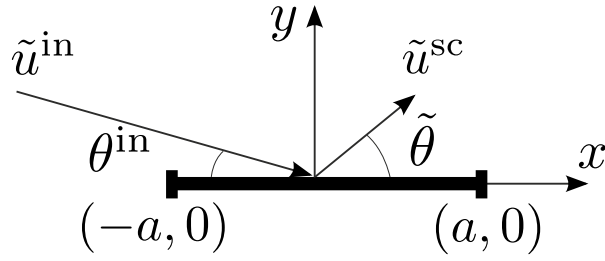


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции на отрезке

с идеальными граничными условиями хорошо изучена и может считаться решенной [4]. К сожалению, отрезок с импедансными граничными условиями исследован в гораздо меньшей степени. Решение этой задачи до сих пор не найдено, а существующие методы трудоемки и зачастую опираются на численное решение соответствующих интегральных уравнений.

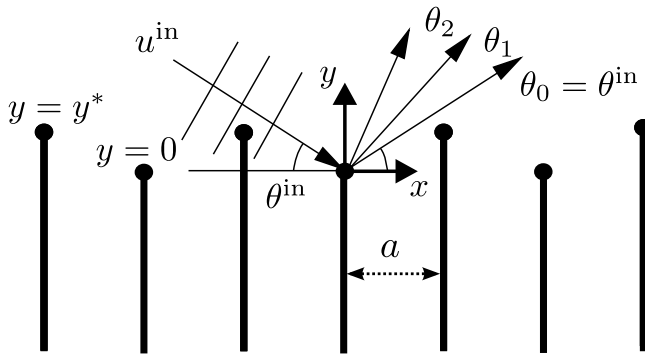


Рис. 2. Геометрия периодической решетки

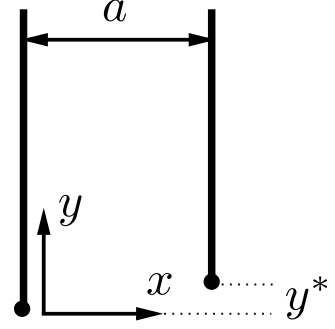


Рис. 3. Геометрия волновода

Задачи дифракции на периодических решетках, состоящих из полностью поглощающих экранов (на Рис. 2 изображен пример такой решетки), кажутся на первый взгляд экзотическими. Однако такие задачи имеют вполне конкретный физический смысл. Актуальность исследования данных периодических решеток была показана в работах [5, 6]. Классическая задача Л. А. Вайнштейна о дифракции на торце плоского волновода может быть сведена к задаче дифракции на решетке, состоящей из полубесконечных полностью поглощающих экранов [5]. В [6] был предложен алгоритм сведения акустических задач в любых открытых двумерных прямоугольных резонаторах к задачам дифракции на периодически расположенных, полностью поглощающих экранах. Такие задачи называются в работе *вайнштейновскими*. Хорошо известно, что в рамках уравнения Гельмгольца не существует граничных условий, соответствующих полностью поглощающим экранам. В настоящем исследовании поглощающие экраны понимаются в смысле параболического приближения, в котором соответствующие граничные условия формулируются элементарно.

Задача дифракции на торце плоского волновода была решена Л. А. Вайнштейном с помощью метода Винера—Хопфа—Фока [7]. Для более глубокого понимания мотивации данного исследования остановимся на ключевом результате, полученном в [7]. Результат состоит в следующем. Высокочастотная мода (т. е. мода с длиной волны много меньшей ширины волновода) вблизи частоты отсечки имеет коэффициент отражения, близкий к -1 . Отметим, что в терминах эквивалентной задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов, это значит, что волна, падающая на решетку, почти полностью от неё отражается. Этот результат является достаточно неожиданным, поскольку в торце волновода отсутствуют какие-либо структуры, способные обеспечить почти идеальное отражение. Напротив, интуитивно ожидается коэффициент отражения близкий к 0 , что соответствует выходу энергии волны из волновода в окружающее пространство. Близость коэффициента отражения к -1 объясняет высокую добротность резонатора Фабри—Перо при отсутствии фокусирующих элементов. Возникает вопрос, будет ли коэффициент отражения в других близких задачах стремиться к -1 ? К несчастью, решение, полученное методом Винера—Хопфа—Фока, не является физически прозрачным и ответ на этот вопрос не очевиден. Прямое обобщение метода Винера—Хопфа—Фока на более сложные задачи ведет к матричной задаче Винера—Хопфа—Фока, аналитическое решение которой зачастую не может быть найдено. В частности, в случае полубесконечного плоского волновода, состоящего из параллельных несимметричных неймановских стенок (см. Рис. 3), необходимо решать матричную задачу Винера—Хопфа—Фока размерности 2×2 , не сводящуюся к известным задачам. Альтернативой в данном случае является рассмотрение эквивалентной задачи о дифракции на периодической решетке, состоящей из поглощающих экранов разной высоты (Рис. 2), к которой может быть применен метод формулы расщепления и спектрального уравнения.

Таким образом, тему исследований можно считать актуальной.

Научная новизна

1. Выведена формула расщепления, спектральное уравнение и эволюционные уравнения для задачи дифракции на периодической решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты, в параболическом приближении.
2. Получена асимптотическая оценка коэффициента генерации главного дифракционного порядка (коэффициента зеркального отражения) при скользящем угле падения в задаче дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты.
3. Сформулировано ОЕ—уравнение для задачи дифракции на решетке, состоящей из пол-

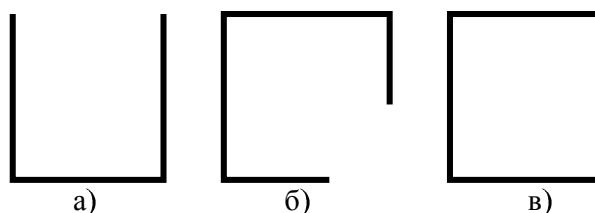


Рис. 4. Примеры открытых резонаторов. Стенки резонаторов являются идеальными

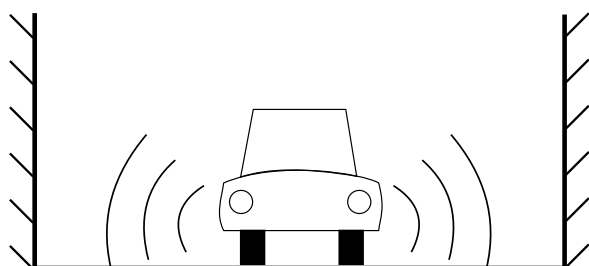


Рис. 5. Шумозащитные экраны на дороге как пример открытого акустического резонатора

кулисные поглотители

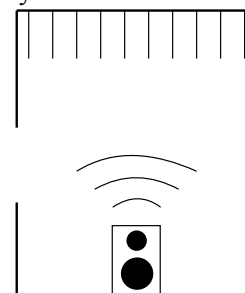


Рис. 6. Пример использования решетки из поглощающих экранов для снижения шума в помещении

ностью поглощающих экранов разной высоты. Предложен алгоритм численного решения ОЕ—уравнения.

4. Получено выражение для диаграммы направленности для задачи дифракции на импедансном отрезке в высокочастотном случае при скользющем падении. Сформулировано ОЕ—уравнение для задачи дифракции на импедансной полосе и предложен алгоритм его численного решения.

Практическая значимость. Решение двумерной задачи дифракции на импедансном отрезке представляет практический интерес для радио- и гидролокации. Новое выражение для диаграммы направленности может быть использовано при решении задач дифракции на телах сложной формы, имеющих части в форме полосы или ленты в рамках методов ГТД и ФТД. Как было сказано выше, решение задач дифракции на периодических решетках позволяет определить коэффициент отражения высокочастотной моды, близкой к частоте отсечки, от торца плоского полубесконечного волновода. Коэффициент отражения несет информацию о энергии, излученной из волновода. Последний факт имеет большое значение для расчета оптических и акустических плоскопараллельных резонаторов. В двумерном случае такие резонаторы могут быть представлены как отрезки плоского волновода, и с помощью коэффициента генерации может быть вычислена добротность резонатора [10, 11].

Кроме того, задачи дифракции на решетках могут быть использованы для анализа двумерных плоских открытых резонаторов, например для анализа резонаторов, изображенных на Рис. 4. Конструкции, близкие к резонатору, изображенному на Рис. 4 а), могут встречаться на автомобильных шоссе. Действительно, в последнее время для изоляции автомобильного шума применяются шумозащитные отражающие экраны (см. Рис. 5). В сумме с поверхностью земли шумозащитные экраны образуют открытый резонатор, в котором могут возникать высокочастотные акустические колебания. Также в качестве открытых резонаторов могут рассматриваться комнаты с окнами, т. е. результаты, полученные в данном исследовании, имеют значение для архитектурной акустики, так как возникновение высокочастотных мод в комнатах может отрицательно сказаться на их акустическом качестве.

Помимо всего прочего, решетки, состоящие из поглощающих экранов, используются для снижения шума в помещениях (см. Рис. 6). В промышленной акустике такие решетки называются звукопоглотителями кулисного типа. Они обеспечивают большее поглощение, чем равномерно распределенный по поверхности помещения поглотитель, занимающий такую же площадь.

Метод ОЕ—уравнения, развитый для задачи дифракции на периодической решетке, состоящей из поглощающих экранов, и для задачи дифракции на импедансной полосе, представляет собой альтернативу классическому методу Винера—Хопфа—Фока. ОЕ—формулировка является аналитическим результатом, который может быть использован для построения численных решений.

На защиту выносятся следующие основные положения:

1. Для задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты, справедлива формула расщепления, спектральное уравнение, эволюционное уравнение, ОЕ—уравнение.
2. Для задачи дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты, справедливы полученные в работе эволюционные уравнения и асимптотическая формула для коэффициента генерации главного дифракционного максимума.
3. Коэффициент генерации главного дифракционного максимума в задаче дифракции высокочастотной плоской волны на решетке, состоящей из экранов разной высоты, стремится к -1 при угле падения, стремящемся к 0 .
4. Для двумерной задачи дифракции на импедансном отрезке выполняются ОЕ—уравнения, полученные в работе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. “Ломоносов 2013”, 8—13 апреля, Москва;
2. “Дни дифракции’13”, 27 мая—1 июня 2013, Санкт-Петербург;
3. XXVII Сессия Научного совета РАН по акустике и XXVII сессия Российского акустического общества, 16—18 апреля 2014, Санкт-Петербург;
4. 1-я Всероссийская акустическая конференция, 6—10 октября 2014, Москва;
5. “Дни дифракции’14”, 26—30 мая 2014, Санкт-Петербург;
6. “Волноводы: асимптотические методы и численный анализ”, 21—23 мая 2015, Неаполь, Италия;
7. “Дни дифракции’15”, 25—29 мая 2015, Санкт-Петербург,

а также на семинарах Санкт-Петербургского отделения математического института им. Стеклова РАН (руководитель проф. В. М. Бабич) и кафедры акустики физического факультета МГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 14 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, 3 статьи в сборниках трудов конференций и 6 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, 6 приложений и библиографии. Общий объем диссертации 149 страниц, включая 49 рисунков. Библиография включает 110 наименований на 7 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полу-

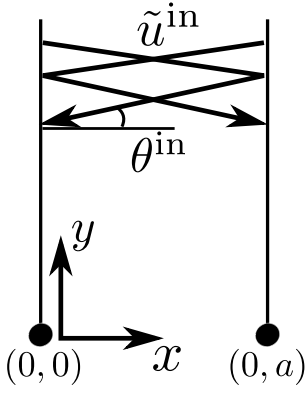


Рис. 7. Геометрия волновода

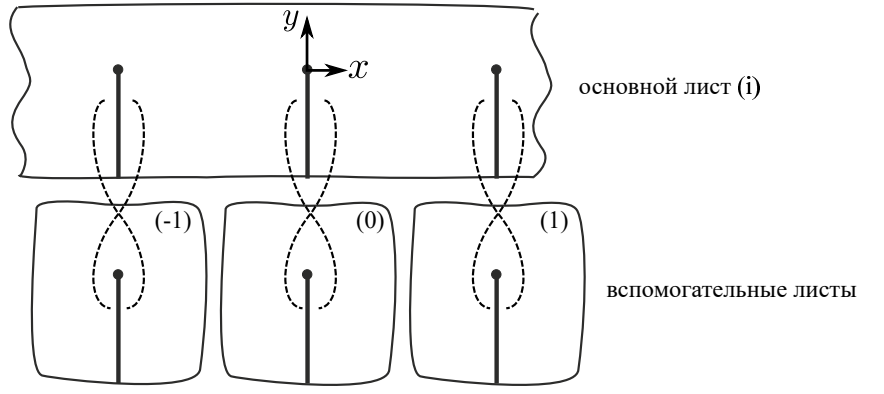


Рис. 8. Многолистная поверхность

ченных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, описываются методы диссертационного исследования.

В обзоре литературы рассмотрены основные подходы к решению задач, исследуемых в диссертации.

Первая глава посвящена переформулировке задачи дифракции высокочастотной моды, близкой к частоте отсечки, на торце плоского волновода (Рис. 7) к задаче дифракции плоской волны на точках ветвления многолистной поверхности, изображенной на Рис. 8. Кроме того, обосновывается применимость метода параболического уравнения к задаче на многолистной поверхности.

Переформулировка производится с помощью метода отражений. Далее, рассматривается стационарная задача на многолистной поверхности. Полное поле \tilde{u} удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \right) \tilde{u}(x, y) = 0 \quad (1)$$

на всей многолистной поверхности, кроме точек ветвления. По основному листу многолистной поверхности распространяется падающая волна

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{-ik_0 y \sin \theta^{\text{in}} + k_0 x \cos \theta^{\text{in}}\}. \quad (2)$$

Рассеяное поле \tilde{u}^{sc} представляется в виде ряда по дифракционным максимумам:

$$\tilde{u}^{\text{sc}} \equiv \tilde{u} - \tilde{u}^{\text{in}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{R}_n \exp\{iky \sin \theta_n\} \cos(kx \cos \theta_n), \quad (3)$$

где \tilde{R}_n — коэффициенты генерации дифракционных максимумов (коэффициенты рассеяния в волноводные моды), θ_n — углы рассеяния. Углы θ^{in} и θ_n удовлетворяют соотношению

$$\exp\{2ika(\cos \theta_n - \cos \theta^{\text{in}})\} = 1. \quad (4)$$

Ищутся коэффициенты генерации дифракционных порядков \tilde{R}_n .

Малость угла падения θ^{in} и малость длины волны по сравнению с периодом a позволяет рассматривать данную задачу в параболическом приближении теории дифракции. Это означает, что игнорируются цилиндрические волны, рассеянные точками ветвления под большим углом. Таким образом, имеется основное направление распространения (ось x), а волновое поле представляется в виде

$$\tilde{u}(x, y) = \exp\{ik_0x\}u(x, y), \quad (5)$$

где функция u зависит от своих аргументов медленно (по сравнению с экспонентой). Уравнение Гельмгольца (1) заменяется параболическим уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0. \quad (6)$$

Падающая волна (2) в параболическом приближении переходит в

$$u^{\text{in}}(x, y) = \exp\{-ik_0x(\theta^{\text{in}})^2/2 - ik_0\theta^{\text{in}}y\}. \quad (7)$$

Рассеянное поле в параболическом приближении на основном листе при $y > 0$ имеет вид

$$u^{\text{sc}} = \sum_n R_n \exp\{-ik_0x\theta_n^2/2 + ik_0\theta_n y\}, \quad (8)$$

где

$$\theta_n = \left((\theta^{\text{in}})^2 + \frac{2\pi n}{k_0 a}\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Последнее равенство следует из параболического аналога (4). Отметим, что $\theta_0 = \theta^{\text{in}}$. Главное преимущество использования метода параболического уравнения заключается в упрощении описания распространения волн вдоль координаты x . Действительно, в любой полосе $x' < x < x''$ без препятствий или точек ветвления поле $u(x, y)$ описывается интегральной формулой

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y')g(x - x', y - y')dy', \quad (10)$$

где g – функция Грина параболического уравнения:

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi ix}} \exp\left\{\frac{ik_0 y^2}{2x}\right\}. \quad (11)$$

Таким образом, поведение решений параболического уравнения на разветвленной поверхности отличается от поведения решения уравнения Гельмгольца на такой же поверхности. Эти различия заключаются в следующем. Рассмотрим вспомогательный лист с индексом n . Поскольку на этом листе падающей волны нет, на этом листе поле u равно нулю при

$x < an$. Для построения на этом листе волнового поля при $x > an$ необходимо решать для параболического уравнения задачу Коши с начальными данными $u(an + 0, y) = 0, y > 0$; $u(an + 0, y) = u_i(an - 0, y), y < 0$, где $u_i(an - 0, y)$ — поле на основном листе слева от разреза.

Разрезы на основном листе можно рассматривать в качестве полностью поглощающих экранов в том смысле, что полное поле $u(x, y)$ на основном листе справа от каждого из разрезов равно нулю. Причина этого заключается в том, что поле на основном листе справа от разреза непрерывно продолжает поле слева от разреза на вспомогательном листе, а там оно равно нулю. Таким образом, в параболическом приближении задача о рассеянии на решетке из точек ветвления эквивалентна задаче о рассеянии на решетке из идеально поглощающих экранов. Роль поглощающих экранов исполняют разрезы многолистной поверхности.

Корректность использования параболического приближения обосновывается с помощью формализма на основе интегралов Френеля. С помощью теоремы Грина показывается, что задача о дифракции на торце плоского волновода для уравнения Гельмгольца в приближении Кирхгофа и Френеля сводится к следующей паре интегральных уравнений:

$$u_1(y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y') u_0(y') dy', \quad y > 0. \quad (12)$$

$$e^{-2ik_0 a} u_0(y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y') u_1(y') dy', \quad y > 0, \quad (13)$$

где $u_0(y) = \tilde{u}(0, y)$, $u_1(y) = \tilde{u}(a, y) \exp\{-ik_0 a\}$, а $g(x, y)$ дается формулой (11). К уравнениям (12) и (13) применяется аналог метода отражений. А именно, уравнения (12) и (13) заменяются на цепочку уравнений

$$u_n(y) = \int_0^{\infty} g(a, y - y') u_{n-1}(y') dy'. \quad (14)$$

Функции $u_n(y)$ удовлетворяют условию Флоке:

$$u_{n+1}(y) = \exp\{-ik_0 a \theta_0^2 / 2\} u_n(y). \quad (15)$$

Очевидно, что уравнения (12) и (13) являются следствием цепочки (14).

Цепочка уравнений (14) связана с задачей в параболическом приближении следующим образом. Пусть функции $u_n(y), y > 0$ есть значения поля $u(an, y)$ на основном листе поверхности, на которой выполняется параболическое уравнение. Пусть на этом листе полное поле справа от разрезов равно нулю. Тогда формула (10) для $x' = an, x = a(n + 1)$ представляет собой (14). Следовательно, подход на основе интегралов Френеля эквивалентен подходу на основе параболического уравнения.

Далее, вводится краевая функция Грина (КФГ) как решение неоднородного уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = \delta(x-0)\delta(y), \quad (16)$$

т. е. источник расположен вблизи вершины поглощающего экрана $(0, 0)$. Вводится диаграмма направленности КФГ как коэффициент асимптотического разложения

$$v(x, y) = g(x, y)V(\theta) + o(x^{-1/2}), \quad \theta = y/x. \quad (17)$$

Выводится формула расщепления, связывающая диаграмму направленности краевой функции Грина $V(\theta)$ и коэффициенты генерации дифракционных максимумов R_n :

$$R_n = \frac{V(\theta_n)V(\theta^{\text{in}})}{ik_0 a \theta_n (\theta_n + \theta^{\text{in}})}. \quad (18)$$

Корректность определения КФГ, диаграммы направленности КФГ и справедливость формулы расщепления обосновываются в рамках формализма на основе интегралов Френеля.

Результаты первой главы опубликованы в работе [15].

Во второй главе рассматривается задача дифракции на решетке, состоящей из полностью поглощающих экранов разной высоты (см. Рис. 2). Волновод, дающий мотивацию данному исследованию, изображен на Рис. 3.

Задача ставится сразу в параболическом приближении. Как и раньше, рассеянное поле представляется в виде ряда по дифракционным порядкам (8) с

$$\theta_n = \sqrt{(\theta^{\text{in}})^2 + \frac{2\pi n}{k_0 a}}, \quad (19)$$

и целью является отыскание коэффициентов R_n . Вводятся КФГ $v_0(x, y)$ и $v_1(x, y)$ с источниками в точках $(0, 0)$ и (a, y^*) соответственно. Вводятся диаграммы направленности КФГ $V_0(\theta)$ и $V_1(\theta)$ по аналогии с формулой (17). Доказывается формула расщепления, связывающая диаграммы направленности КФГ с коэффициентами генерации дифракционных максимумов R_m :

$$R_m = \frac{\sum_{n=0}^1 V_n(\theta^{\text{in}})V_n(\theta_m) \exp\{ik_0 x_n(\theta_m^2 - (\theta^{\text{in}})^2)/2 - ik_0 y_n(\theta_m - \theta^{\text{in}})\}}{2ik_0 a \theta_m (\theta^{\text{in}} + \theta_m)}, \quad (20)$$

т. е. исходная задача сводится к отысканию $V_0(\theta)$ и $V_1(\theta)$. Для диаграмм направленности выводится обыкновенное дифференциальное уравнение с неизвестным коэффициентом $\mathbf{C}(\theta, y^*)$:

$$\frac{d}{d\theta}(V_0, V_1) = (V_0, V_1)\mathbf{\Pi}(\theta y^*)\mathbf{C}(\theta, y^*)\mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*), \quad (21)$$

с начальными условиями $V_0(+\infty) = 1$, $V_1(+\infty) = 1$, где

$$\mathbf{\Pi}(\theta y^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\{-ik_0 y^* \theta\} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} \\ C_{1,0} & C_{1,1} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Уравнение (21) называется спектральным. Для неизвестного коэффициента $\mathbf{C}(\theta, y^*)$ выводится так называемое ОЕ—уравнение, представляющее задачу подбора неизвестного коэффициента по известным граничным данным.

ОЕ—обозначения вводятся следующим образом. Рассмотрим матричное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(\tau) \mathbf{K}(\tau), \quad (23)$$

где $\mathbf{X}(\tau)$, $\mathbf{X}(\tau)$ матричные функции размерности 2×2 , зависящие от комплексной переменной τ , $\mathbf{K}(\tau)$ – коэффициент уравнения, $\mathbf{X}(\tau)$ – неизвестная матричная функция. Пусть начальное условие имеет следующий вид

$$\mathbf{X}(\tau_1) = \mathbf{I}.$$

Будем решать уравнение (23) вдоль контура h с началом в точке τ_1 и концом в точке τ_2 .

Тогда по определению

$$\text{ОЕ}_h^R [\mathbf{K}(\tau) d\tau] \equiv \mathbf{X}(\tau_2). \quad (24)$$

Будем называть оператор ОЕ_h^R упорядоченной экспонентой, взятой по контуру h . Верхний индекс R указывает на то, что коэффициент $\mathbf{K}(\tau)$ стоит справа в уравнении (23). Для уравнения вида

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\mathbf{X}}(\tau) = \tilde{\mathbf{K}}(\tau) \tilde{\mathbf{X}}(\tau) \quad (25)$$

аналогичным образом можно ввести левую упорядоченную экспоненту ОЕ_h^L .

Показывается, что функция $\mathbf{C}(\theta)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\text{ОЕ}_\gamma^R [\mathbf{\Pi}(\theta y^*) \mathbf{C}(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*) d\theta] = \mathbf{T}(p), \quad (26)$$

$$\mathbf{T}(p) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{ik_0ap\} \\ -\exp\{ik_0ap\} & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

для любого p при $\text{Im}[p] \geq 0$, контур γ представляет собой действительную ось, проходимую в отрицательном направлении. В левой части θ рассматривается как немая переменная, а p как параметр.

ОЕ—уравнение (26) образует однопараметрическое семейство по параметру p . Наличие такого семейства позволяет построить численное решение уравнения путем подбора неизвестного коэффициента $\mathbf{C}(\theta)$ при каждом заданном значении параметра p . После того как коэффициент подобран, вычисляются диаграммы краевых функций Грина путем решения спектрального уравнения (21). Коэффициенты генерации дифракционных максимумов R_m вычисляются с помощью формулы расщепления (20).

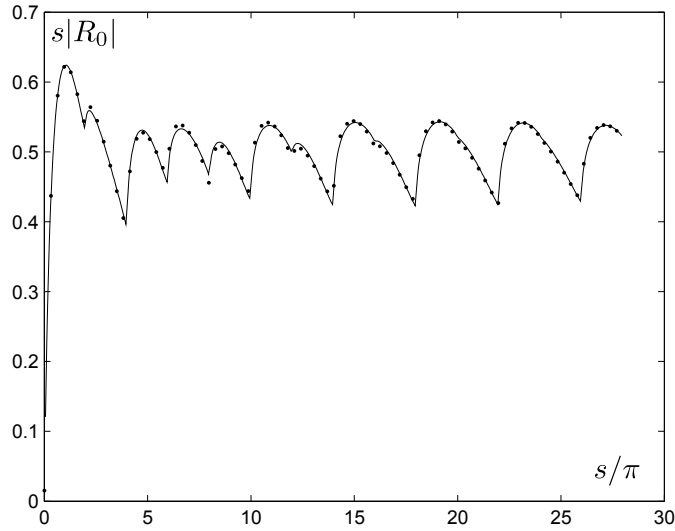


Рис. 9. Значения $s|R_0(s)|$, при $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/4$. Сплошная линия соответствует методу спектрального уравнения, а точки соответствуют прямому счету

Для проверки корректности вычисления коэффициентов генерации использовался прямой счет на основе интегральных формул вида (14). На Рис. 9 изображен график зависимости $s|R_0(s)|$, где $s = k_0 a (\theta^{\text{in}})^2$ при $y^*/\sqrt{(a/k)} = 1/4$.

Помимо ОЕ—уравнения и спектрального уравнения, выводится эволюционное уравнение 1 типа по параметру y^* :

$$\frac{d}{dy^*}(V_0, V_1) = (V_0, V_1) \mathbf{\Pi}(\theta y^*) \tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*) \mathbf{\Pi}^{-1}(\theta y^*), \quad (28)$$

где

$$\tilde{\mathbf{D}}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & D_{0,1} \\ -D_{1,0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Здесь $D_{0,1}$ и $D_{1,0}$ элементы матрицы

$$\mathbf{D}(\theta, y^*) = \begin{pmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} \\ D_{1,0} & D_{1,1} \end{pmatrix}, \quad \text{такой, что} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{ik_0 \theta} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta}. \quad (30)$$

Далее выводится эволюционное уравнение 2 типа как условие совместности уравнений (28) и (21):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y^*} \right) = -k_0^2 y^* \theta [\tilde{\mathbf{D}}, \mathbf{\Xi}] + \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \theta}, \tilde{\mathbf{D}} \right], \quad \mathbf{\Xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Путем решения эволюционных уравнений с помощью метода последовательных приближений (в качестве нулевого приближения берется случай $y^* = 0$, для которого матрицы \mathbf{D} и \mathbf{C} вычисляются явно) строится асимптотическое выражение для коэффициента генерации главного дифракционного максимума при $\sigma = y^* \sqrt{k_0/a} \ll 1$:

$$R_0 = -1 - \zeta \left(\frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{k_0 a}{\pi}} (1 - i) \theta - \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{k_0 a}{\pi}} (1 + i) 2^{-5/2} (2\sqrt{2} - 1) \theta \sigma^2 + o(\sigma^2). \quad (32)$$

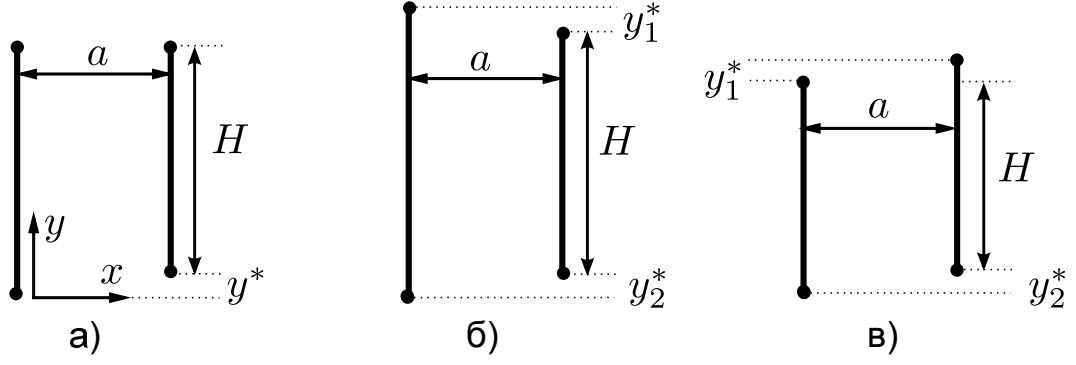


Рис. 10. Резонаторы Фабри-Перо, состоящие из параллельных несимметричных неймановских сте­нок

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

С помощью формулы (32) вычисляется добротность резонаторов Фабри–Перо, изобра­женных на Рис. 10. Дифракция на открытых концах резонаторов рассматривается независи­мо, т. е. полагается, что резонатор представляет собой кусок плоского волновода, открытый с обоих концов. Очевидно, что после нескольких отражений от концов волновода выживают только моды, близкие к частоте отсечки (из формулы (32) следует, что такие моды почти полностью отражаются с коэффициентом отражения, близким к -1). Эти моды образуют стоячие волны вида [6, 12]

$$\tilde{u}^{fp} = \sin(k_y^n y) \cos(k_x^m x), \quad (33)$$

где k_y^n и k_x^m – продольный и поперечный волновые вектора, определяемые из соотношений

$$\exp\{2ik_x^m a\} = 1, \quad (34)$$

$$R^1 R^2 \exp\{2ik_y^n H\} = 1, \quad (35)$$

где R^1 и R^2 – коэффициенты отражения от открытых концов резонатора, а H – размер резонатора по оси y . Угол θ , под которым распространяется парциальная волна, связан с k_y^n и k_x^m очевидным образом:

$$\theta = \frac{k_y^n}{k_x^m}.$$

Из условия $\theta \ll 1$ следует, что $k_x^m \gg k_y^n$. Тогда, из (32) имеем выражения для коэффициентов отражения $R^{1,2}$:

$$R^{1,2} \approx -1 + \varepsilon(y_{1,2}^*), \quad (36)$$

где

$$\varepsilon(y^*) = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{a}{\pi k_x^m}} (1-i) k_y^n - \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sqrt{\frac{k_x^m a}{\pi}} (1+i) 2^{-5/2} (2\sqrt{2}-1) \left(y^* \sqrt{k_y^n/a}\right)^2,$$

а y_1^* и y_2^* введены на Рис. 10.

Из (34) и (35) следует, что

$$k_y^n = \frac{\pi n}{H} - \frac{\ln(-R^1) + \ln(-R^2)}{2iH}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (37)$$

$$k_x^m = \frac{\pi m}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (38)$$

Собственные частоты резонатора вычисляются по формуле:

$$\omega_{mn}^2 = (k_x^m)^2 c^2 + (k_y^n)^2 c^2, \quad (39)$$

где c - скорость звука. Представим ω_{mn} в виде суммы мнимой и действительной части:

$$\omega_{mn} = \omega'_{mn} - i\omega''_{mn}.$$

Интерес представляет мнимая часть ω''_{mn} , отвечающая за дифракционные потери в резонаторе. Подставляя (37) и (38) в (39) и выделяя мнимую часть, получим

$$\omega''_m = -\frac{\pi n c^2}{2H^2 \omega'} \operatorname{Re}[\ln(-R^1) + \ln(-R^2)], \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (40)$$

Пользуясь тем, что $k_x^m \gg k_y^n$ получим

$$\omega' \approx \frac{\pi m c}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Отметим, что m предполагается большим, так как должно выполняться условие $\theta \ll 1$. С учетом того, что запасенная резонатором энергия E пропорциональна квадрату поля, имеем:

$$E \sim e^{-2\omega'' t},$$

где t - время. Наконец, добротность вычисляется по формуле

$$Q = -\omega' \frac{E}{dE/dt} = \frac{\omega'}{2\omega''} = -\frac{2H^2 \pi m^2}{a^2 n} (\operatorname{Re}[\ln(-R^1) + \ln(-R^2)])^{-1}. \quad (41)$$

На Рис. 11 представлен график зависимости добротности Q от $y_1^* \sqrt{k_x^m/a}$ при $n = 1$, $m = 10$, $k_x^m a = 31.4$, $k_x^m H = 157.1$, $y_2^* = 0$. Из графика следует что добротность растет с ростом y_1^* . Этот результат представляется несколько неожиданным, так как при дальнейшем увеличении y_1^* добротность падает. Действительно, при $y_1^* \sqrt{k_x^m/a} \gg 1$ можно считать одну из стенок волновода бесконечной и заменить его волноводом удвоенной ширины, то есть в выражении (36) для коэффициента R^1 величина y_1^* полагается равной нулю, а ширина a заменяется на $2a$. Таким образом, при $y_1^* \sqrt{k_x^m/a} \gg 1$ дифракционные потери растут, а добротность падает.

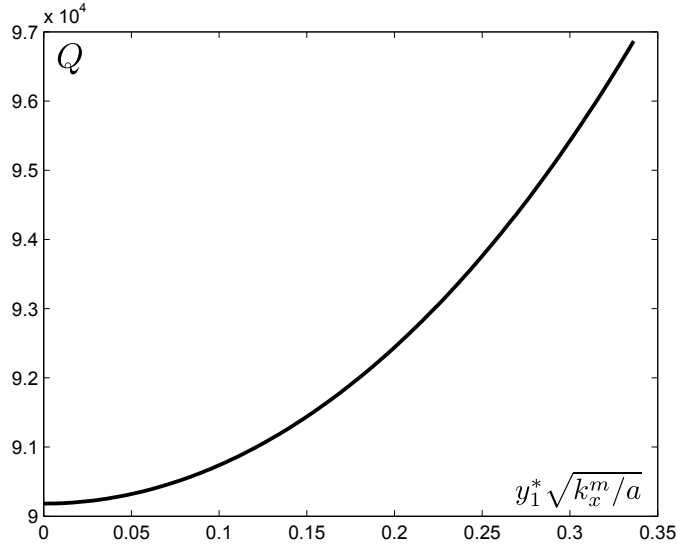


Рис. 11. График зависимости добротности Q от $y_1^* \sqrt{k_x^m/a}$ при $n = 1$, $m = 10$, $k_x^m a = 31.4$, $k_x^m H = 157.1$, $y_2^* = 0$

Результаты второй главы опубликованы в работе [16].

В третьей главе исследуется решетка, изображенная на Рис. 12. В терминах работы [6] этой решетке соответствует открытый резонатор и билиардная мода, изображенные на Рис. 13. Это квадратный резонатор со стороной d и угловым окном. Окно изображено пунктирной линией. Стороны, подходящие к окну, имеют длины h_1 и h_2 . Параметры a , b и y^* связаны с параметрами h_1 , h_2 и d соотношениями $a = d\sqrt{2} + (h_1 + h_2)/\sqrt{2}$, $b = d\sqrt{2} - (h_1 + h_2)/\sqrt{2}$, $y^* = (h_1 - h_2)/\sqrt{2}$.

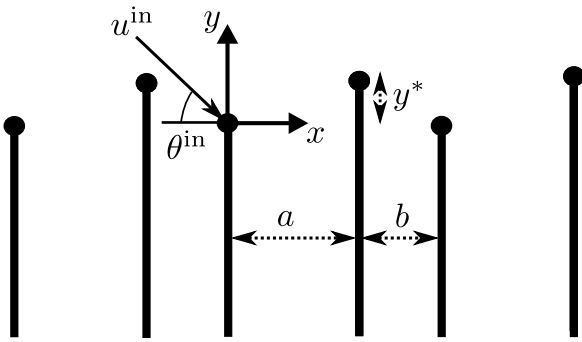


Рис. 12. Геометрия задачи

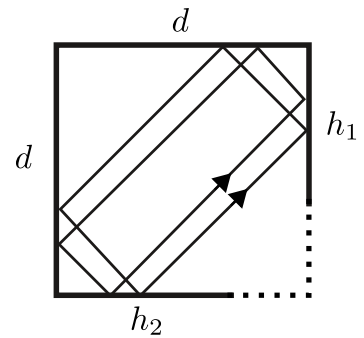


Рис. 13. Открытый резонатор и билиардная мода

Как и в предыдущих главах, рассмотрение проводится в параболическом приближении. Стандартными средствами выводится матричное уравнение Винера—Хопфа—Фока [13]:

$$\Psi(k) + \mathbf{K}(k)\mathbf{U}(k) = \frac{1}{k - k^{\text{in}}} (\mathbf{K}(k) - \mathbf{I}) \mathbf{r}, \quad (42)$$

где

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$U_0(k) = \int_0^{\infty} u^{\text{sc}}(0, y) e^{iky} dy, \quad (44)$$

$$U_1(k) = \exp(-iy^*k + ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2) \int_{y^*}^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y) e^{iky} dy, \quad (45)$$

$$\Psi_0(k) = \int_{-\infty}^0 u^{\text{sc}}(-0, y) e^{iky} dy, \quad (46)$$

$$\Psi_1(k) = \exp(-iy^*k + ik_0a(\theta^{\text{in}})^2/2) \int_{-\infty}^{y^*} u^{\text{sc}}(a - 0, y) e^{iky} dy, \quad (47)$$

$$\mathbf{K}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\left\{-\frac{ib}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2) + iy^*k\right\} \\ -\exp\left\{-\frac{ia}{2k_0}(k^2 - (k^{\text{in}})^2) - iy^*k\right\} & 1 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\mathbf{r} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ -\exp\{-iy^*k^{\text{in}}\} \end{pmatrix}, \quad k^{\text{in}} = k_0\theta^{\text{in}}. \quad (49)$$

Строится формальное решение задачи Винера—Хопфа—Фока, т. е. матрица \mathbf{K} представляется в виде:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}_-(k)\mathbf{K}_+(k), \quad (50)$$

где \mathbf{K}_- и \mathbf{K}_+ — матрицы, неособые и регулярные, соответственно в нижней и верхней полуплоскости. Показывается, что коэффициент генерации главного дифракционного максимума R_0 дается следующим выражением:

$$R_0 = \frac{1}{2ik^{\text{in}}}(1, 0) \text{res} [\mathbf{K}_+^{-1}, k = -k^{\text{in}}] \mathbf{K}_+(k^{\text{in}})\mathbf{r}. \quad (51)$$

Подбираются матрицы $\mathbf{L}_-, \mathbf{L}_+$, такие что матрица $\bar{\mathbf{K}}(k) = \mathbf{L}_-^{-1}(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{L}_+^{-1}(k)$ не имеет особенностей в области малых значений k и k^{in} . Матрица $\bar{\mathbf{K}}_+ \equiv \mathbf{K}_+\mathbf{L}_+^{-1}$ представляется в виде

$$\bar{\mathbf{K}}_+(k) = \mathbf{K}_0 + k\mathbf{K}_1 + k^{\text{in}}\mathbf{K}_2 + \dots \quad (52)$$

С помощью разложения (52) и выражения (51) показывается, что

$$R_0 = -1 + O(k^{\text{in}}), \quad (53)$$

т. е. $R_0 \rightarrow -1$ при $\theta^{\text{in}} \rightarrow 0$.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [17].

В четвертой главе рассматривается задача дифракции на импедансном отрезке (Рис. 1). На всей плоскости вне отрезка выполняется уравнение Гельмгольца (1). Полное поле удовлетворяет на полосе граничным условиям

$$\pm \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, \pm 0) = \eta \tilde{u}(x, \pm 0), \quad -a < x < a. \quad (54)$$

Здесь η – импеданс полосы. Полное поле представляется в виде суммы падающей плоской волны \tilde{u}^{in} и рассеяного поля \tilde{u}^{sc} :

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{\text{in}} + \tilde{u}^{\text{sc}}, \quad (55)$$

где

$$\tilde{u}^{\text{in}} = \exp\{ik_0x \cos \theta^{\text{in}} - ik_0y \sin \theta^{\text{in}}\}. \quad (56)$$

Здесь θ^{in} – угол падения, принимающий значения $0 < \theta^{\text{in}} < \pi/2$. Ищется диаграмма направленности рассеяного поля, т. е. ищется угловая зависимость амплитуды цилиндрической волны, рассеянной полосой. Диаграмма направленности $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$ определяется следующим выражением:

$$\tilde{u}^{\text{sc}} = \tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}}) \sqrt{\frac{k_0}{2\pi ir}} e^{ik_0r} + o(e^{ik_0r} (k_0r)^{-1/2}). \quad (57)$$

Здесь $k = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tilde{\theta} = \arctan(y/x)$.

Далее, рассматривается случай скользящего падения высокочастотной волны. А именно, следующие условия считаются выполненными:

$$k_0a \gg 1, \quad \theta^{\text{in}} \ll 1. \quad (58)$$

Рассматривается волновой процесс, при котором волна распространяется почти параллельно оси x , а ее угловой спектр достаточно узок. При этом справедливо параболическое приближение. Как и в главе 1, полное поле представляется в виде (5), а уравнение Гельмгольца (1) заменяется параболическим уравнением (6). Диаграмма направленности рассеяного поля в параболическом приближении определяется выражением

$$u^{\text{sc}}(x, y) = S(\theta, \theta^{\text{in}})g(x, y) + o((k_0x)^{-1/2}), \quad \theta = y/x, \quad (59)$$

где $g(x, y)$ дается выражением (11). Из (57) и (59) следует, что $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$ и $S(\theta, \theta^{\text{in}})$ близки при условии, что выполнено (58).

Для диаграммы направленности справедливо выражение, следующее из (10):

$$S(\theta, \theta^{\text{in}}) = \exp(ik_0a\theta^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} u^{\text{sc}}(a, y) \exp\{-ik_0y\theta\} dy. \quad (60)$$

Путем непосредственной проверки показывается, что выражение

$$u(x, y) = \begin{cases} \exp \{ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2\} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(y') g(x+a, y-y') dy', & y > 0, \\ \exp \{ik_0 a (\theta^{\text{in}})^2 / 2\} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(y') g(x+a, y-y') dy', & y < 0, \end{cases} \quad (61)$$

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \exp \{-ik_0 \theta^{\text{in}} y\}, & y > 0, \\ -\frac{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ik_0 \theta^{\text{in}} y\} + \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{\eta y\}, & y < 0, \end{cases} \quad (62)$$

$$\psi_2(y) = \begin{cases} -\frac{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{ik_0 \theta^{\text{in}} y\} + \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} \exp \{-\eta y\}, & y > 0, \\ \exp \{-ik_0 \theta^{\text{in}} y\}, & y < 0, \end{cases} \quad (63)$$

является решением параболического уравнения в области $-a < x < a$. С помощью (60) вычисляется выражение для диаграммы направленности в однократных квадратурах:

$$S(\theta, \theta^{\text{in}}) = \exp \left\{ \frac{ik_0 a [(\theta^{\text{in}})^2 + \theta^2]}{2} \right\} \left(-Y(-\theta, \theta^{\text{in}}) - \frac{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(-\theta, -\theta^{\text{in}}) \right. \\ \left. - Y(\theta, -\theta^{\text{in}}) - \frac{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(\theta, \theta^{\text{in}}) + \frac{2\eta}{\eta - ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(i\eta/k_0, -\theta) + \frac{2\eta}{\eta + ik_0 \theta^{\text{in}}} Y(-i\eta/k_0, \theta) \right), \quad (64)$$

где

$$Y(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2ik_0(\theta_1 - \theta_2)} \left(\exp\{-ik_0 a \theta_1^2\} \operatorname{erfc} \left(\theta_1 \sqrt{\frac{k_0 a}{i}} \right) - \exp\{-ik_0 a \theta_2^2\} \operatorname{erfc} \left(\theta_2 \sqrt{\frac{k_0 a}{i}} \right) \right), \quad (65)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Кроме того, доказывается оптическая теорема для параболического уравнения, а также производится численная проверка формулы (64) путем сравнения с решением, полученным с помощью метода граничных интегральных уравнений.

Таким образом, задача оказывается решена в параболическом приближении. Далее рассматривается задача в точной постановке (для уравнения Гельмгольца). Стандартными методами [13] исходная задача сводится к паре функциональных уравнений Винера—Хопфа—Фока, зависящих от двух параметров. Для этих уравнений выводятся формулы расщепления, сводящие данные функциональные задачи к четырем вспомогательным функциональным задачам, зависящих от одного параметра. С помощью метода Хурда [14] вспомогательные задачи заменяются на две матричные задачи Римана—Гильберта размерности 2. Каждая

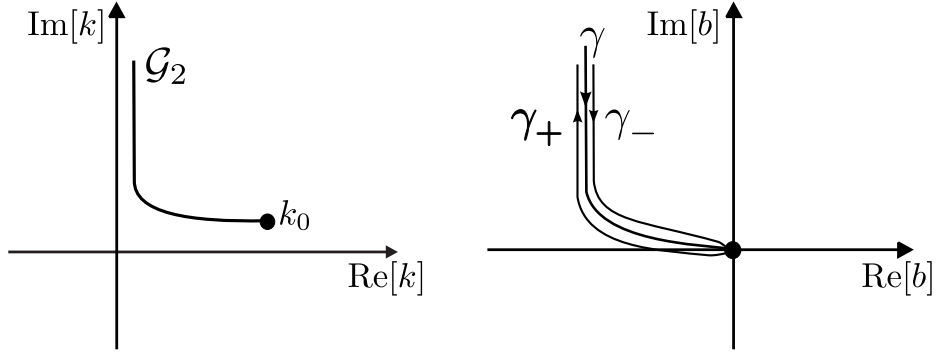


Рис. 14. (Слева) Контур \mathcal{G}_2 . (Справа) контур $\gamma_+ + \gamma_-$

матричная задача погружаются в однопараметрическое семейство. Показывается, что оба семейства задач удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестным коэффициентом. Для неизвестных коэффициентов формулируются левые ОЕ—уравнения:

$$\mathbf{F}^{-1}(k) \text{OE}_{\gamma_+ + \gamma_-}^L \left[db \left(\frac{\mathbf{r}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{r}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \mathbf{F}(k) = \mathbf{M}_2(k). \quad (66)$$

$$\mathbf{F}^{-1}(k) \text{OE}_{\gamma_+ + \gamma_-}^L \left[db \left(\frac{\mathbf{l}(b)}{k - (k_0 + b)} - \frac{\mathbf{l}^*(b)}{k + (k_0 + b)} \right) \right] \mathbf{F}(k) = \mathbf{N}_2(k), \quad (67)$$

$$\mathbf{F}(k) = \begin{pmatrix} \exp\{-iak\} & 0 \\ 0 & \exp\{iak\} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2(k) = \begin{pmatrix} (i\xi + \eta)/(i\xi - \eta) & 0 \\ 2i(k_0 + k)/(i\xi - \eta) & 1 \end{pmatrix}, \quad (68)$$

$$\mathbf{N}_2(k) = \begin{pmatrix} (\eta + i\xi)/(i\xi - \eta) & 0 \\ -2\eta/(\eta - i\xi) & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \sqrt{k_0^2 - k^2}, \quad (69)$$

\mathbf{r} и \mathbf{l} – неизвестные матрицы размерности 2×2 , матрицы \mathbf{r}^* и \mathbf{l}^* получаются из матриц \mathbf{r} и \mathbf{l} путем перестановки строк, а затем столбцов, k – комплексный параметр, изменяющийся вдоль контура \mathcal{G}_2 , изображенного на Рис. 14 слева, контур $\gamma_+ + \gamma_-$ изображен на Рис. 14 справа.

Для полученных ОЕ—уравнений строится численный алгоритм. В результате становится известным решение матричных задач Римана—Гильберта и, соответственно, значение диаграммы направленности рассеянного поля $\tilde{S}(\tilde{\theta}, \theta^{\text{in}})$. Корректность проделанных вычислений проверяется путем сравнения с решением, полученным методом граничных интегральных уравнений.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [18, 19].

В Заключение сформулированы основные результаты работы:

1. В рамках метода формулы расщепления, спектрального и эволюционного уравнений были исследованы периодические решетки, состоящие из полностью поглощающих экра-

нов. Было получено асимптотическое значение коэффициента генерации основного дифракционного максимума, отвечающее за добротность плоских открытых резонаторов типа Фабри–Перо. Кроме того, была установлена связь с матричной задачей Винера–Хопфа–Фока. В рамках метода ОЕ–уравнения был построен численный алгоритм для расчета всех коэффициентов генерации дифракционных максимумов.

2. Получено аналитическое выражение в одиночных квадратурах для диаграммы направленности рассеяного поля в задаче дифракции плоской высокочастотной волны на импедансном отрезке при скользющем падении. Выражение было получено с помощью метода параболического уравнения. Численные проверки показали, что параболическое приближение дает хорошие результаты и на границе его применимости.
3. Предложен новый подход к задаче дифракции на импедансной полосе в точной постановке (для уравнения Гельмгольца). Основу подхода составляет метод формулы расщепления и ОЕ–уравнения. В рамках данного подхода был предложен новый численный алгоритм решения задачи.

Цитированная литература

1. Keller J. The geometrical theory of diffraction // J. Opt. Soc. Am. 1962. Vol. 52. P. 116–130.
2. Уфимцев П. Я. Метод Краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. Радио, 1962. С. 244.
3. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. С. 456.
4. Williams M. H. Diffraction by a finite strip // Q. J. Mech. Appl. Math. 1982. Vol. 35. P. 103–124.
5. Shanin A. V. Weinstein’s diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math. 2009. Vol. 70. P. 1201–1218.
6. Shabalina E. D., Shirgina N. V., Shanin A. V. High frequency modes in a two dimensional rectangular room with windows // Acoust. Phys. 2010. Vol. 56. P. 525 – 536.
7. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. С. 488.

8. Shanin A. V. An ODE-based approach to some Riemann–Hilbert problems motivated by wave diffraction // arXiv:1210.1964. 2012.
9. Шанин А. В. Дифракция высокочастотной волны на решетке со сложным периодом при скользящем падении // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2012. Т. 409. С. 212–239.
10. Ищенко Е. Ф. Открытые оптические резонаторы. М.: Сов. радио, 1980.
11. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990. С. 264.
12. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966.
13. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Ин. лит., 1962.
14. Hurd R. A. The wiener–Hopf–Hilbert method for diffraction problems // Can. J. Phys. 1976. Vol. 54. P. 775–780.

Список публикаций

15. Корольков А. И., Шанин А. В. Об использовании параболического уравнения и приближения дифракции Френеля для решения вайнштейновских задач // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2014. Т. 426. С. 87–118.
16. Корольков А. И., Шанин А. В. Дифракция на решетке из поглощающих экранов разной высоты. Новые уравнения // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2014. Т. 422. С. 62–89.
17. Шанин А. В., Корольков А. И. Отражение волны от дифракционной решетки, составленной из поглощающих экранов. Описание в рамках метода Винера–Хопфа–Фока // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 6. С. 587–595.
18. Shanin A. V., Korolkov A. I. Diffraction by an impedance strip I. Reducing diffraction problem to Riemann–Hilbert problems // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2015. Vol. 68, no. 3. P. 321–339.
19. Shanin A. V., Korolkov A. I. Diffraction by an impedance strip II. Solving Riemann–Hilbert problems by OE–equation method // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2015. Vol. 68, no. 3. P. 341–362.