

УДК 534.222

## ПРОХОЖДЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЗВУКОВЫХ УДАРОВ ЧЕРЕЗ СЛУЧАЙНЫЙ ФАЗОВЫЙ ЭКРАН

© 2002 г. В. А. Гусев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассмотрен общий случай наклонного падения волны на случайный фазовый экран. Рассчитаны статистические характеристики волн с широким частотным спектром, прошедших через тонкий слой случайно-неоднородной среды. Рассмотрена зависимость среднеквадратичных характеристик волн в зависимости от угла падения на экран. В качестве примера подробно обсуждается прохождение ударного импульса пилообразной формы.

Задача о прохождении акустических волн с широким частотным спектром через случайно-неоднородную среду важна как для теории, так и для практики. Подобные задачи возникают при распространении интенсивных акустических волн в нелинейной среде без дисперсии, приводящем к эффективной генерации высших гармоник и комбинационных частот. В этом случае исходный спектр, состоящий даже из одной или нескольких узких линий, может испытывать существенное уширение [1]. С другой стороны, сам исходный сигнал часто уже имеет широкий спектр. Примером могут служить интенсивные шумы реактивных струй и мощные импульсные возмущения типа взрывных волн и звуковых ударов в атмосфере [2]. Среди наиболее важных прикладных задач можно отметить задачи, связанные с распространением интенсивных ультразвуковых волн и коротких видеоимпульсов через неоднородные биологические ткани, органы и человеческое тело в целом [3], а также с прохождением волн звукового удара, генерируемых сверхзвуковым самолетом, через приземный слой атмосферы [4].

Очень часто случайная неоднородность сосредоточена в тонком слое, толщина которого мала по сравнению с другими параметрами задачи, в частности с эффективной нелинейной длиной. Например, атмосферная турбулентность [4–7] сосредоточена в пограничном слое атмосферы, лежащем на высотах порядка нескольких сот метров, малых по сравнению с обычной высотой полетов. При этом можно сделать несколько упрощений. Во-первых, можно считать, что падающая волна имеет плоский фронт и пилообразный профиль. Во-вторых, малость толщины неоднородного слоя позволяет заменить этот слой бесконечно тонким фазовым экраном. В медицинских приложениях модель экрана использовалась, например, при анализе проникновения ультразвука в мозг через кости черепа [8]. Кроме того, такая модель позволяет использовать поэтапный подход, т.е. рассмотреть нелинейные искажения волны на пути к слою и за ним, а сам процесс прохождения волны через слой описать в рамках линейной задачи.

Существенное влияние на волну оказывают локализованные случайные неоднородности типа биологических тканей и органов и атмосферной турбулентности. Ударные импульсы, проходя через неоднородный слой, могут случайным образом сфокусироваться или, напротив, дефокусироваться, что может привести к большим выбросам давления. Для расчета пространственно-временной структуры таких полей, например вероятности выбросов давления на фронте ударной волны, удобно использовать непосредственно полевое описание, учитывающее дифракционные эффекты.

В [4] подобная задача рассмотрена в приближении геометрической акустики, ограниченном областью до точки пересечения лучей, т.е. до фокуса. Нами в [7] предложен метод, основанный на уравнении Хохлова–Заболотской (ХЗ) и позволяющий описать прохождение волны через фокальную область. Однако рассмотрение ограничивалось нормальным падением волны на фазовый экран.

Но во многих практически важных случаях углы между волновым фронтом и поверхностью фазового экрана нельзя считать малыми. В частности, ударная волна, излучаемая сверхзвуковым самолетом, распространяется в конусе Маха с углом при вершине, определяемым отношением скорости полета  $v$  к скорости звука  $c$ :  $\sin\alpha = c/v$ , достигающим  $20^\circ$ – $30^\circ$ . В медицинских приложениях волна также падает, вообще говоря, не по нормали к границе биоткани. Поэтому необходимо получить, обобщение уравнения ХЗ для больших углов падения волны на фазовый экран.

Поскольку слабые нелинейные и дифракционные эффекты описываются независимыми слагаемыми, обобщенное параболическое уравнение можно получить, исходя непосредственно из линейного волнового уравнения, а затем добавить слагаемое, описывающее нелинейные эффекты.

Пусть фазовый экран расположен в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ ; падающая волна распространяется под углом  $\alpha$  к оси  $z$ , направленной вертикально вниз. Решение волнового уравнения для акустического давления  $p$  запишем в виде

$$p = \iiint_{-\infty}^{\infty} S(\omega, k_x, k_y) \times \quad (1)$$

$\times \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z) d\omega dk_x dk_y,$   
где  $S(\omega, k_x, k_y)$  – спектр прошедшей волны. В решении (1) считаем, что все Фурье-компоненты

волны распространяются в положительном направлении оси  $z$ , т.е.  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} > 0$ .

Чтобы найти спектр волны за экраном, используем граничное условие. В области  $z < 0$  распространяется плоская волна:

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \exp\left(-i\omega\left[t - \frac{y}{c} \sin \alpha - \frac{z}{c} \cos \alpha\right]\right) d\omega, \quad (2)$$

где  $S_0(\omega)$  – спектр падающей волны.

Пересекая фазовый экран, волна приобретает случайный сдвиг фазы  $\varphi$ . Тогда за экраном  $p_0 = p_0(\tau - \varphi(x, y))$  и, следовательно, граничное условие для давления имеет вид

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \exp\left(-i\omega\left[t - \frac{y}{c} \sin \alpha - \varphi(x, y)\right]\right) d\omega. \quad (3)$$

С другой стороны, согласно решению (1), давление при  $z = 0$

$$p = \iiint_{-\infty}^{\infty} S(\omega, k_x, k_y) \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y) d\omega dk_x dk_y. \quad (4)$$

Приравнивая выражения (3) и (4) и применяя далее преобразование Фурье по переменным  $t, x, y$ , приходим к следующему выражению для спектра прошедшей волны:

$$S(\omega, k_x, k_y) = \frac{S_0(\omega)}{4\pi^2 c^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ik_x x' - ik_y y' + i\omega \frac{y}{c} \sin \alpha + i\omega \varphi(x', y')\right) dx' dy'. \quad (5)$$

Подставляя спектр (5) в решение (1), получим окончательное выражение для давления в полупространстве  $z > 0$  за экраном:

$$p = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) d\omega \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y + iz\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}) dk_x dk_y \times \quad (6)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ik_x x' + ik_y y' + i\omega \frac{y}{c} \sin \alpha + i\omega \varphi(x', y')\right) dx' dy'.$$

Используя решение (6), легко получить параболическое уравнение типа ХЗ, описывающее распространение волны в случае наклонного падения на экран. Будем считать, что в результате дифракции на экране волна испытывает достаточно слабые искажения и  $k_x = \xi$  и  $k_y = k \sin \alpha + \eta$ , где  $\xi, \eta \ll k$ . Тогда, раскладывая  $k_z$  в ряд и ограничиваясь вторыми степенями по  $\xi, \eta$ , получим

$$\sqrt{k^2 - \xi^2 - (k \sin \alpha + \eta)^2} = k \cos \alpha - \eta \operatorname{tg} \alpha - \frac{\xi^2}{2k \cos \alpha} - \frac{\eta^2}{2k \cos^3 \alpha}. \quad (7)$$

Введя

$$\tau = t - \frac{y}{c} \sin \alpha - \frac{z}{c} \cos \alpha \quad (8)$$

– время в сопровождающей волну системе координат, выражение (6) приведем к следующему виду:

$$p = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega \varphi(x', y')) dx' dy' \times \quad (9)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\xi(x - x') + i\eta(y - y') - iz\left[\eta \operatorname{tg} \alpha + \frac{\xi^2}{2k \cos \alpha} + \frac{\eta^2}{2k \cos^3 \alpha}\right]\right) d\xi d\eta.$$

Используя полученное выражение, легко показать, что давление  $p$  удовлетворяет следующему параболическому уравнению типа ХЗ:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \alpha \right] = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

После вычисления в (9) интегралов по  $\xi$ ,  $\eta$  и частотам  $\omega$  получим решение этого уравнения, описывающее давление в прошедшей фазовый экран волне:

$$p = \frac{\cos^2 \alpha}{2\pi c z} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\tau - \Phi(x', y')) dx' dy', \quad (11)$$

$$\Phi(x', y') = \frac{\cos \alpha}{2cz} [(x - x')^2 + (y - y' - z \operatorname{tg} \alpha)^2 \cos^2 \alpha] + \phi(x', y').$$

Положив в выражениях (10)–(11)  $\alpha = 0$ , т.е. рассматривая случай нормального падения волны на экран, легко получить соответственно обычное линеаризованное уравнение ХЗ и его решение [7]:

$$p = \frac{1}{2\pi c z} \times \quad (12)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_0 \left( \tau - \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2cz} - \phi(x', y') \right) dx' dy'.$$

Из сравнения выражений (12) и (13) видно, что заменой переменных

$$Z = z/\cos \alpha, \quad Y = z \sin \alpha - y \cos \alpha \quad (13)$$

выражение (11) приводится к виду (12). Замена переменных (13) соответствует переходу в непрямоугольную систему координат, определяемую векторами  $\vec{l} = \{0, 0, 1/\cos \alpha\}$  и  $\vec{m} = \{0, -\cos \alpha, \sin \alpha\}$ . Здесь  $Y = \vec{m} \cdot \vec{r}$  – это поперечная координата в повернутой на угол  $\alpha$  системе координат, тогда как продольная переменная  $Z$  не подвергается преобразованию поворота. Масштабный фактор  $1/\cos \alpha$  приравнивает расстояния вдоль  $z$  и вдоль направления распространения падающей волны. Переход в непрямоугольную систему координат связан с наличием граничного условия при  $z = 0$ , из-за которого продольная координата не подвергается повороту.

В силу проведенной аналогии между уравнением (10) и уравнением ХЗ, в уравнении (10) можно легко учесть нелинейные эффекты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial p}{\partial y} \sin \alpha - \frac{\epsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] = \\ = \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right); \end{aligned} \quad (14)$$

здесь  $\epsilon$  – нелинейный параметр [1, 9],  $\rho$  – плотность среды.

Перейдем к вычислению статистических характеристик поля после экрана. Пусть флюктуации фазы  $\phi(x, y)$  распределены по нормальному закону с нулевым средним значением  $\langle \phi \rangle = 0$  и дисперсией  $\sigma^2 = \langle \phi^2 \rangle$ , где угловые скобки обозначают статистическое усреднение. Используя выражение для характеристической функции нормального процесса  $\langle \exp(i\omega \phi) \rangle = \exp(-\omega^2 \sigma^2/2)$  [10], после усреднения выражения (6) для среднего давления получаем следующее выражение:

$$\langle p(\tau) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\tau') \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')^2}{2\sigma^2}\right) d\tau'. \quad (15)$$

Формально (15) совпадает с выражением для среднего поля, полученным в [7] для нормального падения волны на фазовый экран, однако в (15)  $\tau$  определяется формулой (9), т.е. среднее поле распространяется вдоль нормали к фронту наклонно падающей волны.

На рис. 1 изображены профили ударного импульса N-образной формы, прошедшего через случайный фазовый экран, для различных значений нормированной среднеквадратичной флюктуации фазы. Кривые 1–7 построены для значений  $\sigma/T$ , равных 0; 0.03; 0.06; 0.1; 0.2; 0.4 и 0.6 соответственно. Здесь  $T$  – длительность фаз сжатия и разрежения,  $A$  – пиковое давление в N-волне. Видно, что с ростом флюктуаций происходит уширение переднего и заднего ударных фронтов, а также уменьшение пиковых давлений. Описанные изменения профиля напоминают прохождение волны через однородный слой диссипативной среды. В этом смысле пространственные флюктуации действуют подобно “турбулентной вязкости” [1, 7].

Перейдем к вычислению средней интенсивности поля акустического давления  $\langle p(t; x, y, z)p^*(t; x, y, z) \rangle$ , пользуясь решением параболического приближения (11). При расчете интенсивности необходимо задать коэффициент корреляции функции фазы  $B_\phi(p) = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle / \sigma^2$ , однако можно показать [7], что основной вклад в интенсивность в данной точке дает только близлежащая к ней по поперечным координатам область. Тогда, считая корреляционную функцию фазы зависящей только от расстояния между точками  $\vec{r}_1 = (x', y')$  и  $\vec{r}_2 = (x'', y'')$ , представим ее в виде разложения в ряд с учетом первых двух членов:

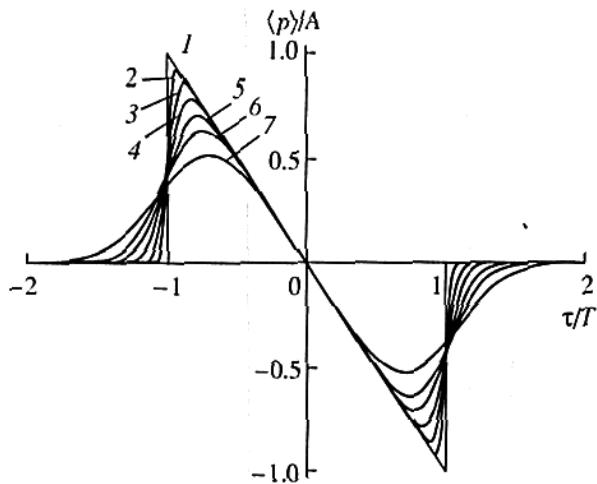


Рис. 1. Профили среднего акустического давления  $\langle p \rangle / A$  для различных значений среднеквадратичного отклонения  $\sigma/T$  фазы.

$$B_\varphi(\rho) \approx 1 - \frac{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}{a^2}, \quad (16)$$

где  $a$  – радиус корреляции случайной фазы. Тогда для интенсивности можно получить следующее выражение:

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_0^2(\tau') G(\tau - \tau') d\tau', \quad (17)$$

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-i\Omega\tau - \frac{\sigma^2}{2}\Omega^2\right)}{\sqrt{\left(1 - i\frac{2cz}{\cos\alpha}\frac{\sigma^2}{a^2}\Omega\right)\left(1 - i\frac{2cz}{\cos^3\alpha}\frac{\sigma^2}{a^2}\Omega\right)}} d\Omega. \quad (18)$$

При  $\alpha = 0$  (случай нормального падения волны на экран) формулы (17) и (18) совпадают с полученными ранее в [7], где были определены зависимости средней интенсивности от дисперсии фазы и показано несимметричное искажение ее профиля вследствие дифракции. При анализе полученных выражений ограничимся рассмотрением случая малых  $z$ , когда знаменатель можно разложить в ряд. В частности, сразу за фазовым экраном при  $z \rightarrow 0$  функция  $G$  приобретет следующий вид:

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right), \quad (19)$$

который и определяет основную структуру разложения в ряд решения (17)–(18) при малых  $z$ .

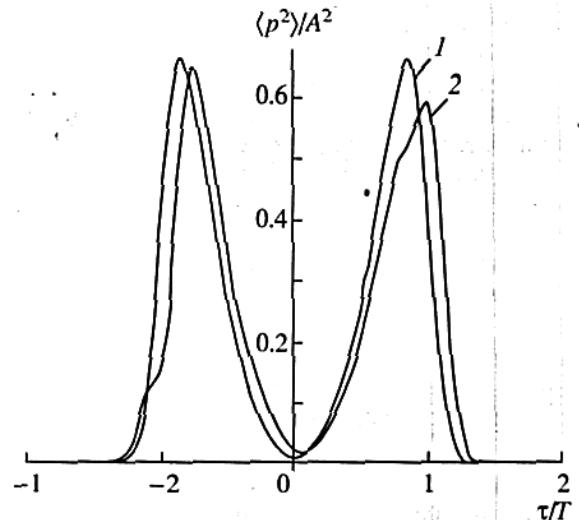


Рис. 2. Профили средней интенсивности акустического давления  $\langle p^2 \rangle / A^2$  для различных значений угла падения  $\alpha$  волны на экран.

На рис. 2 показаны профили средней интенсивности (17)–(18) N-образного импульса для углов падения волны на фазовый экран, равных  $\alpha = 0^\circ, 70^\circ$ , при фиксированных дисперсии фазы  $\sigma/T = 0.1$  и безразмерном расстоянии  $Z = 2czT/a^2 = 0.5$ . Из рисунка видно, что искажения переднего и заднего ударных фронтов носят несимметричный характер, причем наибольшие искажения соответствуют большим углам (малым скоростям). Также на рисунке видна тенденция к уменьшению максимальной интенсивности с ростом угла падения (или уменьшением скорости самолета), соответствующая наличию  $\cos^2\alpha$  в решении (11).

Таким образом, при достаточно больших скоростях движения самолета (или малых углах падения) средняя интенсивность акустической вол-

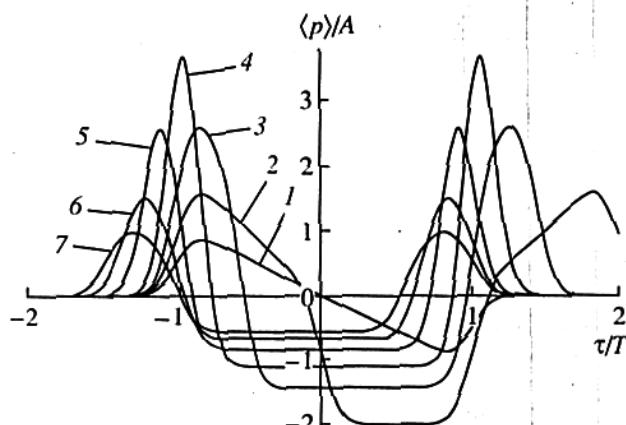


Рис. 3. Профили среднего акустического давления  $\langle p \rangle / A$  на различных расстояниях вдоль оси  $Z$  круглого отверстия.

ны практически не зависит от скорости движения. Только при относительно малых скоростях, соответствующих реальным скоростям полетов современных самолетов, наклонное падение волны приводит к уменьшению ее интенсивности. Однако следует учесть, что при наличии неизбежной неравномерности движения самолета эти изменения профиля волны при изменении скорости движения могут привести к появлению больших выбросов давления.

Подход, развиваемый в настоящей работе, учитывает дифракционные явления и позволяет "пройти" через области геометрических сингулярностей (фокусы, каустики) за фазовым экраном.

В качестве примера рассмотрим нормальное падение волны на фокусирующую неоднородность в виде непрозрачного экрана с круглым отверстием радиуса  $R$ , проходя через который, волна приобретает случайный сдвиг фазы  $\phi$  и регулярный сдвиг  $r^2/2cd$  ( $d$  — фокусное расстояние), обеспечивающий фокусировку волны. Тогда среднее акустическое давление на оси отверстия будет иметь следующий вид:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{1-z/d} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int p_0(t) \left\{ \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\sigma^2}\right) - \right. \\ \left. - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \tau - t - \frac{R^2}{2cz} \left(1 - \frac{z}{d}\right) \right]^2\right) \right\} dt. \quad (20)$$

Решение (20) остается конечным при стремлении к фокусу. Зависимость профиля волны от расстояния представлена на рис. 3. При построении фокусное расстояние полагалось равным единице. Кривые 1–7 построены для расстояний  $z/d$ , равных 0.1; 0.5; 0.7; 0.9; 1.2; 1.5 и 1.8 соответственно. При приближении к фокусу профиль волны дифференцируется и приближается к U-волне. Наблюдение U-образных профилей в экспериментах говорит о том, что в турбулентной атмосфере действительно может происходить

фокусировка волн. Кроме того, необходимо отметить, что после прохождения фокуса формируются два импульса положительной полярности.

Таким образом, на основе модели неоднородного слоя в виде бесконечно тонкого фазового экрана получено обобщение уравнения ХЗ для наклонного падения широкополосных волн, учитывающее дифракционные эффекты и позволяющее рассмотреть фокальную область. Полученное решение этого уравнения используется для вычисления статистических характеристик ударных волн. Показано уширение волновых фронтов в среднем с ростом флюктуаций фазы и уменьшение интенсивности волны с ростом флюктуаций и расстояния от фазового экрана.

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант № PP2-2099), INTAS (грант № 99-88), РФФИ (грант № 99-02-16042) и программы "Университеты России".

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Руденко О.В. // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 413.
3. Руденко О.В., Сарвазян А.П. // Медицина и биотехнология. 2000. № 3. С. 6.
4. Rudenko O.V., Enflo B.O. // Acustica. 2000. V. 86. P. 229.
5. Pierce A.D. // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 44. P. 1052.
6. Дубровский А.Н., Руденко О.В., Хохлова В.А. // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 623.
7. Гусев В.А., Руденко О.В. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2001. № 6. С. 37.
8. Thomas J.L., Fink M.A. // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 1996. V. 43. № 6. P. 1122.
9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990.
10. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.