

квадратиками. При восстановлении профиля волны ФЧХ гидрофона также предполагалась равномерной. В работе проведены оценки величины ошибок, связанных с точностью позиционирования гидрофонов в данной точке пространства. Экспериментально показано, что при данной точности позиционирования 0.1 мм вносимая в измерения профилей волн ошибка из-за изменения фазы гармоник старших номеров на апертуре гидрофонов, приводит к неконтролируемым искажениям в высокочастотной части принимаемых акустических сигналов для гидрофонов размером более $\delta = 0.2$ мм.

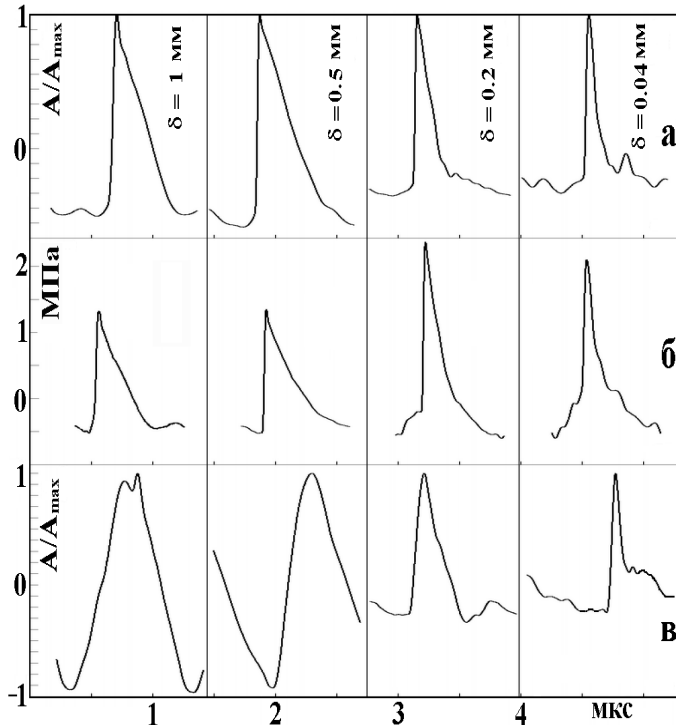


Рис. 5

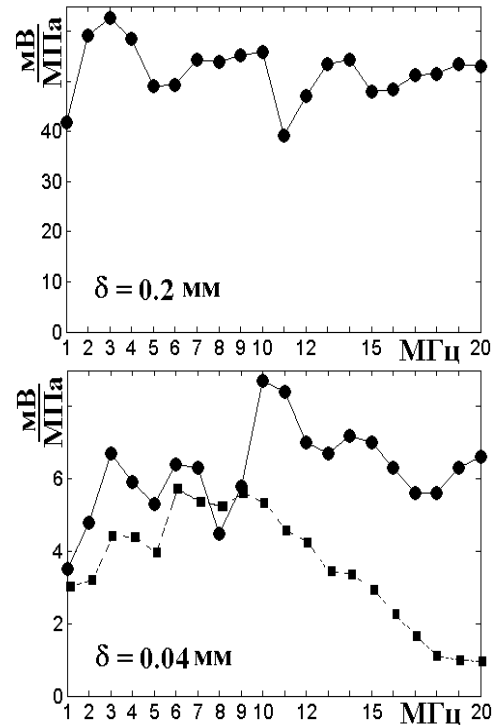


Рис. 6.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты № 09_02_01239 и 11_02_00774), Федеральной Программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009-2013” (контракт №. 02.740.11.0565), а также Ведущей Научной Школы (грант № 3700.2010.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Handbook of Acoustics, Edited by Malcolm J. Crocker, John Wiley & Sons, INC, 1998, 1461 p.
2. Witham G.B. Linear and Nonlinear Waves. N.Y.- Sydney-London-Toronto: Wiley, 1974.
3. Руденко О.В., Сапожников О.А. Явления самовоздействия пучков волн, содержащих ударные фронты // Успехи физ.наук. 2004. Т. 174. № 9. С. 973–989.
4. Lili Ganjehi, Regis Marchiano, Francois Coulouvrat, Jean-Louis Thomas, Evidence of wave front folding of sonic booms by a laboratory-scale deterministic experiment of shock waves in a heterogeneous medium, J. Acoust. Soc. Am., V. 124(1), 2008, pp. 57-71.
5. Michael S. Canney et al., Acoustic characterization of high intensity focused ultrasound fields: A combined measurement and modeling approach, J. Acoust. Soc. Am., V. 124(4), 2008, pp. 2406-2420.
6. Bajram Zegiri and Antony D. Bond, The influence of waveform distortion on hydrophone spatial-averaging corrections – Theory and measurement, J. Acoust. Soc. Am., V. 92(4), 1991, pp. 1809-1821.

УДК 534.222

В.А.Гусев, Д.А.Преснов

ТРАНСФОРМАЦИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ВЯЗКИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы
Тел.: (495) 939-2943; E-mail: vgusev@bk.ru

В приближении нелинейной геометрической акустики профиль волны в неоднородной среде описывается обобщенным уравнением Бюргера с переменной эффективной вязкостью. Построены точные и асимптотические выражения, определяющие тонкую структуру ударного фронта для различных исходных сигналов – скачка, периодической волны, одиночной N -волны. Проведено сравнение аналитических решений с численными и показано их хорошее совпадение.

Проанализированы особенности эволюции профилей на предельно больших расстояниях и условия выхода на линейную стадию в зависимости от параметров начального профиля. Построены аналитические решения обобщенного уравнения Бюргера на стадии развитых ударных фронтов и на предельно больших расстояниях для периодического и импульсного сигналов.

При расчете акустических полей большой интенсивности большое значение имеет учет диссипативных характеристик среды. Это связано с образованием узких ударных фронтов в профиле волны, на которых происходит значительное поглощение. При пренебрежении диссипацией решение в виде простой волны описывает не имеющие физического смысла для акустических волн «перехлесты» в профиле; после устранения этих перехлестов по правилу равенства площадей профиль содержит разрывы. Учет диссипации регуляризует исходное уравнение, позволяя описать плавные ударные фронты конечной длительности. Но роль диссипации не сводится только к описанию ударных фронтов конечной ширины. Эволюция волны на больших расстояниях и переход к предельному решению определяются именно диссипативными характеристиками среды, с одной стороны, и параметрами волны, с другой стороны. Как известно, в рамках уравнения простых волн образующиеся разрывы не исчезают, уменьшается только их амплитуда – предельный профиль волны оказывается разрывным. Формируется своеобразный волновой объект – пилообразная волна. При учете диссипации оказывается, что периодическая пилообразная волна на больших расстояниях снова превращается в линейную волну, ударные фронты полностью расплываются. Масштабы этой трансформации определяются безразмерной вязкостью $\Gamma = b\omega/2\varepsilon\rho c_0 u_0$. В дальнейшем будем всегда предполагать, что $\Gamma \ll 1$, иначе нелинейные эффекты будут несущественными и решение будет близко к линейному.

В однородной среде трансформация профилей в вязкой среде на основе уравнения Бюргера хорошо изучена (см., например, [1,2]). Большую роль в проведенных исследованиях сыграли достаточно исключительные обстоятельства – подстановка Хопфа-Коула, сводящая уравнение Бюргера к линейному уравнению диффузии, и автомодельное решение, описывающее однополярный импульс с ударным фронтом. В результате были выявлены наиболее характерные варианты эволюции волны в зависимости от начального профиля волны.

В то же время реальные среды всегда обладают неоднородностями, которые могут радикально изменить характер распространения волны. В первую очередь, это рефракционные неоднородности, связанные с изменением локальной скорости звука, которые приводят к фокусировке или дефокусировке волны. Другой изменяющейся величиной является плотность среды. Отдельно нужно отметить стратификацию, связанную с наличием силы тяжести. Возможности построения точных решений в неоднородных средах значительно ограничены, например, подстановка Хопфа-Коула не приводит к линейному уравнению, автомодельное решение может описывать совсем другой профиль, что усложняет анализ однополярных импульсов. Поэтому необходимо дальнейшее развитие методов анализа нелинейных уравнений для акустических полей в неоднородных вязких средах.

Замечательно, что разные задачи, связанные с распространением волн в неоднородных средах, можно привести к уравнению одного и того же типа – обобщенному уравнению Бюргера с переменной эффективной вязкостью $\Gamma S(z)$ [3]:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma S(z) \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \quad (1)$$

где V , z и θ - нормированная колебательная скорость, продольная координата и время соответственно. При $S \equiv 1$ (1) переходит в обычное уравнение Бюргера. К уравнению вида (1) может быть сведена задача о расчете поля в неоднородной среде в приближении нелинейной геометрической акустики. Действительно, поле описывается уравнениями эйконала (2) и переноса (3):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \psi)^2 = \zeta(x, y, z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial T} + \nabla_{\perp} u \nabla_{\perp} \psi + \frac{u}{2} \left(\Delta_{\perp} \psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\nabla_{\perp} \rho \nabla_{\perp} \psi}{\rho} \right) = \frac{b}{2\rho c_0^3} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}. \quad (3)$$

Здесь ψ - эйконал, ζ - коэффициент преломления, ε - нелинейный параметр, ρ - плотность. По сравнению со стандартным видом уравнений в правую часть (3) добавлен вязкостный член, b - коэффициент вязкости. Если из уравнения эйконала найти траектории луча и в уравнении переноса перейти к полю вдоль луча, то уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} u \frac{\partial u}{\partial T} + \frac{u}{2} \frac{d}{dx} \ln \Delta = \frac{b}{2\rho c_0^3} \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}, \quad (4)$$

где при постоянной плотности Δ равно якобиану перехода от декартовых поперечных координат к лучевым. Преобразование $V = \sqrt{\Delta}u$, $z = \int_0^x dx/\sqrt{\Delta}$ сводит (4) к виду (1), где $S(z) = \sqrt{\Delta(x(z))}$.

Аналогичные преобразования могут быть использованы при исследовании сфокусированных волн в однородной и неоднородной средах, а также для расчета волны, прошедшей фазовый экран. Важно, что переход к уравнению вида (1) формально может быть осуществлен, даже если аналитические выражения для траектории лучей неизвестны. Таким образом, общая трехмерная задача о распространении интенсивных пространственно-модулированных волн в неоднородных средах в приближении нелинейной геометрической акустики может быть сведена к уравнению вида (1) для поля вдоль луча.

В работах [4-6] показано, что задача о вертикальном распространении интенсивных волн в изотермической стратифицированной атмосфере также приводит к уравнению (1) при $S(z) = 1 + z/z_0$. Учет неизотермичности атмосферы приводит в общем случае к уравнению вида (4) с переменными коэффициентами. В частности, если температура меняется по линейному закону, то можно записать уравнение (1) при $S(z) = (1 + z/z_0)^a$, a - некоторое число. Интересно отметить, что анализ различных случаев степенной зависимости показал, что однополярное решение характерно именно для обычного уравнения Бюргера ($a = 0$), для других случаев профиль может быть преимущественно положительным, но обязательно содержит и отрицательные интервалы.

Анализ уравнения (1) начнем с частного случая $S(z) = 1 + z/z_0$, для которого в работе [6] найдено автомодельное решение, описывающее симметричный скачок конечной ширины. Вблизи ударного фронта это решение удастся записать в явном виде:

$$\Phi(\theta, z) = A \operatorname{th} \left[\frac{A}{4\Gamma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma}{A^2 z_0}} \right) \frac{\theta}{1 + z/z_0} \right], \quad (5)$$

где A - амплитуда разрыва. Видно, что ширина фронта теперь более сложным образом зависит от амплитуды разрыва. Используя решение (5) для описания структуры ударного фронта в стратифицированной атмосфере, удалось построить обобщение решения Хохлова для исходного синусоидального сигнала и профиль исходной N-волны [6,7]; было показано, что полученные аналитические решения согласуются с численным решением.

Структура автомодельного решения подсказывает следующую методику построения решения для ударного фронта при произвольном виде функции $S(z)$. Решение ищется методом сращиваемых асимптотических разложений. Вблизи фронта преобразованием $\theta_* = \theta/\Gamma$ растягивается временная переменная, в итоге в стандартной схеме в этой области основными оказываются члены, содержащие производную по времени [3,8]:

$$V_{\text{int},0} \frac{\partial V_{\text{int},0}}{\partial \theta_*} + \frac{\partial^2 V_{\text{int},0}}{\partial \theta_*^2} = 0, \quad V_{\text{int},0} = D \operatorname{th} \frac{D\theta_*}{2}. \quad (6)$$

Решением этого уравнения является стационарный скачок, амплитуда которого D определяется из условия сшивания с внешним решением вне ударного фронта. Высшие приближения содержат поправки, связанные с изменением как амплитуды внешнего решения, так и вязкости. Однако сравнение такого решения с точным автомодельным решением показывает ограниченность первого: ширина фронта (6) совпадает с численным решением только на малом начальном интервале после формирования фронта, где поправку $\left(1 + \sqrt{1 + 8\Gamma/A^2 z_0}\right)/2$ в (5) можно считать равной единице.

Для построения более точного решения необходимо в нулевом порядке учесть дополнительное слагаемое:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \theta_*^2} + V \frac{\partial V_0}{\partial \theta_*} + \Gamma \theta_* \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial V_0}{\partial \theta_*} = 0. \quad (7)$$

Если величина $\Gamma dS/dz$ мала, то (7) слабо отличается от (6), поправка незначительна. Однако с уменьшением амплитуды роль поправочного слагаемого возрастает, как это видно на примере автомодельного решения (5). Замечательно, что по структуре уравнение (7) совпадает с уравнением для

автомодельного решения (5) [6,7], что позволяет написать улучшенное выражение для ударного фронта в среде с произвольной зависимостью эффективной вязкости:

$$V_0(x) = A \operatorname{th} \left[\frac{A\theta}{4\Gamma S} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\Gamma}{A^2} \frac{dS}{dz}} \right) \right]. \quad (8)$$

Данное выражение позволяет, в частности, построить выражение для одного периода исходно синусоидального сигнала, аналогичное по смыслу решению Хохлова.

При использовании решения Хохлова и его обобщений необходимо иметь в виду следующее. Решение Хохлова обычного уравнения Бюргерса справедливо в области $2 < z < 2/\Gamma$. На больших расстояниях ударный фронт расплывается, решение Хохлова, полученное при условии формирования развитых ударных фронтов, перестает работать, и необходимо переключиться на другое решение – решение Фея, справедливое на расстояниях $z \geq 2$. На расстояниях $z > 2/\Gamma$ решение Фея стремится к решению линеаризованного уравнения Бюргерса. Для обобщенного уравнения Бюргерса полноценного аналога решения Фея не найдено, поэтому возникает вопрос о предельном профиле волны. Для оценки границы области применения решения типа Хохлова с фронтом (8) можно применить физическое условие расплывания – ширина ударного фронта становится равной четверти периода волны. Для синусоидального сигнала в стратифицированной атмосфере ($S = 1 + z$, амплитуда разрыва $A = (1 + z)^{-1}$) это условие приводит к выражению $z_{lin} \sim 1.5/\sqrt{\Gamma}$. Дальше этого расстояния ударный фронт в профиле отсутствует, сам профиль близок к линейному, и предельный профиль находится из линеаризованного уравнения (1).

Известно, что эволюция однополярного импульса типа автомодельного решения обычного уравнения Бюргерса отличается от эволюции периодического сигнала. Однополярный сигнал на больших расстояниях не выходит на линейную стадию. Это связано с тем, что ударный фронт в однополярном импульсе сдвигается в сопровождающей системе координат со скоростью, равной половине пиковой амплитуды. Это принципиально нелинейный эффект, и пока его можно выявить в профиле волны, волна не выйдет на линейную стадию. Физически границу линейной и нелинейной стадий для однополярного (или несимметричного) импульса можно определить как расстояние, на котором диффузионное расплывание фронта и нелинейный сдвиг ударного фронта как целого станут равными.

Скорость смещения ударного фронта можно найти, рассматривая в (1) время θ как функцию V и z . В итоге получим уравнение:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + V = \Gamma S(z) \left(\frac{\partial \theta}{\partial V} \right)^{-2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial V^2} \equiv -\Gamma S(z) \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{\partial \theta / \partial V} \right). \quad (8)$$

Рассмотрим участок профиля между двумя экстремумами профиля, причем слева пусть будет минимум V_{min} , справа – максимум V_{max} . Ясно, что ударный фронт будет формироваться на этом участке. Профиль всегда можно считать гладким, поскольку при учете вязкости все ударные фронты приобретают конечную ширину, а мгновенный скачок превращается в быстро убывающую экспоненту. Теперь проинтегрируем (8) по V от V_{min} до V_{max} . В силу экстремума и гладкости функций величина $\partial \theta / \partial V$ в конечных точках обращается в бесконечность. Тогда для средней скорости смещения ударного фронта получим

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial z} = - \frac{V_{min} + V_{max}}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, скорость смещения ударного фронта в обобщенном уравнении Бюргерса не зависит от вязкости, определяется полусуммой соседних пиковых значений и по смыслу совпадает с аналогичным выражением для простых волн с разрывом. Выражение (9) указывает, какие именно амплитуды определяют скорость ударного фронта конечной ширины. Для разрывной волны это были амплитуды на разрыве, для ударного фронта конечной ширины – ближайšie экстремальные значения. В частности, для симметричного сигнала, примером которого является синусоидальная волна, средняя скорость смещения фронта равна нулю. Для однополярного импульса $V_{min} = 0$.

Теперь, построив решение типа Хохлова для N-волны, мы можем определить пиковую амплитуду A и диффузионное расплывание ударного фронта $\Delta \theta$, и сравнить его с нелинейным смещением. Рассмотрим случай стратифицированной атмосферы $S = 1 + z$. Для качественной оценки можно принять, что амплитуда изменяется как $A \sim (1 + z)^{-1/2}$, $\Delta \theta \sim \Gamma(1 + z)^{3/2}$ и $\langle \theta \rangle \sim \sqrt{1 + z}$. Отношение $\Delta \theta / \langle \theta \rangle \sim \Gamma(1 + z)$ сравнивается с 1 при $\Gamma z \sim 1$, т.е. на этом расстоянии исходная волна выходит на линейную стадию

(синусоидальный сигнал в этом случае выходит на линейную стадию при $z\sqrt{\Gamma} \sim 1$). Таким образом, переменный коэффициент вязкости изменил качественную картину распространения волны. Для N-волны в обычном уравнении Бюргера получаем, что это отношение всегда мало $\Delta\theta/\langle\theta\rangle \sim \Gamma$, т.е. N-волна на линейную стадию не выходит.

Качественно такую же картину дает анализ уравнения с помощью текущего числа Рейнольдса [2] $Re = A\langle\theta\rangle/\Gamma S(z)$, определяемого по текущим параметрам каркаса решения – решения в виде простой волны. Большие числа Рейнольдса соответствуют сильным нелинейным эффектам. Если $S(z)$ не растёт или величина $A\langle\theta\rangle$ не убывает значительно, то решение не выходит на линейную стадию. Анализ волновых профилей позволяет уточнить границы областей с различным качественным поведением.

Таким образом, в эволюции волны в рамках обобщенного уравнения Бюргера выделяются те же три характерные области, что и для обычного уравнения Бюргера: 1) простая волна и образование разрыва, 2) развитые ударные фронты и решение типа Хохлова, 3) линейная стадия. Сильно нелинейная волна всегда проходит первую и вторую стадию. Выход на линейную стадию зависит от многих параметров – средней скорости смещения ударного фронта и эффективной вязкости. Периодическая волна обычно выходит на линейную стадию, если только не рассматривается поле вблизи фокуса. Любой симметричный сигнал ведет себя похожим образом. На второй стадии решением будет выражение типа решения Хохлова. Предельное решение на больших расстояниях в этом случае определяется из линеаризованного уравнения (1), амплитуда находится из условия сшивания решений на границе областей. Эволюция однополярного и несимметричного импульсов качественно схожа друг с другом. На второй стадии для построения решения также используется скачок конечной ширины. Далее, в зависимости от параметров, предельным решением будет либо это же решение (если на всех расстояниях выполняется $Re \gg 1$, волна остается на второй стадии), либо решение линеаризованного уравнения (1) (при $Re \rightarrow 0$, реализуется выход на линейную стадию).

Работа поддержана грантами программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4590.2010.2) и РФФИ (грант 09-02-00925-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: Физматлит, 2008.
3. Enflo B.O., Rudenko O.V. To the theory of generalized Burgers' equation // Acta acustica, 2002. V. 88. P. 155-162.
4. Голицын Г.С., Романова Н.Н. Вертикальное распространение звуковых волн в атмосфере с переменной по высоте вязкостью // Изв. АН СССР. 1968. Т.4. №2.
5. Романова Н.Н. О вертикальном распространении коротких акустических волн в атмосфере // Изв. АН СССР. 1970. Т.6. №2.
6. Гусев В.А., Собисевич А.Л. Низкочастотные волновые процессы в геосферах, предшествующие сильным сейсмическим событиям // Коллективная монография Экстремальные природные явления и катастрофы. Т.1. Оценка и пути снижения негативных последствий экстремальных природных явлений. М.: ИФЗ РАН, 2010.
7. Гусев В.А., Жостков Р.А. Профили интенсивных импульсных сигналов, распространяющихся вертикально вверх в стратифицированной атмосфере // Сборник трудов XXII сессии Российского акустического общества и Сессии Научного Совета РАН по акустике. Т.1. С.200-204. М.: Геос, 2010.
8. Gusev V.A., Sobisevitch A.L. On a problem of propagation of shock waves generated by explosive volcanic eruptions // Nonlinear Acoustics – Fundamentals and Applications. International Symposium on Nonlinear Acoustics ISNA-18, 2008, Stockholm, Sweden, pp 397-400.

УДК 532.529.6

Корец В.Л., Мельников Н.П.

СПЕКТРЫ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПУЗЫРЬКА, СОВЕРШАЮЩЕГО ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ

ФГНУ «Научно-исследовательский радиофизический институт», Россия,
603950 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская ул., д. 25/12а,
тел. (831) 436-72-94; факс (831) 436-99-02, E-mail: rf@nirfi.sci-nnov.ru, г.

В докладе приводятся результаты численного моделирования динамики кавитационного пузырька, пульсирующего в сжимаемой вязкой жидкости под действием неоднородного акустического поля и сравнение теоретических спектров акустического излучения пузырька с экспериментальными спектрами акустического излучения кавитационной зоны, создаваемой цилиндрическим акустическим концентратором.

Акустическое излучение кавитационной зоны является одним из источников информации о процессах, которые в ней протекают. На рис.1 приведен спектр акустического излучения кавитационной области, возбужденной в фокальном пятне акустического цилиндрического концентратора на частоте