

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Трансформация нелинейных пилообразных волн в среде с рефракционными неоднородностями

В. А. Гусев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: "vgusev@bk.ru"

Статья поступила 11.04.2008, подписана в печать 26.02.2009.

Найдены точные решения для профилей интенсивных пилообразных волн и пучков в среде с неоднородностью скорости звука. Показано, что фокусировка на неоднородностях среды сильнее выражена для одиночного импульса, формируя узкие области высокой амплитуды. Показано, что рефракционная неоднородность может привести к сдвигу положения максимума амплитуды исходно сфокусированного пучка и увеличению ширины пучка, а также к трансформации сходящегося пучка в расходящийся.

Ключевые слова: нелинейная акустика, пилообразные и ударные акустические волны, неоднородные среды, интенсивные акустические пучки.

УДК: 534.222. PACS: 43.20.Bi, 43.25.-x, 43.25.Cb, 43.25.Jh, 43.28.Mw.

Среди актуальных задач, где необходимо учитывать влияние неоднородностей среды на формирование пространственной структуры и искажение волнового профиля акустических волн, содержащих разрывы в профиле [1], можно выделить следующие. Во-первых, развитие нового поколения сверхзвуковых пассажирских самолетов и исследование генерируемых ими акустических волн, распространяющихся в неоднородной атмосфере [2–4]; во-вторых, медицинские приложения, связанные с распространением интенсивного ультразвука в биологических тканях; а также исследование взрывных процессов естественного и искусственного происхождения [5], задачи восстановления свойств среды и неразрушающего контроля [6].

Поскольку в спектре разрывных волн преобладают высокие частоты, их распространение может быть успешно описано в приближении нелинейной геометрической акустики [1, 4]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2}(\nabla_{\perp} \psi)^2 = \zeta(z, x, y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \nabla_{\perp} p \nabla_{\perp} \psi + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) эйконала ψ описывает искривление траекторий лучей, задаваемых начальной кривизной волнового фронта, и изменение положения областей фокусировок и дефокусировок за счет неоднородности $\zeta(z, x, y)$, связанной с отклонением локальной скорости звука от среднего значения c_0 . Уравнение переноса (2) описывает искажение профиля волны как за счет нелинейных процессов, так и неоднородности среды. Здесь p — акустическое давление, $T = t - z/c_0 - \psi(x, y, z)/c_0$ — фаза волны в приближении геометрической акустики, ρ_0 — плотность среды, ε — нелинейный параметр.

Дифференцируя (1) по поперечным координатам и вводя функции наклона лучей $\alpha = \partial \psi / \partial x$ и $\beta = \partial \psi / \partial y$ к осям x и y соответственно, получаем систему связанных уравнений типа простых волн

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \zeta_x, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = \zeta_y. \quad (3)$$

Пусть в области $z \geq z_0 > 0$ расположена модельная неоднородность скорости звука $\zeta = \nu(x, y)/z^2$ с периодическим поперечным распределением $\nu = \cos x \cos y - 1/4 \cos 2x \cos 2y$. Эта модель позволяет описать в рамках единого подхода основные физические явления, сопровождающие распространение интенсивного звука в неоднородной среде. В часто используемом парааксиальном приближении фронт волны заменяется параболическим и ищется поле вблизи оси волнового пучка. Ясно, что в реальности фронт содержит различные области локальных фокусировок и дефокусировок, что требует более реалистичной модели, особенно при описании пучков. Модель бесконечно тонкого фазового экрана [3, 4] учитывает только однократное искривление лучей в среде. Предлагаемая в данной работе модель учитывает последовательное искривление лучей в неоднородном слое конечной ширины. Для этой модели функции наклона луча равны

$$\alpha = \frac{\sin x \cos y}{z}, \quad \beta = \frac{\cos x \sin y}{z}. \quad (4)$$

Точное решение уравнений (2), (3) для фазового экрана $\zeta = 0$ найдено в работе [4].

Траектории лучей — пространственные кривые, определяющие закон перемещения начального возмущения из точки $\{x_0; y_0\}$ в плоскости $z = z_0$ в некоторую точку $\{x; y\}$ при $z > z_0$, находятся из системы уравнений $dx/dz = \alpha$, $dy/dz = \beta$ по известным функциям (4):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{2C_2 z / z_0}{C_2^2 + (C_1^2 - 1)(z/z_0)^2}, \\ \frac{\sin y}{\sin x} &= C_1 = \frac{\sin y_0}{\sin x_0}, \quad C_2 = \frac{\cos x_0 + \cos y_0}{\sin x_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Локальным осям фокусировок и дефокусировок соответствуют неподвижные лучи с нулевым наклоном лучей, координаты которых $\{0, \pm \pi; 0, \pm \pi\}$ и $\{\pm \pi/2; \pm \pi/2\}$. Анализ луча, вышедшего из точки $\{\pi/4; 0\}$, показывает, что луч не смещается в направлении y , а его координата x асимптотически приближается к π . Аналогично можно показать, что точками сгущения лучей также

являются $\{-\pi; 0\}$, $\{0; \pm\pi\}$. В этих областях должен наблюдаться максимум амплитуды волны в поперечном сечении. В точках $\{\pm\pi/2; \pm\pi/2\}$ образуются локальные максимумы, а точки $\{0; 0\}$ и $\{\pm\pi; \pm\pi\}$ оказываются центрами областей дефокусировки.

Переход в уравнении переноса (2) к лучевым координатам вдоль траекторий лучей, определяемым интегралами (5), $\xi = \frac{\sin y}{\sin x}$, $\eta = z \frac{\cos x + \cos y}{\sin x}$, позволяет записать уравнение для поля вдоль фиксированного луча:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + p \frac{d}{dz} \ln \frac{S}{S_0} = 0, \quad (6)$$

где $S(z; \xi, \eta) = z^2 / (z^4 + bz^2 + a)$ — площадь поперечного сечения лучевой трубки в сечении z , S_0 — начальная площадь при z_0 , $a = \eta^4 / (\xi^2 - 1)^2$, $b = 2\eta^2(1 + \xi^2) / (\xi^2 - 1)^2$. Здесь лучевые координаты ξ, η являются параметрами и определяются начальными координатами луча. Заменой переменных уравнение (7) можно привести к виду уравнения простых волн:

$$\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} P \frac{\partial P}{\partial T} = 0, \quad P = p \sqrt{S/S_0}, \quad s = \int_{z_0}^z \sqrt{S_0/S} dz. \quad (7)$$

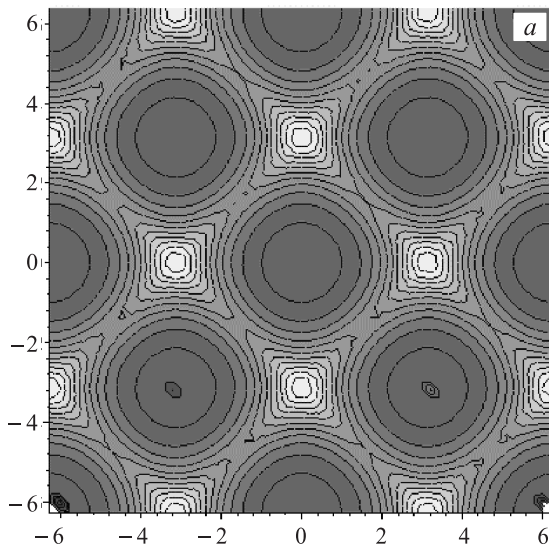
Волны в однородной среде описываются таким же уравнением, следовательно, неоднородность среды приводит к изменению как амплитудных характеристик волны, так и степени накопления нелинейных эффектов, в частности величины и расстояния образования ударных фронтов.

Уравнение (7) позволяет записать общее решение уравнения (6) с граничным условием $p(z = z_0) = p_0(x, y; t)$ для фиксированного луча:

$$p(z, \xi, \eta, T) = \sqrt{\frac{S_0}{S}} p_0 \left(\xi, \eta, T + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \sqrt{\frac{S}{S_0}} \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{S_0}{S}} dz \right). \quad (8)$$

Рассмотрим пилообразные начальные профили — периодическую пилообразную волну

$$p_{S0} = -\frac{\omega\tau - 2\pi n}{\pi} a_0, \quad -\pi + 2\pi n < \omega\tau < \pi + 2\pi n \quad (9)$$



и одиночный N-образный импульс

$$p_{N0} = \begin{cases} -a_0 \frac{\tau}{\tau_0} & \text{при } |\tau| \leq \tau_0, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_0. \end{cases} \quad (10)$$

Пиковые амплитуды для профилей (9) и (10) равны соответственно

$$\frac{a_S}{a_0} = \sqrt{\frac{S_0}{S}} \left(1 + z_{nl}^{-1} \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{S_0}{S}} dz \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$\frac{a_N}{a_0} = \sqrt{\frac{S_0}{S}} \left(1 + z_{nl}^{-1} \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{S_0}{S}} dz \right)^{-1/2},$$

где z_{nl} имеет смысл длины образования ударного фронта в профиле гармонической волны в однородной среде, $z_{nl} = \pi \rho_0 c_0^3 / \varepsilon \omega a_0$ для профиля (9) и $z_{nl} = \tau_0 \rho_0 c_0^3 / \varepsilon a_0$ для профиля (10).

Изменение поперечной пространственной структуры исходно плоской волны показано на рис. 1, а, 2, а для периодической волны (9) и рис. 1, б, 2, б — для N-импульса (10). На рис. 1 представлены поперечные профили вдоль оси x при фиксированной поперечной координате y на расстояниях $Z = z/z_{nl} = 2; 3; 10$ (кривые 1–3) от границы неоднородной среды ($Z_0 = 1$). На рис. 2 показано, как изменяется поперечная структура пиковой амплитуды периодической волны (а) и одиночного импульса (б) на расстоянии $Z = 5$. Светлые тона обозначают области высокой пиковой амплитуды, темные — малой пиковой амплитуды.

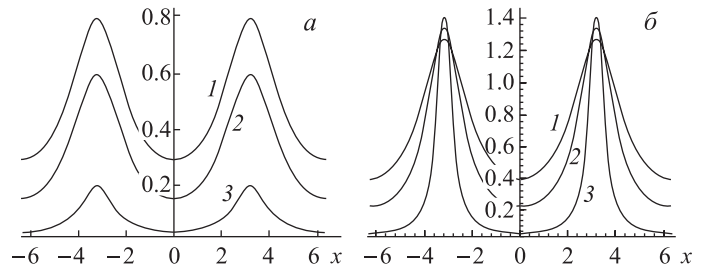


Рис. 1. Изменение с расстоянием поперечных профилей пиковой амплитуды (кривые 1–3 соответствуют расстояниям $Z = 2; 3; 10$)

Рис. 2. Поперечная структура пиковой амплитуды периодической волны (а) и одиночного импульса (б) на расстоянии $Z = 5$

Из графиков следует, что рефракционная неоднородность среды приводит к образованию сложной пространственной структуры пиковой амплитуды — областей сгущения лучей с повышенной амплитудой и областей разрежения лучей с более низкой амплитудой, т. е. эффектам фокусировки и дефокусировки волны. Это приводит к различным темпам накопления нелинейных эффектов в различных областях поперечной плоскости. На рис. 1 и 2 хорошо заметно образование узких областей с высоким давлением и широких областей с низким давлением, по мере распространения волны области высокого давления еще больше сужаются. В областях высокой пиковой амплитуды происходит быстрое образование ударного фронта, в областях малой пиковой амплитуды этот процесс происходит гораздо позже, если вообще происходит, так что ударный фронт волны также имеет сложную структуру. На рисунках видно существенное различие в поведении периодической пилообразной волны и одиночного N-импульса. Для периодической волны по сравнению с одиночным импульсом поперечный профиль оказывается более сглаженным, а области высокой пиковой амплитуды шире.

В точке минимума $\{0; 0\}$ нормированная площадь лучевой трубки равна $S/S_0 = z^2/z_0^2$, т. е. площадь лучевой трубки увеличивается с расстоянием, а значит, лучи расходятся. В области дополнительного максимума $\{\pi/2, \pi/2\}$ $S/S_0 = 1$, т. е. площадь лучевой трубки остается постоянной, и амплитуды равны соответственно $a_S/a_0 = (1+Z)^{-1}$ и $a_N/a_0 = (1+Z)^{-1/2}$, т. е. равны амплитуде в однородной среде. В области главного максимума $\{0; \pi\}$ $S/S_0 = z_0^2/z^2$, т. е. площадь лучевой трубки уменьшается и лучи сходятся. Пиковые амплитуды равны соответственно

$$\frac{a_S}{a_0} = \frac{Z}{Z_0} \left(1 + \frac{Z^2}{2Z_0}\right)^{-1}, \quad \frac{a_N}{a_0} = \frac{Z}{Z_0} \left(1 + \frac{Z^2}{2Z_0}\right)^{-1/2}.$$

Пиковая амплитуда волны в области дефокусировки убывает быстрее, чем в однородной среде. В области фокусировки, наоборот, происходит рост амплитуды по сравнению с исходным значением за счет пространственного перераспределения энергии. Амплитуды периодической волны и одиночного импульса ведут себя по-разному. Амплитуда периодической волны всегда убывает. Амплитуда одиночного импульса на больших расстояниях стремится к конечному значению $a_N/a_0 \approx \sqrt{2/Z_0} = \sqrt{2z_{nl}/z_0}$. Таким образом, для периодической ударной волны основным фактором является нелинейное затухание на фронте, в то же время для одиночного импульса рефракционная сходимость способна компенсировать это затухание и привести к конечному значению пиковой амплитуды на бесконечности.

Интересно, что предельное значение амплитуды одиночного импульса зависит от соотношения между нелинейной длиной и координатой начала неоднородного слоя. Заметное усиление достигается, если неоднородный слой находится достаточно близко к источнику звука. Амплитуда генерируемой самолетом волны на расстоянии $z_0 \sim 30-100$ м может достигать нескольких тысяч Па. Длительность таких импульсов обычно составляет порядка 10^{-2} с [2], и для нелинейной длины получаем оценку $z_{nl} \sim 100$ м. Таким образом, вполне возможно усиление таких мощных сигналов и их распространение на большие расстояния. С другой стороны, на расстояниях порядка 10 км от самолета амплитуда давления около 100 Па и нелинейная длина порядка

1 км, зато значительно повышается вероятность встретить фокусирующую неоднородность, соответственно эти слабые сигналы также могут существенно усилиться.

Распространение ограниченных волновых пучков

Эволюция осесимметричных пучков может быть исследована на основе уравнений нелинейной геометрической акустики, записанных в цилиндрической системе координат. После введения функции наклона луча $\alpha = \partial\psi/\partial r$ в (1) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \alpha \frac{\partial\alpha}{\partial r} = \zeta_r \equiv \nu(z, r), \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \frac{\partial p}{\partial T} + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{p}{2} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\alpha}{r} \right) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим по аналогии с предыдущей моделью фокусирующую неоднородность с убывающей с расстоянием амплитудой $\nu = \gamma r / (1+z)^2$, где γ — число, характеризующее «силу» неоднородности. Решение уравнения (13):

$$\alpha = r f(1+z), \quad f(x) = \frac{\lambda}{x} - \left(C x^{2\lambda} - \frac{x}{1-2\lambda} \right)^{-1}, \quad (14)$$

где константа C определяется из граничного условия, λ — действительный корень уравнения $\lambda^2 - \lambda - \gamma = 0$. В случае комплексных корней этого уравнения решение уравнения (12) можно записать в виде

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{|\gamma|}}{x} \right) \left[\sqrt{|\gamma|} - \frac{1}{4} \operatorname{tg} \left(\sqrt{|\gamma|} - \frac{1}{4} (\ln x - C) \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) дают точное решение для эйконала при произвольной начальной параболической кривизне волнового фронта и заданной неоднородности произвольной «силы» γ . Граничное условие для сфокусированной волны $\alpha(z=0) = -r$ (фокусное расстояние принято равным единице). При $\gamma = 0$ получаем решение для однородной среды: $\alpha = r/(1-z)$. Траектории лучей найдем из уравнения $dr/dz = \alpha$ и решения (14):

$$\frac{r}{r_0} = \frac{(\lambda-2)x^\lambda + (\lambda+1)x^{1-\lambda}}{2\lambda-1}, \quad (16)$$

где r_0 — начальная поперечная координата луча. Общее решение уравнения переноса (13) с граничным условием $p|_{z=0} = R(r)\Phi(\tau)$ для найденной функции наклона луча (14) или (15) можно записать в виде

$$p = \frac{R(r_0)}{\delta} \rho_0 \left(T + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p \delta s \right). \quad (17)$$

Величина δ определяет изменение амплитуды в лучевой трубке за счет изменения ее поперечного сечения, эффективное расстояние s описывает процесс накопления нелинейных эффектов в неоднородной среде. Для сфокусированной волны в однородной среде ($\gamma = 0$): $\delta = 1-z$, $s = -2\ln(1-z)$; при $\gamma = 2$: $\delta = 1/(1+z)$ и $s = ((1+z)^2 - 1)/2$.

На рис. 3 построена функция (16), описывающая изменение начальной поперечной координаты луча в среде с параметрами неоднородности $\gamma = 0; 1.8; 2; 3$ (кривые 1-4 соответственно). Слабые неоднородности среды, соответствующие кривым 1 и 2, приводят к сдвигу положения максимума амплитуды дальше от геометрического фокуса исходного волнового фронта волны. Кривая 3

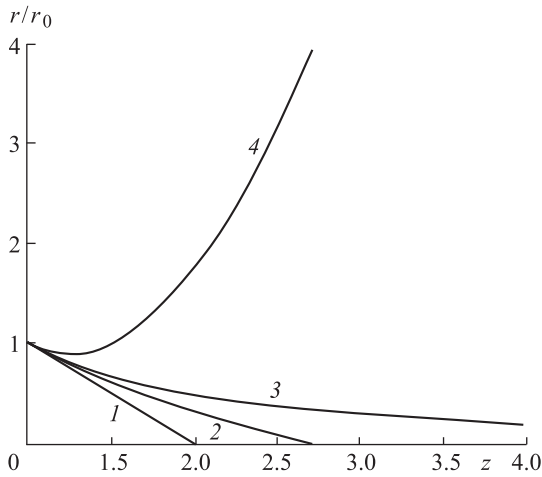


Рис. 3. Траектории лучей для различных видов неоднородности, кривые 1–4 соответствуют значениям параметра $\gamma = 0; 1.8; 2; 3$

соответствует промежуточному положению, когда неоднородность приводит к фокусировке волны, но фокус находится на бесконечности, где все лучи асимптотически сходятся. При увеличении силы неоднородности (кривая 4) лучи на больших расстояниях начинают расходиться и происходит дефокусировка волны.

Пиковые амплитуды для начальных профилей (9) и (10) равны

$$\frac{a_S}{a_0} = \frac{R}{\delta} \left(1 + \frac{\varepsilon \omega a_0}{\pi \rho_0 c_0^3} R s \right)^{-1}, \quad \frac{a_N}{a_0} = \frac{R}{\delta} \left(1 + \frac{\varepsilon a_0}{\tau_0 \rho_0 c_0^3} R s \right)^{-1/2}. \quad (18)$$

На рис. 4 показаны поперечные формы исходного гауссовского пучка пилообразных волн на расстоянии $z = 0.8$ для неоднородностей с параметром $\gamma = 0; 2; 3$ (кривые 1–3 соответственно). В зависимости от вида неоднородности происходит либо сужение пучка и увеличение пиковой амплитуды (фокусировка, кривая 1), либо расплывание пучка (кривая 3). Как видно из (18), при сильных нелинейных эффектах амплитуда периодической волны на оси пучка перестает зависеть от исходного значения — появляется эффект изотропизации пучка. В то же время для одиночного импульса фокусировка оказывается более сильной — пиковое значение на кривой 2 больше исходного и стремится к конечному значению на бесконечности. Таким образом, периодическая

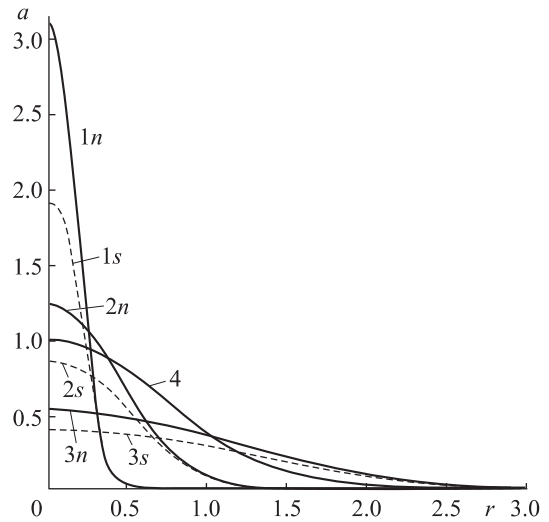


Рис. 4. Поперечная форма пучка для различных видов неоднородности для периодической волны (s) и одиночного импульса (n). Кривые 1–3 соответствуют значениям параметра $\gamma = 0; 2; 3$, кривая 4 — начальная форма пучка

ударная волна проявляет тенденцию к формированию области с постоянной пиковой амплитудой на оси пучка, а одиночный импульс позволяет получить узкий пучок, амплитуда которого слабо уменьшается с расстоянием (при пренебрежении вязкостью).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2906.2008.2) и РФФИ (гранты 09-02-00925-а, 09-02-00967-а).

Список литературы

1. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. // Акуст. журн. 1994. **40**, № 2. С. 290.
2. Pierce A.D. // J. Acoust. Soc. Am. 1968. **44**. P. 1052.
3. Rudenko O.V., Enflo B.O. // Acustica. 2000. **86**. P. 229.
4. Гусев В.А., Руденко О.В. // Акуст. журн. 2006. **52**, № 1. С. 3.
5. Куличков С.Н. // Изв. Акад. наук. Физика атмосферы и океана. 1992. **28**, № 4. С. 339.
6. Руденко О.В. // Дефектоскопия. 1993. **29**, № 8. С. 24.

The transformation of nonlinear sawtooth waves in media with refraction inhomogeneity

V. A. Gusev

Department of Acoustics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: vgusev@bk.ru.

Exact solutions for profiles of intensive sawtooth waves and beams in the medium with sound speed inhomogeneity sound are found. It is shown that focusing on the medium inhomogeneity is stronger for a single pulse and forms narrow areas of high amplitude. It is received that refractive inhomogeneity can lead to shifting position of the amplitude maximum of initially focused beam and increasing the beam width, i.e., transformation of a converging beam in the dispersing.

Keywords: nonlinear acoustics, sawtooth and shock waves, inhomogeneous media, intensive acoustical wave beams.

PACS: 43.20.Bi, 43.25.-x, 43.25.Cb, 43.25.Jh, 43.28.Mw.

Received 11 April 2008.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 3(2009).

Сведения об авторе

Гусев Владимир Андреевич — к. ф.-м. н., научн. сотр.; тел.: 939-29-43, e-mail: vgusev@bk.ru.