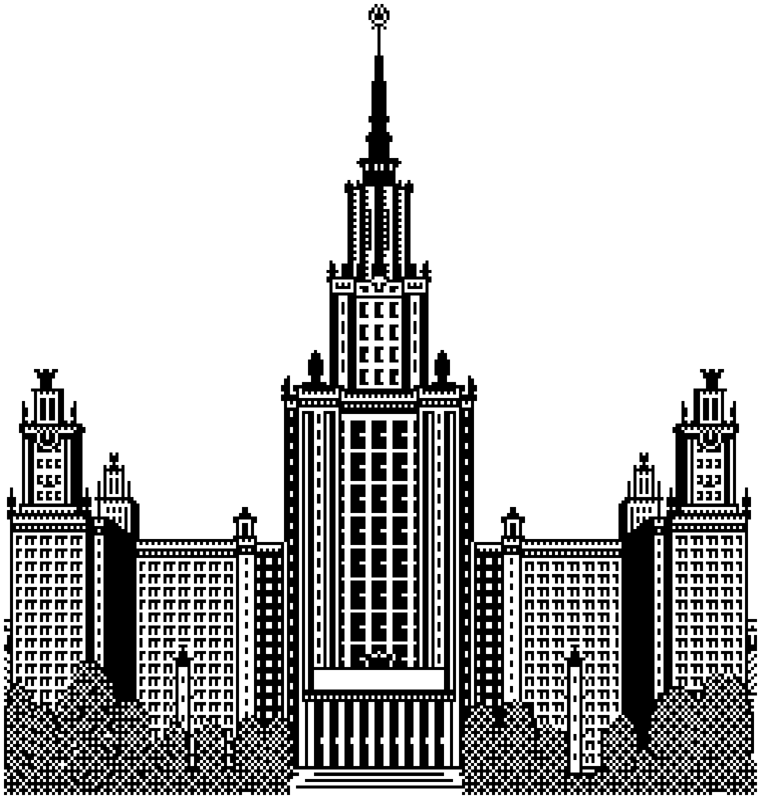
Лекция 2: Математические модели, точные решения, методы анализа



Кафедра акустики, Физич. ф-т МГУ, Ленинские горы 119992 Москва

rudenko@acs366.phys.msu.ru

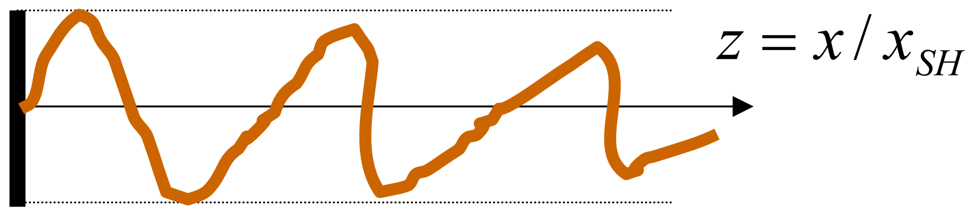
1. Мат модели нел ак-ки, точные решения, способы их построения или «угадывания»; физ смысл.
2. На примерах: необходимость дополнить «нестрогий» подход корректным мат анализом нел моделей на основе их симметрий (лекции В.Ф.Ковалева и Д.В.Ширкова).

Примеры: бегущие и стоячие волны, пучки, генерация нел волн, стат задачи, течения в ак поле, кинетика УВ, дифф ур-ния высоких порядков и функциональные ур-ния.

Для «плавного» перехода к мат лекциям обсуждается смысл метода априорного использования симметрий.

Базовая модель НА: Уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

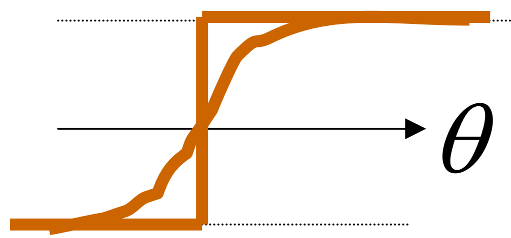


$$\theta = \omega(t - x/c)\ ,\ V = \frac{u}{c} = \frac{p'}{c^2\rho}$$

Основные точные решения:

1. Стац. Волна

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \qquad V = \tanh\frac{\theta - \theta_0}{2\Gamma}$$

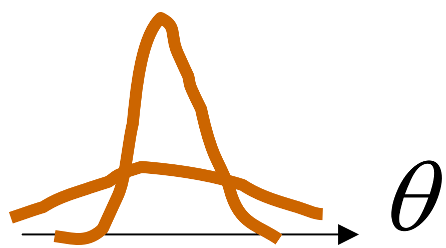


Это УВ с конечной шириной фронта,

$$\theta_{FR} \sim \Gamma = x_{SH}/x_{DISS}$$

2. Автомодельное решение

$$V = \sqrt{\frac{4\Gamma}{\pi z}}\,\frac{\exp\left(-\theta^2/4\Gamma z\right)}{C + erf\left(\theta/\sqrt{4\Gamma z}\right)}$$



Это однополярный импульс с крутым передним фронтом

Следует из инвариантности УБ отн преобразования $V \to \frac{V}{C},\ x \to C^2 x,\ \theta \to C\theta$

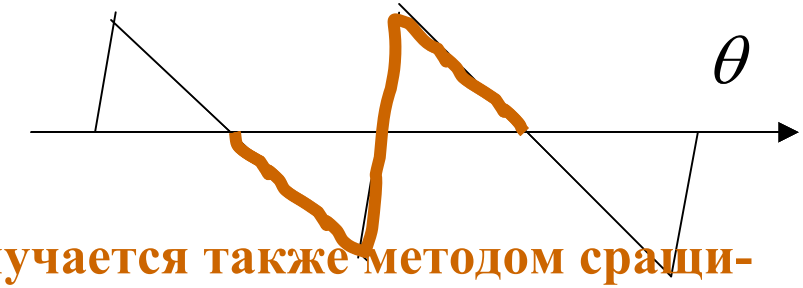
$$V = \frac{1}{\sqrt{z}}Q\left(\frac{\theta}{\sqrt{z}}\right)$$

Следовательно, решение УБ нужно искать в виде, инвариантном отн этого преобразования

УБ – точные решения + инвариантность

3. Решение Хохлова – описывает 1 период пилообразной волны

$$V = \frac{1}{1+z}\left[-\theta + \pi \tanh \frac{\pi\theta}{2\Gamma(1+z)}\right]$$



Формула была «угадана» в 1960 г. Она получается также методом сращиваемых асимпт разложений (при этом 1 приближ дает точное решение)

Инвариантность: если функция $V(z,\theta)$ есть точное решение УБ, то точными решениями будут также

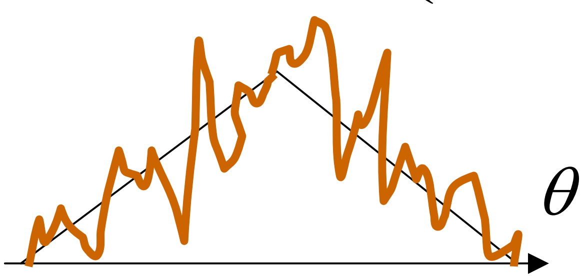
$$V_1 = V\left(z, \theta + Cz\right) + C$$

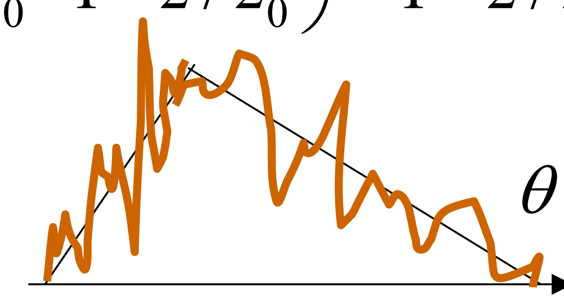
$$V_2 = \frac{1}{1 - z/z_0} V\left(\frac{z}{1 - z/z_0}, \frac{\theta}{1 - z/z_0}\right) + \frac{\theta/z_0}{1 - z/z_0}$$

Гурбатов, Саичев, Якушкин. УФН <u>141</u>, 221,1983.

Руденко УФН <u>149</u>, 413,1986.

Это реш. описывает, напр., взаимод. ВЧ шума и НЧ сигнала. На переднем фронте частота растет, на заднем - уменьшается





Групповой анализ: для УБ известна 5-мерная алгебра Ли

$$u_x = uu_t + u_{tt}$$

Инфинитезимальные симметрии УБ образуют 5-мерную алгебру Ли, «натянутую» на линейно независимые операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = x\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial t} - (t + xu)\frac{\partial}{\partial u}$$

При известной симметрии инвариантное решение получается так. Вычисляются 2 независимых инварианта как решение ур-ния

$$X(J) = 0:\ \begin{array}{l} J_1 = \lambda(t,x) \\ J_2 = \mu(t,x,u) \end{array}$$

Как показал Ли, в результате получается ОДУ для функции одной переменной $\phi(\lambda)$. Эта процедура уменьшает число независимых переменных на единицу.

Затем следует выразить один из инвариантов как функцию другого $\mu = \phi(\lambda)$, потом разрешить это выражение относительно u и подставить полученное выражение в УБ.

Пример 1: Автомодельное решение

Решения, инвариантные относительно группы растяжений, генерируемой оператором X_4, часто называют автомодельными. В этом случае уравнение имеет вид

$$X_4(J) = 2x\frac{\partial J}{\partial x} + t\frac{\partial J}{\partial t} - u\frac{\partial J}{\partial u} = 0$$

Его характеристическая система $\frac{dx}{2x} = \frac{dt}{t} = -\frac{du}{u}$ **дает инварианты:**

$$\lambda = t/\sqrt{x}, \quad \mu = \sqrt{x}\,u$$

Следовательно, инвариантное решение нужно искать в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{t}{\sqrt{x}}$$

В результате получаем ОДУ для нахождения автомод решения

$$\Phi'' + \Phi\Phi' + \frac{1}{2}\left(\lambda\Phi' + \Phi\right) = 0$$

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi x}}\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{4x}\right)}{C + erf\left(\frac{t}{2\sqrt{x}}\right)}, \qquad erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp\left(-s^2\right)ds$$

Это решение совпадает с известным результатом:
Руденко, Солуян. ДАН, 190, 4, 1970

Для обобщенного УБ с зависящими от координат коэффициентами автомод решения найдены в работе: Enflo, Rudenko. Acta Acustica, 2002, v.88, p.155

Для проективной группы, генерируемой оператором X_5 .

$$X_5(J) = x^2\frac{\partial J}{\partial x} + tx\frac{\partial J}{\partial t} - (t + xu)\frac{\partial J}{\partial u} = 0$$

Характеристическая система

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{tx} = -\frac{du}{t + xu}$$

Решая ее, найдем два инварианта

$$\lambda = t / x, \quad \mu = t + xu$$

Таким образом, выражение для инв решения примет вид

$$u = -\frac{t}{x} + \frac{1}{x}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{t}{x}$$

Подставляя это выражение в УБ, получим для $\Phi(\lambda)$ **уравнение** $\Phi'' + \Phi\Phi' = 0$

Из него получается решение Хохлова

$$u = \frac{1}{x}\left[-t + \pi \tanh\left(C + \frac{\pi t}{2x}\right)\right]$$

Решения можно найти не только из основных симметрий, но и из их линейных комбинаций.

Рассмотрим, к примеру, оператор

$$X_1 + X_5 = \left(1 + x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial t} - (t + xu)\frac{\partial}{\partial u}$$

Инвариантное решение

$$u = -\frac{tx}{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Phi = 2\frac{d}{d\lambda}\ln\left[\sqrt{\lambda}\, J_{1/4}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) + C\sqrt{\lambda}\, Y_{1/4}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)\right]$$

Получаем из УБ новый результат

Понижение порядка. Нел волны в рассеивающей среде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p - \frac{\varepsilon}{c^2\rho}p^2\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{c^2\rho}p}\;\frac{\partial p}{\partial t}$$

Нел ур-ние 2-го порядка для бегущих волн точно сводится к паре ур-ний 1-го порядка. Легко проверить: дифф ур-ние 1-го порядка по X и заменяя производные по X в правой части произ по времени, получим исх ур-ние

$$p = \Phi\left(t \pm \frac{x}{c}\sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{c^2\rho}p}\right)$$

Точное решение ур-ния 1 порядка для бегущих волн

Ур-ние нел волн в расс среде

О.В.Руденко, В.А.Робсман. Докл.РАН, 384, №6, 2002

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} = -R\frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4}$$

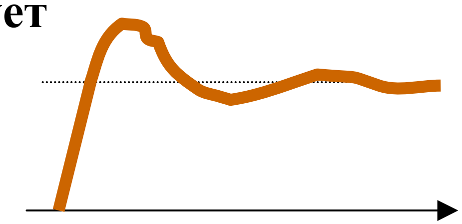
$$R = \alpha x_s = \frac{8\langle \mu^2\rangle a^3}{c^4}\,\frac{\omega_0{}^3 c^3 \rho}{\varepsilon p_0}$$

$$R\frac{d^4 V}{d\theta^4} = V\frac{dV}{d\theta}$$

Ур-ние для стац волны имеет точное реш $\theta = \left(\frac{40}{9}R\right)^{1/3}\int\limits_0^V \frac{dy}{\left(1-y^2\right)^{2/3}}$

Оно удовл ур-нию 1 порядка

Фронт УВ осциллирует



$$\frac{dV}{d\theta} = \left(\frac{9}{40R}\right)^{1/3}\left(1 - V^2\right)^{2/3},\quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -\frac{4}{3}\left(\frac{9}{40R}\right)^{2/3}V\left(1-V^2\right)^{1/3},\quad \frac{d^3V}{d\theta^3} = \dots$$

Линеаризация. Неоднородное УБ – возбуждение волн

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\Delta\frac{\partial U}{\partial \xi}-\pi\varepsilon U\frac{\partial U}{\partial \xi}-D\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=F(\xi)$$

Задачи: 1. Лазерное возбуждение нел гиперзвука (Письма ЖЭТФ, 1974, 20, 7); 2. Трансзвуковая аэродинамика (ДАН 1979, 248, 5); 3. Нел стоячие волны (JASA, 117, 2 2005)

Линеаризуется заменой $\mathrm{U}=\dfrac{2\mathrm{D}}{\pi\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\ln\mathrm{W}$

В частн., для гармонич правой части $F=-(M/2)\cdot\sin\xi$ **имеем ур-ние**

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{T}}+\Delta\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \xi}-\mathrm{D}\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \xi^2}=\frac{1}{2}\mathrm{qD}\cos\xi\cdot\mathrm{W},\qquad \mathrm{q}=\frac{\pi\varepsilon\mathrm{M}}{2\mathrm{D}^2}.$$

Решение которого при нулевой расстройке выражается через ф-ции Матье.

Стационарное реш в дисс среде

$$\mathrm{U}=\frac{2\mathrm{D}}{\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ln \mathrm{ce}_0\left(\frac{\xi}{2},\frac{\pi\varepsilon\mathrm{M}}{2\mathrm{D}^2}\right).$$

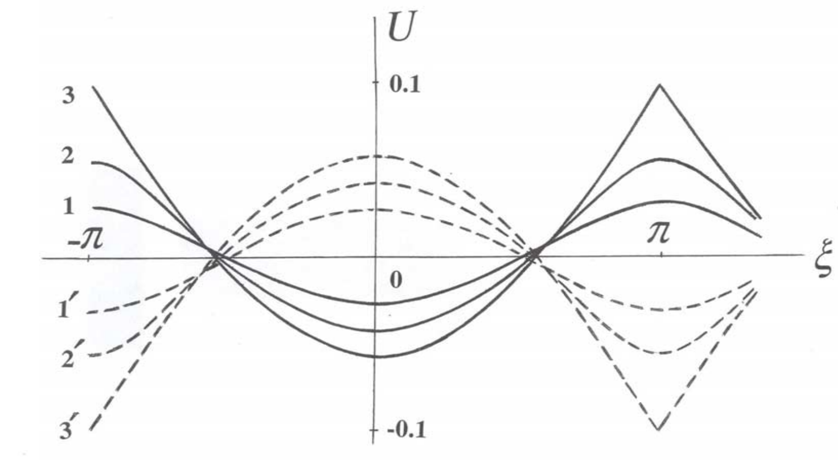
Когда лин поглощения нет

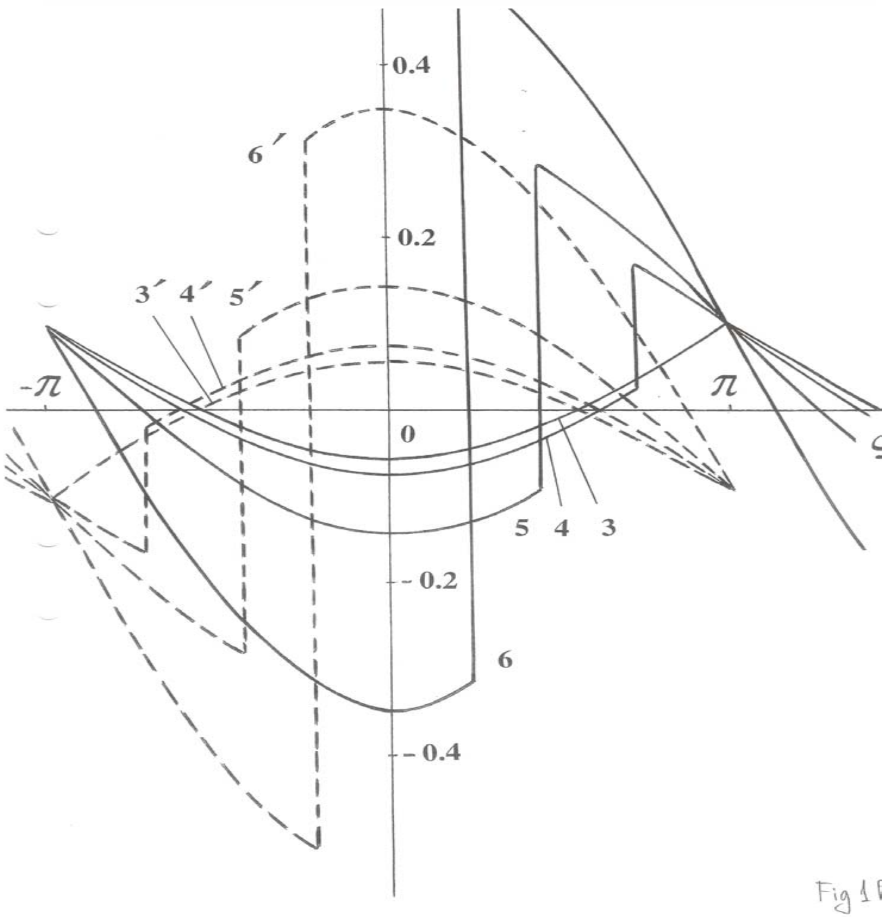
$$\mathrm{U}=\sqrt{\frac{2\mathrm{M}}{\pi\varepsilon}}\cos\frac{\xi}{2}\cdot sgn\,\xi,\qquad -\pi\le\xi\le\pi.$$

Средняя за период интенсивность волны выражается через собственное число λ_0 **функции Матье** ce_0

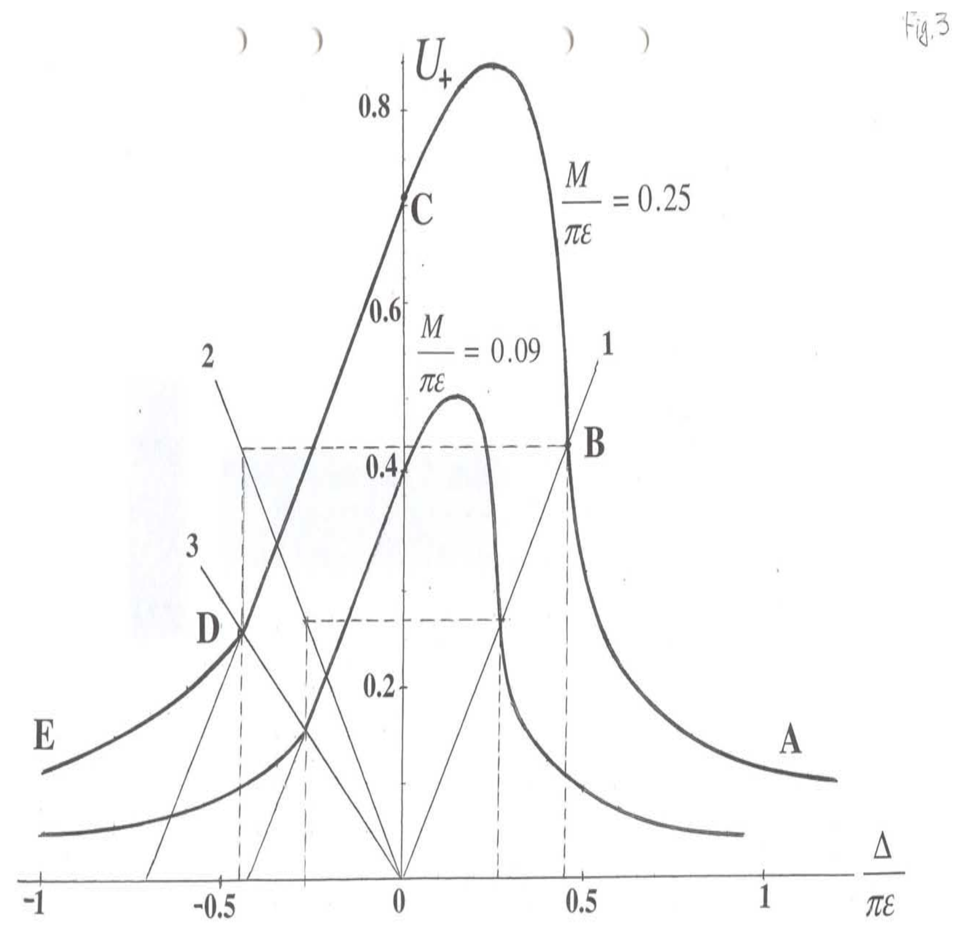
$$\overline{\mathrm{U}^2}=-\left(\frac{\mathrm{D}}{\pi\varepsilon}\right)^2\cdot\lambda_0\left(\mathrm{q}=\frac{\pi\varepsilon\mathrm{M}}{2\mathrm{D}^2}\right)\qquad \overline{U^2}=\frac{M}{\pi\varepsilon}-\frac{D}{(\pi\varepsilon)^2}\sqrt{2\pi\varepsilon M}+\frac{1}{4}\frac{D^2}{(\pi\varepsilon)^2}+\ldots.$$

Форма волны, описываемой НУБ





Резонансная кривая для положительного пикового давления в профиле волны



Нелинейные волновые пучки. Квадратичная нелинейность

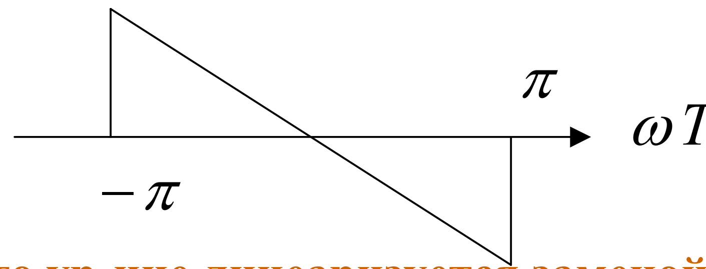
$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial T}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=0$$

Уравнения НГА: переноса и эйконала. В отличие от лин теории или НГО, ур переноса содержит время

Время удается исключить для интересного случая пилообразной волны

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2=f(x,y,z)$$

$$u=-\frac{\omega T}{\pi}A(x,r),\quad -\pi<\omega T<\pi$$



$$\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\varepsilon\omega}{\pi c_0^2}A^2+\nabla_\perp A\nabla_\perp\psi+\frac{A}{2}\Delta_\perp\psi=0$$

Это ур-ние линеаризуется заменой $B=1/A$

$$\frac{\partial B}{\partial x}+\nabla_\perp B\cdot\nabla_\perp\psi-\frac{B}{2}\Delta_\perp\psi=\frac{\varepsilon\omega}{\pi c_0^2}$$

Ур-ния НГА с использованием наклонов лучей

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial T}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\beta\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)\frac{u}{2}=0$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\beta\frac{\partial \alpha}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial \beta}{\partial x}+\alpha\frac{\partial \beta}{\partial y}+\beta\frac{\partial \beta}{\partial z}=0$$

$$\alpha=\partial\psi/\partial y,\ \ \beta=\partial\psi/\partial z$$

После введения лагранжевых переменных $\xi=y-\alpha x,\ \eta=z-\beta x$

Сводятся к ур-нию 1 порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{2}\frac{d}{dx}\ln S-\frac{\varepsilon}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial T}=0$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\xi,\eta)}\equiv S$$

- якобиан преобр переменных

Нелинейные волновые пучки. Кубичная нелинейность

Руденко, Сапожников УФН, т.174, 9, 2004

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\, p^2\frac{\partial p}{\partial\tau}-\beta\frac{\partial^2 p}{\partial\tau^2}\right]=\frac{c}{2}\Delta_\perp p$$

В прибл НГА сводится к паре ур-ний

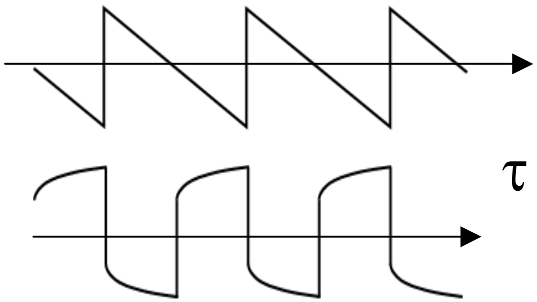
Ср инт-ть $I=\left\langle p^2\right\rangle$

$$\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial r}\left(I\cdot V\right)=-\alpha\,\omega\,\gamma\, I^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial r}=\gamma\, c\frac{\partial I}{\partial r}$$

Наклон луча к оси пучка

$$V=\partial\psi/\partial r$$



Форма пилообразной волны в среде с губичной нел (снизу) отличается от формы квадратично-нел среде (сверху).

Ур-ние переноса имеет точное решение

$$I=\frac{1}{f^2(x)}I_0\left(\frac{r}{af}\right)\left[1+\alpha\,\omega\gamma\, I_0\left(\frac{r}{af}\right)\int_0^x\frac{dx'}{f^2(x')}\right]^{-1}$$

Функция f , которая описывает изменение амплитуды волны и ширины пучка, удовл нел ИДУ

$$f^3\frac{d^2f}{dx^2}=-\frac{1}{2x_d x_s}\left[1+\frac{\alpha}{x_s}\int_0^x\frac{dx'}{f^2(x')}\right]^{-2}$$

$$f\Big|_{x=0}=1\qquad \frac{df}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{1}{R}$$

Здесь *R* – радиус кривизны волнового фронта на входе в среду. Задача Коши имеет точное решение

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{R}+\delta_1\frac{x}{x_s}\right)^{\frac{\delta_2}{\delta_1+\delta_2}}\cdot\left(1+\frac{x}{R}-\delta_2\frac{x}{x_s}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}}$$

$$\delta_{1,2}=\left(\sqrt{\alpha^2+2x_s/x_d}\pm\alpha\right)\Big/2$$

пучок сходится в точку на расстоянии $x_{sf}=\left(\delta_2/x_s-1/R\right)^{-1}$

Кубичная нелинейность. Пучки 2

Для устранения особенности в фокусе в правую часть уравнения для f нужно добавить дифракционную поправку

$$f^3\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{2x_d x_s}\left[1+\frac{\alpha}{x_s}\int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')}\right]^{-2} + \frac{1}{x_d^2}$$

Удивительно, что и это нел ИДУ имеет точное решение. Его удается найти, т.к. ур-ние линеаризуется при переходе к переменной

$$\xi = \frac{x_s}{\alpha x_d} + \frac{1}{x_d}\int_o^x \frac{dx'}{f^2(x')}$$

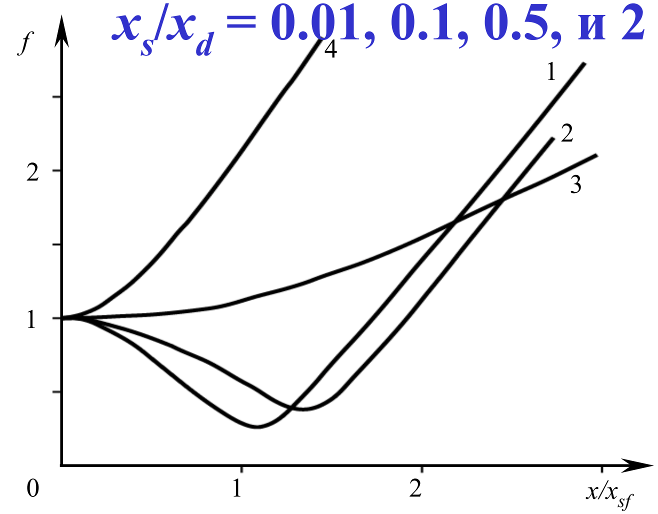
Это линейное ур-ние относительно 1/f

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{f}\right) + \left(1 - \frac{x_s}{\alpha^2 x_d}\frac{1}{\xi^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{f}\right) = 0$$

Общее реш дается ф-ями Бесселя:

$$f(\xi) = \frac{\xi^{-1/2}}{C_1 J_\nu(\xi) + C_2 Y_\nu(\xi)}, \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2x_s}{\alpha^2 x_d}}$$

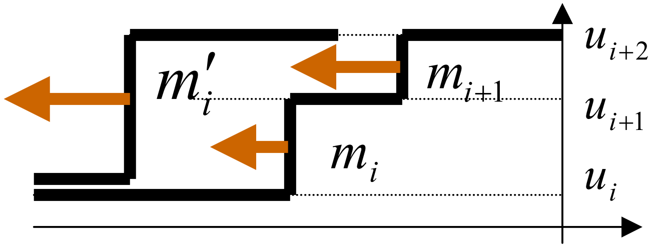
x_s/x_d = 0.01, 0.1, 0.5, и 2



При слабо выраженной дифракции происходит заметное сужение пучка (кривые 1 и 2), а при сильной дифракции самофокусировка не проявляется (кривые 3 и 4).

В отсутствие дисперсии СФ не приводит к сильному росту амплитуды. Пучок заметно сужается и имеет нел перетяжку, но фактор усиления невелик из-за принципиально неустранимого поглощения на ударных фронтах «пилы». Наибольшего усиления в фокусе ~1.65 удается достичь при отношении длин нел-ти и дифракции, равном 0.06

Ансамбль случайных УВ. Кинетические уравнения



Каждой «ступеньке» сопоставляется частица, масса и скорость которой даются ф-лами

$$m_i = u_{i+1} - u_i\,, \quad v_i = -\frac{\varepsilon}{c^2}\left(u_{i+1} + u_i\right)$$

При слиянии 2-х ступенек образуется 3-я.

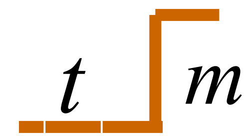
З-ны сохр как при абс неупр ударе

$$m_i' = m_i + m_{i+1}\,, \quad m_i' v_i' = m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2c^2}\left(m + \langle m \rangle\right)\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2c^2}[*]$$

Ансамбль ступенек опис кинетическим ур-нием

$$[*] \equiv m\int_0^m G(x,t,\xi)\cdot G(x,0,m-\xi)\cdot d\xi - \left(m - \langle m \rangle\right)\cdot G\cdot\int_0^\infty G(x,0,\xi)\cdot d\xi$$



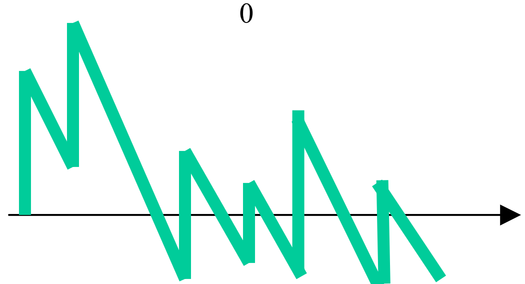
Здесь G- пл-ть вероятности того, что промежуток времени между 2-мя соседними разрывами равен t и величина 2-го разрыва равна m

$$G = \frac{1}{t_0}\exp\left(-\frac{t}{t_0} - \frac{\varepsilon x}{c^2 t_0} m\right)\cdot F(x,t,m)\,, \quad f = \int_0^\infty F\exp(-sm)dm$$

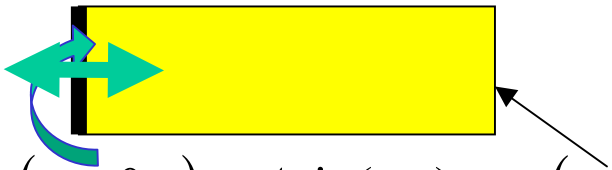
Совершая замену и преобразуя вспомогательную ф-цию по Лапласу, потучим УПВ, которое решается точно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c^2 t_0} f \frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

Случайная «пила» экв абс неупругим частицам, корорые «испаряются» между столкновениями из-за нел затухания



Стоячие волны и функциональные уравнения



$u(x=0,t)=A\sin(\omega t)$ $\quad u(x=L,t)=0$

Общ реш 1-мерного линейного волн ур-ния

$$u(x,t)=F_+\left(t-\frac{x-L}{c}\right)+F_-\left(t+\frac{x-L}{c}\right)$$

Решение удовлетворяющее граничным усл дается функциональным ур-нием

$$F(\omega t+kL)-F(\omega t-kL)=A\sin(\omega t)$$

Его общее решение

$$F=-\frac{A\cos(\omega t)}{2\sin(kL)}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos(n\omega_0 t)+B_n\sin(n\omega_0 t)\right] \qquad \omega_0=\pi c/L\,,\quad L=\lambda_0/2$$

Оно описывает как установившиеся, так и нестац пр-ссы. В частн, при резонансе

$$F=\frac{A}{2}\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\cos(\omega_0 t)-\cos(\omega t)}{\sin(\omega L/c)}=\frac{A}{2\pi}(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)$$

В нелинейном резонаторе, казалось бы, нужно рассмотреть две бегущие навстречу друг другу нелинейно искажающиеся и взаимодействующие между собой волны. Но для периодических во времени волн достаточно ограничиться линейной суперпозицией встречных волн (т.е.учесть их «самовоздействие»), а процессами «перекрестного» взаимодействия пренебречь. Рассмотрим нелинейное ур-ние

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\varepsilon}{c^3}\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2}$$

1-е приближение

$$u^{(1)}=B_1\cos(\omega_1 t-k_1 x)+B_2\cos(\omega_2 t+k_2 x),\;\; k_{1,2}=\omega_{1,2}/c$$

Стоячие волны и функциональные уравнения 2

$$u^{(2)} = -\frac{\varepsilon}{2c} B_{1,2}^2 (\omega_{1,2} \cdot t) \sin\left[2(\omega_{1,2} t \mp k_{1,2} x)\right] + \frac{\varepsilon}{c^3} \frac{(\omega_1 \pm \omega_2)^2}{4k_1 k_2} B_1 B_2 \cos\left[(\omega_1 \pm \omega_2) t - (k_1 \mp k_2) x\right]$$

«Резонансные» члены 2-го приближения отвечают растущим во времени волнам и процессам «самовоздействия» каждой из встречных волн

«Нерезонансные» члены отвечают кросс-взаимодействиям

$$F\left[\omega t + kL - \frac{\varepsilon}{c} kLF\right] - F\left[\omega t - kL + \frac{\varepsilon}{c} kLF\right] = A \sin(\omega t)$$

Функц ур-ние: сумма двух встречных сильно искаженных волн

$$L << \frac{c^2}{\varepsilon \omega F_{\max}}, \ kL = \pi + \Delta, \ \Delta = \pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} << 1.$$

Если длина резонатора мала по ср с нел длиной, а частота близка к собственной частоте

$$F = \left[\omega t + \pi + \Delta - \pi \frac{\varepsilon}{c} F\right] - F\left[\omega t - \pi - \Delta + \pi \frac{\varepsilon}{c} F\right] \approx$$

$$\approx \left[F(\omega t + \pi) - F(\omega t - \pi)\right] + \left(\Delta - \pi \frac{\varepsilon}{c} F\right)\left[F'(\omega t + \pi) + F'(\omega t - \pi)\right]$$

Для каждой из волн получим НУПВ

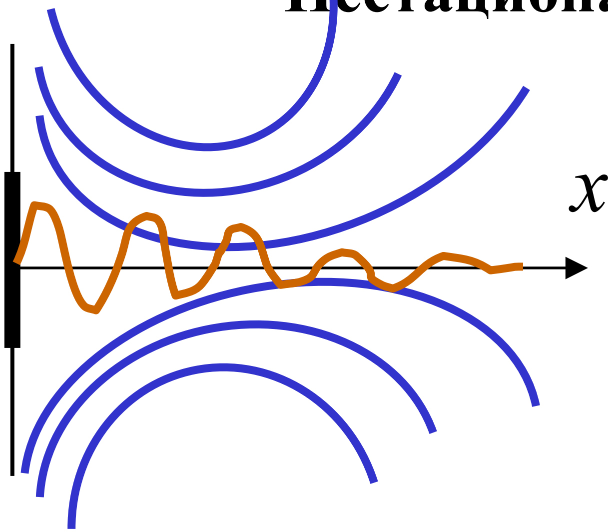
$$\frac{\partial U}{\partial T} + \Delta \frac{\partial U}{\partial \xi} - \pi \varepsilon U \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{M}{2} \sin \xi .$$

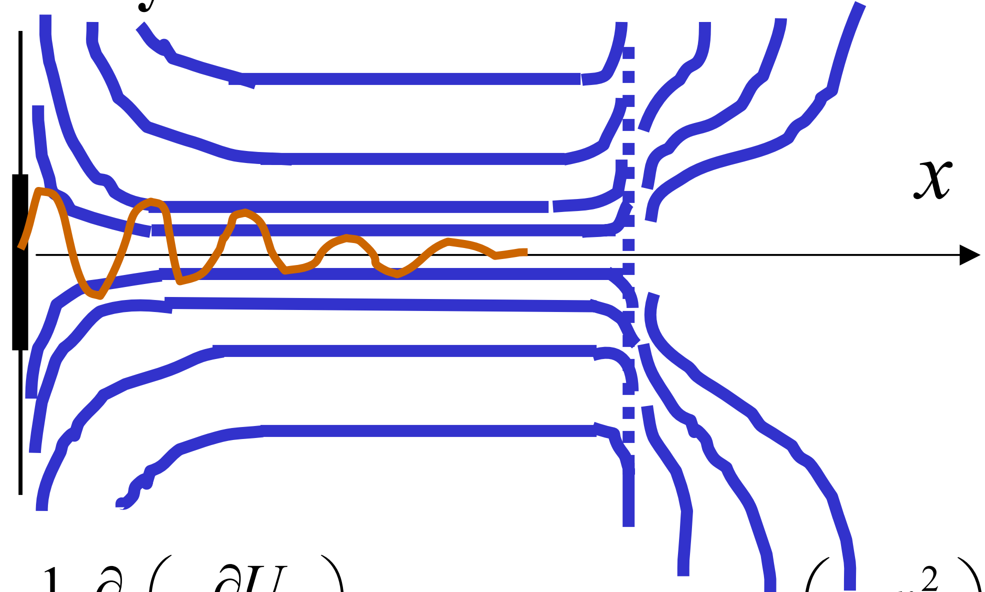
Здесь обозначено

$$\xi = \omega t + \pi, \ U = \frac{F}{c}, \ M = \frac{A}{c}, \ T = \frac{\omega t}{\pi}$$

Акустический фонтан от непрерывного УЗ пучка

Нестационарные акустические течения





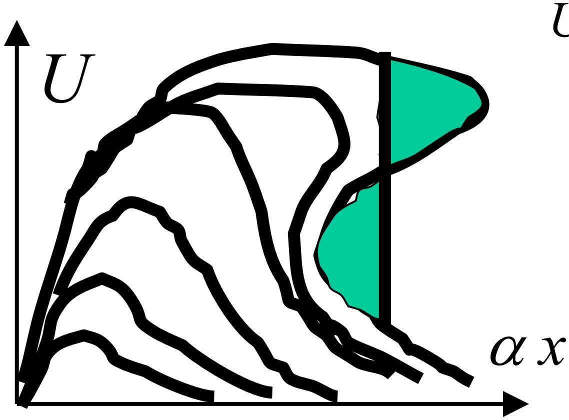
$$\frac{\partial U_x}{\partial t}+U_r\frac{\partial U_x}{\partial r}+U_x\frac{\partial U_x}{\partial x}=F+\nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_x}{\partial r}\right) \qquad F=A(\alpha x)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

Радиационная сила, вызванная поглощением УЗ

$$\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r)=0$$

Точное решение этой нелинейной системы ур-ний:

$$U_x=U(x,t)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right),\ U_r=-\frac{a^2}{2r}\left(1-\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}U(x,t)$$

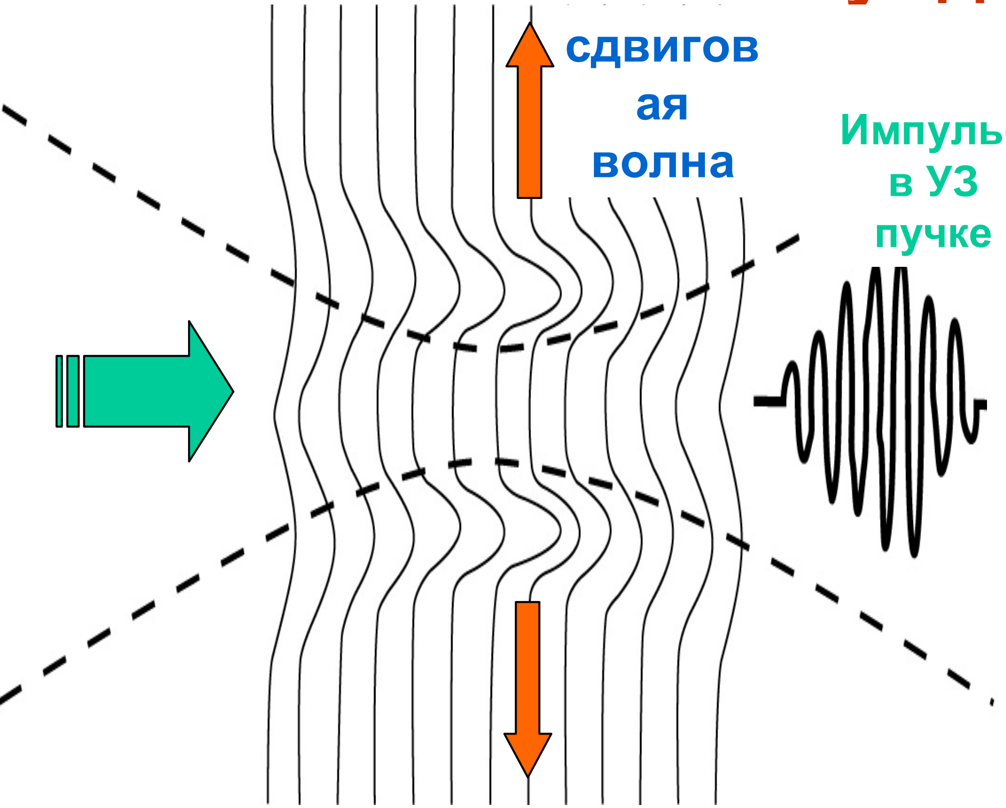


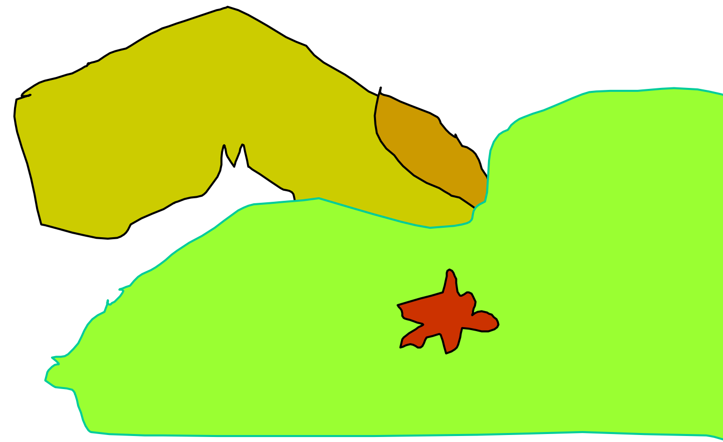
Ф-ция U удовл НУПВ с нулевым нач условием и условием непротекания через излучатель

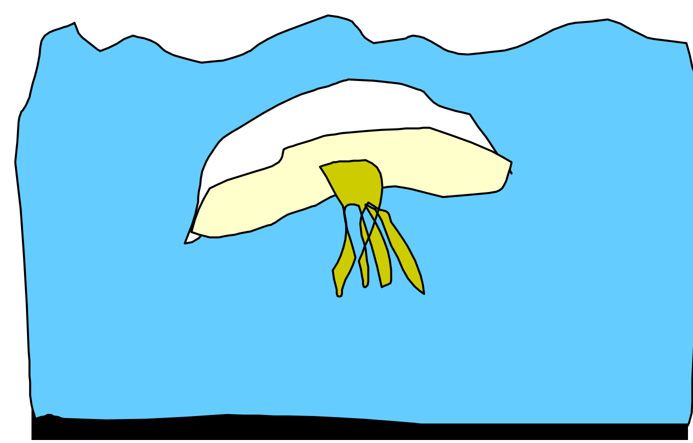
$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=A(\alpha x)$$

$$U(x=0,t)=U(x,t=0)=0$$

Модулированное радиационное давление для бесконтактного возбуждения сдвиговых волн



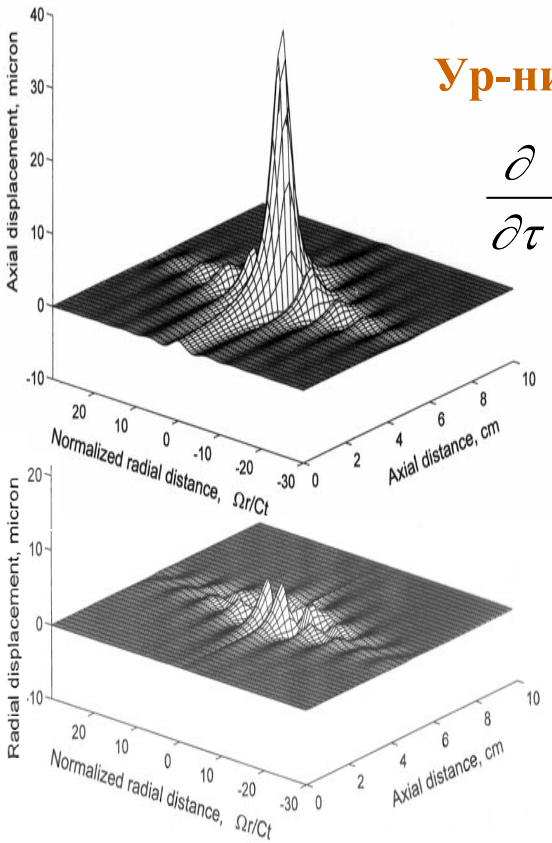




Применение в диагностике:
Shear Wave Elasticity Imaging

Sarvazyan and Rudenko. US Patent 5,810,731 (Sept.22, 1998)

Модель для «Shear Wave Elasticity Imaging»



Ур-ние для нелинейного УЗ пучка распростр в биоткани

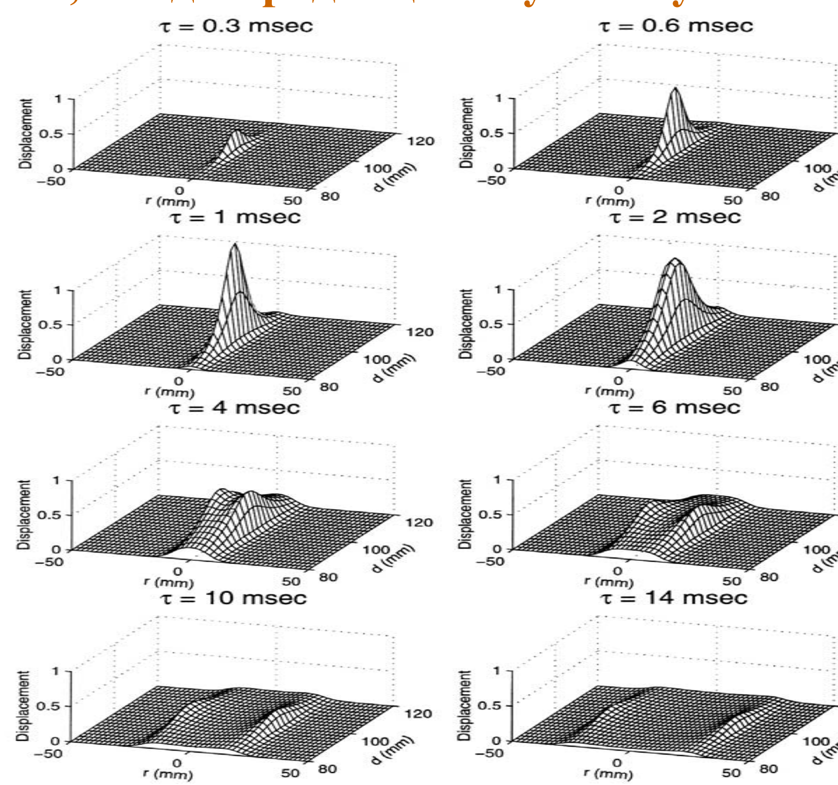
$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c^{3}\rho}\,p\,\frac{\partial p}{\partial \tau}-\gamma\,\frac{\partial^{2}}{\partial \tau^{2}}\int_{0}^{\infty}\mathrm{K}(\xi)\,p(x,\tau-\xi)\,d\xi\right]=\frac{c}{2}\Delta_{\perp}p$$

Гр условие на пов-ти фокусирующего излучателя

$$p(x=0,r,t)=p_{0}\Phi\left(\frac{r^{2}}{a^{2}}\right)\varphi(\Omega t)\cdot\sin\omega\left(t+\frac{r^{2}}{2cd}\right)$$

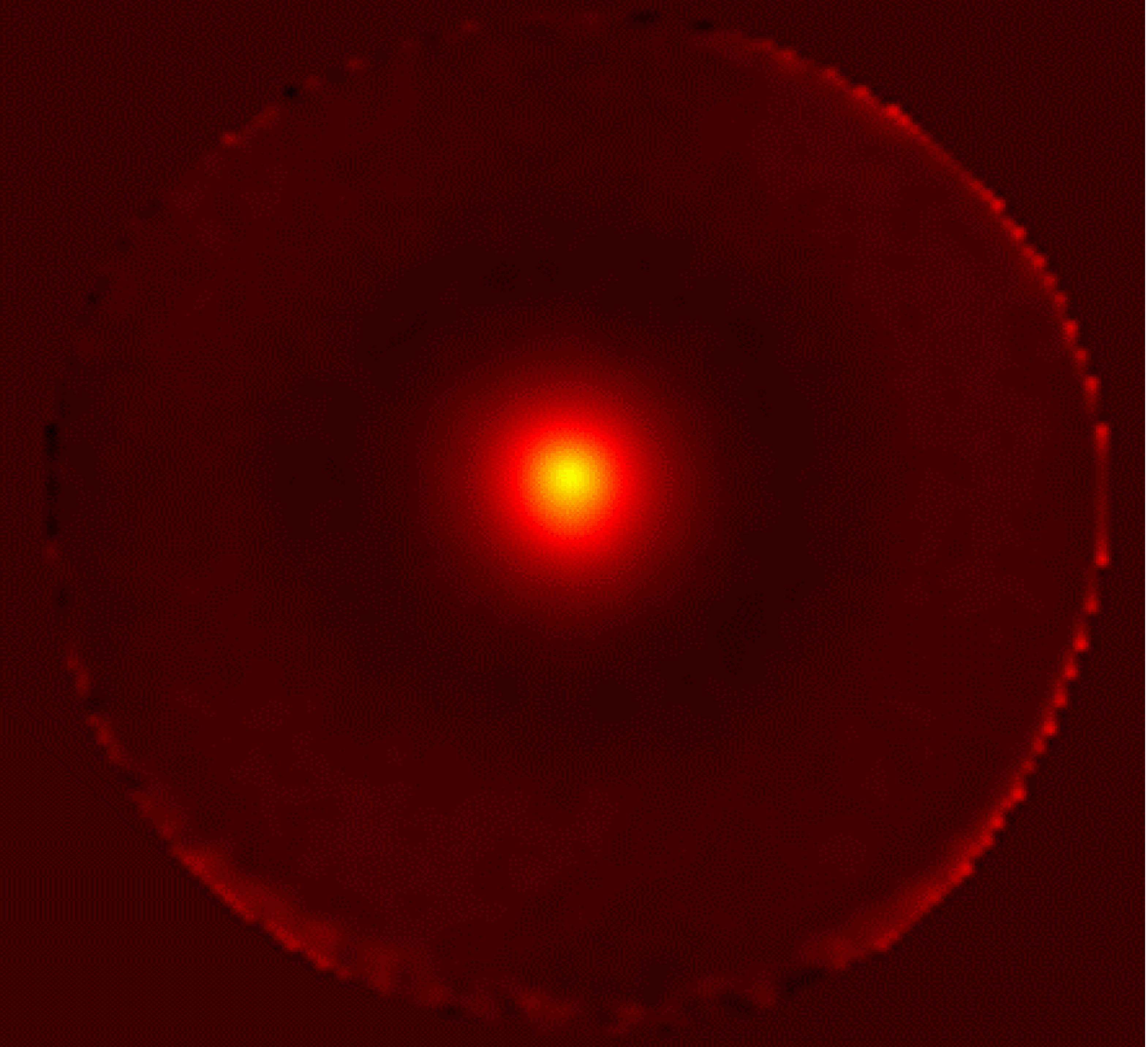
Усредняя решение, найдем радиационную силу

$$F_{x}=\frac{b}{c^{3}\rho}\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)^{2}}$$

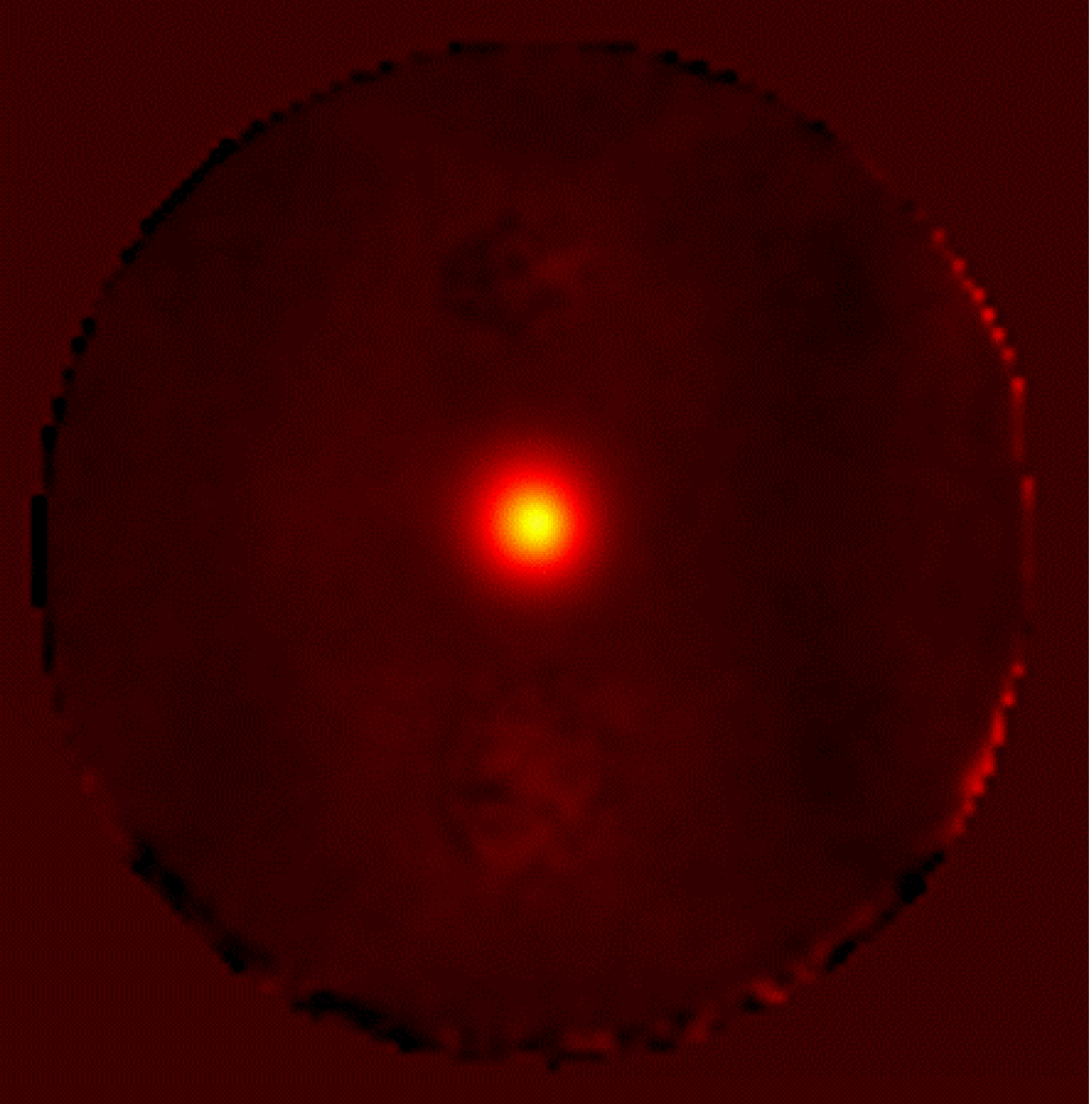


Эта сила пульсирует, т.к. УЗ модулирован на кГц частотах, и возбуждает в ткани сдвиговую волну

$$\frac{\partial^{2}s_{x}}{\partial t^{2}}-\left(c_{t}^{2}+\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta_{\perp}s_{x}=F_{x}$$



Сдвиговая волна дистанцион-но возбужда емая модули-рованным УЗ в однородной среде

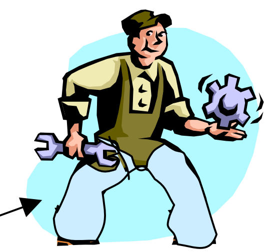


Фантом с неоднородно-стями моделирующими опухоль

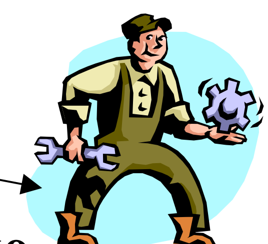
Н.Х.Ибрагимов (Дир-р центра ALGA иссл по групповому анализу, BTH, Sweden), **О.В.Руденко «Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн» (Акуст.ж.№4, 2004)**

Подход к решению нел ур-ний путем «погружения» в класс более общих (и сложных) моделей. Опыт физически обоснованного упрощения, казалось бы, противоречит идее усложнения: «Чтобы упростить задачу, мы должны до известных пределов идеализировать свойства системы, сделать ряд упрощающих предположений» (А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний). Но за внешними различиями скрыто единство двух подходов. Ясно, что более симметричная модель должна иметь больше точных решений. Как добиться большей симметрии? Можно идти по традиционному пути упрощения, «отсекая» элементы модели, нарушающие ее симметрию (пренебрегая некоторыми членами уравнения или как-то видоизменяя их). С другой стороны, можно «достроить» модель до более симметричной путем ее усложнения. Если сложная модель допускает подходящее точное решение, нужные упрощения можно произвести в окончательных формулах.

Исх.модель



Традиц подход



Предл подход

Пример 1. Уравнение Иршоу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\left(1+\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^{-2\varepsilon}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 \ , \qquad \varepsilon = \frac{\gamma+1}{2}, \ \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

описывает в представлении Лагранжа 1-мерное движение сжимаемого газа.

УИ может быть линеаризовано «преобразованием годографа»:

$$x = v_\xi \ , \ y = v_t \ , \ \xi = X(x,y), \ t = u(x,y),$$

то есть лагранжева координата и время считаются ф-ями новых независимых переменных - первых производных от искомой функции . Соотв ур-ние имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2(1+x)^{-2\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

При малых числах Маха прибл ур-ние:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\left[1-2\varepsilon x\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Однако ни линейное ур-ние, ни его упрощенная версия не решаются, поскольку не обладают достаточно широкой группой симметрии. Поэтому выберем аппроксимирующее ур-ние не по простоте его вида, а по принципу наличия симметрии, достаточной для его разрешимости. Именно, рассмотрим ур-ние

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2\psi^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Анализ показывает: ур-ние имеет максимально широкую группу симметрии при $\psi(x) = \left[l + s\,x\right]^{-2}$

Решая обобщенное уравнение, полагая $l = 1, \ s = \varepsilon/2$ и разлагая в ряд по x, найдем

$$u(x,y) = \frac{\varepsilon\left(1+\varepsilon x/2\right)}{4c}\left[\Phi_1\left(\frac{2c}{\varepsilon\left(1+\varepsilon x/2\right)}+y\right)+\Phi_2\left(\frac{2c}{\varepsilon\left(1+\varepsilon x/2\right)}-y\right)\right]$$

Пример 2. Нелинейные пучки

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial t}\right]=-\beta u$$

Уравнение допускает трехмерную алгебру Ли с базисом

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\ X_2=\frac{\partial}{\partial x},\ X_3=t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}+2u\frac{\partial}{\partial u}$$

Это ур-ние не богато инвариантно-групповыми решениями; их класс ограничен бегущими волнами, построенными с помощью генераторов переноса X_1, X_2, и автомод решениями (генератор растяжения X_3). Поэтому используем идею погружения, рассматривая обобщающую модель

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-Q(x,u)\frac{\partial u}{\partial t}\right]=F(x,u)$$

Группа преобразований

$$\bar{t}=f(t,x,u,a),\quad \bar{x}=g(\dots),\quad \bar{u}=h(\dots)$$

наз *группой экв-ти*, если каждое ур-ние данного семейства (с любыми функциями Q, F) переходит в ур-ние того же семейства, то есть

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}-\bar{Q}(\bar{x},\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}\right]=\bar{F}(\bar{x},\bar{u})$$

где, вообще говоря, функции $\bar{Q},\bar{F}$ не совпадают с Q, F

Алгебра экв-сти находится с помощью ифинитезимальной техники Ли. Функции Q, F рассм как новые переменные наряду с физич. переменными t, x, u.
Оказалось,что ур-ние имеет бесконечномерную алгебру Ли и очень много точных физически важных решений

Одна из конкретных форм

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\Phi_1\left(\frac{u}{x-k}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{1}{x-k}\Phi_2\left(\frac{u}{x-k}\right)$$

Пример 2. Продолжение

Интересен частный случай этого ур-ния с линейными ф-ми Φ_1, Φ_2 когда в левой части появляется квадратично-нел член:

$$*\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\frac{u}{k-x}\frac{\partial u}{\partial t}\right]=-\beta\frac{u}{(k-x)^2}$$

Рассм систему экв ур-нию типа ХЗ для неоднородной среды

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial \tau}-\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2\right)+\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}+\frac{p}{2}\Delta_\perp\Psi\right]=\frac{c}{2}\Delta_\perp p$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2=\frac{r^2}{2}f(x)+q'(x)$$

Здесь рассм приосевая обл пучка и обозначено

$$\Delta_\perp=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}=-\frac{2}{a^2}, \qquad \tau=t-\frac{x}{c}-\frac{1}{c}\Psi(x,r),$$

Подставляя в ур-ние переноса решение ур-ния эйконала

$$\Psi=\frac{r^2}{2}\Phi(x)+q(x), \qquad \Phi'+\Phi^2=f$$

Приведем ур-ние к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{q'(x)}{c}\frac{\partial p}{\partial \tau}-\frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial \tau}+\Phi(x)p\right]=-\frac{c}{a^2}\Phi^2(x)p$$

В частности, для сфокусированных пучков в одн среде это ур-ние совпадает с исходным ур-ем *

Оно допускает оператор $X'=t\frac{\partial}{\partial t}+(x-k)\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u}$

Дающий инв-ты $\lambda=t/(x-k)$, $\mu=u/(x-k)$

$$u=\frac{t}{\sqrt{k-x}}\left[C_1J_1(2\sqrt{\beta\lambda})+C_2Y_1(2\sqrt{\beta\lambda})\right]$$

-одно из точных решений