

УДК 51(09)

## Магические квадраты в ранних научных работах Л. Эйлера

А. Е. Малых

Пермский государственный педагогический университет  
Россия, 614000, Пермь, ул. Сибирская, 24  
malych@pspu.ru; (342) 280-37-55

Исследованы методы построения Эйлером магических квадратов разных порядков и способы представления их латинскими. Показано, что они явились основой для создания им комбинаторной теории латинских квадратов.

**Ключевые слова:** комбинаторика; магический квадрат; греко-латинская таблица; методы построения; композиционные теории.

В истории науки трудно отыскать математика, которого не занимали бы магические квадраты (ниже – м.к.) – числовые конструкции размера  $n \times n$ , заполненные  $n^2$  числами натурального ряда так, что в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух диагоналей сумма чисел одна и та же (магическая константа). Сколь-нибудь общей теории не построено, хотя в усилиях на этом пути недостатка не было. Таинственность названия, простота формулировки задач и трудности в их решении привлекали к таким квадратам внимание как первоклассных ученых, так и любителей математики.

За многие столетия накопились различные методы их построения. Однако первые математические результаты относились к XVII в. С того времени резко увеличилось число публикаций. Предметом всестороннего изучения они стали в XIX столетии, когда число опубликованных работ в каждом десятилетии постоянно увеличивалось: 8; 9; 20; 19; 43; 38; 46; 104; 129; 145 [1].

Не удивительно, что м.к. привлекли к себе внимание Л.Эйлера (1707–1783). Часть неопубликованного материала об этих конструкциях находится в двух его "записных книжках" ( $H_5$  и  $H_6$ ). Напомним, что имеются в виду хранящиеся в Архиве АН РФ 12 боль-

ших переплетных тетрадей общим объемом около 4000 страниц, являющихся рабочими тетрадями ученого по математике и механике. Следуя традиции, за ними сохранили название "записных книжек". В  $H_5$ , относящейся к ученическому периоду жизни в Базеле (1725–1727), 19-летний Эйлер заинтересовался построением м.к., элементами которых являются члены арифметической прогрессии [2]. В математической части  $H_6$  (1754–1757) среди многочисленных заметок по теории чисел м.к. занимают 30 с.

В заметке  $H_5$ , впоследствии опубликованной в *Leonardi Euleri Opera Omnia*, Эйлер изучал совершенные и несовершенные м.к. В последних условие магичности не сохраняется вдоль двух диагоналей. В качестве теоремы и ее следствия он сформулировал два утверждения: из любой арифметической прогрессии можно составить м.к., и притом совершенный; если последовательность первых девяти членов образует м.к., то четные числа должны находиться в вершинах квадрата.

Процесс построения совершенных м.к. ученый свел к последовательному выравниванию сумм элементов по строкам и столбцам.

Таким путем из числового квадрата  $3 \times 3$  он получил м.к. совершенный (I).

9 1 5	9 1 5	4 3 8
8 3 4	4 8 3	9 5 1
7 2 6	2 6 7	2 7 6
	(I)	

Затем Эйлер сформулировал основную проблему построения м.к. из членов арифметической прогрессии и решил две задачи. В первой следовало построить м.к. с разностью  $a$  и магической константой  $b$ . Девять членов прогрессии он представил в виде  $x+y, 2x+y, \dots, 9x+y$ , где  $x=a$  и  $y$  – некоторое добавочное число, позволяющее определить  $x+y$ . Тогда магическая сумма  $S$  м.к. порядка 3 должна быть  $45a+9y$ , а  $b=15a+3y$ , откуда  $y=b/3+5a$ . Зная  $a$  и  $y$ , можно построить арифметическую прогрессию и, согласно I, получить м.к., поставив в соот-

8	4	24	23	18	43	ответствие чис-
28	12	-4	48	28	8	лам 1, 2, ..., 9
0	20	16	13	38	33	девять ее член-
(1)			(2)			нов. Взяв, в
						частности,
						$a=4, b=36,$

Эйлер нашел значение  $y=-8$ , затем  $a+y=-4$  и, наконец, 9 членов прогрессии:  $-4, 0, 4, 8, 12, \dots, 28$ . В соответствии с I из них он составил м.к. (1).

Во второй задаче требовалось построить м.к. с константой  $b$  и первым членом  $a$ . Решение её сводилось к нахождению разности прогрессии. Пусть  $x+y=a$ , откуда  $3y=3a-3x$  (i). С другой стороны,  $b=15a+3y$ , поэтому  $3y=b-15a$  (ii). Приравняв правые части (i) и (ii), Эйлер нашел разность арифметической прогрессии  $x=b/12 - a/4$ .

Кроме того,  $y=a - x=5a/4 - b/12$ . В качестве примера он взял значение  $a=8$  и  $b=84$ . Тогда  $x=5$  и членами прогрессии являются: 8, 13, 18, 25, ..., 48. Пользуясь I, ученый построил м.к. (2).

В дальнейшем учение о м.к., составленных из членов прогрессий, было расширено и обобщено в работах ученых XIX столетия. Так, В.Коккоз исследовал и изучал м.к., состоящие из прямоугольных [3, 4], П.Лафит – из неотрицательных [5], а А.Жерардин – из простых чисел [6].

Анализ заметки Эйлера из  $H_5$  показал, что в ней, по-видимому, бывшей самой ранней его комбинаторной работой, для построения м.к. существенно применялся алгебраический аппарат. Еще в большей степени ученый использовал его спустя 50 лет в мемуаре "О магических квадратах" [7]. В нем отчетливо прослеживается

зарождение нового направления комбинаторного анализа – теории латинских квадратов.

Все числа  $1, 2, \dots, x^2$ , из которых составляется м.к., Эйлер представил в виде  $tx+n$ , где  $t = \overline{0; x-1}$ ,  $n = \overline{1; x}$ . Первое слагаемое он заменил буквами латинского алфавита  $a, b, c, \dots$ , а второе – греческими  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Для построения м.к. ученый разработал следующие условия:

1. Латинские буквы вписываются в каждую ячейку квадрата так, чтобы их "сумма" по всем строкам и столбцам была постоянной.
2. Аналогичным образом вписывают греческих букв.
3. Каждая латинская буква сочетается с каждой греческой.
4. Никакая пара букв не должна повторяться.

Заметим, что 3 указывает на наличие в м.к. всех чисел от 0 до  $x^2$ , а 4 не допускает их повторения. Из условий же 1–4 вытекает невозможность построения м.к. порядка 2.

В четырех параграфах мемуара [7] разработаны методы получения м.к. четного и нечетного порядков, выполнены построения для  $n = \overline{3; 6}$  и затронуты вопросы их подсчета для указанных порядков.

Все параграфы имеют сходную структуру: ученый начинает построение м.к. с составления двух вспомогательных таблиц, каждый раз формулируя особые правила заполнения ячеек буквами; после этого находит множество их допустимых значений и, наконец, приводит примеры м.к. этого порядка, параллельно отождествляя или различая их.

Методы заполнения таблиц буквами не носят у Эйлера универсального характера, а различаются внутри каждого из классов четности. Для конкретного порядка  $n$  он пытается создать наиболее простой способ такого заполнения.

Построение м.к. в работе [7] начиналось для случая  $x=3$ . Эйлер составлял две вспомогательные таблицы: латинскую (3) и греческую (4) с учетом условий 1–4, отмечая, кроме того, что на одной из диагоналей должны встречаться все буквы, тогда как во второй может находиться одна и та же.

Используя условие магичности для букв каждой из диагоналей, он получил основные

$$\begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{matrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a, b, c &\in \{0, 3, 6\}; \\ a+b+c &= 3c; \\ a+b &= 2c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=0, b=6, c=3 &\text{ или} \\ a=6, b=0, c=3. & \end{aligned}$$

При взаимном наложении (3) и (4) он построил результирующую таблицу(5).

$a\gamma$	$b\beta$	$ca$	2	9	4	Найдя сумму соответствующих числовых значений для каждой из ячеек таблицы (5), Эйлер получал иско- мый м.к. Так, для случая $a=0, b=6, c=3$ и $\alpha=1, \beta=3, \gamma=2$ такой квадрат имел вид (6).
$ba$	$c\gamma$	$a\beta$	7	5	3	
$c\beta$	$aa$	$b\gamma$	6	1	8	
(5)	(6)					

мый м.к. Так, для случая  $a=0, b=6, c=3$  и  $\alpha=1, \beta=3, \gamma=2$  такой квадрат имел вид (6).

Давая другие допустимые значения латинским и греческим буквам, а также составляя различные вспомогательные таблицы, ученый строил различные м.к. После многочисленных примеров составления таких квадратов Эйлер пришел к выводу: "Существует точно один м.к. порядка 3; при любых наборах латинских и греческих букв получается лишь изменение взаимного расположения строк и столбцов квадрата" [7, с. 594].

Для случая  $x = 4$  методы составления вспомогательных таблиц существенно отличаются от рассмотренных выше, а число их значительно увеличивается. Эйлер предложил несколько способов построения м.к. В одном из них первая строка записывалась в естественном порядке, затем заполнялась левая диагональ, после чего, согласно условию I, строилась таблица (7):

$a$	$b$	$c$	$d$	$aa$	$b\delta$	$c\beta$	$d\gamma$
$d$	$c$	$b$	$a$	$d\beta$	$c\gamma$	$ba$	$a\delta$
$b$	$a$	$d$	$c$	$b\gamma$	$a\beta$	$d\delta$	$ca$
$c$	$d$	$a$	$b$	$c\delta$	$da$	$a\gamma$	$b\beta$
(7)				(8)			

Как правило, такое построение не является однозначным, поэтому в результате получалось большое число вспомогательных таблиц. Не пользуясь построением греческой

соотношения, необходимые для определения допустимых значений букв:

$$\begin{matrix} \gamma & \beta & \alpha \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma \end{matrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma &\in \{1, 2, 3\}; \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3\gamma; \\ \alpha + \beta &= 2\gamma; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha=1, \beta=3, \gamma=2 &\text{ или} \\ \alpha=3, \beta=1, \gamma=2. & \end{aligned}$$

таблицы, Эйлер составил результирующую следующим образом: к латинским буквам левой диагонали приписывал соответствующие греческие. После этого в каждой ячейке, симметричной относительно этой диагонали, размещал греческую букву так, чтобы она была соответствующей для латинской буквы другой ячейки. Этим обеспечивалось выполнение условий 3 и 4. Итогом построения стала греко-латинская таблица (8).

$$\begin{matrix} b\delta & c\beta & d\gamma & aa \\ c\gamma & ba & a\delta & d\beta \\ a\beta & d\delta & ca & b\gamma \\ da & a\gamma & b\beta & c\delta \end{matrix} \quad (9)$$

С алгебраической точки зрения полученный из нее м.к. не представлял интереса, так как каждая латинская и греческая буквы могут принимать любое из допустимых значений:  $a, b, c, d \in \{0, 4, 8, 12\}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Поэтому, выполнив тождественные преобразования результирующей таблицы, Эйлер привел ее к виду, когда на диагоналях встречаются не все латинские и греческие буквы. В частности, сделав подстановку столбцов (1432), он получил результирующую таблицу (9). Из соотношений  $b+c=a+d$ ;  $\alpha+\delta=\beta+\gamma$  Эйлер нашел допустимые значения для букв:  $a=0, b=4, c=8, d=12$  или  $a=0, b=8, c=4, d=12$ ;  $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \delta=4$  или  $\alpha=1, \beta=3, \gamma=2, \delta=4$ . Используя их, он записал м.к. порядка 4 (10). Для построения вспомогательных таблиц другой структуры Эйлер произвел следующее расположение букв (11):

$$\begin{matrix} 8 & 10 & 15 & 1 \\ 11 & 5 & 4 & 14 \\ 2 & 16 & 9 & 7 \\ 13 & 3 & 6 & 12 \end{matrix} \quad (10)$$

Для построения вспомогательных таблиц другой структуры Эйлер произвел следующее расположение букв (11):

$a$	$a$	$d$	$d$	$a\alpha$	$a$	$d$	$d$
$d$	$d$	$a$	$a$	$d$	$d\beta$	$a$	$a$
$b$	$b$	$c$	$c$	$b$	$b$	$c\gamma$	$c$
$c$	$c$	$b$	$b$	$c$	$c$	$b$	$b\beta$
(11)				(12)			

В каждой строке этой таблицы встречаются в точности две буквы: каждая пара столбцов имеет одинаковую структуру. Кроме того, в строках и столбцах "сумма" каждой пары букв должна быть в два раза меньше "суммы" всех четырех букв. Тогда для построения латинской таблицы должно выполняться условие  $a+d=b+c$  (i). Кроме того, одна из диагоналей содержит все латинские буквы. К каждой из латинских букв Эйлер приписал соответствующие им греческие (12).

$$\begin{array}{cccc}
 a\alpha & a\delta & d\beta & d\gamma \\
 d\alpha & d\delta & a\beta & a\gamma \\
 b\delta & b\alpha & c\gamma & c\beta \\
 c\delta & c\alpha & b\gamma & b\beta
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 1 & 4 & 14 & 15 \\
 13 & 16 & 2 & 3 \\
 8 & 5 & 11 & 10 \\
 12 & 9 & 7 & 6
 \end{array}$$

(13) (14)

После этого ученый расставил по упомянутому выше правилу греческие буквы относительно заполненной диагонали (13).

Из структуры результирующей таблицы видно, что  $a+\delta=\beta+\gamma$  (ii). С учетом (i) и (ii) в качестве допустимых значений букв он выбрал:  $a=0, b=4, c=8, d=12; \alpha=1, \beta=2, \gamma=3, \delta=4$ . Подставив их в полученную таблицу, Эйлер пришел к м.к. (14).

Ученый отметил также, что структура результирующей таблицы, для которой справедливы соотношения (i) и (ii), может быть и другой, например (15). Соответствующий ей м.к. имеет вид (16).

$$\begin{array}{cccc}
 a\alpha & d\beta & a\delta & d\gamma \\
 b\delta & c\gamma & b\alpha & c\beta \\
 d\alpha & a\beta & d\delta & a\gamma \\
 c\delta & b\gamma & c\alpha & b\beta
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 1 & 14 & 4 & 15 \\
 8 & 11 & 5 & 10 \\
 13 & 2 & 16 & 3 \\
 12 & 7 & 9 & 6
 \end{array}$$

(15) (16)

Для порядка 4 Эйлер нашел число м.к. определенного вида. Их оказалось  $24 \times 24 = 576$ . Однако ученый не ставил целью нахождение общего числа всех типов квадратов этого порядка. Заметим, что количество неизоморфных между собой м.к. порядка 4 впервые было получено Френиклем де Бесси [8] еще в 1693 г., однако этого факта Эйлер, повидимому, не знал.

Для  $x = 5$  имеется гораздо большее число способов составления вспомогательных таблиц. Даже к настоящему времени количе-

ство неизоморфных м.к. этого порядка не установлено; полагают, что их должно быть не менее 750.000.

Таблицу из латинских букв Эйлер составил по аналогии с предыдущим случаем (17). В таком же направлении осуществлялось заполнение результирующей таблицы, однако оно начиналось со среднего столбца (18).

$$\begin{array}{ccccc}
 a & b & c & d & e \\
 e & c & d & a & b \\
 d & e & b & c & a \\
 b & d & a & e & c \\
 c & a & e & b & d
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 a\epsilon & b\delta & c\gamma & d\beta & e\alpha \\
 e\beta & c\alpha & d\delta & a\gamma & b\epsilon \\
 d\alpha & e\gamma & b\beta & c\epsilon & a\delta \\
 b\gamma & d\epsilon & a\alpha & e\delta & c\beta \\
 c\delta & a\beta & e\epsilon & b\alpha & d\gamma
 \end{array}$$

(17) (18)

Так как с алгебраической точки зрения эта таблица не представляла интереса, то Эйлер, выполнив циклическую подстановку столбцов (15432), получил изоморфную ей (19).

$$\begin{array}{ccccc}
 b\delta & c\gamma & d\beta & e\alpha & a\epsilon \\
 c\alpha & d\beta & a\gamma & b\epsilon & e\beta \\
 e\gamma & b\beta & c\epsilon & a\delta & d\alpha \\
 d\epsilon & a\alpha & b\delta & c\beta & b\gamma \\
 a\beta & e\epsilon & b\alpha & d\gamma & c\delta
 \end{array}$$

(19)

Для нее он записал соотношение между буквами, расположенными на диагоналях:  
 $2c+2\delta=a+e+a+\gamma$  и  
 $2a+2\epsilon=d+e+\gamma+\delta$ ,  
откуда нашел  
 $2c=a+e; 2a=d+e;$   
 $2\delta=a+\gamma; 2\epsilon=\gamma+\delta.$

Затем ученый определил некоторые допустимые значения букв. Так, если  $a, b, c, d, e$  принимают соответственно значения 0, 5, 10, 15, 20; а  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \delta - 1, 2, 3, 4, 5$ , то построенный м.к. имел вид (20).

$$\begin{array}{ccccc}
 8 & 20 & 2 & 21 & 14 \\
 16 & 3 & 15 & 9 & 22 \\
 25 & 7 & 19 & 13 & 1 \\
 4 & 11 & 23 & 17 & 10 \\
 12 & 24 & 6 & 5 & 18
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 c & e \\
 c & d \\
 a & b & c & d & e \\
 & b & c & & \\
 & a & c & &
 \end{array}$$

(20) (21)

Эйлер предложил еще один способ составления вспомогательной таблицы: заполнение начиналось со средних строки и столбца латинскими буквами, расположенными в естественном и обратном порядках соответственно, а расположение  $c$  – вдоль левой диагонали (21).

$c d e a b$	$c\delta d\epsilon ea a\beta by$	14 20 21 2 8
$b c d e a$	$b\epsilon ca d\beta e\gamma ad$	10 11 17 23 4
$a b c d e$	$aa b\beta c\gamma d\delta e\epsilon$	1 7 13 19 25
$e a b c d$	$e\beta a\gamma b\delta c\epsilon da$	22 3 9 15 16
$d e a b c$	$d\gamma e\delta a\epsilon ba c\beta$	18 24 5 6 12
(22)	(23)	(24)

Остальные буквы записывались в естественном порядке, располагаясь снизу вверх по столбцам и слева направо – вдоль строк (22). Начиная со средней строки, к каждой латинской букве Эйлер приписал соответствующую ей греческую, а в каждой последующей строке выполнял циклические подстановки из пяти греческих букв, каждый раз смещая их на одну ячейку влево.

Результирующая таблица приняла вид (23). Из ее анализа вытекало, в частности, что  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \delta$  равны соответственно 1, 2, 3, 4, 5, а  $a, b, c, d, e - 0, 5, 10, 15, 20$ . Искомый м.к. имел вид (24).

Давая латинским и греческим буквам другие допустимые значения, Эйлер получал различные м.к., после чего заключил: "Едва ли можно исчерпать все случаи, даже если число их будет конечным" [7, с.620]. Поэтому очередной задачей исследования стало отыскание общего правила построения м.к.

Ввиду огромного числа различных м.к. **порядка 6** Эйлер построил лишь частный вид вспомогательной латинской таблицы, сходный по структуре с предыдущим случаем (25).

Греческие буквы он приписывал вдоль столбцов (26). Не приводя конкретных числовых примеров м.к., Эйлер отметил, что из представленной результирующей таблицы очевидна процедура составления большого числа таких таблиц.

$a a a f f f$	$aa a\phi a\beta f\epsilon f\gamma f\delta$
$f f f a a a$	$f\alpha f\phi f\beta a\epsilon a\gamma ad$
$b b b e e e$	$ba b\phi b\beta e\epsilon e\gamma ed$
$e e e b b b$	$e\phi ea e\epsilon b\beta b\delta b\gamma$
$c c c d d d$	$c\phi ca c\epsilon d\beta d\delta d\gamma$
$d d d c c c$	$d\phi da d\epsilon c\beta cd c\gamma$
(25)	(26)

Таким образом, в мемуаре "О магических квадратах" [8] Эйлер:

- выполнил переход от числовой арифметической прогрессии к латинским, греческим и результирующим таблицам;
- сформулировал правила, определяющие составление таких таблиц, тем самым неявно ввел понятие *латинского* квадрата;
- указал методы построения м.к. порядка  $n=3-5$ ; затронул вопрос нахождения числа м.к.

Анализ работ Эйлера о м.к. позволил сделать вывод о том, что основы теории латинских квадратов были заложены им в мемуаре 1776 г. [8], а не три года спустя, когда он уже непосредственно исследовал их [9].

Кроме того, выяснено, что теоретические результаты ученого, намного опередившие время, были подготовлены предшествующими его исследованиями в этом направлении многими математиками.

### Список литературы

1. *Cazalas E.* Carrès magiques au degré n (Series numerales de G. Tarry). Paris, 1934.
2. *Euler L.* De quadratis magicis // Leonardi Euleri Opera Omnia, 1923. Vol. I7. P.535–539.
3. *Coccoz V.* Carrès magiques à nombres triangulaires // Ass. Franc. pour l'avancement Sci.-15 Nancy. 1886. Vol. 11. P.130–134; (Pau) 1892; Vol.11. P.147.
4. *Coccoz V.* Carrès magiques a nombres non consécutifs // Ass. Franc. pour l'avancement Sci // 23 (Caen). 1894. Vol. 23. Part 2. P.163.
5. *Lafitte P.de* Le carrè magiques de 3. Paris, 1904.
6. *Gerardin A.* Dans Sphinx–Oedipe. Nancy, 1920. P.167; Questions 727 et 735; 1921, P.170–171.
7. *Frenicle de Bessy.* Des carres magiques. – Divers ouvrages de mathem. et de physiques par Messieurs de l'Acad. Royale des Sciences. Paris, 1693. P.423–507.
8. *Euler L.* De quadratis magicis // Leonardi Euleri Opera Omnia. 1923. Vol. I7. P.593–622.
9. *Euler L.* Recherches sur une nouvelle espece de carres magicues // Leonardi Euleri Opera Omnia, 1923. Vol. I7. P.291–392.

# **Magic squares in early scientific works of L. Euler**

**A. E. Malykh**

Perm State Pedagogical University, Russia, 614000, Perm, Sibirskaja st., 24  
malykh@pspu.ru; (342) 280-37-55

Euler's methods of constructions magic squares and presentation them by Latin ones is investigated. They served by him as a basis for creation combinatorial theory of Latin squares is considered.

**Key words:** *combinatorics; magic square; Greek-Latin table; methods of construction; composite theorems.*