

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет

На правах рукописи

Шанин Андрей Владимирович

НОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
В КАНОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

Специальность 01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2010 г.

Работа выполнена на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН
Миронов Валерий Леонидович (Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН)

доктор физико-математических наук, профессор
Нефедов Евгений Иванович (Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН)

доктор физико-математических наук, профессор
Лялинов Михаил Анатольевич (СПбГУ)

Ведущая организация:

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится

" ___ " _____ 201__ г. в ____ часов

на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при физическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, дом 1, строение 2, физический факультет, аудитория .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан

" ___ " _____ 201__ г.

Ученый секретарь диссертационного совета
д.ф.-м.н, профессор

Грац Ю.В.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Задачи теории дифракции имеют как фундаментальное, так и прикладное значение. С точки зрения фундаментальной науки это задачи математической физики, теоретической акустики и электродинамики. Прикладное значение теории дифракции заключается в ее использовании при синтезе антенн, расчете волновых полей в волноводах и резонаторах, изучении процесса рассеяния волн на различных препятствиях (например, для нужд акустодиагностики), решении обратных задач для дифракционной томографии и распознавания образов. Успешный анализ таких задач обычно возможен только в коротковолновом приближении. Однако существует узкий класс задач, называемых каноническими задачами теории дифракции, аналитическое решение которых известно при любых длинах волн. К каноническим относится, например, задача Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости и задача о дифракции на клине с импедансными граничными условиями (решенная Г.Д. Малюжиным). Точные решения этих и некоторых других задач используются для построения приближенных решений более сложных задач в рамках методов геометрической теории дифракции, физической теории дифракции или некоторых других. Каждая из этих теорий основывается на том, что канонические элементы расположены на большом расстоянии друг от друга, т. е. процесс дифракции на них происходит независимо. Кроме того, предполагается, что достаточно учесть лишь несколько последовательных актов дифракции.

Предмет настоящей работы — дифракционные задачи, лежащие на границе между каноническими и “обычными”. С одной стороны, для этих задач не удастся построить решения в замкнутой форме. С другой стороны, для этих задач удастся вывести аналитические соотношения, справедливые при любых соотношениях длины волны и размера рассеивателя. Данные соотношения (уравнения) существенно расширяют возможности получения численных решений.

Среди задач, рассматриваемых в работе, наиболее актуальны задачи, связанные с дифракцией на конусах. Вклады конических точек необходимо учитывать, если область наблюдения не освещена геометрически отраженными волнами или волнами, рассеянными ребрами рассеивателя. Сложность таких задач связана с тем, что задачи трехмерны, а рассеиватели полубесконечны. Это затрудняет применение метода граничных элементов. Наиболее современные методы вычисления дифракционного коэффициента для конических задач связаны с отделением радиальной переменной и построением интегрального представления поля с помощью преобразования Ватсона. Однако даже применение столь развитой техники оставляет ряд вопросов открытыми. Достаточно

отметить, что за последние десять лет комиссия по полям и волнам Международного союза по радиофизике (URSI) дважды объявляла конкурс на решение задач, связанных с дифракцией на конусах.

Цель работы

Цель работы заключается в построении новых методов решения дифракционных задач и в выводе новых аналитических соотношений для этих задач.

Методы исследования

В работе используются следующие подходы к дифракционным задачам.

1. Двумерные скалярные дифракционные задачи с кусочно-прямолинейными идеальными границами сводятся с помощью метода отражений к задачам распространения на разветвленных поверхностях.
2. Для каждой задачи на разветвленной поверхности строятся краевые функции Грина. Это поля источников, локализованных у точек ветвления. С помощью *формул расщепления* решение задачи о рассеянии плоской волны выражается через краевые функции Грина.
3. Доказывается, что вектор, составленный из всех краевых функций Грина задачи, удовлетворяет системе *координатных уравнений*, представляющей собой многомерное дифференциальное уравнение (или дифференциальное уравнение с многомерным временем). В качестве “многомерного времени” выступают пространственные координаты.
4. Доказывается, что вектор, составленный из диаграмм направленности краевых функций Грина, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Данное уравнение в работе называется *спектральным*. Независимой переменной является угол рассеяния.
5. Показано, что изменение геометрических параметров задачи соответствует изомонодромии спектрального уравнения. В результате удается применить развитую технику исследования таких изомонодромий и построить эволюционные уравнения для решений спектрального уравнения и для его коэффициентов.
6. Координатные и спектральные уравнения эквивалентны. С помощью интегральных преобразований типа Зоммерфельда показано, что по решению спектрального уравнения удастся построить решения соответствующего координатного и наоборот. Выводятся условия, накладываемые на асимптотики решений спектрального уравнения, гарантирующие, что у соответствующего координат-

ного уравнения имеется набор решений, удовлетворяющих всем физическим ограничениям.

В результате применения данных методов дифракционная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами, в которые входят неизвестные константы. Для нахождения констант используются априорные данные о связи асимптотик решения в различных особых точках, т.е. формулируется обратная задача связи для данного уравнения. В простейших случаях предложены и реализованы эффективные численные методы решения обратной задачи связи и отыскания искомых диаграмм направленности.

Практическая ценность работы

Результаты работы могут использоваться при расчетах дифракционных полей. Использование обыкновенных дифференциальных уравнений вместо традиционных для таких задач интегральных уравнений или уравнений в частных производных приводит к значительному снижению времени счета и потребности в машинной памяти.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

Annual International Conference "Days on Diffraction"(S.Petersburg) 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2009;

Workshop on mathematical aspects of diffraction by wedges, cones and other canonical geometries (Manchester, UK) 1999;

International conference on Modern Group Analysis MOGRAN 9 (Moscow) 2002;

Advanced research workshop "Surface waves in anisotropic and laminated bodies and defect detection"(Moscow) 2002;

The 8th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (Reading, UK) 2007.

The 9th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (Pau, France) 2009.

The 9th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics, (Dresden, Germany) 2010.

Кроме того, работа была представлена на семинаре “Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот” Московского научно – технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С.Попова, на семинаре “Дифракция и распространение волн” С.Петербургского отделения Математи-

ческого института РАН им. В.А.Стеклова, а также на семинаре “Граничные задачи электродинамики” на физическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова.

Публикации

Содержание диссертации опубликовано в восемнадцати работах. Примерное соответствие между главами диссертации и статьями следующее:

первая глава — [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7];

вторая глава — [8, 9, 10, 11];

третья глава — [12];

четвертая глава — [13, 14, 15];

пятая глава — [16, 17];

шестая глава — [18].

Журналы, в которых опубликованы работы [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 18], включены в список Scientific Citation Index Expanded. Журнал, в котором опубликована работа [11], включен Перечень ВАКа.

Журнал, в котором опубликованы работы [4, 10, 15, 21], удовлетворяет достаточному условию включения в Перечень ВАКа.

Кроме того, материал диссертации существенным образом опирается на технику вывода функциональных уравнений, развитых автором ранее для клиновыих задач: [19, 20, 21, 22, 23], три из которых включены в список ВАКа, а одна — в Scientific Citation Index Expanded.

Работы [1, 2, 3, 5, 6, 7, 13, 23] выполнены с соавторами.

Объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, приложения и списка литературы из 173 наименований; содержит 291 страницу машинописного текста, 77 рисунков и 3 таблицы.

Содержание работы

Примеры основных соотношений и уравнений, полученных в работе

В качестве примера возьмем задачу о дифракции плоской волны на решетке из двух параллельных полос, расположенных в одной плоскости. Именно этот пример рассматривается подробно в первых трех главах.

Будем рассматривать двумерную задачу дифракции, т. е. ограничимся сечением пространства плоскостью, перпендикулярной образующим полос. Сечением полос будут два отрезка, лежащих на оси x . Геометрия задачи показана ниже на Рис. 1. На плоскости выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0. \quad (1)$$

На полосах выполняются граничные условия Дирихле. Вместо Дирихле можно задать граничные условия Неймана, однако импедансные граничные условия задавать нельзя — построенная теория на этот случай не обобщается.

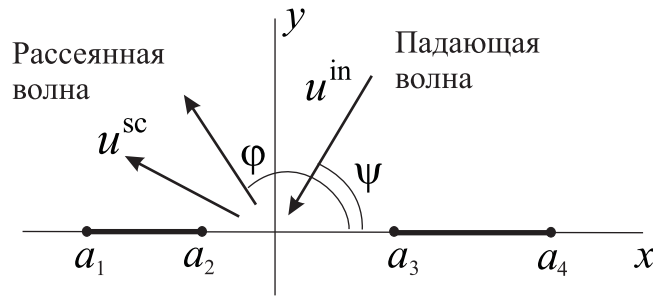


Рис. 1: Геометрия задачи о двух полосах

Основная функция, описывающая рассеяние в данной ситуации — это дифракционный коэффициент S , зависящий от угла рассеяния φ и угла падения ψ . Функция $S(\varphi; \psi)$ определяет асимптотику поля в дальней зоне в соответствии с формулой

$$u^{sc}(R, \varphi) = -\frac{e^{ik_0 R - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 R}} S(\varphi; \psi) (1 + O(R^{-1})).$$

Перечислим основные соотношения, полученные для данной задачи.

a) Формула расщепления

Введем четыре краевые функции Грина $v^1(x, y) \dots v^4(x, y)$. Каждая из этих функций представляет собой поле, порожденное точечным источником, расположенным вблизи одной из вершин рассеивателя. Напомним, что рассматривается двумерная задача; точечный источник в ней соответствует линейному источнику, расположенному вблизи края полосы в трехмерном пространстве. В двумерном сечении край полосы есть конец соответствующего отрезка. Будем называть его *вершиной*.

Расположить источник непосредственно в вершине нельзя, поэтому для корректного определения поля строится предельный переход. Для каждого из четырех полей v^m , $m = 1 \dots 4$ расположим источник на расстоянии ϵ от соответствующей вершины (см. Рис. 2). Силу источника выберем равной $(\pi/\epsilon)^{1/2}$.

Решая соответствующие дифракционные задачи и переходя к пределу $\epsilon \rightarrow 0$, получим поля $v^1(x, y) \dots v^4(x, y)$. Этим полям соответствуют диаграммы направленности $S^1(\varphi) \dots S^4(\varphi)$. Отметим, что найти краевые функции Грина не менее сложно, чем решить исходную дифракционную задачу.

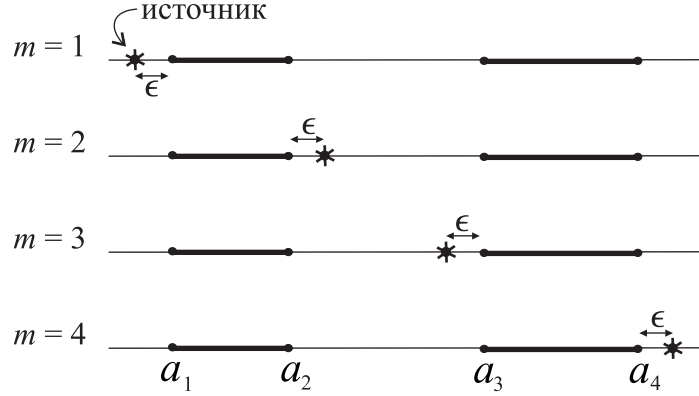


Рис. 2: Положение источников для определения краевых функций Грина

Формула расщепления связывает решение исходной задачи с краевыми функциями Грина:

$$S(\varphi; \psi) = -\frac{S^1(\varphi)S^1(\psi) - S^2(\varphi)S^2(\psi) + S^3(\varphi)S^3(\psi) - S^4(\varphi)S^4(\psi)}{\cos \varphi + \cos \psi}. \quad (2)$$

Таким образом, функция $S(\varphi, \psi)$, зависящая от двух переменных, оказывается выражена через несколько функций $S^m(\varphi)$, зависящих от одной переменной.

б) *Спектральное уравнение*

Перейдем от угловой переменной φ к волновому числу k . Вместо функций $S^m(\varphi)$ будем рассматривать функции

$$W^m(k) = -\frac{S^m(\varphi)}{k_0 \sin \varphi}, \quad k = -k_0 \cos \varphi.$$

Построим вектор

$$W = \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \\ W^4 \end{pmatrix}.$$

В работе показано, что этот вектор удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dk} W(k) = \mathbf{K}(k)W(k), \quad (3)$$

которое будет называться спектральным. Матрица коэффициентов \mathbf{K} имеет весьма простую структуру:

$$\mathbf{K}(k) = \begin{pmatrix} ia_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ia_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ia_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ia_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{k - k_0} \mathbf{K}^+ + \frac{1}{k + k_0} \mathbf{K}^-. \quad (4)$$

Здесь $a_1 \dots a_4$ — координаты вершин рассеивателя по оси x , \mathbf{K}^\pm — матрицы, не зависящие от k (т. е. константы). Эти константы необходимо подобрать таким образом, чтобы уравнение (3) имело решение, обладающее нужными свойствами.

в) *Эволюционные уравнения*

Исследуем вопрос о том, как изменяются решения при изменении параметров рассеивателя, а именно координат вершин $a_1 \dots a_m$. Оказывается, такие изменения можно описать с помощью эволюционных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_j} W = \mathbf{A}^j W, \quad (5)$$

коэффициенты которых имеют вид

$$A_{m,n}^j(k) = ik\delta_{j,m}\delta_{m,n} + \frac{(K_{m,n}^+ + K_{m,n}^-)(\delta_{j,n} - \delta_{j,m})}{a_n - a_m}. \quad (6)$$

Здесь $A_{m,n}^j$ — элементы матриц \mathbf{A}^j , а $K_{m,n}^\pm$ — элементы матриц \mathbf{K}^\pm . Предполагается, что второе слагаемое равно нулю при $m = n$.

С помощью условий совместности спектрального и эволюционных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} = \frac{\partial \mathbf{A}^j}{\partial k} + [\mathbf{A}^j, \mathbf{K}] \quad (7)$$

можно получить замкнутые уравнения, описывающие эволюцию неизвестных констант, входящих в матрицы \mathbf{K}^\pm .

Эволюционные уравнения могут быть полезны в следующих обстоятельствах. Как уже отмечалось, для того чтобы воспользоваться спектральными уравнениями, необходимо особым образом подобрать в них константы. Процедура их подбора достаточно сложна. Вместо этого можно подобрать константы один раз для какого-то набора геометрических параметров $a_1 \dots a_4$ (например, при достаточно больших длинах отрезков можно использовать коротковолновое приближение), а затем найти коэффициенты спектрального уравнения для нужного набора $a_1 \dots a_4$ путем численного решения эволюционных уравнений.

г) Координатные уравнения

Ранее все результаты касались диаграмм направленности S^m и связанных с ними функций W^m . Рассмотрим теперь сами краевые функции Грина $v^1 \dots v^4$. Напомним, что эти функции были построены для задачи Дирихле. Добавим к этому набору функции $w^1 \dots w^4$, которые являются краевыми функциями Грина для задачи Неймана. Их роль полностью аналогична роли функций v^m ; для них так же строится формула расщепления, спектральные и координатные уравнения.

Построим вектор-столбец

$$\mathbf{u} = (v^1, v^2, v^3, v^4, w^1, w^2, w^3, w^4)^T.$$

В работе показано, что этот вектор удовлетворяет уравнениям вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{X} \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{Y} \mathbf{u}, \quad (8)$$

где $\mathbf{X}(x, y)$ и $\mathbf{Y}(x, y)$ — матрицы коэффициентов, имеющие достаточно простой вид. Элементы этих матриц — рациональные функции координат x и y . Данные уравнения названы в работе координатными.

Формально координатные уравнения представляют собой систему уравнений в частных производных более громоздкую, чем исходное уравнение Гельмгольца. Однако изучения свойств этих уравнений приводит к выводу о том, что система вида (8) представляет собой наиболее естественное обобщение понятия обыкновенного дифференциального уравнения на случай двух независимых переменных. Решение характеризуется своим значением в одной произвольной точке пространства. Граничные условия также достаточно проверить лишь в одной точке границы.

д) Координатные и спектральные уравнения в “комплексной” форме

Стоит упомянуть об удобной форме координатных и спектральных уравнений, позволяющей записать коэффициенты в компактной форме. Важной особенностью такой записи является то, что она оказывается универсальной для широкого класса задач, т. е. форма уравнений не зависит от геометрии задачи. Зависимость выражается в порядке уравнения и численных значениях параметров, входящих в коэффициенты.

“Комплексная” форма записи наиболее естественно вводится для задачи определения краевых функций Грина на разветвленной поверхности. В работе рассматриваются две такие поверхности. Одна из них — это поверхность для задачи дифракции на паре коллинеарных отрезков. Такая поверхность имеет два листа и четыре точки ветвления. Ее схема показана на Рис. За. Берега разрезов, помеченные одинаковыми цифрами, склеиваются между собой. Вторая

поверхность относится к уголкового отражателю со щелью. Ее схема показана на Рис. 3б. Она имеет четыре листа и четыре точки ветвления. Обе поверхности имеют в конечной области только точки ветвления второго порядка. Выведенные уравнения относятся к случаю разветвленных поверхностей с произвольным (конечным) числом листов и произвольным (конечным) числом точек ветвления второго порядка. Считаем, что число точек ветвления равно N .

Определим “комплексные” координаты на поверхности с помощью формул

$$z_+ = x + iy, \quad z_- = x - iy, \quad (9)$$

введем комплексные координаты точек ветвления

$$p_m = x_m + iy_m, \quad (10)$$

а также локальные координаты

$$z_{m+} = z_+ - p_m, \quad z_{m-} = z_- - \bar{p}_m. \quad (11)$$

Определим краевые функции Грина поверхности как функции $u^{m\pm}$, удовлетворяющие на данной поверхности уравнению Гельмгольца и условию излучения, а в точках ветвления имеющие асимптотики вида

$$u^{m+}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{-1/2} + \frac{2C_{n+}^{m+}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{1/2} + \frac{2C_{n-}^{m+}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{1/2} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{рег.чл.} \quad (12)$$

$$u^{m-}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{-1/2} + \frac{2C_{n+}^{m-}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{1/2} + \frac{2C_{n-}^{m-}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{1/2} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{рег.чл.} \quad (13)$$

где C_β^α — неизвестные коэффициенты. В выражениях присутствуют регулярные члены, не имеющие ветвления и конечные в окрестности соответствующей вершины. Первый член в каждой из этих формул не удовлетворяет краевому условию Мейкснера и соответствует некоторой конфигурации источников вблизи точки ветвления. Очевидно, на каждую точку ветвления приходится по две краевых функции Грина.

Обозначим диаграммы направленности краевых функций Грина как $S^{m\pm}(\varphi)$. Введем векторы

$$\mathbf{u} = (u^{1+}, \dots, u^{N+}, u^{1-}, \dots, u^{N-})^T, \\ \mathbf{U}^+ = (S^{1+}, \dots, S^{N+})^T, \quad \mathbf{U}^- = (S^{1-}, \dots, S^{N-})^T$$

В новых переменных координатные уравнения записываются как

$$\frac{\partial}{\partial z_+} \mathbf{u} = \mathbf{Z}_+ \mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial z_-} \mathbf{u} = \mathbf{Z}_- \mathbf{u}, \quad (14)$$

где коэффициенты имеют блочную форму

$$\mathbf{Z}_+ = - \begin{pmatrix} (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}(\mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_+^+) & (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{C}_+^+(z_- \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}) \\ \mathbf{C}_+^- & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{Z}_- = - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C}_-^+ \\ (z_- \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}})^{-1} \mathbf{C}_+^-(z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P}) & (z_- \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}})^{-1}(\mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_-^-) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь \mathbf{C}_+^+ и \mathbf{C}_+^- — матрицы, составленные из неизвестных коэффициентов C_{n-}^{m+} и C_{n+}^{m-} , входящих в асимптотики (12), (13), $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$ и $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$ — матрицы, составленные из элементов $(\bar{p}_n - \bar{p}_m)C_{n-}^{m-}$ и $(p_n - p_m)C_{n+}^{m+}$. \mathbf{I} — единичная матрица $N \times N$. Наконец,

$$\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, \dots, p_N).$$

Черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

Спектральное уравнение записывается в форме

$$\frac{d}{d\varphi} U^+(\varphi) = - \left(\frac{i}{2} \mathbf{I} + i \widehat{\mathbf{C}}_+^+ + \frac{e^{-i\varphi} k_0}{2} \mathbf{P} + \frac{2e^{i\varphi}}{k_0} \mathbf{C}_-^+ \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_+^- \right) U^+(\varphi). \quad (17)$$

Векторы U^+ и U^- связаны соотношением

$$U^- = \frac{2i}{k_0} e^{i\varphi} \mathbf{C}_+^- U^+.$$

Матрицы \mathbf{C}_-^+ , \mathbf{C}_+^- , $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$, $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$ и \mathbf{P} являются константами, т. е. не зависят от координат x , y или угла φ . Эти матрицы зависят от геометрии задачи и от волнового числа k_0 .

Важно отметить, что все приведенные соотношения и уравнения являются точными в том смысле, что при их выводе не делались предположения о малости длины волны по сравнению с размерами рассеивателя.

Структура работы

Ниже дается детальное описание содержания каждой из глав диссертации.

Глава 1

Первая глава посвящена формулам расщепления. В то время как спектральные и координатные уравнения применимы только к двумерным зоммерфельдовым задачам дифракции, формулы расщепления выводятся для гораздо более широкого класса задач.

В начале первой главы формулируется задача о дифракции на двух полосах. Для этой задачи вводятся краевые функции Грина. Для этого используется

предельная процедура, кратко изложенная выше. После этого для задачи о двух полосах выводится формула расщепления.

Основной шаг построения формулы расщепления — применение к волновому полю оператора расщепления. Действие данного оператора на поле должно обладать следующими свойствами:

- оператор должен переводить решения уравнения Гельмгольца в решения уравнения Гельмгольца;
- оператор должен сохранять граничные условия на поверхностях рассеивателя;
- оператор должен обращать в нуль падающую плоскую волну;
- оператор должен переводить решение, удовлетворяющее условию излучения, в решение, удовлетворяющее условию излучения.

В случае, если рассеиватель имеет только компланарные поверхности, оператор расщепления можно выбрать в виде суммы константы и оператора дифференцирования вдоль координаты, направленной по касательной к рассеивателю. Константа выбирается таким образом, чтобы обратить в нуль падающую волну.

Обозначим исходное поле символом u , а оператор расщепления символом H . Рассмотрим функцию $H[u]$. Благодаря свойствам оператора расщепления, эта функция представляет собой решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию излучения и граничным условиям на рассеивателе. Краевое условие при этом нарушается, поскольку дифференциальный оператор повышает особенность вблизи ребра. Применяя теорему единственности, получаем соотношение

$$H[u](x, y) = \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} C_m v^m(x, y), \quad (18)$$

где C_m — коэффициенты, связанные с асимптотикой поля u вблизи краев рассеивателя. Выражение (18) названо в работе формулой расщепления в слабой форме. Для получения сильной формы необходимо избавиться от констант C_m . Для этого применяется теорема взаимности. Результатом является формула

$$C_m(\psi) = -iS^m(\psi), \quad (19)$$

т. е. коэффициент C_m оказывается выражен через значение диаграммы направленности краевой функции Грина. Отметим, что в (19) явно указана зависимость констант C_m от угла падения. Далее в формуле (18) производится переход к диаграммам направленности правой и левой части. Результат есть формула (2).

Похожая схема применяется в главе 1 к выводу формул расщепления в других задачах. Наиболее важным классом задач, описываемых в работе, является

класс “зоммерфельдовых” задач. Это двумерные скалярные дифракционные задачи, которые можно свести к задачам распространения на разветвленных поверхностях с конечным числом листов и точек ветвления. Необходимо, чтобы в исходной физической постановке все экраны были кусочно-прямолинейны, чтобы на этих экранах были заданы идеальные граничные условия (Дирихле или Неймана), и чтобы угол между любой парой экранов был рациональным, т. е. его отношение к π было рациональным числом. Зоммерфельдовы задачи представляют собой класс задач, к которым применимы методы, развитые в работе (координатные и спектральные уравнения). Рассматриваются два примера: дифракция на двух полосах (отрезках) и дифракция на двух перпендикулярных полупрямых, не имеющих общих точек. Последняя конфигурация в работе для краткости названа уголковым отражателем со щелью. Схемы разветвленных поверхностей для этих задач показаны на Рис. 3. Основные результаты работы (координатные уравнения (14) и спектральное уравнение (17)) остаются справедливыми для любой зоммерфельдовой задачи с особыми точками второго порядка.

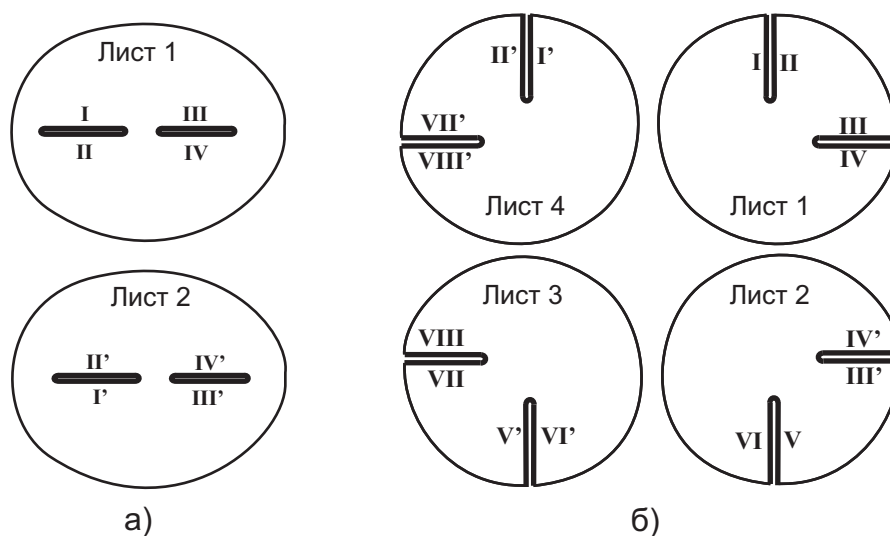


Рис. 3: Примеры разветвленных поверхностей для зоммерфельдовых задач

Для вывода формулы расщепления на зоммерфельдовой поверхности вводятся краевые функции Грина $u^{m\pm}$ (их краевые асимптотики выписаны выше). Далее используется описанная выше процедура, т. е. к полю применяется оператор расщепления; с помощью теоремы единственности выводится слабая формула расщепления; с помощью теоремы взаимности коэффициенты слабой формулы расщепления выражаются через диаграммы направленности краевых

функций Грина $S^{m\pm}$. Результатом является формула расщепления

$$S(\varphi_{i,o}, \psi_{i,o}) = -\frac{1}{4k_0(\cos \varphi + \cos \psi)} \sum_{m=1}^4 [S^{m+}(\psi_{i,o})S^{m+}(\varphi_{i,o}) + S^{m-}(\psi_{i,o})S^{m-}(\varphi_{i,o})], \quad (20)$$

где S — дифракционный коэффициент задачи о падении плоской волны, $S^{m\pm}$ — диаграмма направленности краевой функции Грина, ψ — угол падения, φ — угол рассеяния, индексы i, o маркируют лист зоммерфельдовой поверхности, по которому распространяется приходящая или уходящая волна.

Далее в первой главе выводятся формулы расщепления для трехмерных задач дифракции с плоскими рассеивателями, имеющими гладкую границу.

Для трехмерных задач также вводятся краевые функции Грина, при этом источники выбираются локализованными вблизи какой-либо точки ребра. Типичное обозначение краевой функции Грина имеет вид $G(x, y, z; l)$, где (x, y, z) — декартовы координаты точки наблюдения, а l — координата, отсчитываемая путь вдоль ребра рассеивателя до точки, вблизи которой сосредоточены источники. В некоторых случаях необходимо ввести несколько краевых функций Грина, соответствующих различным конфигурациям источников. Примером формулы расщепления для трехмерной задачи является формула, выведенная для тонкого плоского рассеивателя, лежащего в плоскости (x, y) , с граничными условиями Дирихле на гранях:

$$\begin{aligned} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) &= \\ &= \frac{i}{\pi k_0(\cos \theta_x + \cos \theta_x^{\text{in}})} \int_{\Gamma} S_G(\theta_x, \theta_y; l) S_G(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \sin \Theta(l) dl. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь S — дифракционный коэффициент исходной задачи, S_G — диаграмма направленности краевой функции Грина, $\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}$ — углы, описывающие направление прихода падающей волны, θ_x, θ_y — углы, описывающие направление рассеяния, Θ — угол между осью x и касательной к краю рассеивателя.

Пример (21) иллюстрирует достоинства формул расщепления. Незвестная функция $S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}})$ выражается с помощью другой неизвестной функции $S_G(\theta_x, \theta_y; l)$. Вычисление второй функции не проще, чем вычисление первой. Однако функция в левой части равенства зависит от четырех скалярных переменных, в то время как функция, стоящая в правой части зависит лишь от трех переменных. Таким образом, численное табулирование диаграммы направленности краевой функции Грина представляется менее трудоемким, чем табулирование диаграммы для исходной задачи.

Далее в первой главе указаны способы обобщения формулы расщепления. Основные направления — более сложные граничные условия и более сложная геометрия рассеивателя. Учет импедансных граничных условий сводится

к построению краевых функций Грина для соответствующих задач. Построение формул расщепления для более сложных геометрий рассеивателя требует применения операторов расщепления высоких порядков. В качестве примера задачи со сложной геометрией рассматривается двумерная задача с идеальными граничными условиями на кусочно-линейном рассеивателе. Предполагается, что все участки рассеивателя составляют “рациональные” углы с осью x , т. е. углы, равные $\pi q_i/n$. Показано, что всеми свойствами оператора расщепления обладает оператор

$$H_n = (-ik_0)^n \left[P_n \left(\frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) - P_n(\cos \psi) \right], \quad (22)$$

где $P_n(z)$ — полином Чебышева, а ψ — угол падения плоской волны. Соответственно, строится формула расщепления, содержащая n различных краевых функций Грина.

Глава 2

Во второй главе рассматривается задача о дифракции на двух компланарных полосах (отрезках). Решается вопрос о нахождении краевых функций Грина для задачи Дирихле.

Для каждой из краевых функций Грина v^m формулируется функциональная задача, сходная с задачей Винера-Хопфа. Для пяти участков, на которые ось x разбивается точками $a_1 \dots a_4$, вводятся пять неизвестных функций $U_0^m(k) \dots U_4^m(k)$, с точностью до множителя представляющих собой Фурье-образы значений поля v^m или его производной на соответствующих интервалах (k — волновое число). Свойства данных неизвестных функций даются стандартными теоремами. А именно, устанавливается аналитичность в верхней и нижней полуплоскости переменной k и делаются оценки роста в соответствующей полуплоскости. Кроме того, выводится функциональное уравнение, устанавливающее линейную зависимость между неизвестными функциями. Таким образом, задача дифракции оказывается сведена к функциональной задаче, т. е. к задаче отыскания набора неизвестных функций, обладающих заданными свойствами.

Рассматриваются производные функций $U_n^m(k)$ по переменной k . Нетрудно показать, что набор таких производных для каждой вспомогательной задачи также оказывается связан изомонодромией с исходной функциональной задачей. Этот факт приводит к построению спектрального уравнения (3). Способ вывода спектрального уравнения следующий. Задается форма уравнения, коэффициент уравнения выражается в виде отношения определителей, содержащих его решение, и с помощью теоремы Лиувилля устанавливается вид определителей. Отметим, что сама по себе форма (3) является достаточно общей.

Нетривиальность спектрального уравнения состоит в том, что его коэффициент оказывается весьма простой (рациональной) функцией переменной k .

Коэффициент спектрального уравнения не вычисляется явно. Вместо этого доказывается, что он имеет заданную форму. Поэтому коэффициент оказывается известным с точностью до нескольких скалярных параметров. Эти параметры могут быть найдены только численно. Значительные усилия прикладываются, чтобы корректно сформулировать задачу отыскания этих параметров.

Одним из методов, помогающих в поиске неизвестных параметров, являются эволюционные уравнения (6), (7). Первое из этих уравнений описывает изменение решения при изменении геометрических параметров задачи. Уравнение (6) получено с помощью того же приема, с помощью которого выводится спектральное уравнение, т. е. для заданного вида уравнения анализируется его коэффициент. Для анализа используется техника определителей. Уравнение (7) выражает совместность спектрального уравнения и (6). Таким образом, (7) играет роль уравнения Шлезингера для семейства спектральных уравнений.

Далее во второй главе формулируется задача об отыскании неизвестных констант спектрального уравнения. Прежде всего, анализируются локальные (алгебраические) ограничения, накладываемые на неизвестные константы. Показывается, что после учета всех локальных ограничений остается восемь свободных параметров. Затем формулируются ограничения связи для спектрального уравнения, т. е. ограничения, накладываемые на матрицы, связывающие базисы решений в различных особых точках. В результате получается система из восьми ограничений, выполнение которых гарантирует наличие у спектрального уравнения решения, удовлетворяющего условию вспомогательных задач для краевых функций Грина.

Наконец, во второй главе приводится пример вычислений на основе спектрального уравнения. Вычисления производятся для более простой задачи о рассеянии на одиночной полосе. Для отыскания неизвестных констант используется итерационная численная схема. Результаты расчетов сравниваются с результатами, полученными стандартными методами.

Глава 3

Третья глава посвящена выводу координатных уравнений и исследованию их свойств. Под координатными уравнениями понимается система вида (8).

Глава начинается с рассмотрения общих свойств системы (8). Выведены два соотношения для коэффициентов координатных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{X} \quad (23)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^2 + k_0^2 \mathbf{I} = 0. \quad (24)$$

Первое из этих условий гарантирует совместность координатных уравнений, а благодаря второму условию все компоненты любого решения координатных уравнений удовлетворяют уравнению Гельмгольца. Отметим, что справедливость соотношений (23) и (24) приходится доказывать. А именно, данные соотношения справедливы, если существует базис решений координатных уравнений, однозначных на данной разветвленной поверхности и удовлетворяющих векторному уравнению Гельмгольца. Такое доказательство проводится в работе.

В третьей главе координатные уравнения строятся для задачи о дифракции на двух полосах. С помощью метода отражений данная задача сводится к зоммерфельдовой задаче о распространении на двухлистной поверхности с четырьмя точками ветвления. Схема этой поверхности показана на Рис. За. Ищутся краевые функции Грина для данной поверхности. Каждая из краевых функций Грина может быть определена как результат предельного перехода для определенной конфигурации источников. Всего краевых функций Грина восемь.

Вводится понятие о *сверхсингулярных* функциях на такой поверхности. Сверхсингулярные функции удовлетворяют уравнению Гельмгольца и условию излучения Зоммерфельда, однако не удовлетворяют краевым условиям Мейкснера в точках ветвления. Сверхсингулярная функция должна расти вблизи вершины не быстрее $\rho^{-1/2}$.

Главным свойством сверхсингулярных функций является следующее. Каждая сверхсингулярная функция может быть единственным способом представлена как линейная комбинация краевых функций Грина. Коэффициенты линейной комбинации находятся из старших членов асимптотических разложений в точках ветвления. Доказательство проводится с помощью теоремы единственности для решения дифракционной задачи. Таким образом, краевые функции Грина представляют собой базис сверхсингулярных функций.

Основным результатом главы является вывод координатных уравнений для вектора

$$\mathbf{u}(x, y) = (u^{1+}, u^{2+}, u^{3+}, u^{4+}, u^{1-}, u^{2-}, u^{3-}, u^{4-})^T, \quad (25)$$

состоящего из всех восьми “комплексных” краевых функций Грина. Для этого ищется 16 комбинаций первых производных от компонент вектора \mathbf{u} , представляющих собой сверхсингулярные функции. Отметим, что комбинации подбираются особым образом, поскольку сами первые производные краевых функций Грина не являются сверхсингулярными функциями (они растут у точек ветв-

ления как $\rho^{-3/2}$). Искомые выражения имеют вид

$$\left(z_{m+} \frac{\partial}{\partial z_+} - z_{m-} \frac{\partial}{\partial z_-} \right) u^{m\pm}, \quad \frac{\partial}{\partial z_{\mp}} u^{m\pm}. \quad (26)$$

при $m = 1 \dots 4$. Каждое из этих выражений может быть представлено как линейная комбинация краевых функций Грина. В результате получаются 16 линейных уравнений, связывающих первые производные компонент вектора u с самим вектором u . Разрешая эти уравнения относительно каждой из производных, получаем систему координатных уравнений вида (14). Элементарные преобразования превращают эту систему в (8). Следует отметить, что \mathbf{X} и \mathbf{Y} — рациональные функции координат, причем в числителях и знаменателях стоят квадратичные полиномы переменных x и y . Знаменатели имеют вид $(x - a_m)^2 + y^2$, т. е. особыми точками координатных уравнений на действительной плоскости являются точки ветвления поверхности. После учета всех локальных (алгебраических) ограничений оказывается, что в коэффициенты координатных уравнений входят восемь скалярных параметров.

Прием, основанный на использовании свойств сверхсингулярных решений, можно применить к производным по геометрическим параметрам задачи. Так строятся эволюционные уравнения для волновых полей.

Показано, что спектральное уравнение является следствием координатных уравнений. Переход от координатных уравнений к спектральным осуществляется с помощью рассмотрения асимптотики волновых полей на большом удалении от точек ветвления. Поле в дальней зоне может быть представлено в виде ряда, старший член которого содержит диаграмму направленности. Ограничение координатных уравнений на старший член данной асимптотики дает спектральное уравнение.

Глава 4

В четвертой главе диссертации рассматривается двумерная задача дифракции на двух ортогональных полупрямых с идеальными граничными условиями (см. Рис. 4). В первой главе для этой задачи была выведена формула расщепления, теперь выводятся координатные уравнения и спектральное уравнение. Кроме того, значительные усилия тратятся на корректную формулировку задачи об определении неизвестных констант (т. е. на выявление всех алгебраических соотношений, связывающих константы, входящие в коэффициенты координатных уравнений).

Следуя процедуре вывода координатных уравнений, описанной в третьей главе, получаем систему (14). Рассматривая асимптотические разложения решений в дальней зоне, получаем спектральное уравнение (17). Очевидно, форма уравнений не отличается от формы, полученной для задачи о дифракции

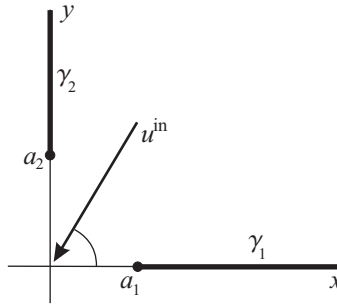


Рис. 4: Геометрия задачи об уголкового отражателе

на двух полосах. Это связано с тем, что обе разветвленные поверхности имеют по четыре точки ветвления в конечной области, и каждая точка ветвления имеет второй порядок. Различие этих двух задач проявляется, во-первых, в положении особых точек, а во-вторых, в значениях констант $C_{n\mp}^{m\pm}$ и $\hat{C}_{n\pm}^{m\pm}$. Задачи имеют различную структуру глобальных ограничений, накладываемых на эти константы.

В четвертой главе подробно исследуются совместные свойства решений координатных и спектрального уравнения. Перечислим основные из этих свойств.

1. Существует интегральное преобразование, сходное с интегралом Зоммерфельда, переводящее решения спектрального уравнения в решения координатных уравнений.

2. Если известно решение координатных уравнений u , однозначное на описанной выше разветвленной поверхности, то с помощью контурных интегралов можно построить четыре линейно-независимых решения тех же уравнений. Диаграммы направленности этих решений представляют собой базис решений спектрального уравнения.

3. Если известно решение координатных уравнений u , однозначное на описанной выше разветвленной поверхности, то с помощью контурных интегралов можно построить базис из восьми линейно-независимых решений этих уравнений.

Дальнейшее изложение посвящено формулировке задачи об определении неизвестных констант. Показано, что после учета всех алгебраических ограничений остается 12 свободных параметров. Соответственно, необходимо сформулировать 12 ограничений, гарантирующих существование решения, имеющего “физическое” поведение на разветвленной поверхности.

В качестве основного инструмента для описания решений спектрального уравнения выбираются стоксовы коэффициенты, т. е. коэффициенты при доминирующих экспоненциальных членах в различных областях. В соответствии со структурой уравнения, имеется два набора таких коэффициентов. Они названы в работе σ - и β -последовательностями. Строится связь между этими

последовательностями и ветвлением соответствующего решения координатных уравнений. Наконец, формулируются 12 ограничений, гарантирующих, что существует решение, однозначное на описанной ранее разветвленной поверхности и удовлетворяющее условию излучения. Из локальных свойств координатных уравнений следует, что локальные ограничения в точках ветвления также выполняются.

Задача об определении неизвестных констант может быть решена только численно.

Глава 5

Пятая глава посвящена трехмерной задаче о дифракции скалярной волны на плоском конусе (четвертьплоскости) с граничными условиями Дирихле. Геометрия задачи показана на Рис. 5. На рисунке изображен рассеиватель, совпадающий с первым квадрантом плоскости (x, y) , точки ω_0 и ω на единичной сфере, соответствующие направлению падения и рассеяния, а также направляющие косинусы для ξ и η для направления рассеяния. Направляющие косинусы ξ_0 и η_0 для направления падения вводятся сходным образом.

Схема подхода к этой задаче следующая. Для задачи о плоском конусе выводится формула расщепления в соответствии с процедурой, описанной в первой главе. Далее производится отделение радиальной переменной в сферических координатах. В результате дифракционный коэффициент выражается в виде контурного интеграла, в подынтегральную функцию которого входит краевая функция Грина задачи на сфере. Интегрирование производится по константе разделения.

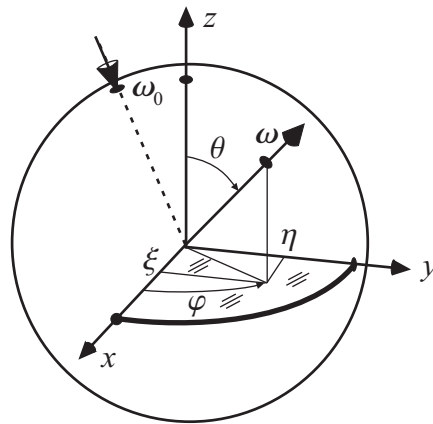


Рис. 5: Геометрия задачи

Выражение дифракционного коэффициента через краевую функцию Грина названо в работе *модифицированной формулой Смышляева* из-за сходства

с обычной формулой Смышляева, выражающей дифракционный коэффициент через обычную функцию Грина для задачи на сфере. Модифицированные формулы Смышляева имеют вид

$$S(\omega, \omega_0) = \frac{1}{4\pi i(\eta + \eta_0)} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} [v^1(\omega_0, \nu)v^1(\omega, \nu+1) + v^1(\omega, \nu)v^1(\omega_0, \nu+1)] d\nu, \quad (27)$$

$$S(\omega, \omega_0) = \frac{1}{4\pi i(\xi + \xi_0)} \int_{\gamma} e^{-i\pi\nu} [v^2(\omega_0, \nu)v^2(\omega, \nu+1) + v^2(\omega, \nu)v^2(\omega_0, \nu+1)] d\nu, \quad (28)$$

$$S(\omega, \omega_0) = \frac{i}{8\pi(\xi + \xi_0)(\eta + \eta_0)} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\pi\nu}}{\nu} C_2^1(\nu) [B(\omega, \omega_0, \nu) + B(\omega_0, \omega, \nu)] d\nu, \quad (29)$$

$$B(\omega, \omega_0, \nu) = (v^1(\omega, \nu+1) - v^1(\omega, \nu-1))(v^2(\omega_0, \nu+1) - v^2(\omega_0, \nu-1)).$$

Здесь $S(\omega, \omega_0)$ — дифракционный коэффициент (ω_0 — направление падения, ω — направление рассеяния), $v^{1,2}(\omega, \nu)$ — краевые функции Грина для задачи с рассеивателем Дирихле. Явный вид уравнения, которому удовлетворяют эти функции везде, кроме концов рассеивателя, есть

$$\left(\tilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4} \right) v^{1,2}(\omega, \nu) = 0, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (30)$$

(здесь θ и φ — угол места и азимут на сфере).

Краевые функции Грина характеризуются следующими асимптотиками вблизи концов рассеивателя:

$$v^m(\zeta_n, \phi_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{-1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + \frac{2C_n^m}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + O(\zeta_n^{3/2}), \quad (31)$$

локальные координаты показаны на Рис. 6. Контур интегрирования для (27), (28), (29) указаны в работе.

Значение модифицированных формул Смышляева состоит в следующем. Во-первых, с помощью этих формул задача отыскания дифракционного коэффициента сводится к вычислению краевых функций Грина для задачи на сфере. Во-вторых, модифицированные формулы Смышляева оказываются предпочтительнее обычной формулы Смышляева с точки зрения вычисления интеграла. А именно, область направлений ω , для которых подынтегральная функция оказывается экспоненциально убывающей на бесконечности, оказывается шире для модифицированных формул.

Далее ищутся краевые функции Грина для уравнения Лапласа-Бельтрами на сфере с экраном в виде большой дуги длиной $\pi/2$. Для краевых функций Грина строятся координатные уравнения на сфере.

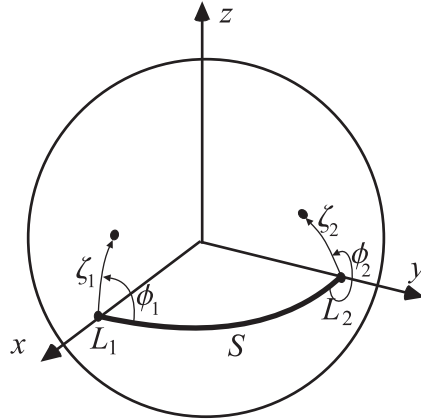


Рис. 6: Локальные сферические координаты

Процедура построения координатных уравнений сходна с процедурой, описанной в третьей главе. Строится вектор неизвестных u , включающий четыре краевых функции Грина: две краевые функции Грина для задачи с граничными условиями Дирихле (это функции $v^{1,2}$), и две — с граничными условиями Неймана ($w^{1,2}$). Координатные уравнения ищутся в форме

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u = \mathbf{X}u, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} u = \mathbf{Y}u. \quad (32)$$

Для вывода координатных уравнений используются дифференциальные операторы $T_{1,2,3}$, где T_1 и T_2 — операторы дифференцирования по локальным координатам ϕ_1 и ϕ_2 , а T_3 — оператор дифференцирования по азимутальной координате φ .

Вводится понятие о сверхсингулярном решении как о решении, имеющем вблизи вершины степень роста на единицу большую, чем это разрешено мейкнеровскими условиями. Имеется восемь сверхсингулярных комбинаций из производных неизвестных функций, а именно

$$T_1[v^1], \quad T_1[w^1], \quad T_2[v^2], \quad T_2[w^2], \\ T_3[v^1] + T_2[w^1], \quad T_2[v^1] - T_3[w^1], \quad T_3[v^2] - T_1[w^2], \quad T_2[v^2] + T_3[w^2].$$

Каждая из этих функций может быть представлена в виде линейной комбинации краевых функций Грина. Разрешая полученные выражения относительно производных краевых функций Грина по координатам, получаем координатные уравнения в форме (32). Коэффициенты достаточно громоздки, поэтому здесь они не выписываются. Эти коэффициенты содержат тригонометрические функции координат φ и θ , а также две неизвестные константы.

Рассматривается пример решения задачи об определении неизвестных констант для координатных уравнений при фиксированном ν . Используется градиентный алгоритм для нахождения нулей невязок глобальных ограничений. Численный эксперимент показывает быструю сходимость алгоритма.

Строятся эволюционные уравнения для краевых функций Грина и неизвестных параметров. К сожалению, в данном случае нельзя построить эволюционное уравнение по константе разделения ν . Вместо этого строятся эволюционные уравнения по углу раскрытия плоского конуса.

Глава 6

В шестой главе построенные ранее методы (формула расщепления и спектральное уравнение) применяются к задаче об отражении волноводной моды от открытого конца плоского волновода (см. Рис. 7). Данная задача является классической задачей теории дифракции. Она была решена в середине прошлого века Л.А. Вайнштейном в рамках метода Винера-Хопфа. Неожиданным и важным для практики результатом явился коэффициент отражения высокочастотной моды, чья частота близка к частоте отсечки. Оказалось, что коэффициент отражения близок к -1 , то есть открытый конец волновода является отражателем типа Дирихле (такое поведение предсказуемо для *низкочастотной поршневой* моды, однако здесь обсуждается прямо противоположный случай). Была вычислена поправка, описывающая потери на излучение в открытое пространство. Данный результат широко используется при расчете плоскопараллельных резонаторов.

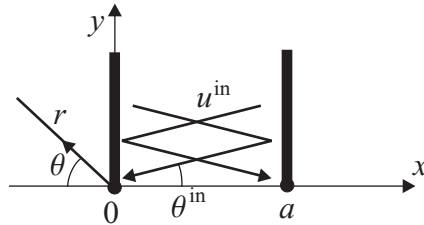


Рис. 7: Геометрия задачи об отражении моды от открытого конца плоского волновода

Шестая глава посвящена рассмотрению данной задачи с помощью методов, развитых в диссертации (а именно, формулы расщепления и спектрального уравнения). Целью является проверка работоспособности метода, а также развитие новой техники решения подобных задач, не родственной методу Винера-Хопфа.

Дифракционная задача с идеальными прямолинейными границами с помощью метода отражений сводится к задаче распространения на разветвленной

поверхности. Данная поверхность имеет бесконечное число точек ветвления и бесконечное число листов. При этом все точки ветвления имеют второй порядок. Их геометрические координаты $x = an$, $y = 0$.

Задача рассматривается в коротковолновом приближении. Фиксируется номер волноводной моды и считается, что временная частота близка к частоте отсечки данной моды. Это соответствует тому, что парциальные волны распространяются почти по нормали к оси волновода. Пользуясь этим обстоятельством, можно перейти от уравнения Гельмгольца к параболическому уравнению теории дифракции

$$(\partial_y^2 + 2k_0 i \partial_x) \tilde{u} = 0, \quad (33)$$

где \tilde{u} связано с волновым полем u соотношением $u = \exp\{ik_0 x\} \tilde{u}$. Необходимо обратить внимание на тот факт, что ось x направлена перпендикулярно к стенкам волновода. Параболическое уравнение описывает приосевой волновой процесс, т. е. направление распространения волн мало отклоняется от оси x .

Дальнейшее рассмотрение происходит в рамках схемы, развитой в диссертации. Вводится краевая функция Грина v , т. е. поле, порожденное источником, помещенным вблизи точки ветвления. Отметим, что для параболического уравнения отпадает необходимость в использовании сложной предельной процедуры.

Вводится также диаграмма направленности краевой функции Грина $S(\theta)$. Соответствующая асимптотика имеет вид

$$v(x, \theta x) = g(x, \theta x) S(\theta) + o(x^{-1/2}), \quad (34)$$

где

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi x}} \exp\left\{\frac{ik_0 y^2}{2x} - \frac{i\pi}{4}\right\} \quad (35)$$

— функция Грина неограниченной плоскости. В этой асимптотике параметр θ представляет собой отношение x/y , т. е. тангенс соответствующего угла.

Для вывода формулы расщепления используется оператор

$$H = \partial_y + ik_0 \theta^{\text{in}} \quad (36)$$

Он обращает в ноль падающую волну, однако приводит к появлению источников в точках ветвления. С помощью теоремы единственности выводится слабая формула расщепления, а с помощью теоремы взаимности вычисляются неизвестные краевые коэффициенты и строится сильная формула расщепления. Она имеет вид

$$R_n = \frac{S(\theta_n) S(\theta^{\text{in}})}{ik_0 a (\theta_n + \theta^{\text{in}}) \theta_n}, \quad (37)$$

где параметр θ^{in} характеризует угол падения (он связан с индексом падающей моды), параметр θ_n характеризует угол отражения (он связан с индексом отраженной моды), а R_n — коэффициент отражения.

Далее для вычисления диаграммы направленности $S(\theta)$ строится спектральное уравнение. Для этого к краевой функции Грина v применяется оператор

$$K = x \partial_y - ik_0 y. \quad (38)$$

Данный оператор переводит решения параболического уравнения (33) в решения. Кроме того, он обнуляет функцию Грина (35). Исследуя поведение функции $K[v]$ вблизи точек ветвления, применяя теорему единственности и переходя к дальнему полю, получаем спектральное уравнение

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta} = \left(a \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \exp\{ik_0 n a \theta^2 / 2\} \right) S(\theta), \quad (39)$$

где C_n — значения краевой функции Грина в точках ветвления. Для отыскания этих значений используется достаточно тонкий прием, использующий топологию разветвленной поверхности. В результате получаются значения

$$C_m = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k_0}{2\pi a n}} e^{-i\pi/4}. \quad (40)$$

Таким образом, диаграмма направленности краевой функции Грина может быть найдена с помощью уравнения (39) и граничного условия $S(\infty) = 1$. Решение находится в явном виде, и коэффициент отражения, вычисленный с его помощью, совпадает с найденным Л.А.Вайнштейном.

Приложение

Приложение состоит из трех частей. Первая часть посвящена математической строгости. Большая часть утверждений работы сформулирована и доказана на физическом уровне строгости. В данном разделе показано, каким образом может быть достигнута математическая строгость в “тонких” местах работы.

Вторая часть приложения посвящена соотношению симметрии для спектрального уравнения для задачи о двух полосах. Показано, что матрицы \mathbf{K}^{\pm} , входящие в уравнение (3), (4), удовлетворяют соотношению

$$\Xi(\mathbf{K}^+)^T \Xi + \mathbf{K}^- = -\frac{1}{2} \mathbf{I}, \quad (41)$$

где

$$\Xi = \text{diag}(1, -1, 1, -1).$$

Данное соотношение используется для сокращения числа независимых ограничений при формулировке задачи об определении неизвестных параметров.

Наконец, в третьей части приложения для вывода формулы расщепления и спектрального уравнения применяется техника дифракционного ряда. Для задачи о дифракции на двух полосах строится дифракционный ряд, т. е. представление решения в виде суммы полей, полученных в результате последовательных актов дифракции на краях полос. Каждый член ряда выражается в Фурье-представлении с помощью нескольких вложенных интегралов. Строится техника точного преобразования членов дифракционного ряда. С помощью этой техники строится формула расщепления и спектральное уравнение. Тем самым достигаются два результата. Во-первых, происходит вывод основных соотношений работы с помощью независимой техники. Во-вторых, неизвестные коэффициенты спектрального уравнения оказываются выраженными в виде ряда, члены которого могут быть вычислены непосредственно.

Защищаемые положения

1. Доказано, что для двумерной задачи о дифракции на двух полосах справедлива формула расщепления (2), спектральное уравнение (3) с коэффициентом (4), эволюционные уравнения (5) и (7), а также координатные уравнения (14) с коэффициентами вида (15), (16).
2. Показано, что коэффициент спектрального уравнения для задачи о двух полосах зависит от восьми скалярных параметров. Сформулированы ограничения связи для спектрального уравнения, при выполнении которых существует решение спектрального уравнения, удовлетворяющее всем условиям, накладываемым на дифракционное поле. Этих ограничений также восемь.
3. Доказано, что для двумерной задачи о дифракции на уголкового отражателе со щелью справедлива формула расщепления (20), координатное уравнение (14) с коэффициентами вида (15), (16), а также спектральное уравнение (17).
4. Показано, что для задачи распространения на многолистной поверхности, топология которой продиктована задачей об уголкового отражателе со щелью, коэффициенты координатных и спектрального уравнения зависят от двенадцати скалярных параметров. Сформулированы ограничения связи для спектрального уравнения, гарантирующие существование решения, удовлетворяющего всем свойствам физического поля. Таких ограничений двенадцать.
5. Для трехмерной задачи о дифракции на четвертьплоскости (плоском конусе) выведены формулы (27), (28), (29), выражающие дифракционный коэффициент

через краевые функции Грина задачи на сфере с разрезом.

6. Для краевых функций Грина задачи на сфере с разрезом построены координатные уравнения (32) с коэффициентами, представляющими собой элементарные функции сферических координат. Предложен итерационный алгоритм отыскания неизвестных констант, входящих в эти уравнения.

Все полученные соотношения являются точными (т. е. не асимптотическими) и справедливы при любом соотношении длины волны и размеров рассеивателя.

Научная новизна

Новыми являются основные соотношения, полученные и исследованные в работе, а именно:

1. Координатные, спектральные и эволюционные уравнения для двумерной задачи о дифракции на двух полосах.
2. Координатные и спектральные уравнения для задачи о дифракции на уголкообразном отражателе со щелью.
3. Формулы (27), (28), (29) для задачи о дифракции на четвертьплоскости.
4. Координатные уравнения (32) для задачи на сфере с разрезом.

Список литературы

- [1] Shanin A.V., Craster R.V. Removable singular points for ordinary differential equations. // *Europ. Journ. Appl. Math.* — 2003. — V. 13. — P. 617–639.
- [2] Craster R.V., Shanin A.V., Doubravsky E.M. Embedding formulae in diffraction theory. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 2003. — V. 459. — P. 2475–2496.
- [3] Craster R.V., Shanin A.V. Embedding formula for diffraction by wedge and angular geometries. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 2005. — V. 461. — P. 2227–2242.
- [4] Шанин А.В. Формула расщепления для электромагнитной задачи дифракции. // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* — 2005. — Т. 324. — С. 247–261.

- [5] Skelton E.A., Craster R.V., Shanin A.V. Embedding formulae for diffraction by non-parallel slits. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2008. — V. 61. — P. 93–116.
- [6] Shanin A.V., Craster R.V. Pseudo-differential operators for embedding formulae. // *Journ. Comput. Appl. Math.* — 2010. — V.234. — P. 1637–1646.
- [7] Skelton E.A., Craster R.V., Shanin A.V., Valyaev V.Yu. Embedding formulae for scattering by three-dimensional structures. // *Wave Motion.* — 2010. — V.47. — P. 299–317.
- [8] Shanin A.V. Three theorems concerning diffraction by a strip or a slit. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2001. — V. 54. — P. 107–137.
- [9] Shanin A.V. Diffraction of a plane wave by two ideal strips. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2003. — V. 56. — P. 187–215.
- [10] Шанин А.В. К задаче о дифракции на щели. Некоторые свойства ряда Шварцшильда. // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* — 2001. — Т. 275. — С. 258–285.
- [11] Шанин А.В. О связи метода Винера-Хопфа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. // *Электромагнитные волны и электронные системы.* — 2002. — Т. 7. — С. 10–16.
- [12] Shanin A.V. A generalization of the separation of variables method for some 2D diffraction problems. // *Wave Motion.* — 2003. — V. 37. — P. 241–256.
- [13] Shanin A.V., Doubravsky E.M., Acoustical scattering at a gap between two orthogonal, semi-infinite barriers: coordinate and spectral equations. // *Journ. Eng. Math.* — 2007. — V. 59. — P. 437–449.
- [14] Шанин А.В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Асимптотики решений координатных и спектральных уравнений. // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* — 2007. — Т. 342. — С. 233–256.
- [15] Шанин А.В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Постановка задачи определения неизвестных констант. // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* — 2008. — Т. 354. — С. 220–244.
- [16] Shanin A.V. Modified Smyshlyaev's formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane. // *Wave Motion.* — 2005. — V. 41. — P. 79–93.

- [17] Shanin A.V. Coordinate equations for the Laplace-Beltrami problem on a sphere with a cut. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2005. — V. 58. — P. 1–20.
- [18] Shanin A.V. Weinstein’s Diffraction Problem: Embedding Formula and Spectral Equation in Parabolic Approximation. // *SIAM Journ. Appl. Math.* — 2009. — V. 70. — P. 1201–1218.
- [19] Шанин А.В. К задаче о возбуждении волн в клиновидной области. // *Акустический журнал.* — 1996. — Т. 42. — С. 696–701.
- [20] Шанин А.В. Возбуждение и рассеяние клиновой волны в упругом клине с углом раскрыва, близким к 180° . // *Акустический журнал.* — 1997. — Т. 43. — С. 402–408.
- [21] Шанин А.В. Возбуждение волнового поля в треугольной области с импедансными граничными условиями. // *Записки научных семинаров ПОМИ РАН.* — 1998. — Т. 250. — С. 300–318.
- [22] Шанин А.В. О возбуждении волн в клиновидной области. // *Акустический журнал.* — 1998. — Т. 44, — С. 683–688.
- [23] Shanin A.V., Krylov V.V. An approximate theory for waves in a thin elastic wedge immersed in liquid. // *Proceedings of the Royal Society of London, ser. A,* — 2000. — V. 456, — P. 2179–2196.