

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
физический факультет

УДК 517.958; 534.26

Шанин Андрей Владимирович

НОВЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В КАНОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

специальность 01.01.03 “математическая физика”

диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва 2010 г.

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Краевые функции Грина и формулы расщепления</b>	
§1. Краевые функции Грина и формулы расщепления в двумерных задачах на плоскости с рассеивателями . . . . .	17
§2. Краевые функции Грина и формулы расщепления в двумерных задачах на зоммерфельдовых поверхностях . . . . .	26
§3. Формулы расщепления в трехмерных задачах . . . . .	42
§4. Некоторые дальнейшие обобщения формулы расщепления . . . . .	51
§5. Основные результаты главы 1 . . . . .	61
<b>Глава 2. Обобщение метода Винера-Хопфа для дифракции на двух полосах. Спектральное уравнение</b>	
§6. Постановка функциональных задач для краевых функций Грина . . . . .	62
§7. Спектральное уравнение для краевых функций Грина . . . . .	67
§8. Эволюционные уравнения . . . . .	71
§9. Формулировка задачи об определении неизвестных констант. Начало . . . . .	74
§10. Формулировка задачи об определении неизвестных констант. Окончание . . . . .	81
§11. Численное решение спектрального уравнения для одиночной полосы . . . . .	87
§12. Основные результаты главы 2 . . . . .	99
<b>Глава 3. Координатные уравнения для дифракции на двух полосах</b>	
§13. Основные свойства координатных уравнений . . . . .	100
§14. Вывод координатных уравнений для комплексных краевых функций Грина . . . . .	106
§15. Тождества для параметров, входящих в коэффициенты координатных уравнений . . . . .	110
§16. Связь координатных и спектральных уравнений . . . . .	118
§17. Вычисления на основе координатных уравнений для одиночной полосы . . . . .	123
§18. Основные результаты главы 3 . . . . .	133

**Глава 4. Координатные и спектральные уравнения для дифракции на уголкового отражателе со щелью**

- §19. Координатные уравнения для уголкового отражателя со щелью . . . 134
- §20. Спектральное уравнение для уголкового отражателя со щелью. Аналитические свойства его решений . . . . . 138
- §21. Свойства координатных и спектральных уравнений для задачи об уголкового отражателе . . . . . 145
- §22. Постановка задачи об определении параметров для уголкового отражателя . . . . . 154
- §23. Основные результаты главы 4 . . . . . 167

**Глава 5. Дифракция на плоском конусе**

- §24. Постановка задачи. Формулы расщепления. Модифицированные формулы Смышляева . . . . . 168
- §25. Координатные уравнения для отыскания сферических краевых функций Грина . . . . . 186
- §26. Эволюционные уравнения для задачи на сфере . . . . . 195
- §27. Примеры вычислений для дифракции на плоском конусе . . . . . 199
- §28. Основные результаты главы 5 . . . . . 207

**Глава 6. Отражение от торца плоского волновода**

- §29. Постановка задачи для параболического уравнения на многолистной поверхности . . . . . 208
- §30. Формула расщепления для апертурной линии . . . . . 215
- §31. Спектральные уравнения для апертурной линии . . . . . 221
- §32. Основные результаты главы 6 . . . . . 228

Заключение . . . . . 229

**Приложение 1.**

- §34. О математической строгости . . . . . 233

**Приложение 2.**

- §35. Симметрия спектрального уравнения для задачи о двух полосах . 243

**Приложение 3. Дифракционный ряд для дифракции на двух полосах**

---

§36. Структура дифракционного ряда . . . . .	248
§37. О свойствах операторов $F_{\pm}$ . . . . .	255
§38. Вывод формулы расщепления, спектрального уравнения и эволюционного уравнения с помощью дифракционного ряда . . . . .	259
§39. Примеры вычислений на основе спектрального уравнения и дифракционных рядов . . . . .	269
Литература . . . . .	277

# Введение

## Рассматриваемые задачи и мотивация работы

Настоящая работа представляет новые аналитические результаты для задачи о дифракции на бесконечной полосе, а также обобщает эти результаты на случай некоторых более сложных задач. Так, рассматриваются задачи о дифракции на конечной системе параллельных полос, лежащих в одной плоскости, и дифракция на угольном отражателе со щелью. Обе задачи двумерны, поскольку координата, направленная вдоль образующей, может быть проигнорирована, и вместо полосы можно рассматривать ее сечение (отрезок) в перпендикулярной плоскости. Рассматривается также трехмерная задача о дифракции на плоском конусе (четвертьплоскости). Однако эта задача путем отделения радиальной переменной редуцируется к двумерной краевой задаче на сфере. Везде предполагается, что волны скалярные (т.е. решается уравнение Гельмгольца), а граничные условия идеальны. В такой постановке удастся получить ряд точных аналитических результатов.

Задача о рассеянии на полосе является классической для теории дифракции. Известно ее точное решение, полученное методом разделения переменных. Кроме того, получено значительное количество асимптотических результатов, основанных на интегральных уравнениях, к которым сводится задача. Несмотря на это, продолжают выходить работы, посвященные данной задаче. Причина состоит в следующем. Задача о полосе допускает аналогию с классической задачей Зоммерфельда [1], для которой было получено компактное решение, отвечающее на основные вопросы, стоящие перед теорией дифракции: как выглядит краевая волна, что происходит в зоне полутени и т.д. Решение использует тот факт, что дифракция на полуплоскости (в двумерном случае — на полупрямой) с помощью метода отражений может быть сведена к распространению на разветвленной двулистной поверхности. Зоммерфельд предложил интегральное представление поля, явным образом учитывающее структуру разветвленной поверхности. Позднее схожие результаты были получены для клина с идеальными граничными условиями, а также для импедансного клина [2]. Современный обзор задач, решаемых методом Зоммерфельда-Малюжинца, можно найти в монографии [3], а также в статьях [4, 5].

Еще Зоммерфельд заметил, что задача о дифракции на полосе также может быть сведена к распространению на двулистной поверхности. Однако отсутствие аналога интеграла Зоммерфельда для такой поверхности (а точнее, невозможность сформулировать простую функциональную задачу), привело к

тому, что для полосы аналога формулы Зоммерфельда не существует.

Следующая волна интереса к задаче о полосе связана с развитием метода Винера-Хопфа [6, 7]. С помощью этого метода решение задачи о полуплоскости получается элементарными средствами, а обобщение этого решения на случай полосы наталкивается на существенные трудности. В данном случае эти трудности связаны с появлением в уравнении неизвестной целой функции. К такой задаче может быть применен только приближенный метод Винера-Хопфа.

Таким образом, исследовательский интерес к данной задаче, по-видимому, основан на предположении о существовании простых решений, сходных с решениями задачи о полуплоскости, полученными методом Зоммерфельда или методом Винера-Хопфа. Настоящая работа отвечает на вопрос о существовании таких решений.

К сожалению, простой формулы для диаграммы направленности или для поля получить не удалось. Задача о полосе (как и родственные ей более сложные задачи) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами, известными с точностью до нескольких констант. Неизвестные константы должны определяться (численно) из ограничений на матрицы связи. Данный результат является основным результатом диссертации.

Сказанное выше относилось к математической мотивации работы. Существует также физическая мотивация. Система отрезков, рассматриваемая в работе, моделирует конечную дифракционную решетку с идеальными граничными условиями. При этом может рассматриваться как рассеяние акустической волны, так и электромагнитной волны определенной поляризации. Важно то, что методы, используемые в работе, не накладывают ограничений на частоту падающей волны, т.е. они пригодны для описания наиболее сложной ситуации, когда длина волны сравнима с характерными размерами препятствия.

Предложенные методы потенциально дают значительный выигрыш в скорости вычислений по сравнению со стандартными (например, с методом граничных интегральных уравнений). Однако новые методы значительно сложнее в реализации. Поэтому применение новых методов целесообразно в тех случаях, когда традиционные методы требуют слишком большого времени выполнения даже на современных вычислительных машинах. К таким задачам относятся задачи дифракции на конусах, например задача о дифракции на плоском конусе. Традиционный способ решения таких задач заключается в отделении радиальной координаты и решении семейства задач для оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере. Семейство индексируется константой разделения, которая пробегает по некоторому контуру в комплексной плоскости. Значение дифракционного коэффициента для одной пары направлений падения и излучения вычисляется в результате интегрирования по этому контуру. На

практике на контуре выбирается конечное (но достаточно большое) количество узловых точек, для каждой из точек решается задача на сфере (в общем случае — граничное интегральное уравнение), а затем применяется квадратурная формула. Применение новых методов не меняет схему в целом, однако дает значительную экономию машинного времени при решении задач на сфере.

Отметим, что задача о дифракции на плоском конусе имеет ряд практических применений. Прежде всего, это дифракция на краях кромок летательных аппаратов и подводных объектов. Хорошо известно, что именно угловые точки дают основной вклад при рассеянии “почти везде”, т.е. для всех направлений, за исключением бликов от поверхностей и кромок.

Рассматриваемые задачи представляют собой *канонические задачи теории дифракции* в том смысле, что их решения могут быть использованы как составные части при построении приближенных решений более сложных задач, например, в рамках методов, предложенных Дж.Келлером [8] (геометрическая теория дифракции), В.А.Боровиковым [9] или П.Я.Уфимцевым [10] (физическая теория дифракции).

## Обзор литературы

Точное решение задачи о дифракции на полосе с идеальными граничными условиями было получено с помощью разделения переменных в эллиптических координатах в работах [11, 12]. В работе [13] данное решение было проанализировано, и были выделены выражения, соответствующие краевым волнам. В недавней работе [14] точное решение численно сравнивается с приближением Кирхгофа.

Другой способ построить решение задачи о полосе (щели) заключается в том, чтобы воспользоваться решением задачи о полупрямой и построить бесконечную последовательность рассеяний на краях полосы (ряд Шварцшильда) [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Если полоса достаточно широкая по сравнению с длиной волны, можно ограничиться несколькими членами ряда Шварцшильда, получив тем самым приближенную формулу для дифракционного поля. Ряд Шварцшильда является сходящимся при любом соотношении ширины полосы и длины волны. Важно отметить, что многие дальнейшие работы посвящены анализу ряда Шварцшильда в той или иной его форме, а также поучению простых формул для дифракционного коэффициента в одном из первых приближений. Наиболее общий вид дифракционного ряда, пригодный для использования в самых разных задачах (в том числе, включающих угловые препятствия), построен в [21]. В своих исследованиях автор опирается на работы по квантовой механике [22, 23].

Метод геометрической оптики был применен к задаче о щели в работе [24].

Приближенный метод Винера-Хопфа применен к задаче о полосе в моногра-

фии [6]. Функциональное уравнение Винера-Хопфа сводится к интегральному уравнению, для которого строятся приближенные методы решения. Сюда же следует отнести результаты, полученные в работах П.Я.Уфимцева [25, 26, 27, 28, 29] и собранные в монографии [30], а также работу [31].

В работе [32] фактически строится ряд Шварцшильда для токов на поверхности экрана со щелью. Ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет сумма ряда, выражается в элементарных функциях координат (члены ряда получаются итерированием этого ядра). Утверждается, что неизвестные функции представляют собой теньевые токи, т.е. токи, текущие на теньевых поверхностях экранов и быстро спадающие при удалении от ребра. Такой подход позволяет приближенно просуммировать ряд и получить выражение для токов. Дифракционный коэффициент затем находится в квадратурах. В работе [33] данный метод обобщается на другие задачи. Асимптотическое решение уравнения для тока на ленте с точностью до членов порядка  $(kl)^{-5/2}$  (здесь  $kl$  есть произведение ширины полосы на волновое число) получено в [34]. Дальнейшее исследование интегрального уравнения для токов, полученного в [32], проведено в работах [35, 36].

По видимому, ключевой работой, посвященной задаче о дифракции на полосе, является работа [37]. В данной работе на основе метода Винера-Хопфа строится интегральное уравнение, описывающее ряд Шварцшильда для задачи о щели (т.е. представляющее результат каждого следующего акта дифракции как результат интегрального преобразования, производимого с полем, найденным на предыдущем шаге). В работе утверждается, что существует псевдодифференциальный оператор, переводящий построенное интегральное уравнение в уравнение с разностным ядром. Кроме того, работа содержит важное наблюдение о том, что ряд Шварцшильда для дифракционного коэффициента сам по себе не является асимптотическим по параметру  $k_0a$ , поскольку его последовательные члены имеют равные по величине значения при скользких углах рассеяния. Это означает, что для корректного определения  $n$ -ого порядка разложения необходимо проанализировать члены ряда с номерами по  $n + 1$ . Кроме того, в работе утверждается, что для задачи о щели резонансные свойства проявляться не могут. Наконец, в работе построена простая приближенная формула для дифракционного коэффициента, удовлетворяющая принципу взаимности и проанализирована формула, полученная ранее в [25]. Методы, развитые в [37], использовались также в [38, 39].

Наиболее полное асимптотическое исследование задачи о полосе дано в работах [40, 9], где найдено рассеянное поле в дальней зоне с точностью до любой заданной степени  $(kl)^{-n}$ . Примененный в этой работе метод заключается в рассмотрении дифракции волны, имеющей профиль “ступеньки”. Для данного случая решение может быть получено в замкнутом виде для любого дифракци-

онного порядка. Однако переход к стационарной задаче требует суммирования бесконечного числа порядков. Сходный метод был применен в [41].

Математические вопросы (существование, единственность, классы правых частей, для которых существует решение) для задачи о полосе подробно рассмотрены в [42]. Кроме того, в данной работе построены асимптотики для плотности токов при малых  $k_0a$  и при больших  $k_0a$ . Ранее длинноволновое приближение для задачи о щели было исследовано в [43]. Математические аспекты электромагнитной задачи дифракции на щели подробно рассмотрены в [44]. В работе [45] к задаче применен метод интегральных уравнений.

Сравнение точного решения с приближением Кирхгофа и приближением геометрической теории дифракции для задачи о полосе проделано в [46]. Сравнение подхода П.Я.Уфимцева и Дж.Келлера к задаче о полосе проделано в [47].

Еще одним возможным способом решения задачи о полосе является построение разложения падающего поля в ряд по некоторой системе функций, для которых решение интегрального уравнения известно [48, 49]. Этот метод во многом является сходным с традиционным преобразованием Фурье.

Критический обзор попыток построить *точное* решение задачи о полосе с идеальными граничными условиями, обобщив метод Зоммерфельда, содержится в [50]. В качестве основных работ в этой области данный обзор называет [51] и [52, 53]. Обзор [50] заканчивается достаточно пессимистичным выводом о том, что пока ни один из методов не приводит к обобщению результата Зоммерфельда на случай задачи о полосе.

Из недавних работ, посвященных дифракции на идеальной полосе, можно отметить работу [54], где исследовался случай скользящего падения волны.

Все сказанное относилось к задаче с идеальными граничными условиями. Имеется также обширная литература, в которой похожие приближенные методы применяются к задаче о дифракции на полосе (щели в экране) с импедансными граничными условиями, например [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61].

В ряде работ исследовалось прохождение импульса или пучка через щель [62, 63, 64].

Наиболее близко к теме диссертации относятся статьи [65, 66], а также более поздняя работа [67]. В данных работах для задачи о полосе выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, причем в качестве независимой переменной используется координата, расположенная в плоскости полосы. Наиболее полной представляется работа [66], где получена формула расщепления (embedding formula), выражающая решение для произвольного угла падения через два “эталонных” решения, выведено обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции на полосе, а также построены эволюционные уравнения, описывающие зависимость коэффициентов дифференциального уравнения от ширины полосы.

Для дифракции на решетках (в рассматриваемом случае — на системах полос, состоящих более чем из одной полосы) получено меньшее количество аналитических результатов. Различными способами удалось решить задачу о дифракции на бесконечной дифракционной решетке, состоящей из идеальных компланарных полос, разделенных пространством, равным ширине полосы. Этот частный случай оказывается гораздо проще общего случая (проем и полоса имеют разную ширину). К данной задаче применялся матричный метод Винера-Хопфа [68, 7, 69, 70, 71], в частности, задача сводилась к скалярной факторизации или к матричной факторизации по Храпкову [72]. В работе [73] данная задача сводится к точно решаемой задаче Римана-Гильберта. Среди работ, в которых применялись полуаналитические методы, необходимо отметить [74, 75, 76]. Обзор работ по периодическим дифракционным решеткам содержится в монографии [77].

Следует также отметить работу [78], где для *конечной* дифракционной решетки был построен ряд по собственным функциям, напоминающим функции Матье. При этом автор основывался на результатах, полученных в [65]. Вычислительные перспективы этого метода не вполне ясны.

Бесконечная периодическая дифракционная решетка была рассмотрена в работе [79]. Рассматривалось коротковолновое приближение. Производилось преобразование интегрального уравнения таким образом, чтобы норма ядра стала строго меньше единицы (для этого в операторе выделяется часть, связанная с одним элементом решетки, и эта часть обращается). Полученное интегральное уравнение решается с помощью ряда Неймана.

Математические аспекты дифракции на конечных решетках рассмотрены в работах [80, 81]. Рассматривалась даже более общая задача, а именно, рассеиватели предполагались не обязательно прямолинейными. Доказано существование и единственность решения и построено интегральное уравнение в рамках теории потенциала.

Формулы расщепления (*embedding formulae* в англоязычной литературе), широко используемые в данной работе, были впервые получены в работе [66].

Затем была построена формула расщепления для круглой плоской трещины в упругом материале [82]. В работе [83] формулы расщепления были получены для полосы с импедансными границами. Позднее были получены формулы расщепления для конечных дифракционных решеток, состоящих из тонких [84] и толстых [85] полос, а также для некоторых других сходных задач [86, 87]. Процедура вычислений на основе формулы расщепления подробно описана в учебнике [88]. В работах [89, 90] метод расщепления применялся для решения уравнения Гойна с ложной особой точкой.

Формулы расщепления не дают решения дифракционной задачи, однако снижают количество параметров, изменяемых при табулировании дифракцион-

ного коэффициента. А именно, вместо того, чтобы проводить расчет при всех возможных значениях угла падения, можно вычислить дифракционный коэффициент при нескольких эталонных углах падения, а затем воспользоваться формулой расщепления.

Существование координатных уравнений, выведенных в работе, тесно связано с возможностью аналитического продолжения волновых полей в комплексную область (т.е. рассмотрение поля  $u(x, y)$  при действительных  $x$  и  $y$  как следа аналитической функции комплексных переменных). Общие методы аналитического продолжения волновых полей описаны в обзоре [91]. Данный обзор содержит также обширную библиографию.

Перейдем к рассмотрению задач дифракции на конусах. Они интересны с точки зрения геометрической теории дифракции и других приближенных методов. Решения этих задач дают *дифракционные коэффициенты* для элементов, содержащих острые выступы. Основные задачи, связанные с конусами, следующие: дифракция на плоском конусе (например на четвертьплоскости), на круговом и эллиптическом конусе, дифракция на конусе полигонального сечения (например на конусе, представляющем собой уголок куба). Граничные условия могут быть идеальными или импедансными. В настоящей работе решается только скалярная задача о дифракции на четвертьплоскости с идеальными граничными условиями.

Основным методом, применяемым для решения конических задач, является отделение радиальной переменной и исследование оператора Лапласа-Бельтрами в двух оставшихся угловых переменных. В случае эллиптического конуса с идеальными граничными условиями (частными случаями такого конуса являются плоский и круговой конусы) можно формально решить задачу до конца, разделив переменные в сферо-конических координатах. Решение представляется в виде ряда по функциям Ламе.

Решение скалярной (акустической) задачи об эллиптическом конусе, полученное с помощью разделения переменных, содержится в работе [92]. Решение векторной (электромагнитной) задачи может быть получено из решения скалярной задачи при помощи метода дебаевских потенциалов [9, 93].

Значительный выигрыш при численном анализе дает переход от ряда по специальным функциям к контурному интегралу в области комплексных значений константы разделения. Этот переход выполняется с помощью преобразования Ватсона [94]. Для задач о дифракции на конусе данная процедура описана в работах [95, 96, 97, 98].

Задача о дифракции на четвертьплоскости рассмотрена с помощью разделения переменных в работах [99, 100].

В недавних работах по конусам развиты методы построения численных решений для конусов произвольного сечения [101, 102, 103, 104, 105]. В данных

работах используется техника преобразования Ватсона и подробно изучаются интегральные уравнения, возникающие при решении граничной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами. В частности, обсуждаются особенности решений, возникающие вблизи угловых точек сечения, соответствующих ребрам конуса.

Задача о плоском конусе может рассматриваться как частный случай более общей задачи о дифракции на конусе со щелями, решаемой с помощью преобразования Конторовича-Лебедева и интегральных уравнений в [106, 107]. К задаче о плоском конусе наиболее близка по постановке рассмотренная в [108] задача о дифракции на семействе из компланарных плоских конусов (угловых полос), имеющих общую вершину. Отметим, что методы, развитые в настоящей работе, позволяют решить задачу о компланарных угловых полосах с идеальными граничными условиями.

Имеется также значительное число работ о дифракции на конусах с импедансными граничными условиями. Среди этих работ отметим [109, 110], где был получен главный член асимптотики дифракционного коэффициента для кругового конуса и конуса произвольного сечения.

Итак, задача о дифракции на плоском конусе с идеальными граничными условиями имеет точное решение, полученное методом разделения переменных. Это обстоятельство, однако, не уменьшает интерес к данной задаче. Дело в том, что точным решением крайне неудобно пользоваться с практической точки зрения. Его структура не отражает очевидных свойств поля (наличия отраженных и рассеянных ребрами волн), а сам ряд плохо сходится. Контурный интеграл, к которому удается привести ряд с помощью преобразования Ватсона, также не слишком удобен для вычислений. Поэтому неоднократно предпринимались попытки построить простое аналитическое решение для дифракции плоской волны на плоском конусе, аналогичное по структуре решению Зоммерфельда для полупрямой [1]. Основные надежды были связаны с методом Винера-Хопфа [6], однако до настоящего времени успех не был достигнут. Причина этого прежде всего в том, что теория аналитических функций двух комплексных переменных является качественно более сложной по сравнению с теорией одной переменной. Имеется ряд по-видимому неверных работ на эту тему, например [111]. Указание на то, что работа [111] неверна, содержится в [112] и [113].

Некоторый прогресс был достигнут с помощью операторных методов в работах [114, 115, 116, 112, 117], однако явного решения в компактной форме построено не было. Приближенные формулы для дифракции на четвертьплоскости построены в [100, 118, 119].

Задача об отражении волноводной моды от торца плоского волновода была решена Л.А. Вайнштейном [120, 121, 7, 122]. Была решена также задача о дифракции плоской волны, падающей из открытого пространства на торец волновода. Кроме того, аналогичные задачи были решены для волноводов круглого

сечения [123, 124, 125].

Анализ задачи о плоском волноводе в рамках лучевого приближении проделан в работе [126]. Позднее в рамках лучевого подхода были проанализированы некоторые более сложные задачи [127, 128, 129, 130].

Наибольший интерес представляет задача об отражении моды от открытого конца плоского волновода в случае коротковолнового приближения, когда частота близка к частоте отсечки для данной моды. Решение такой задачи может быть использовано для вычисления добротности мод в резонаторе, образованном плоскопараллельными зеркалами. При этом резонатор может быть оптическим, акустическим или микроволновым.

Место предлагаемой работы среди других работ по дифракции на полосах, системах полос и конусах следующее. Автор обобщает результаты [66] с помощью собственного метода, родственного методу Винера-Хопфа. В результате такого обобщения удастся решить задачи о дифракции на системах полос, задачу об уголковом отражателе, а также задачу для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере с разрезом. Непосредственное развитие идей [65, 66] о дифференциальных уравнениях в пространственной области приводит в настоящей работе к построению координатных уравнений, представляющих собой обобщение метода разделения переменных. Кроме того, автором предложен простой и физически наглядный метод вывода формул расщепления для широкого класса задач.

Содержание диссертации опубликовано в восемнадцати работах. Примерное соответствие между главами диссертации и статьями следующее:

первая глава — [131, 132, 133, 134, 135, 136, 137];

вторая глава — [138, 139, 140, 141];

третья глава — [142];

четвертая глава — [143, 144, 145];

пятая глава — [146, 147];

шестая глава — [148].

Журналы, в которых опубликованы работы [138, 139, 142, 131, 132, 133, 135, 136, 143, 146, 147, 137, 148], включены в список Scientific Citation Index Expanded. Журнал, в котором опубликована работа [141], включен в список ВАКа.

Кроме того, материал диссертации существенным образом опирается на технику вывода функциональных уравнений, развитых автором ранее для клиновидных задач: [149, 150, 151, 152, 153], три из которых включены в список ВАКа, а одна — в Scientific Citation Index Expanded.

Работы [131, 132, 133, 135, 136, 143, 153, 137] выполнены с соавторами.

## Структура работы

Работа состоит из введения, шести глав, приложения и заключения.

В главе 1 производится важнейшее упрощение рассматриваемых дифракционных задач, а именно выводится формула расщепления. Для каждой из дифракционных задач вводятся краевые функции Грина, а затем дифракционный коэффициент для данной задачи (т.е. основная величина, подлежащая определению) выражается через диаграммы направленности краевых функций Грина. Краевые функции Грина представляют собой волновые поля, источник которых находится вблизи края рассеивателя или точки ветвления многолистной поверхности, на которой поставлена задача распространения волн. Для определения краевых функций Грина используется предельный переход, напоминающий построение обычного дипольного источника. В главе 1 показано, что формулы расщепления могут быть выведены для двух- и трехмерных задач дифракции с кусочно-прямолинейными (плоскими) границами и с произвольными граничными условиями. В двумерных задачах дифракционные коэффициенты зависят от двух переменных (угла падения и угла рассеяния), а диаграммы направленности краевых функций Грина — только от угла рассеяния. Таким образом, формулы расщепления позволяют существенно упростить структуру неизвестных функций.

В главе 2 рассматривается двумерная задача о дифракции на двух тонких отрезках, расположенных на одной прямой, с граничными условиями Дирихле. Данная задача представляет собой дифракционную задачу со смешанными граничными условиями. Стандартными методами для нее выводится функциональное уравнение типа Винера-Хопфа, однако это уравнение содержит три неизвестных целых функции, и теория уравнений Винера-Хопфа в этом случае не приводит к результату. Основным результатом данной главы — вывод *спектральных уравнений*. Это обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют диаграммы направленности краевых функций Грина. Независимой переменной здесь выступает угол рассеяния или косинус этого угла. Коэффициенты уравнения представляют собой тригонометрические функции угла рассеяния (рациональные функции его косинуса).

В качестве побочного результата получены *эволюционные уравнения*. Эти уравнения представляют собой (нелинейные) обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие изменения волновых полей, их диаграмм направленности, а также некоторых параметров решений в зависимости от геометрических параметров рассеивателя.

В главе 3 для той же дифракционной задачи строятся *координатные уравнения*. Эти уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение волнового поля как функции пространственных координат. Формально эти уравнения записаны в частных производных, одна-

ко системы такого рода являются наиболее естественным обобщением понятия обыкновенного дифференциального уравнения на случай двух независимых переменных. Спектральные уравнения получаются из координатных путем рассмотрения асимптотики дальнего поля.

В главе 4 показано, что развитые методы (формулы расщепления, спектральные, эволюционные и координатные уравнения) работают не только для задач дифракции на плоских решетках, но и для зоммерфельдовых задач с более сложной геометрией рассеивателя. В качестве примера рассматривается задача о дифракции на двумерном уголкового отражателе, представляющем собой две полуплоскости, расположенные под прямым углом друг к другу со щелью между ними. В этой же главе сформулирована задача определения неизвестных параметров, входящих в коэффициенты спектральных и координатных уравнений.

В главе 5 рассматривается еще более сложная (трехмерная) задача о дифракции на плоском конусе, занимающем четвертьплоскость. В рамках традиционного подхода производится отделение радиальной переменной, после чего формулируется задача дифракции на единичной сфере. Эта задача оказывается зоммерфельдовой; для нее выводится формула расщепления, координатные и эволюционные уравнения.

В главе 6 построенные ранее методы (а именно, формула расщепления и спектральное уравнение) применяются к задаче об отражении волноводной моды от открытого конца плоского волновода. Данная задача рассматривается в коротковолновом приближении. При этом считается, что временная частота близка к частоте отсечки данной моды. С помощью метода отражений задача переформулируется для многолистной поверхности. В отличие от других задач, решаемых в работе, в данном случае поверхность имеет бесконечное число листов и точек ветвления. Затем для данной задачи выписывается параболическое уравнение теории дифракции. Переход к параболическому уравнению позволяет упростить структуру неизвестных функций. Наконец, для задачи на многолистной поверхности строятся формула расщепления и спектральное уравнение. Оказывается возможным получить решение спектрального уравнения в явном виде. Показано, что решение совпадает с классическим решением Л.А.Вайнштейна.

Приложение состоит из трех частей. В первой части обсуждаются некоторые вопросы, связанные с корректной математической постановкой обсуждаемых дифракционных задач, теоремами существования и единственности. Во второй части доказывается теорема, связанная с симметрией спектрального уравнения. Этот результат используется в главе 2 для формулировки задачи об отыскании неизвестных констант. В третьей части для задачи о двух полосах описаны процедуры построения и преобразований дифракционного ряда. Дифракцион-

ный ряд представляет собой самый старый и часто используемый инструмент для анализа дифракционных задач. В случае дифракции на системе полос для членов дифракционного ряда существует рекуррентная формула, применение которой сводится к решению неоднородной задачи Зоммерфельда с помощью метода Винера-Хопфа. Для такого ряда удается развить технику преобразований, приводящую к формулам расщепления, спектральным и эволюционным уравнениям. Таким образом, результаты, полученные в главе 2, проходят проверку с помощью совершенно другого метода. Кроме того, коэффициенты спектральных уравнений содержат несколько неизвестных дискретных параметров, для определения которых в рамках методов главы 2 необходимо решить весьма сложную спектральную задачу. Здесь же параметры оказываются выраженными в виде асимптотических рядов.

### Положения, выносимые на защиту

Задачи, к которым относятся основные положения работы, следующие. Это двумерная задача о дифракции на двух отрезках с идеальными граничными условиями (дифракция на двух полосах), двумерная задача о дифракции на двух перпендикулярных полупрямых с идеальными граничными условиями (дифракция на уголкового отражателе со щелью), трехмерная задача о дифракции на тонкой четвертьплоскости (плоском конусе) с идеальными граничными условиями, а также двумерная задача для уравнения Лапласа-Бельтрами на сфере с идеальным тонким рассеивателем (дугой длины  $\pi/2$ ). Все задачи скалярные и стационарные.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Для двумерной задачи о дифракции на двух полосах справедливы: формула расщепления (1.11), спектральное уравнение (7.2) с коэффициентом (7.3), эволюционные уравнения (8.1) и (8.4), а также координатные уравнения (14.5).
2. Коэффициент спектрального уравнения для задачи о двух полосах зависит от восьми скалярных параметров. Сформулированы ограничения связи для спектрального уравнения, при выполнении которых существует решение спектрального уравнения, удовлетворяющее всем условиям, накладываемым на дифракционное поле. Этих ограничений также восемь.
3. Для двумерной задачи о дифракции на уголкового отражателе со щелью справедлива формула расщепления (2.29), координатное уравнение (19.4) с коэффициентами (19.5)–(19.12), а также спектральное уравнение (20.8).
4. Для задачи распространения на многолистной поверхности, топология которой продиктована задачей об уголкового отражателе со щелью, коэффициенты координатных и спектрального уравнения зависят от двенадцати скаляр-

ных параметров. Сформулированы ограничения связи для спектрального уравнения, гарантирующие существование решения, удовлетворяющего всем свойствам физического поля. Таких ограничений двенадцать.

5. Для трехмерной задачи о дифракции на четвертьплоскости (плоском конусе) справедливы формулы (24.28), (24.29), (24.30), выражающие дифракционный коэффициент через краевые функции Грина задачи на сфере с разрезом.

6. Для краевых функций Грина задачи на сфере с разрезом справедливы координатные уравнения (25.1) с коэффициентами (25.18). Предложен итерационный алгоритм отыскания неизвестных констант, входящих в эти уравнения.

Все полученные соотношения являются точными и справедливы при любом соотношении длины волны и размеров рассеивателя.

### **Научная новизна**

Новыми являются все основные соотношения, полученные и исследованные в работе, а именно:

1. Координатные, спектральные и эволюционные уравнения для двумерной задачи о дифракции на двух полосах.
2. Координатные и спектральные уравнения для задачи о дифракции на угловом отражателе со щелью.
3. Формулы (24.28), (24.29), (24.30) для задачи о дифракции на четвертьплоскости.
4. Координатные уравнения (25.1) для задачи на сфере с разрезом.

## Глава 1

# Краевые функции Грина и формулы расщепления

## §1. Краевые функции Грина и формулы расщепления в двумерных задачах на плоскости с рассеивателями

### Постановка задачи о рассеянии на двух полосах

Рассматривается задача о дифракции плоской акустической волны на системе идеальных полос, расположенных в одной плоскости. Фактически такая система полос представляет собой конечную (т.е., состоящую из конечного числа элементов) дифракционную решетку.

Предположим, что поле не зависит от координаты  $z$ , направленной вдоль полос. Это позволит рассматривать двумерную задачу дифракции на системе отрезков в плоскости сечения  $(x, y)$ .

Рассматривается стационарная задача. Зависимость всех величин от времени имеет вид  $e^{-i\Omega t}$  и не указывается в формулах.

Пусть рассеиватели представляют собой отрезки оси  $x$ , определяемые соотношениями  $y = 0$ ,  $a_j < x < a_{j+1}$  для нечетных  $j$  (см. Рис. 1.1). Точки  $(a_i, 0)$  будем называть *вершинами* рассеивателя или просто вершинами. Очевидно, количество вершин вдвое больше количества отрезков (полос). Ниже все основные результаты демонстрируются на примере рассеивателя, состоящего из двух полос. Некоторые рассуждения проводятся для одной полосы, а также для дифракции на полуплоскости. Это будет всякий раз особо оговариваться.

В пространстве, окружающем полосы, поле  $u(x, y)$  удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0. \tag{1.1}$$

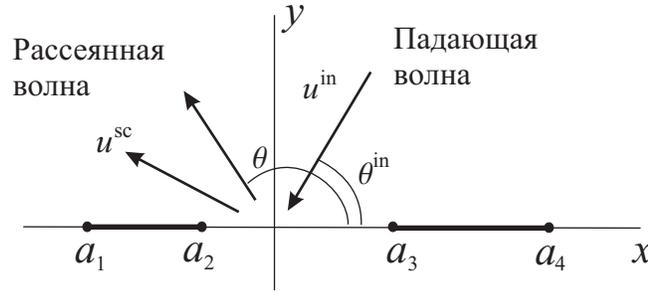


Рис. 1.1: Геометрия задачи о рассеянии на системе полос

Будем предполагать, что волновое число  $k_0$  имеет малую положительную мнимую часть, соответствующую диссипации в среде. Такое предположение упрощает формулировку условий излучения.

На поверхности полос заданы граничные условия Дирихле, т.е.

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0, \quad x \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4). \quad (1.2)$$

В качестве падающего поля выберем плоскую волну, приходящую из бесконечности под углом  $\theta^{\text{in}}$ :

$$u^{\text{in}} = \exp\{-ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} + y \sin \theta^{\text{in}})\}. \quad (1.3)$$

В дальнейшем изложении будем также пользоваться обозначением

$$k_* = k_0 \cos \theta^{\text{in}}. \quad (1.4)$$

Без ограничения общности будем полагать  $\theta^{\text{in}} \in [0, \pi/2]$ , что соответствует  $\text{Im}[k_*] \geq 0$ .

Постановка задачи должна быть дополнена условиями излучения и краевыми условиями. В качестве условий излучения примем то, что рассеянное поле  $u^{\text{sc}}$  не содержит вкладов, приходящих из бесконечности или растущих на бесконечности. Такая формулировка соответствует принципу предельного поглощения и удобна при применении к задаче метода Винера-Хопфа, поскольку позволяет определить контур интегрирования в Фурье-представлении поля. Краевые условия заключаются в том, что локальная асимптотика полного поля  $u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}$  вблизи вершин имеет характер асимптотики точного решения задачи о дифракции на полуплоскости, т.е.

$$u = C\rho^{1/2} \sin(\phi/2) + O(\rho^{3/2}), \quad (1.5)$$

где  $\rho, \phi$  — локальные цилиндрические координаты. Более точно,  $\rho$  — расстояние до точки  $(y = 0, x = a_j)$ ,  $\phi$  — угол, отсчитываемый от поверхности соответствующей полосы,  $C$  — неизвестная константа. Выражение (1.5) представляет собой первый член ряда Мейкснера для данной задачи.

Более строгая формулировка условий излучения и краевых условий, а также анализ асимптотик поля в вершинах и на бесконечности, содержится в §34.

Поставленная задача имеет геометрическую симметрию по отношению к преобразованию  $y \rightarrow -y$ . Рассеянное поле, очевидно, симметрично по отношению к данному преобразованию. Соответствующая антисимметричная задача тривиальна, ее решение содержит только плоские волны.

Для рассеянного поля можно сформулировать следующие граничные условия на поверхности полос:

$$u^{\text{sc}} = -\exp\{-ik_0x \cos \theta^{\text{in}}\} \quad \text{при} \quad y = \pm 0, \quad x \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4). \quad (1.6)$$

В то же время, в силу симметрии задачи, следующие граничные условия могут быть сформулированы на дополнительных участках прямой  $y = 0$ :

$$\partial_y u^{\text{sc}} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3) \cup (a_4, \infty). \quad (1.7)$$

Таким образом, для рассеянного поля сформулирована задача со смешанными граничными условиями.

Рассмотрим далее поле задачи о двух полосах (отрезках). Введем полярные координаты  $(r, \theta)$ , связанные с декартовыми координатами формулами

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Разложим полное поле  $u$  на падающее и рассеянное:

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}.$$

Рассеиватель в данной задаче компактен, поэтому в дальнем поле отсутствует геометрически отраженная волна, а также полутеневые поля. Нетрудно показать, что при больших  $r$  рассеянное поле представляется в виде

$$u^{\text{sc}}(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0r}} (S(\theta; \theta^{\text{in}}) + O(1/r)), \quad (1.8)$$

где  $S(\theta; \theta^{\text{in}})$  есть *дифракционный коэффициент* данной задачи. Дифракционный коэффициент представляет наибольший интерес для приложений, и основная цель данной работы — отыскание этой величины для различных задач.

## Краевые функции Грина для задачи о дифракции на двух отрезках на плоскости

Как известно, функция Грина данной задачи — это поле, создаваемое точечным источником единичной силы, помещенным в некоторую точку пространства с заданными рассеивателями. В рамках развиваемого ниже подхода особую

роль играют источники, помещенные вблизи краев отрезков, т.е. вблизи точек  $(a_m, 0)$ . Будем называть соответствующие поля *краевыми функциями Грина*.

Непосредственно поместить источник в вершину нельзя, поэтому для определения функций  $v^m$  используется предельный переход. Для достаточно малых  $\epsilon$  определим приближения к  $v^m$ , обозначаемые как  $\widehat{v}_\epsilon^m$ . А именно, будем считать, что источник располагается на оси  $x$  на малом расстоянии  $\epsilon$  от рассеивателя (см. Рис. 1.2), а амплитуда источника равна  $\sqrt{\pi/\epsilon}$ . Это означает, что каждая из функций  $\widehat{v}_\epsilon^m$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \widehat{v}_\epsilon^m + k_0^2 \widehat{v}_\epsilon^m = \sqrt{\pi/\epsilon} \delta(x - a_m - (-1)^m \epsilon) \delta(y).$$

Для каждого конечного  $\epsilon$  решим это уравнение, учитывая граничные условия, условие излучения (на бесконечности поле должно представлять собой расходящуюся цилиндрическую волну) и краевые условия. Затем вычислим предел решения при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Результат и будет функцией  $v^m$ . Под словом “решим” не имеется в виду, что существует метод непосредственного решения данной дифракционной задачи. Цель здесь — корректно определить функции  $v^m$ .

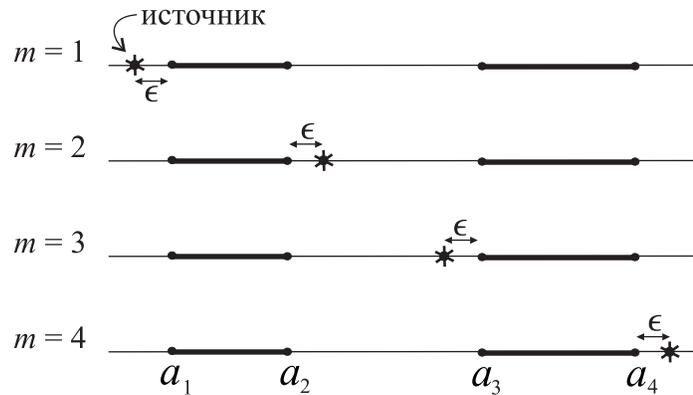


Рис. 1.2: К постановке вспомогательных дифракционных задач

Можно показать, что именно зависимость силы источника вида  $\epsilon^{-1/2}$  приводит к нетривиальному (конечному и ненулевому) пределу значений поля в каждой точке, кроме источника. Полученные поля  $v^m(x, y)$  играют большую роль в дальнейшем изложении. Будем называть их *краевыми функциями Грина*.

Исследуем краевые асимптотики решений  $v^m$ . Такое исследование может быть проведено следующим образом. Локально вблизи вершины уравнение Гельмгольца для  $\widehat{v}_\epsilon^m$  представляет собой возмущенное уравнение Пуассона. Последнее уравнение может быть решено стандартным методом (например, с помощью

конформных отображений). Внешняя асимптотика (в смысле теории возмущений) данного решения дает асимптотику функций  $v^m$ . Данные выкладки достаточно простые, поэтому приведем только конечный результат. Асимптотика функции  $v^m$  (т.е. источник расположен вблизи вершины с номером  $m$ ), взятая вблизи вершины с номером  $n$  имеет вид

$$v^m(\rho_n, \phi_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{-1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + \frac{2C_n^m}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + O(\rho_n^{3/2}). \quad (1.9)$$

Первый член является *сверхсингулярным*, т.е. он описывает вклад, не подчиняющийся условию Мейкснера. Наличие такого члена вполне естественно, поскольку условие Мейкснера означает отсутствие источников в вершине, а во вспомогательной задаче, напротив, источник туда поместили. Следующий член является первым мейкснеровским слагаемым. Поскольку он будет активно использоваться в дальнейших выкладках, он выписан явно с помощью неизвестных констант  $C_n^m$ .

Для каждой из краевых функций Грина введем ее диаграмму направленности по аналогии с дифракционным коэффициентом (1.8):

$$v^m(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} (S^m(\theta) + O(1/r)). \quad (1.10)$$

## Вывод формулы расщепления

Формула расщепления связывает дифракционный коэффициент исходной задачи с диаграммами направленности краевых функций Грина. Сформулируем утверждение формулы расщепления как теорему:

**ТЕОРЕМА 1.1** *Дифракционный коэффициент исходной дифракционной задачи связан с диаграммами направленности краевых функций Грина соотношением*

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = \frac{1}{k_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})} \sum_{m=1}^4 (-1)^m S^m(\theta^{\text{in}}) S^m(\theta). \quad (1.11)$$

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Применим к полному полю  $u$  оператор

$$H = \partial_x + ik_0 \cos \theta^{\text{in}}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим функцию  $H[u](x, y)$ . Эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца (поскольку оператор  $H$  коммутирует с лапласианом) и граничным условиям Дирихле на поверхностях экранов (поскольку дифференцирование происходит вдоль экранов). Данный оператор обращает падающую волну в нуль. В

результате  $H[u](x, y)$  удовлетворяет условию излучения на бесконечности. Формально это достаточно тонкое утверждение. Для его доказательства необходимо выписать асимптотический ряд поля  $u^{\text{sc}}$  в полярных координатах при больших  $r$  (первый член этого ряда дается формулой (1.8)) и показать, что этот ряд можно дифференцировать почленно. Это достаточно легко сделать, см. §34.

Очевидно, дифференцирование приводит к повышению порядка особенностей поля при вершинах. Исследуем этот вопрос. Для этого зададимся следующей асимптотикой поведения полного поля вблизи вершин:

$$u(\rho_m, \phi_m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ C_m \rho_m^{1/2} \sin \frac{\phi_m}{2} + O(\rho_m^{3/2}) \right], \quad m = 1 \dots 4, \quad (1.13)$$

где  $C_m$  — неизвестные константы,  $\rho_m$  и  $\phi_m$  — локальные полярные координаты (Рис. 1.3).

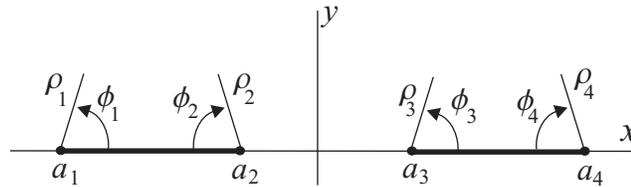


Рис. 1.3: Локальные полярные координаты

Асимптотика вида (1.13) может быть получена из локального разложения решения уравнения Гельмгольца в асимптотический ряд и применения условия Мейкснера. Такую же асимптотику имеет точное решение задачи Зоммерфельда.

После применения оператора  $H$  получаем

$$H[u](\rho_m, \phi_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (-1)^m C_m \rho_m^{-1/2} \sin \frac{\phi_m}{2} + O(\rho_m^{1/2}) \right], \quad m = 1 \dots 4. \quad (1.14)$$

Для получения последнего утверждения необходимо иметь возможность дифференцировать локальное асимптотическое разложение поля (см. §34).

Заметим, что функция  $H[u]$  нарушает мейкснеровские условия в вершинах. “Исправим” краевые асимптотики (1.14), добавив линейную комбинацию краевых функций Грина, т.е. рассматривая выражение

$$H[u] + \sum_{m=1}^4 (-1)^m C_m v^m. \quad (1.15)$$

В силу асимптотик (1.9), данная комбинация удовлетворяет условию Мейкснера в вершинах. Кроме того, она удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничным условиям и условию излучения.

Для рассматриваемой конфигурации рассеивателей выполняется теорема единственности (см. §34), поэтому комбинация (1.15) тождественно равна нулю. Отсюда

$$H[u](x, y) = \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} C_m v^m(x, y). \quad (1.16)$$

Последнее выражение представляет собой слабую формулу расщепления для полей. Ее недостаток заключается в том, что в нее входят неизвестные коэффициенты  $C_m$ . Данные коэффициенты зависят от угла падения, т.е.  $C_m = C_m(\theta^{\text{in}})$ . Выразим эти коэффициенты через краевые функции Грина, а именно, покажем, что

$$C_m(\theta^{\text{in}}) = -iS^m(\theta^{\text{in}}). \quad (1.17)$$

Для доказательства будем использовать принцип взаимности. Заменим падающую плоскую волну на падающую волну, создаваемую точечным источником единичной силы, имеющим цилиндрические координаты  $r, \theta^{\text{in}}$  (Рис. 1.4 а). При больших  $r$  поле точечного источника сходно вблизи рассеивателя с полем плоской волны, имеющей амплитуду  $e^{ik_0 r - 3i\pi/4} / \sqrt{8\pi k_0 r}$ .

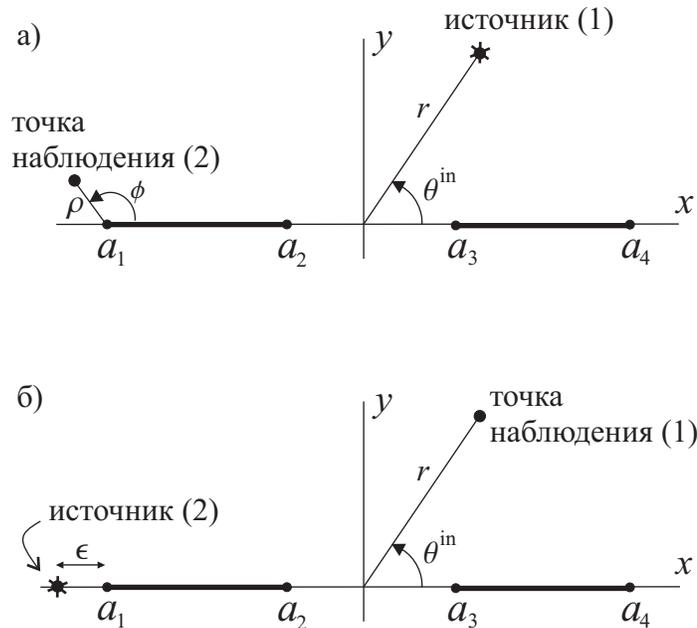


Рис. 1.4: К применению принципа взаимности

Пусть точка наблюдения имеет локальные полярные координаты  $(\rho, \theta)$  вблизи вершины  $a_m$ . Попытаемся найти поле в точке наблюдения. Поскольку падающая волна близка к плоской, поле определяется решением исходной дифракционной задачи. Воспользуемся асимптотикой (1.13). Главный член асимптотики поля в точке наблюдения при малом  $\rho$  дается формулой

$$u_{1 \rightarrow 2} = -\frac{iC_m \sqrt{\rho} e^{ik_0 r - i\pi/4} \sin(\phi/2)}{\pi \sqrt{2k_0 r}}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим обратную ситуацию. Пусть источник единичной силы находится вблизи вершины  $a_m$  на расстоянии  $\epsilon$  от рассеивателя. Найдем поле, в точке  $(r, \theta^{\text{in}})$  (Рис. 1.4 б). Заметим, что задача об источнике вблизи вершины — это вспомогательная задача об отыскании краевой функции Грина, сформулированная выше. Пользуясь формулой, аналогичной (1.10), находим главный член асимптотики при малом  $\epsilon$  и большом  $r$ :

$$u_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\sqrt{\epsilon} e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\pi \sqrt{2k_0 r}} S^m(\theta^{\text{in}}). \quad (1.19)$$

В соответствии с теоремой взаимности, асимптотики  $u_{1 \rightarrow 2}$  и  $u_{2 \rightarrow 1}$  должны совпадать при  $\phi = \pi$ ,  $\rho = \epsilon$ . Переходя к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ , получаем (1.17). Поставляя (1.17) в (1.16), получаем

$$H[u](x, y) = i \sum_{m=1}^4 (-1)^m S^m(\theta^{\text{in}}) v^m(x, y). \quad (1.20)$$

Рассмотрим дальнюю асимптотику правой и левой части (1.20). Заметим, что действие оператора  $H$  на рассеянное поле приводит к умножению дифракционного коэффициента на  $-i(k - k_*)$ , т.е.

$$ik_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}}) S(\theta; \theta^{\text{in}}) = i \sum_{m=1}^4 (-1)^m S^m(\theta^{\text{in}}) S^m(\theta), \quad (1.21)$$

что эквивалентно (1.11).  $\square$

Ясно, как будет выглядеть формула расщепления в случае дифракции на большем количестве полос:

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = \frac{1}{k_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})} \sum_{m=1}^N (-1)^m S^m(\theta^{\text{in}}) S^m(\theta),$$

где  $N$  — количество вершин системы рассеивателей.

Обсудим следствия формулы расщепления (1.11). Функция  $S$ , зависящая от двух переменных, оказывается выраженной в виде комбинации четырех функций  $S^1 \dots S^4$ , зависящих лишь от одной переменной. Такая формула позволяет значительно сократить объем экспериментальных измерений или время численного моделирования. Действительно, если необходимо пройти угловые переменные, скажем, с шагом  $2\pi/1000$ , то прямые вычисления (измерения) потребуют 1000000 точек, а вычисления, использующие формулу расщепления, всего 4000 точек.

Формула расщепления может также использоваться для верификации результатов численного моделирования или экспериментальных измерений.

В настоящей работе в качестве вспомогательных (базисных) задач выбраны дифракционные задачи с точечными источниками вблизи вершин, т.е. задачи отыскания краевых функций Грина. Такой выбор не является единственным. Вообще говоря, в качестве базисных можно использовать решения задачи с плоской падающей волной при четырех произвольных различных значениях  $\theta^{\text{in}}$ . Именно такие формулы были получены в работе [84].

Главной задачей дальнейшего изложения (начиная со следующей главы) будет только отыскание диаграмм направленности краевых функций Грина.

## §2. Краевые функции Грина и формулы расщепления в двумерных задачах на зоммерфельдовых поверхностях

### Зоммерфельдовы задачи и зоммерфельдовы поверхности

В работе рассматривается ряд задач дифракции, объединенных общим свойством. Именно это свойство позволяет вывести для каждой из рассматриваемых задач спектральное и координатное уравнения. Свойство это — возможность переформулировать задачу дифракции на заданной системе экранов как задачу о распространении волны на многолистной поверхности, не содержащей рассеивателей, однако содержащей точки ветвления.

Напомним, откуда берется многолистная поверхность в классической задаче Зоммерфельда. Рассматривается стационарная задача (уравнение Гельмгольца) в плоскости  $(x, y)$ . Идеальный экран, например с граничными условиями Дирихле, занимает полупрямую  $y = 0, x > 0$ . В рамках подхода Зоммерфельда поле продолжается на двулистную поверхность, сходную с римановой поверхностью функции  $\sqrt{x + iy}$ . Такая поверхность получается, если взять два экземпляра плоскости (листа), разрезать их по положительной полуоси  $x$  и склеить берега разрезов I с I' и II с II' (см. Рис. 2.1).

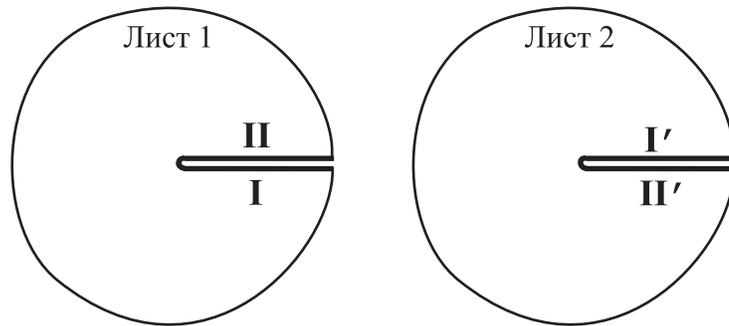


Рис. 2.1: Зоммерфельдова поверхность для задачи о дифракции на полупрямой

Пусть на первом (физическом) листе было построено решение дифракционной задачи  $u(x, y)$ . Построим на втором листе функцию  $-u(x, -y)$ . После склейки листов получим решение уравнения Гельмгольца на двулистной поверхности *без рассеивателей*. Наоборот, если каким-то образом удалось построить решение уравнения Гельмгольца на двулистной поверхности с подходящим падающим полем, то его можно превратить в решение задачи о дифракции на полупрямой с помощью симметризации. Таким образом, задача о дифракции на

полупрямой оказывается эквивалентна задаче распространения на двулистной поверхности без рассеивателей, но с точкой ветвления.

Точно так же можно переформулировать и задачу о дифракции на системе отрезков. Пусть дифракция происходит на отрезках  $(a_1, a_2)$  и  $(a_3, a_4)$ , принадлежащих оси  $x$ . Пусть на отрезках заданы граничные условия Дирихле. Строится поверхность, составленная из двух экземпляров плоскости, разрезанных вдоль рассеивателей. Соответствующая поверхность сходна с римановой поверхностью функции

$$\prod_{j=1}^4 \sqrt{x + iy - a_j}$$

(см. Рис. 2.2).

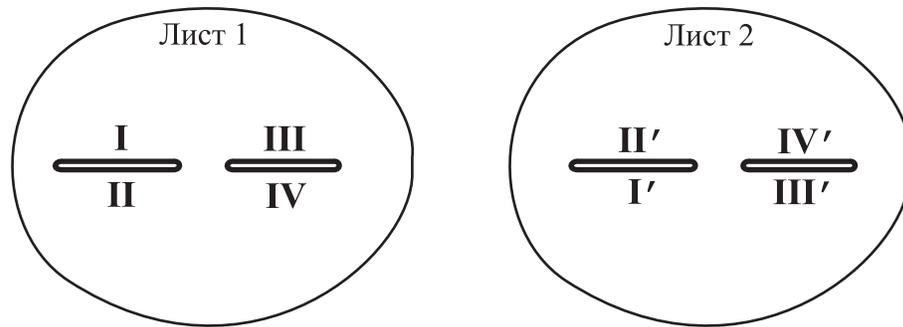


Рис. 2.2: Зоммерфельдова поверхность для задачи о дифракции на системе отрезков

В публикациях по теории дифракции такую поверхность иногда называют римановой. Чтобы не было путаницы, оставим название римановой поверхности за объектами, имеющими непосредственное отношение к комплексному анализу, а построенную выше поверхность в координатах  $(x, y)$  будем называть *зоммерфельдовой*. Соответственно, задачи теории дифракции, которые с помощью отражений удастся свести к задачам о распространении на зоммерфельдовых поверхностях, будем называть *зоммерфельдовыми задачами*.

То, что зоммерфельдовы задачи играют особую роль в теории дифракции, было интуитивно ясно давно. Сам Зоммерфельд высказывал предположение о том, что такие задачи можно решить аналитически [1]. Целью настоящей работы является построение наиболее полной теории зоммерфельдовых задач. При этом везде, кроме главы 6, предполагается, что число листов зоммерфельдовой поверхности и число точек ветвления на ней конечно.

Приведем еще два примера зоммерфельдовых задач. Рассмотрим задачу о дифракции на системе, состоящей из двух полупрямых, составляющих прямой

угол, с зазором между ними (см. Рис. 2.3 а). Эта задача сводится к зоммерфельдовой поверхности, имеющей 4 листа и 4 точки ветвления (см. Рис. 2.3 б). Похожим образом может быть преобразована и задача о дифракции на конечном угольном отражателе (см. Рис. 2.3 в). Задачи такого вида будут рассмотрены в главе 4.

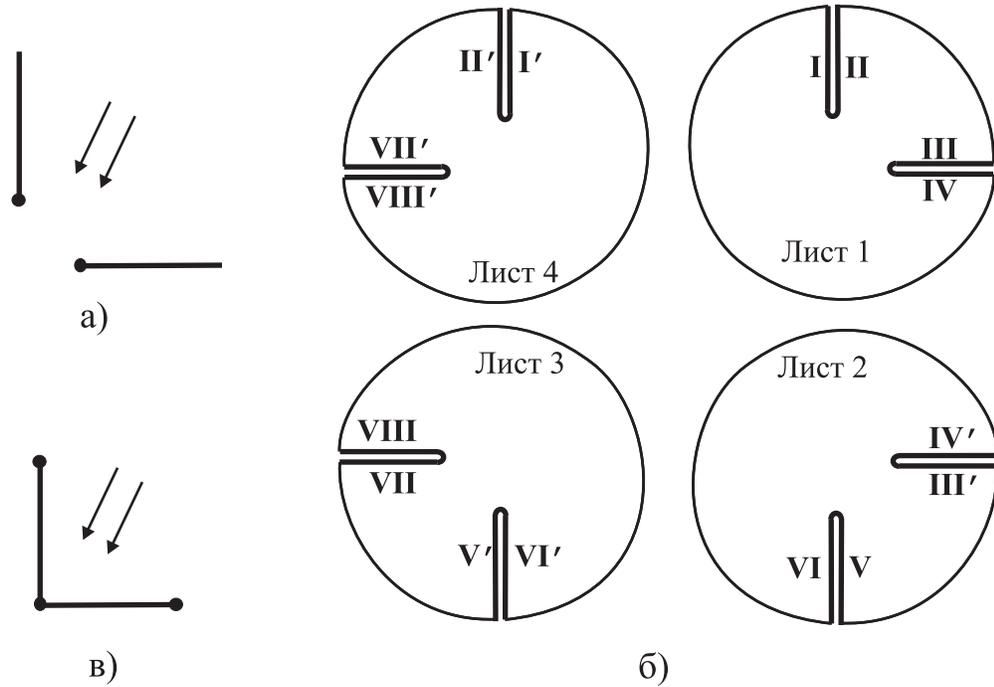


Рис. 2.3: Некоторые зоммерфельдовы задачи

Приведем пример дифракционной задачи, которая не является зоммерфельдовой. Это задача о дифракции на отрезке, на котором заданы импедансные граничные условия. Очевидно, метод отражений в этом случае не работает, и избавиться от рассеивателей нельзя. Для таких задач многие результаты, полученные ниже, не работают. Однако для них остаются справедливыми формулы расщепления.

### “Действительные” краевые функции Грина на зоммерфельдовой поверхности для двух полос

Зоммерфельдова поверхность, соответствующая задаче о дифракции на системе отрезков, показана на Рис. 2.2. Эта поверхность состоит из двух листов, разрезанных вдоль отрезков  $(a_1, a_2)$  и  $(a_3, a_4)$ . Один из листов назовем физическим, а другой — нефизическим. Точки на зоммерфельдовой поверхности будем

обозначать тройками  $(x, y, \pm)$  где на первых двух местах стоят декартовы координаты, а на третьей позиции стоит обозначение листа поверхности. Знак “+” соответствует физическому листу, а знак “-” — нефизическому.

Введем локальные полярные координаты  $(\rho_m, \phi_m)$  вблизи каждой из точек ветвления зоммерфельдовой поверхности (Рис. 1.3). Начало отсчета угловых переменных расположим так, чтобы малым положительным углам соответствовали точки на физическом листе. Поскольку поверхность двулистка, углы  $\phi_m$  могут изменяться в пределах  $0 < \phi_m < 4\pi$ .

Выше было показано, что с помощью формулы расщепления дифракционный коэффициент задачи может быть выражен через диаграммы направленности краевых функций Грина. Введем понятие краевой функции Грина на зоммерфельдовой поверхности. Для этого, во-первых, расширим область определения уже введенных функций  $v^m$  с одного листа на всю поверхность, а во-вторых, построим краевые функции Грина для задачи о полосах с граничными условиями Неймана.

Заметим, что на зоммерфельдовой поверхности нет рассеивателей, поэтому вместо термина “краевые функции Грина для задач Дирихле и Неймана” более уместно говорить о краевых функциях Грина различной поляризации.

Для того чтобы ввести краевые функции Грина  $v^m$  на зоммерфельдовой поверхности, используем предельную процедуру. Для каждого достаточно малого  $\epsilon$  построим приближения  $\widehat{v}_\epsilon^m$ , а затем возьмем предел

$$v^m = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{v}_\epsilon^m.$$

Приближения  $\widehat{v}_\epsilon^m$  определим как решения неоднородного уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k_0^2) \widehat{v}_\epsilon^m = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(\rho_m - \epsilon) \{ \delta(\phi_m - \pi) - \delta(\phi_m - 3\pi) \}.$$

Решения будем искать на всей зоммерфельдовой поверхности.

Неоднородность представлена двумя источниками, расположенными вблизи вершины  $a_m$  в точках с локальными цилиндрическими координатами  $(\epsilon, \pi)$  и  $(\epsilon, 3\pi)$ . Амплитуды источников равны, соответственно,  $\sqrt{\pi/\epsilon}$  и  $-\sqrt{\pi/\epsilon}$ .

Помимо уравнения Гельмгольца, функции  $\widehat{v}_\epsilon^m$  удовлетворяют условию излучения и мейкснеровским условиям в вершинах (точках ветвления поверхности). При этом условие в вершине  $a_m$  выполняется при каждом конечном  $\epsilon$ , т.е. до взятия предела. Как будет показано ниже, после взятия предела вблизи вершины  $a_m$  функция  $v^m$  имеет асимптотику, запрещенную условием Мейкснера.

В силу симметрии рассеивателей и источников, выполняются соотношения

$$v^m(x, y, +) = -v^m(x, y, -) = v^m(x, -y, +). \quad (2.1)$$

Это означает, что функции  $v^m$  удовлетворяют однородным граничным условиям Дирихле при  $y = 0$ ,  $x \in (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4)$  и однородным граничным условиям Неймана при  $y = 0$ ,  $x \in (-\infty, a_1) \cup (a_2, a_3) \cup (a_4, \infty)$ .

Исследуем поведение функции  $v^m$  вблизи вершины  $a_m$ . При малых  $\epsilon$  и  $\rho_m$  главный член асимптотики может быть получен с помощью решения уравнения Пуассона

$$\Delta \widehat{v}_\epsilon^m(\rho_m, \phi_m) = \pi^{1/2} \epsilon^{-3/2} \delta(\rho_m - \epsilon) \{ \delta(\phi_m - \pi) - \delta(\phi_m - 3\pi) \}, \quad (2.2)$$

а переход к уравнению Гельмгольца дает более высокие члены разложения. Решение уравнения (2.2) может быть получено с помощью методов функции комплексной переменной. Введем переменную

$$z = \rho_m \cos \phi_m + i \rho_m \sin \phi_m.$$

Легко видеть, что решение уравнения (2.2), периодичное по переменной  $\phi_m$  с периодом  $4\pi$ , дается формулой

$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \operatorname{Re}[\ln(\sqrt{z} - i\sqrt{\epsilon}) - \ln(\sqrt{z} + i\sqrt{\epsilon})]. \quad (2.3)$$

Вычислим предел правой части соотношения (2.3), если  $z$  постоянно, а  $\epsilon$  стремится к нулю. Этот предел дает искомую асимптотику краевой функции Грина:

$$v^m = -\pi^{-1/2} \operatorname{Re}[iz^{-1/2}] + O(z^{1/2}) = -\pi^{-1/2} \rho_m^{-1/2} \sin \frac{\phi_m}{2} + O(\rho_m^{1/2}). \quad (2.4)$$

Асимптотика функции  $v^m$  вблизи вершин  $a_n$ ,  $n \neq m$ , определяется следующим образом. В силу условий Мейкснера, самое общее разложение решения однородного уравнения Гельмгольца имеет вид

$$v^m(\rho_n, \phi_n) = \sum_{l,j=0}^{\infty} b_{l,j} \rho_n^{j/2} \sin(l\phi_n/2). \quad (2.5)$$

Между коэффициентами этого ряда имеются рекуррентные связи, не позволяющие, впрочем, полностью восстановить все члены. В силу соотношений (2.1),  $b_{l,m} = 0$  при четных  $l$ . Подставляя это представление в уравнение Гельмгольца и вводя константы  $C_n^m$ , получаем итоговое выражение, справедливое при всех  $m, n = 1 \dots 4$ :

$$v^m(\rho_n, \phi_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{-1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + \frac{2C_n^m}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + O(\rho_n^{3/2}). \quad (2.6)$$

Функции  $v^m$ , введенные в §1, представляют собой ограничения функций  $v^m$ , введенных здесь, на физический лист. Именно поэтому они обозначаются одинаковыми символами. Константы  $C_n^m$  совпадают с константами в формулах (1.9), (6.7) и (6.8).

На той же зоммерфельдовой поверхности определим еще четыре краевые функции Грина  $w^m(x, y, \pm)$ , относящиеся к полосам с граничными условиями Неймана. Способ определения этих функций похож на способ определения функций  $v^m$ , однако источники силой  $\sqrt{\pi/\epsilon}$  и  $-\sqrt{\pi/\epsilon}$  располагаются, соответственно, в точках  $(\epsilon, 0)$  и  $(\epsilon, 2\pi)$ , т.е. для построения приближенных решений  $\widehat{w}_\epsilon^m$  используется неоднородное уравнение Гельмгольца вида

$$(\Delta + k_0^2) \widehat{w}_\epsilon^m = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(\rho_m - \epsilon) \{ \delta(\phi_m) - \delta(\phi_m - 2\pi) \}.$$

Свойства симметрии, аналогичные (2.1), имеют вид

$$w^m(x, y, +) = -w^m(x, y, -) = -w^m(x, -y, +). \quad (2.7)$$

Для функций  $w^m$  справедливы следующие асимптотики:

$$w^m(\rho_n, \phi_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{-1/2} \cos \frac{\phi_n}{2} + \frac{2E_n^m}{\sqrt{\pi}} \rho_n^{1/2} \cos \frac{\phi_n}{2} + O(\rho_n^{3/2}), \quad (2.8)$$

где  $E_n^m$  — некоторые константы.

Краевые функции Грина  $v^m$  и  $w^m$  существуют и единственны. Теорема существования и единственности для пары полос выполняется, а математически корректная постановка задачи об отыскании краевых функций Грина, приводящая к гладкой правой части в уравнении Гельмгольца, приводится в §34.

### “Комплексные” краевые функции Грина для двух полос

Введем локальные цилиндрические координаты по-новому. Будем отсчитывать угловые координаты  $\phi_1 \dots \phi_4$  от положительного направления оси  $x$  против часовой стрелки (Рис. 2.4). Углы изменяются в пределах от 0 до  $4\pi$ , а все функции имеют период  $4\pi$ . При малых значениях углов точки принадлежат физическому листу.

В качестве нового набора неизвестных функций выберем набор из функций  $u^{m+}$  и  $u^{m-}$ , характеризующихся следующими свержмейкснеровскими асимптотиками:

$$u^{m+} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho_m^{-1/2} e^{-i\phi_m/2} + \dots \quad (2.9)$$

$$u^{m-} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho_m^{-1/2} e^{i\phi_m/2} + \dots \quad (2.10)$$

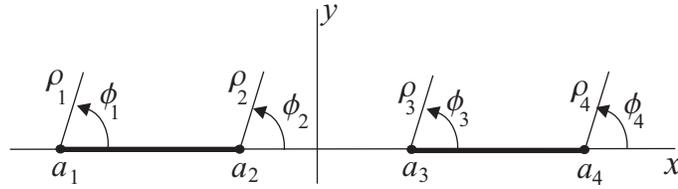


Рис. 2.4: Новые локальные цилиндрические координаты

Очевидно, что

$$u^{1\pm} = w^1 \mp iv^1, \quad (2.11)$$

$$u^{2\pm} = v^2 \mp iw^2, \quad (2.12)$$

$$u^{3\pm} = w^3 \mp iv^3, \quad (2.13)$$

$$u^{4\pm} = v^4 \mp iw^4, \quad (2.14)$$

Каждая из функций  $u^{m\pm}$  может быть представлена как результат решения неоднородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = I^{m\pm}(\epsilon), \quad (2.15)$$

взятое в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Здесь источники имеют вид

$$I^{m+}(\epsilon) = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(\rho_m - \epsilon) [\delta(\phi_m) - i\delta(\phi_m - \pi) - \delta(\phi_m - 2\pi) + i\delta(\phi_m - 3\pi)], \quad (2.16)$$

$$I^{m-}(\epsilon) = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(\rho_m - \epsilon) [\delta(\phi_m) + i\delta(\phi_m - \pi) - \delta(\phi_m - 2\pi) - i\delta(\phi_m - 3\pi)]. \quad (2.17)$$

При решении неоднородных задач, соответствующих конечным значениям  $\epsilon$ , следует принять во внимание условия излучения и условия Мейкснера в вершинах.

Введем новые глобальные независимые переменные

$$z_+ = x + iy, \quad z_- = x - iy, \quad (2.18)$$

а также локальные координаты

$$z_{m+} = z_+ - p_m, \quad z_{m-} = z_- - \bar{p}_m \quad (2.19)$$

здесь  $p_m = a_m$ , а черта обозначает комплексное сопряжение. Необходимость ввести новое обозначение связана с возможностью унифицировать всю систему обозначений с задачей об угловом отражателе.

Частные производные по новым независимым переменным связаны с частными производными по декартовым координатам с помощью соотношений

$$\frac{\partial}{\partial z_{\pm}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mp i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.20)$$

В новых переменных сверхмейкснеровские члены асимптотик неизвестных функций будут иметь простой вид:

$$u^{m\pm} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} z_{m\pm}^{-1/2} + \dots \quad (2.21)$$

Выпишем несколько первых членов разложения неизвестных функций вблизи точек ветвления зоммерфельдовой поверхности. Принимая во внимание то, что эти функции удовлетворяют уравнению Гельмгольца, асимптотики запишутся как

$$u^{m+}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{-1/2} + \frac{2C_{n+}^{m+}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{1/2} + \frac{2C_{n-}^{m+}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{1/2} + O(\rho_n^{3/2}), \quad (2.22)$$

$$u^{m-}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{-1/2} + \frac{2C_{n+}^{m-}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{1/2} + \frac{2C_{n-}^{m-}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{1/2} + O(\rho_n^{3/2}). \quad (2.23)$$

Разумеется, выражения (2.22) и (2.23) нельзя понимать буквально (как запись функций двух комплексных переменных). Функции  $u^{m\pm}$  определены на многообразии, имеющем действительную размерность 2. Обозначения переменных в левой части лишь указывают, что асимптотика строится вблизи вершины  $(a_n, 0)$ . Частные производные по комплексным координатам понимаются только в смысле (2.20). Удобство комплексной записи состоит в том, что понимаемые таким образом производные обладают свойством

$$\frac{\partial}{\partial z_{\pm}} f(z_{\mp}) = 0,$$

если  $f$  — аналитическая функция своего аргумента.

Пользуясь (2.11)–(2.14), новые коэффициенты  $C_{n\pm}^{m\pm}$  можно выразить через старые коэффициенты  $C_n^m$  и  $E_n^m$ :

$$\begin{aligned} C_{n+}^{m\pm} &= E_n^m \mp C_n^m, & C_{n-}^{m\pm} &= E_n^m \pm C_n^m \quad \text{при } m = 1, 3, \\ C_{n+}^{m\pm} &= i(\pm E_n^m + C_n^m), & C_{n-}^{m\pm} &= i(\pm E_n^m - C_n^m) \quad \text{при } m = 2, 4. \end{aligned}$$

“Комплексные” краевые функции Грина для задачи о двух полосах (отрезках) будут использоваться ниже при исследовании координатных уравнений.

### Формулировка дифракционной задачи об уголковом отражателе со щелью на зоммерфельдовой поверхности. Симметризация

Для иллюстрации полезности введения многолистных поверхностей рассмотрим задачу о дифракции на двух перпендикулярных полупрямых с зазором между ними. Эта задача более сложна, чем задача о двух полосах, поскольку не обладает очевидной зеркальной симметрией. Кроме того, рассеиватели в этой задаче не являются компактными, поэтому в волновых полях могут присутствовать геометрически отраженные волны и полутеневые зоны.

Рассмотрим двумерную задачу дифракции, геометрия которой показана на Рис. 2.5. На плоскости выполняется уравнение Гельмгольца (1.1). Рассеиватель представлен двумя полупрямыми, обозначенными как  $\gamma_1$ , ( $y = 0, x > a_1$ ) и  $\gamma_2$ , ( $x = 0, y > a_2$ ). Точки  $(a_1, 0)$  и  $(0, a_2)$  будем называть *вершинами* рассеивателя, соответственно, номер 1 и номер 2.

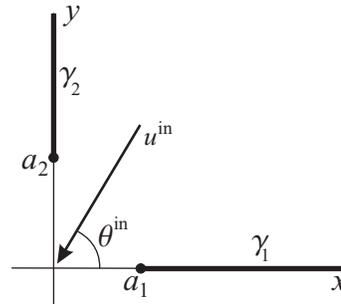


Рис. 2.5: Геометрия задачи об “уголке”

На экранах  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выполняются граничные условия Дирихле. В вершинах выполняются условия Мейкснера обычного вида. На бесконечности задано условие излучения в интегральной форме (см. §34). Отраженное поле представляет собой комбинацию плоских волн, заданных в соответствующих областях пространства, а рассеянное поле является расходящейся цилиндрической волной с некоторой направленностью. Особенности дифракционного коэффициента соответствуют зонам полутени.

Падающая волна имеет вид

$$u^{\text{in}} = \exp\{-ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} + y \sin \theta^{\text{in}})\} \quad (2.24)$$

Пусть полное поле на физической плоскости с экранами равно  $u(x, y)$ . Применение метода отражений приводит к зоммерфельдовой поверхности, структура которой показана на Рис. 2.3 б). Берега разрезов помечены цифрами; берега, помеченные одинаковыми цифрами (со штрихом и без него) склеиваются.

Значение функции  $u$  на физическом листе обозначим как  $u_I(x, y)$ . Ее продолжения на остальные листы обозначим, в соответствии с рисунком, как  $u_{II}(x, y)$ ,  $u_{III}(x, y)$  и  $u_{IV}(x, y)$ . Очевидно, для исходной задачи Дирихле выполняются равенства

$$u_{II}(x, y) = -u_I(x, -y), \quad u_{III}(x, y) = u_I(-x, -y), \quad u_{IV}(x, y) = -u_I(-x, y). \quad (2.25)$$

Падающая волна присутствует на всех четырех листах, причем направления ее падения представляют собой отражения начального направления от одного или обоих рассеивателей. Очевидно, отраженные волны в первоначальной задаче дифракции представляют собой падающие волны, проходящие с листа на лист через линии склейки.

Упростим задачу. Вместо задачи о распространении с четырьмя падающими волнами будем рассматривать задачу о распространении с одной падающей волной. А именно, будем считать, что из бесконечности падает волна только на одном (первом) листе. Падающая волна по-прежнему имеет вид (2.24).

Поясним чуть более аккуратно, что значит “волна падает только на одном листе”. Вместо падающей плоской волны можно рассматривать волну, создаваемую точечным источником, расположенным достаточно далеко от вершин и имеющим подходящую амплитуду. Направление на этот источник должно соответствовать направлению падения. Этот источник должен быть расположен на каком-то одном листе.

Новое поле, т.е. поле, порожденное плоской волной, приходящей только по первому листу, обозначим  $u^{\text{som}}$ . Это поле задано на всей зоммерфельдовой поверхности, причем для него не выполняются соотношения симметрии (2.25). Решение исходной задачи может быть получено из  $u^{\text{som}}$  с помощью формулы, использующей значения  $u^{\text{som}}$  на разных листах:

$$u_I(x, y) = u_I^{\text{som}}(x, y) - u_{II}^{\text{som}}(x, -y) + u_{III}^{\text{som}}(-x, -y) - u_{IV}^{\text{som}}(-x, y). \quad (2.26)$$

Будем искать функцию  $u^{\text{som}}$ .

Заметим, что с помощью одной и той же функции  $u^{\text{som}}$  можно выразить решения нескольких различных дифракционных задач на физическом листе. А именно, выбор различных комбинаций знаков в (2.26) приводит к решению задачи Неймана (все плюсы), а также задач, в которой на одной полупрямой задано граничное условие Дирихле, а на другой — Неймана.

Вершины (точки ветвления) зоммерфельдовой поверхности имеют координаты  $(a_1, 0)$ ,  $(0, a_2)$ ,  $(-a_1, 0)$ ,  $(0, -a_2)$ . Будем рассматривать чуть более общую задачу, а именно будем полагать, что вершины имеют координаты  $(a_1, 0)$ ,  $(0, a_2)$ ,  $(-a_3, 0)$ ,  $(0, -a_4)$ , где  $a_3$  может быть не равно  $a_1$ , а  $a_4$  может быть не равно  $a_2$ .

Такой подход дает более сложную, но более общую теорию. Если удастся найти  $u^{\text{som}}$  в “новой” постановке, то переход к “старой” осуществляется заменой  $a_3 = a_1$ ,  $a_4 = a_2$ .

### Комплексные краевые функции Грина для уголкового отражателя со щелью

Введем вблизи каждой из точек ветвления зоммерфельдовой поверхности локальные полярные координаты, как показано на Рис. 2.6. Рисунок демонстрирует, от какой линии откладывается каждый из углов. Все углы принимают значения от 0 до  $4\pi$ , поскольку точки ветвления имеют второй порядок.

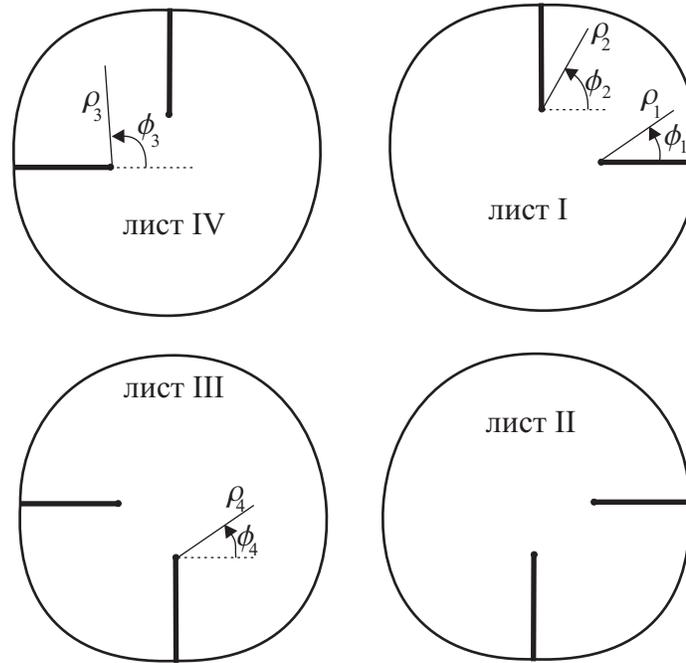


Рис. 2.6: Локальные цилиндрические координаты

Определим на зоммерфельдовой поверхности краевые функции Грина  $u^{m+}$  и  $u^{m-}$  ( $m$  принимает значения  $1 \dots 4$ ).

Исследуем асимптотику краевых функций Грина вблизи точек ветвления (т.е. вблизи вершин). По известным источникам можно построить только сверхмейкснеровские члены асимптотики. В остальных членах придется оставить неизвестные коэффициенты.

Введем “комплексные” локальные координаты (2.19) где  $p_{m\pm}$  теперь — комплексные координаты вершин, а именно

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = ia_2, \quad p_3 = -a_3, \quad p_4 = -ia_4.$$

Локальные асимптотики вблизи особых точек можно выписать в форме, близкой к (2.22), (2.23):

$$u^{m+}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{-1/2} + \frac{2(C_{n+}^{m+} z_{n+}^{1/2} + C_{n-}^{m+} z_{n-}^{1/2})}{\sqrt{\pi}} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{р.ч.} \quad (2.27)$$

$$u^{m-}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{-1/2} + \frac{2(C_{n+}^{m-} z_{n+}^{1/2} + C_{n-}^{m-} z_{n-}^{1/2})}{\sqrt{\pi}} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{р.ч.} \quad (2.28)$$

Здесь  $C_{n\pm}^{m\pm}$  — неизвестные коэффициенты, соответствующие задаче об уголке. Заметим, что в данном случае решения вблизи точек ветвления представляют собой сумму двух компонент: разветвленной (т.е. меняющей знак при переходе с листа на лист) и регулярной, остающейся неизменной при переходе с листа на лист (она обозначена в формулах как “р.ч.”). Исследуя окрестность особой точки, нетрудно показать, что регулярная часть также является непрерывной и гладкой.

### Формула расщепления для уголкового отражателя со щелью

Дифракционный коэффициент  $S$  задачи на зоммерфельдовой поверхности представляет собой коэффициент при старшем члене асимптотики цилиндрической части дальнего поля:

$$u_{\text{sc}}^{\text{som}}(r, \theta_{i,o}) = -\frac{e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} S(\theta_{i,o}; \theta_{i,o}^{\text{in}}) + \dots$$

Нижний индекс  $i, o$  у переменной  $\theta^{\text{in}}$  указывает на лист (внутренний или внешний), по которому приходит падающая волна. Индекс  $i, o$  у переменной  $\theta$  указывает на лист, на котором ищется дифракционный коэффициент. Подразумевается, что дифракционный коэффициент зависит от угловых переменных и от соответствующих индексов.

Если падающая волна приходит по внутреннему листу, дифракционный коэффициент не имеет особенностей (нет линий, разделяющих освещенную и неосвещенную области). На внутреннем листе присутствует безграничная плоская волна. Если же падающая волна приходит по внешнему листу, то  $S(\theta_o)$  будет иметь особенности, соответствующие направлениям, разделяющим освещенную и неосвещенную зоны. В окрестности этих направлений поле будет иметь характерную осциллирующую структуру.

Определим диаграммы направленности  $S^{m\pm}$  краевых функций Грина с помощью асимптотик

$$u^{m\pm}(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} (S^{m\pm}(\theta_{i,o}) + O(1/r)).$$

Формула расщепления связывает дифракционный коэффициент с диаграммами направленности краевых функций Грина.

ТЕОРЕМА 2.1 *Выполняется соотношение*

$$S^{\text{som}}(\theta_\alpha; \theta_\beta^{\text{in}}) = \frac{1}{4k_0(\cos\theta + \cos\theta^{\text{in}})} \sum_{m=1}^4 [S^{m+}(\theta_\beta^{\text{in}})S^{m+}(\theta_\alpha) + S^{m-}(\theta_\beta^{\text{in}})S^{m-}(\theta_\alpha)], \quad (2.29)$$

индексы  $\alpha, \beta$  пробегают значения  $i, o$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Выпишем асимптотики поля  $u^{\text{som}}$  вблизи вершин:

$$u^{\text{som}}(z_{n+}, z_{n-}) = \frac{2C_{n+}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{1/2} + \frac{2C_{n-}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{1/2} + O(\rho_n^{3/2}) + \text{рег. чл.} \quad (2.30)$$

Снова  $C_{n\pm}$  — неизвестные коэффициенты. Эти коэффициенты зависят от угла падения  $\theta^{\text{in}}$ .

Применим к полю  $u^{\text{som}}$  оператор

$$H_x = \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 \cos\theta^{\text{in}} = \frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{\partial}{\partial z_-} + ik_0 \cos\theta^{\text{in}}.$$

Исследуем старшие (сверх-мейкснеровские) члены асимптотики полученной функции:

$$H_x[u^{\text{som}}(z_{n+}, z_{n-})] = \frac{C_{n+}}{\sqrt{\pi}} z_{n+}^{-1/2} + \frac{C_{n-}}{\sqrt{\pi}} z_{n-}^{-1/2} + \dots$$

Используя теорему единственности, приходим к соотношению

$$H_x[u^{\text{som}}] = - \sum_{m=1}^4 (C_{m+} u^{m+} + C_{m-} u^{m-}). \quad (2.31)$$

Это формула расщепления в слабой форме. Для того, чтобы получить сильную форму, необходимо выразить коэффициенты  $C_{m\pm}$  через диаграммы направленности полей  $u^{m\pm}$ .

Введем диаграммы направленности следующим образом. Исследуем поле вдали от вершин. Очевидно, рассеянная часть поля  $u^{\text{som}}$  и краевые функции Грина  $u^{m\pm}$  на большом удалении от вершин имеют структуру расходящейся цилиндрической волны. В данном случае необходимо аккуратно ввести угловую переменную, от которой зависят соответствующие диаграммы направленности.

Введем внутренний угол  $\theta_i$ , как показано на Рис. 2.7. Он откладывается от оси  $x$ , принадлежащей внутренней области первого листа. Очевидно, внутренний угол меняется от 0 до  $2\pi$ .

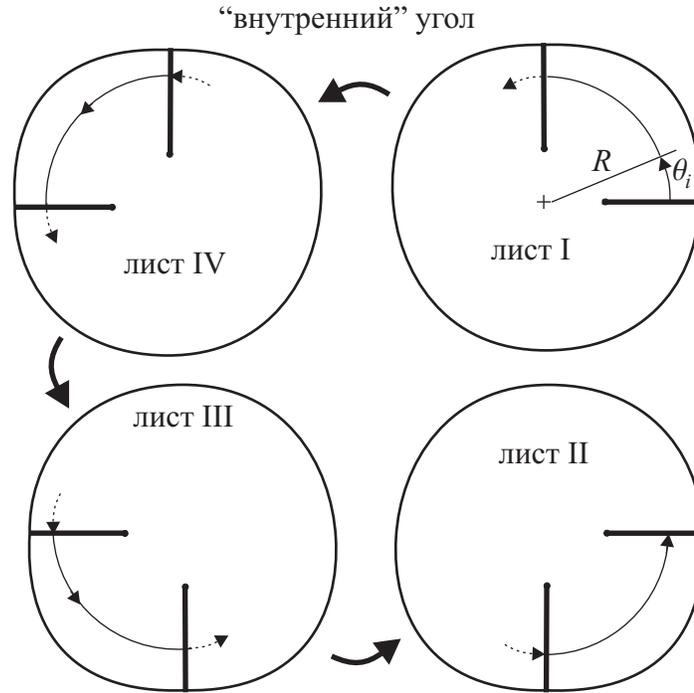


Рис. 2.7: Область изменения внутреннего угла

Аналогично введем внешний угол  $\theta_o$ , как показано на Рис. 2.8. Он откладывается от оси  $x$ , принадлежащей внешней области второго листа. Область изменения внешнего угла — от 0 до  $6\pi$ , т.е. он делает три полных оборота.

Таким образом, каждая из функций  $a$  именно, цилиндрическая часть  $u^{\text{som}}$  и краевые функции Грина, будет иметь две диаграммы направленности, помеченные индексами  $i$  и  $o$ , что будет соответствовать внутреннему и внешнему углу.

Для того, чтобы выразить константы  $C_{m\pm}$  через функции  $S^{m\pm}$ , воспользуемся рассуждением, основанным на теореме взаимности. Это рассуждение было использовано в §1, поэтому оно не приводится здесь в деталях.

Падающую плоскую волну можно заменить точечным источником, находящимся на достаточном удалении от вершин и имеющим соответствующую амплитуду. Коэффициенты  $C_{m\pm}$  можно вычислить, поместив точки наблюдения достаточно близко к вершине и взяв главный член соответствующей асимптотики. Таким образом, задача определения  $C_{m\pm}$  соответствует ситуации, когда источник удален от вершин, а точка наблюдения находится в окрестности одной из вершин.

Задача определения  $S^{m\pm}$ , наоборот, содержит систему источников вблизи одной из вершин. Для вычисления диаграммы направленности точка наблюде-

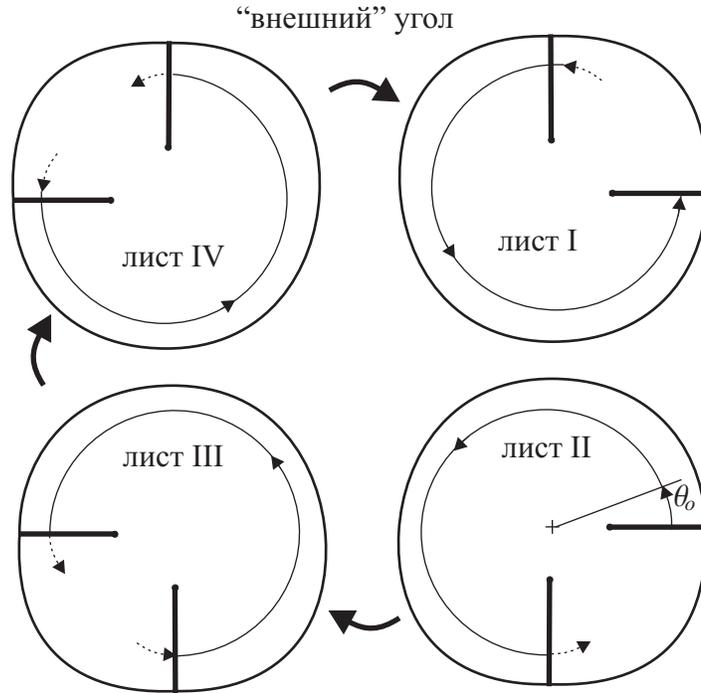


Рис. 2.8: Область изменения внешнего угла

ния должна быть удалена от вершин.

Воспользовавшись теоремой взаимности, можно выразить одну величину через другую:

$$C_{m\pm} = -\frac{i}{4} S^{m\pm}(\theta_{i,o}^{\text{in}}). \quad (2.32)$$

Подставим соотношение (2.32) в (2.31). Оператор  $H_x$  действует на диаграммы направленности следующим образом:

$$S(\theta) \xrightarrow{H_x} ik_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})S(\theta).$$

Получаем сильную формулу расщепления (2.29).  $\square$

Использование оператора

$$H_y = \partial_y + ik_0 \sin \theta^{\text{in}}$$

приводит к другой формуле расщепления.

**Замечание**

Процедура вывода формулы расщепления, продемонстрированная здесь на примере задачи об угловом отражателе со щелью, является весьма общей.

Очевидно, она может быть применена к любой поверхности с точками ветвления второго порядка. Соответственно, формула расщепления (2.29) также должна выполняться на любой поверхности, в частности, на поверхности задачи о двух полосах. Поясним, как связаны формулы (1.11) и (2.29), т.е. “действительная” и “комплексная” формулы расщепления.

Ведем диаграммы направленности  $\hat{S}^m(\theta)$ , соответствующие краевым функциям Грина  $w^m$  задачи Неймана, продолженным на зоммерфельдову поверхность. В соответствии с формулами (2.11)–(2.14), перепишем (2.29) в виде

$$S^{\text{som}}(\theta_\alpha; \theta_\beta^{\text{in}}) = \frac{1}{2k_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})} \sum_{m=1}^4 (-1)^m \left[ S^m(\theta_\beta^{\text{in}}) S^m(\theta_\alpha) - \hat{S}^m(\theta_\beta^{\text{in}}) \hat{S}^m(\theta_\alpha) \right], \quad (2.33)$$

Обозначим индексом 1 физический лист, а индексом 2 — нефизический. В силу симметрии, искомый дифракционный коэффициент есть

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = S^{\text{som}}(\theta_1; \theta_1^{\text{in}}) - S^{\text{som}}(\theta_1; \theta_2^{\text{in}}).$$

Заметим, что

$$S^m(\theta_1) = -S^m(\theta_2), \quad \hat{S}^m(\theta_1) = \hat{S}^m(\theta_2).$$

Отсюда получаем (1.11).

### §3. Формулы расщепления в трехмерных задачах

В настоящем разделе выводятся формулы расщепления для некоторых трехмерных задач. Отметим, что эти задачи не относятся к зоммерфельдовым. То есть для таких задач не будут развиты дальнейшие методы (спектральные и координатные уравнения). Однако формулы расщепления представляют ценность сами по себе.

#### Постановка задачи

Рассмотрим модельную задачу о дифракции плоской акустической волны на плоском рассеивателе произвольной формы. Такой рассеиватель также может служить прототипом тонкого проводящего тела в случае дифракции электромагнитных волн или плоской трещины для упругих волн. Геометрия задачи показана на Рис. 3.1.

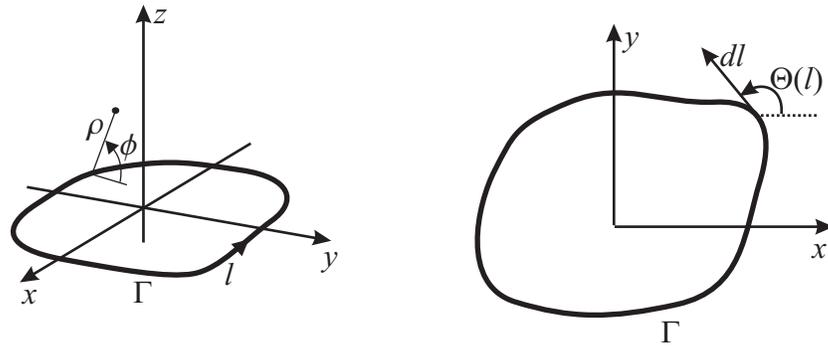


Рис. 3.1: Геометрия задачи

Обратим внимание на то, что здесь рассматривается *трехмерная* дифракционная задача. Рассеиватель расположен в плоскости  $(x, y)$ . Граница плоской области, занятой рассеивателем, обозначена символом  $\Gamma$ . Предполагается, что граница гладкая; граница с геометрическими особенностями требует отдельного рассмотрения. Будем рассматривать односвязную область, однако все результаты могут быть непосредственно обобщены на случай, когда она состоит из нескольких частей, расположенных в одной плоскости или в нескольких плоскостях, перпендикулярных оси  $z$ . Введем координату  $l$  вдоль контура  $\Gamma$ . Пусть  $\Theta$  — угол между осью  $x$  и вектором  $dl$ .

Пусть в пространстве  $(x, y, z)$  выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0. \quad (3.1)$$

На рассеиватель падает плоская волна вида

$$u^{\text{in}} = \exp\{-i(k_x^{\text{in}}x + k_y^{\text{in}}y + \sqrt{k_0^2 - (k_x^{\text{in}})^2 - (k_y^{\text{in}})^2}z)\}. \quad (3.2)$$

На поверхности рассеивателя (при  $z = \pm 0$ ) выполняются граничные условия Дирихле

$$u = 0. \quad (3.3)$$

На ребре рассеивателя выполняются краевое условие Мейкснера. Оно заключается в том, что главный член асимптотики поля вблизи края имеет вид

$$u = O(\rho^{1/2} \sin(\phi/2)), \quad (3.4)$$

где  $\rho$  и  $\phi$  — локальные цилиндрические координаты вблизи ребра, причем угол  $\phi$  отсчитывается от поверхности рассеивателя. На бесконечности рассеянное поле должно удовлетворять условию излучения. В рамках принципа предельного поглощения можно считать, что  $k_0$  имеет небольшую положительную мнимую часть, и рассеянное поле убывает на бесконечности.

*Важным обстоятельством* является следующее. Предполагается, что для данной задачи выполняются теоремы существования и единственности. Единственность означает, что если некоторая функция  $u$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, однородным граничным условиям, краевым условиям и условию излучения, то эта функция тождественно равна нулю. Теоремы существования и единственности могут быть строго доказаны для многих задач дифракции, в том числе и для поставленной модельной задачи.

### Краевые функции Грина для трехмерной задачи

Формула расщепления представляет собой соотношение, выражающее решение при произвольных  $k_x^{\text{in}}, k_y^{\text{in}}$  в виде линейной комбинации краевых функций Грина. Введем эти функции.

Как и ранее, введем краевые функции Грина как результат предельной процедуры. Пусть падающей плоской волны нет, однако есть точечный источник, расположенный вблизи ребра рассеивателя. Рассмотрим окрестность точки, лежащей на ребре и имеющей на нем координату  $l_0$ . Пусть координаты этой точки в плоскости  $(x, y)$  равны  $(x_0, y_0)$ . Расположим источник поля в точке с координатами

$$z = 0, \quad x' = x_0 + \epsilon \sin \Theta(l), \quad y' = y_0 - \epsilon \cos \Theta(l),$$

где  $\epsilon$  — малая величина (см. Рис. 3.2). Источник имеет силу  $-\pi\epsilon^{-1/2}$ , т.е. рассматривается неоднородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta \hat{v}_\epsilon + k_0^2 \hat{v}_\epsilon = -\pi\epsilon^{-1/2} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z). \quad (3.5)$$

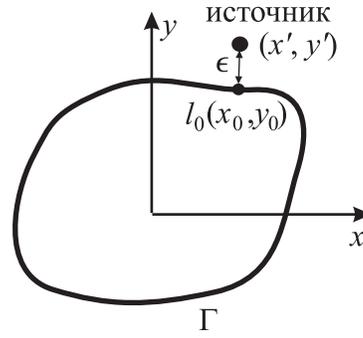


Рис. 3.2: К построению вспомогательных функций

Предполагается, что решение  $\widehat{v}_\epsilon$  удовлетворяет граничным условиям (3.3), условию излучения и при всех  $\epsilon \neq 0$  мейкснеровскому условию на ребре.

Рассмотрим предел

$$v(x, y, z; l_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \widehat{v}_\epsilon(x, y, z). \quad (3.6)$$

Зависимость силы источника от  $\epsilon$  подобрана таким образом, что этот предел существует и не равен нулю тождественно. Функция  $v$ , задаваемая равенством (3.6), есть краевая функция Грина для данной задачи.

Функция  $v$  имеет следующее важное свойство. Пусть рассматривается интеграл типа свертки

$$u^*(x, y, z) = \int_{\Gamma} h(l)v(x, y, z; l)dl, \quad (3.7)$$

где  $h(l)$  — произвольная достаточно гладкая функция. Вблизи ребра функция  $u^*$  имеет следующую асимптотику:

$$u^* = \frac{h(l) \sin(\phi/2)}{\rho^{1/2}} + O(\rho^{1/2}). \quad (3.8)$$

Данная асимптотика может быть получена путем исследования внешней асимптотики функции  $v$ .

Следует отметить, что эта асимптотика не удовлетворяет условию Мейкснера. Это вполне естественно, поскольку с физической точки зрения условия Мейкснера означают отсутствие источников вблизи ребра.

Разница между решением исходной задачи о рассеянии плоской волны и краевыми функциями Грина состоит в следующем. Решение исходной задачи зависит от пяти переменных: от пространственных координат  $x, y, z$  явно, а также от параметров  $k_x^{\text{in}}, k_y^{\text{in}}$  неявно. Краевая функция Грина  $v(x, y, z; l)$  зависит лишь от четырех переменных. Нашей целью будет выразить решение  $u$  в виде комбинации (в трехмерном случае — интегральной) функций  $v$ .

## Дифракционные коэффициенты

Ранее вводились дифракционные коэффициенты в двумерном случае. Введем аналогичные функции для трехмерной задачи. Рассеянное поле представим в виде

$$u^{\text{sc}}(x, y, z) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) + O(e^{ik_0 r} r^{-2}), \quad (3.9)$$

где  $S$  — дифракционный коэффициент,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta_x = \arccos(x/r)$ ,  $\theta_y = \arccos(y/r)$ ,  $\theta_x^{\text{in}} = \arccos(k_x^{\text{in}}/k_0)$ ,  $\theta_y^{\text{in}} = \arccos(k_y^{\text{in}}/k_0)$ .

Аналогично можно ввести диаграммы направленности для краевых функций Грина:

$$v(x, y, z; l) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} S_G(\theta_x, \theta_y; l) + O(e^{ik_0 r} r^{-2}). \quad (3.10)$$

Применяя формулу Грина и используя граничные условия (3.3), можно получить стандартные выражения для дифракционного коэффициента и диаграммы направленности:

$$S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) = -\frac{k_0}{4\pi^2} \iint \partial_z u^{\text{sc}}(x, y, +0) e^{-ik_0(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y)} dx dy, \quad (3.11)$$

$$S_G(\theta_x, \theta_y; l) = -\frac{k_0}{4\pi^2} \iint \partial_z v(x, y, +0; l) e^{-ik_0(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y)} dx dy; \quad (3.12)$$

Интегрирование производится по верхней поверхности рассеивателя. Предполагается, что последний интеграл соответствующим образом регуляризован.

## Формулы расщепления

Докажем основную теорему для плоских рассеивателей.

**ТЕОРЕМА 3.1** *Дифракционный коэффициент исходной задачи и диаграммы направленности краевых функций Грина связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) &= \\ &= -\frac{4\pi i}{k_0^2 (\cos \theta_x + \cos \theta_x^{\text{in}})} \int_{\Gamma} S_G(\theta_x, \theta_y; l) S_G(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \sin \Theta(l) dl. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) &= \\ &= \frac{4\pi i}{k_0^2 (\cos \theta_y + \cos \theta_y^{\text{in}})} \int_{\Gamma} S_G(\theta_x, \theta_y; l) S_G(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \cos \Theta(l) dl. \end{aligned} \quad (3.14)$$

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство будет проведено в три шага.

а) Введем операторы

$$H_x = \partial_x + ik_x^{\text{in}}, \quad H_y = \partial_y + ik_y^{\text{in}}. \quad (3.15)$$

Для вывода формулы расщепления можно воспользоваться любым из этих операторов. Воспользуемся оператором  $H_x$ . Применим этот оператор к полному полю  $u(x, y, z)$ , представляющему собой решение задачи о дифракции плоской волны на рассеивателе:

$$\tilde{u} = H_x[u].$$

Исследуем свойства функции  $\tilde{u}$ . Очевидно, эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям. Кроме того, оператор  $H_x$  выбран таким образом, что

$$H_x[u^{\text{in}}] \equiv 0,$$

поэтому  $\tilde{u}$  удовлетворяет условию излучения.

Изучим асимптотику функции  $\tilde{u}$  вблизи ребра. Пусть  $u$  имеет асимптотику

$$u = C(l)\rho^{1/2} \sin \frac{\phi}{2} + O(\rho^{3/2}), \quad (3.16)$$

где  $C(l)$  — некоторая неизвестная функция. Тогда

$$\tilde{u} = \frac{C(l) \sin \Theta(l) \sin(\phi/2)}{\rho^{1/2}} + O(\rho^{1/2}). \quad (3.17)$$

Очевидно, данная асимптотика не удовлетворяет условию Мейкснера.

б) “Исправим” асимптотику функции  $\tilde{u}$  в ребре. Для этого рассмотрим функцию

$$w(x, y, z) = \tilde{u} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} C(l) \sin \Theta(l) v(x, y, z; l) dl \quad (3.18)$$

Эта функция удовлетворяет условиям Мейкснера, а также условию излучения, граничным условиям и уравнению Гельмгольца. Следовательно, по теореме единственности,

$$w \equiv 0.$$

Отсюда

$$H_x[u] = H_x[u^{\text{sc}}] = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} C(l) \sin \Theta(l) v(x, y, z; l) dl. \quad (3.19)$$

Это формула расщепления в “слабой” форме. Заметим, что функция  $C(l)$  пока не определена.

в) Вычислим функцию  $C(l)$  в терминах функции  $v$ . Для этого воспользуемся теоремой взаимности.

Рассмотрим исходную задачу о дифракции плоской волны. Можно считать, что падающая волна создается точечным источником, расположенным в точке с координатами

$$X = r \frac{k_x^{\text{in}}}{k_0}, \quad Y = r \frac{k_y^{\text{in}}}{k_0}, \quad Z = \sqrt{r^2 - X^2 - Y^2},$$

где  $r$  — очень большая величина (точнее, источник должен находиться в дальней зоне рассеивателя). Такой источник создает вблизи рассеивателя волновое поле, близкое по форме к плоской волне (3.2), умноженной на нормировочный коэффициент  $-(4\pi r)^{-1} e^{ik_0 r}$ . Для того чтобы найти значение  $C(l)$ , необходимо поместить точку наблюдения в плоскости  $(x, y)$  на расстоянии  $\epsilon$  от контура, найти значение поля в этой точке наблюдения, домножить значение поля на  $-4\pi r \epsilon^{-1/2} e^{-ik_0 r}$  и взять предел полученной величины при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ .

Теорема взаимности позволяет поменять местами источник и точку наблюдения. Теперь источник оказывается на расстоянии  $\epsilon$  от ребра, а точка наблюдения имеет координаты  $(X, Y, Z)$ . Если найденное поле домножить на нормирующий множитель и взять предел  $\epsilon \rightarrow 0$ , то снова должно получиться значение  $C(l)$ . Однако решение задачи об источнике вблизи ребра представляет собой краевую функцию Грина  $v(X, Y, Z; l)$ . В результате соответствующих выкладок коэффициент  $C(l)$  выражается по формуле

$$C(l) = 4 \lim_{r \rightarrow \infty} [r e^{-ik_0 r} v(X, Y, Z; l)],$$

иными словами,  $C(l)$  оказывается пропорциональным диаграмме направленности краевой функции Грина

$$C(l) = \frac{8\pi}{k_0} S_G(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l). \quad (3.20)$$

Подставим (3.20) в (3.19). Заметим, что если результат справедлив для полей, то он справедлив и для соответствующих диаграмм направленности. Оператор  $H_x$  действует на диаграмму направленности (или дифракционный коэффициент) поля следующим образом:

$$\begin{aligned} S(\dots) &\xrightarrow{H_x} ik_0(\cos \theta_x + \cos \theta_x^{\text{in}})S(\dots), \\ S_G(\dots) &\xrightarrow{H_x} ik_0(\cos \theta_x + \cos \theta_x^{\text{in}})S_G(\dots). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, получаем формулу расщепления в “сильной” форме (3.13). Применение всей описанной процедуры с использованием оператора  $H_y$  вместо  $H_x$  дает формулу (3.14).

Нетрудно проверить, что для рассеивателя в виде полосы после пересчета констант к двумерному случаю формула (3.13) переходит в (1.11).

Таким образом, функция  $S$ , зависящая от четырех переменных, оказывается выраженной в виде интеграла от функции  $S_G$ , зависящей от трех переменных.

### Коротковолновая асимптотика

Формулы похожего вида (т.е. выражающие рассеянное поле в виде интеграла по границе) хорошо известны в теории дифракции. Такие формулы возникают при описании коротковолновой асимптотики с помощью геометрической теории дифракции [8, 9]. В рамках этой теории каждая точка ребра излучает дифракционные лучи, подчиняющиеся определенным законам. В результате полное поле представляется в виде суммы дифракционных и отраженных лучей.

Построенная выше формула расщепления по своей структуре отличается от результатов ГТД. Прежде всего, формула расщепления справедлива при любом соотношении длины волны и геометрических размеров рассеивателя. Кроме того, в представлении (3.13) и (3.14) не входят члены, соответствующие отраженным лучам. Вместе с тем, было бы интересно построить коротковолновую асимптотику формулы расщепления и сравнить полученный результат с результатами ГТД.

Введем векторы

$$\mathbf{k} = (k_0 \cos \theta_x, k_0 \cos \theta_y), \quad \mathbf{k}^{\text{in}} = (-k_0 \cos \theta_x^{\text{in}}, -k_0 \cos \theta_y^{\text{in}}),$$

Построим приближение для  $S_G$ , считая, что длина волны мала по сравнению с характерными размерами рассеивателя. Очевидно, в этом случае ребро рассеивателя локально представляет собой полуплоскость, и можно воспользоваться хорошо известным решением Зоммерфельда. Выполнив переход к диаграмме направленности, получаем

$$S_G(\theta_x, \theta_y; l) \approx \frac{k_0 e^{-i\pi/4}}{4\pi^{3/2}} \left( \sqrt{k_0^2 - k_\tau^2} + k_\eta \right)^{1/2} e^{i(k_x x_0 + k_y y_0)}, \quad (3.22)$$

где  $(x_0, y_0)$  — координаты точки  $l$  ребра рассеивателя,  $k_\eta$  и  $k_\tau$  — проекции вектора  $\mathbf{k}$  на направления, нормальное и тангенциальное к  $\Gamma$  (см. Рис. 3.3) т.е.

$$k_\eta = -k_0 \cos \theta_x \sin \Theta(l) + k_0 \cos \theta_y \cos \Theta(l),$$

$$k_\tau = k_0 \cos \theta_x \cos \Theta(l) + k_0 \cos \theta_y \sin \Theta(l).$$

Подставим (3.22) в формулу расщепления (3.13). Прежде всего, рассмотрим экспоненциальный множитель. Заметим, что подынтегральная функция быстро осциллирует везде, кроме стационарных точек контура  $\Gamma$ , т.е. таких точек, в

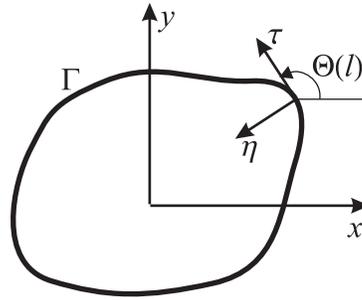
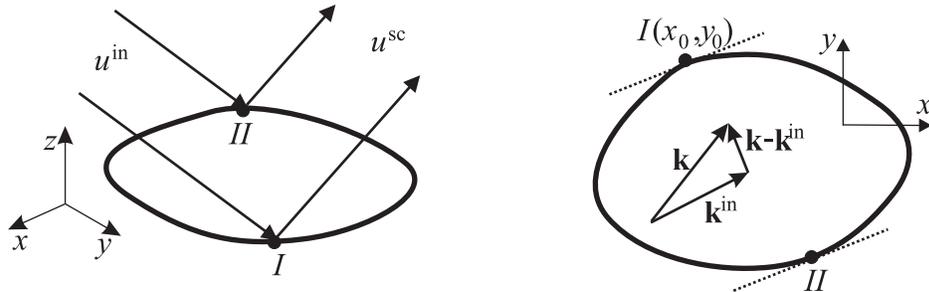
Рис. 3.3: К определению  $k_\eta$  и  $k_\tau$ 

Рис. 3.4: Стационарные точки

которых вектор  $\mathbf{k} - \mathbf{k}^{\text{in}}$  ортогонален вектору  $d\mathbf{l}$ . С точки зрения геометрической теории дифракции, дифракционные лучи именно от этих стационарных точек попадают в точку наблюдения.

Пусть  $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}^{\text{in}}$ . В простейшем случае (см. Рис. 3.4) стационарных точек две; это точки  $I$  и  $II$ . Оценка функции  $S$  представляет собой сумму

$$S \approx S_I + S_{II},$$

где  $S_I$  и  $S_{II}$  — оценки вкладов, даваемых стационарными точками. Рассмотрим, например, точку  $I$ . С помощью метода перевала вычислим главный член асимптотики интеграла (3.13):

$$S_I = S_I^e \times S_I^a \times S_I^c, \quad (3.23)$$

где  $S_I^e$ ,  $S_I^a$  и  $S_I^c$  — множители, отвечающие за фазы, угловые зависимости и

кривизну границы, соответственно:

$$\begin{aligned}
 S_I^e &= \exp\{-ik_0[x_0(\cos\theta_x + \cos\theta_x^{\text{in}}) + y_0(\cos\theta_y + \cos\theta_y^{\text{in}})]\}, \\
 S_I^a &= \frac{(\sqrt{k_0^2 - k_\tau^2 - k_\eta^{\text{in}}})^{1/2}(\sqrt{k_0^2 - k_\tau^2 + k_\eta})^{1/2}}{k_\eta - k_\eta^{\text{in}}}, \\
 S_I^c &= -\frac{k_0}{4\pi^{3/2}} \left( \frac{i}{(k_\eta - k_\eta^{\text{in}})d\Theta/dl} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Выражение для  $S_{II}$  имеет сходную структуру.

Можно заметить, что полученная оценка функции  $S$  в точности повторяет выражение, следующее из геометрической теории дифракции. Кроме того, легко проверить, что использование формулы (3.14) вместо (3.13) дает в точности такое же выражение.

### Дифракция электромагнитных волн

Практически без изменений только что проведенные рассуждения могут быть перенесены на электромагнитный случай. Отметим особенности, возникающие при рассмотрении дифракции электромагнитных волн.

1. Дифракционный коэффициент (с учетом поляризации) представляет собой тензорную функцию углов падения и рассеяния.
2. Для каждой точки ребра рассеивателя необходимо строить две краевые функции Грина: для источника, представленного точечным электрическим и магнитным током.

Выкладки, относящиеся к электромагнитному случаю, можно найти в [134].

## §4. Некоторые дальнейшие обобщения формулы расщепления

В настоящем параграфе будут описаны процедуры построения формул расщепления в физических ситуациях, отличающихся от ситуации, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Вывод формул расщепления остается таким же, как и в предыдущем параграфе (те же три шага), однако содержание этих шагов различно. Обратим внимание на ключевые моменты:

- выбор дифференциального оператора (оператора расщепления), обращающего в ноль падающую волну и сохраняющего граничные условия;
- анализ краевой асимптотики решения и его производной;
- подбор краевых функций Грина.

Эти элементы рассуждения будут в разных случаях реализовываться по-разному.

### Учет различных граничных условий

Прежде всего, рассмотрим плоскую трещину, аналогичную изображенной на Рис. 3.1. Пусть теперь на поверхностях трещины заданы граничные условия Неймана, а именно

$$\partial_z u = 0. \quad (4.1)$$

При этом предполагается, что в среде выполняется уравнение (3.1).

Очевидно, операторы  $H_x, H_y$  введенные в предыдущем параграфе, могут быть использованы и для этой задачи. Изменяются краевые асимптотики поля и, соответственно, краевые функции Грина.

Асимптотика полного поля вблизи ребра имеет вид

$$u = C(l)\rho^{1/2} \cos \frac{\phi}{2} + O(\rho^{3/2}) + \text{регулярные члены} \quad (4.2)$$

вместо (3.16). Очевидно, что рассеянное поле  $u^{\text{sc}}$  в данном случае антисимметрично по отношению к плоскости  $z = 0$ . Соответственно, краевая функция Грина  $v(x, y, z; l)$  также должна быть антисимметричной. Построим ее следующим образом. Разместим пару точечных источников с амплитудами  $-\pi\epsilon^{-1/2}/2$  и  $\pi\epsilon^{-1/2}/2$  в точках с локальными координатами  $(l, \rho = \epsilon, \phi = 0)$  и  $(l, \rho = \epsilon, \phi = 2\pi)$  соответственно. Этим локальным координатам соответствуют декартовы координаты

$$z = \pm 0, \quad x' = x_0 - \epsilon \sin \Theta(l), \quad y' = y_0 + \epsilon \cos \Theta(l).$$

Расположение источников показано на Рис. 4.1. Заметим, что источники расположены по разные стороны от трещины.

Решим неоднородную дифракционную задачу и возьмем предел  $\epsilon \rightarrow 0$ . Он и будет новой функцией  $v$ . Свойство (3.7) краевой функции Грина выполняется, однако вместо (3.8) следует взять

$$u^* = \frac{h(l) \cos(\phi/2)}{\rho^{1/2}} + O(\rho^{1/2}). \quad (4.3)$$

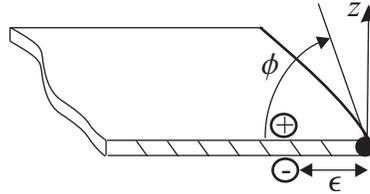


Рис. 4.1: Расположение источников в случае краевой функции Грина для задачи Неймана

Следуя далее процедуре, изложенной выше, получаем формулы расщепления

$$\begin{aligned} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) &= \\ &= \frac{4\pi i}{k_0^2 (\cos \theta_x + \cos \theta_x^{\text{in}})} \int_{\Gamma} S_G(\theta_x, \theta_y; l) S_G(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \sin \Theta(l) dl. \end{aligned} \quad (4.4)$$

и

$$\begin{aligned} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) &= \\ &= -\frac{4\pi i}{k_0^2 (\cos \theta_y + \cos \theta_y^{\text{in}})} \int_{\Gamma} S_G(\theta_x, \theta_y; l) S_G(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \cos \Theta(l) dl, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где функции  $S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}})$  и  $S_G(\theta_x, \theta_y; l)$  — дифракционный коэффициент для решения исходной задачи и диаграмма направленности для краевой функции Грина. Данные функции могут быть вычислены, если известны граничные значения поля  $u^{\text{sc}}$ :

$$\begin{aligned} S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) &= -\frac{ik_0^2}{4\pi^2} \sqrt{1 - (\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y)} \times \\ &\quad \iint u^{\text{sc}}(x, y, +0) e^{-ik_0(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y)} dx dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

и

$$S_G(\theta_x, \theta_y; l) = -\frac{ik_0^2}{4\pi^2} \sqrt{1 - (\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y)} \times$$

$$\iint v(x, y, +0; l) e^{-ik_0(x \cos \theta_x + y \cos \theta_y)} dx dy. \quad (4.7)$$

Интегрирование производится по верхней поверхности рассеивателя. Последний интеграл предполагается соответствующим образом регуляризованным.

Пусть теперь на поверхностях трещины заданы граничные условия импедансного типа

$$\pm \partial_z u + \beta u = 0, \quad (4.8)$$

где знак  $+$  выбирается для границы  $z = +0$ , а знак  $-$  для границы  $z = -0$ . Параметр  $\beta$  характеризует импеданс границы. Для определенности предполагаем, что значения этого параметра для обеих поверхностей трещины одинаковы.

Снова необходимо проанализировать асимптотику решения на ребре и построить соответствующие краевые функции Грина.

Задача об импедансной границе сложнее задач с граничными условиями Дирихле и Неймана, поскольку в задачах с идеальными граничными условиями рассеянное поле оказывается либо симметричным, либо антисимметричным. В нашем же случае приходится вычислять обе компоненты поля.

Построение асимптотики поля вблизи ребра производится с помощью ряда Мейкснера [154, 155]. Первые несколько членов этого ряда имеют вид

$$u^{\text{sc}} = E(l) \left(1 - \frac{\beta}{\pi} \rho \ln \rho \cos \phi\right) + C(l) \rho^{1/2} \cos \frac{\phi}{2} + o(\rho), \quad (4.9)$$

где  $C(l)$  и  $E(l)$  — неизвестные коэффициенты в асимптотиках. Соответственно, функция  $H_x[u^{\text{sc}}]$  имеет следующие члены асимптотики, не удовлетворяющие условию Мейкснера:

$$H_x[u^{\text{sc}}] = -\sin \Theta(l) \left[-\frac{\beta}{\pi} E(l) \ln \rho + C(l) \rho^{-1/2} \cos \frac{\phi}{2} + \dots\right] \quad (4.10)$$

Для компенсации этих членов необходимо построить краевые функции Грина  $v_1(x, y, z; l)$  и  $v_2(x, y, z; l)$ , обладающие тем свойством, что функция

$$u^* = \int_{\Gamma} [h_1(l) v_1(x, y, z; l) + h_2(l) v_2(x, y, z; l)] dl$$

при произвольных достаточно гладких плотностях  $h_1$  и  $h_2$  имеет краевую асимптотику

$$u^* = h_1(l) \ln \rho + h_2(l) \rho^{-1/2} \cos \frac{\phi}{2} + \dots \quad (4.11)$$

Наличие пары краевых функций Грина связано с тем, что ни симметричная, ни антисимметричная задача в данном случае не являются тривиальными.

Одна краевая функция Грина описывает симметричную, а другая — антисимметричную задачу.

Как и в предыдущих примерах, не будем пытаться построить функции  $v_{1,2}$  явно (поскольку сделать это не проще, чем решить исходную задачу дифракции). Заметим лишь, что функция  $v_2$  строится в результате того же предельного перехода, что и в задаче с граничными условиями Неймана, а для построения функции  $v_1$  необходимо разместить точечный источник амплитудой  $2\pi$  рядом с краем рассеивателя.

Итак, пусть функции  $v_{1,2}$ , обладающие требуемыми свойствами, построены. В соответствии с предложенной выше процедурой, можно сделать заключение, что

$$H_x[u^{\text{sc}}] = - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\beta E(l)}{\pi} v_1(x, y, z; l) + \frac{C(l)}{2} v_2(x, y, z; l) \right\} \sin \Theta(l) dl. \quad (4.12)$$

Для определения функций  $E$  и  $C$  воспользуемся теоремой взаимности. Опуская соответствующие выкладки, запишем результат:

$$E(l) = -\frac{16\pi^3}{k_0} S_1(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l), \quad C(l) = \frac{8\pi}{k_0} S_2(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l), \quad (4.13)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — диаграммы направленности функций  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно.

Окончательно получаем

$$S(\theta_x, \theta_y; \theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}) = -\frac{4\pi^2 i}{k_0^2 (\cos \theta_x + \cos \theta_x^{\text{in}})} \times \\ \times \int_{\Gamma} \left\{ 4\beta S_1(\theta_x, \theta_y; l) S_1(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \mp \frac{1}{\pi} S_2(\theta_x, \theta_y; l) S_2(\theta_x^{\text{in}}, \theta_y^{\text{in}}; l) \right\} \sin \Theta(l) dl. \quad (4.14)$$

В последней формуле считаем, что функция  $S_2$  определена для точек  $z > 0$ ; верхний знак выбирается для верхней полуплоскости, нижний — для нижней.

### Учет поверхностных волн

Рассмотрим *двумерную* задачу дифракции, геометрия которой изображена на Рис. 4.2. Среда занимает полупространство  $z > 0$ . На границе этого полупространства, т.е. на прямой  $z = 0$ , задано импедансное граничное условие

$$\partial_z u + \beta u = 0, \quad \text{Re } \beta > 0 \quad (4.15)$$

В полупространстве присутствуют  $N$  плоских “щелей”, параллельных поверхности. Пусть, для определенности, на поверхностях щелей заданы граничные условия Неймана.

Пусть на систему щелей из области  $z > 0$  падает плоская волна. Очевидно, полное поле состоит из суммы падающего, отраженного от поверхности и рассеянного полей. Рассеянное поле включает две компоненты. Во-первых, это цилиндрическая волна, асимптотика которой может быть записана в виде

$$u \approx -\frac{e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} S(\theta; \theta^{\text{in}}).$$

Во вторых, это поверхностная волна, записываемая в виде

$$u = A^\pm \exp\{-\beta z \pm i\sqrt{k_0^2 + \beta^2} x\} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Краевые функции Грина, как и раньше, представляют собой решения задач с точечными источниками, расположенными вблизи вершин трещин. Очевидно, всего имеется  $2N$  краевых функций Грина.

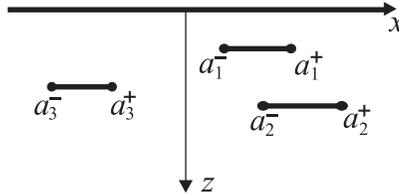


Рис. 4.2: Геометрия задачи, допускающей распространение поверхностных волн

Дифракционный коэффициент  $S$  выражается в виде формулы расщепления, включающей сумму  $2N$  произведений диаграмм направленности краевых функций Грина. Вывод соответствующей формулы ничем не отличается от проведенного выше.

Очевидно, если ввести в процедуру вывода формулы расщепления поверхностные волны, получится выражение

$$A^\pm(\theta^{\text{in}}) = -\frac{4\pi}{k_0} \sum_{j=1}^N \frac{[S_G(\theta^{\text{in}}; a_j^+) A^\pm(a_j^+) - S_G(\theta^{\text{in}}; a_j^-) A^\pm(a_j^-)]}{[\pm\sqrt{\alpha^2 + k_0^2} + k_0 \cos \theta^{\text{in}}]}, \quad (4.16)$$

где  $S_G$  — диаграммы направленности краевых функций Грина, соответствующих источникам в вершинах  $a_j^\pm$ , а величины  $A^\pm(a_j^\pm)$  — амплитуды поверхностных волн, возникающих во вспомогательных задачах.

### Случай более сложной геометрии рассеивателя

До сих пор все задачи, для которых строились формулы расщепления, имели очень специфическую геометрию: все границы в них были параллельны (хотя и

не обязательно находились в одной плоскости). Оказывается, можно построить формулы расщепления и для задач более сложной геометрии. Ниже рассматривается пример такой задачи.

Задача двумерна. Среда занимает область  $0 < \theta < 3\pi/2$  в полярных координатах  $(r, \theta)$  (см. Рис. 4.3). На границах  $\theta = 0$  и  $\theta = 3\pi/2$  выполняются граничные условия Дирихле. На рассеиватель падает плоская волна

$$u^{\text{in}} = \exp\{-ik_0 r \cos(\theta - \theta^{\text{in}})\}.$$

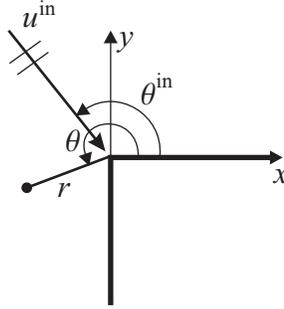


Рис. 4.3: Дифракция на прямом угле

Оператор  $H_x$ , использованный выше, здесь не годится, поскольку он не сохраняет граничные условия, заданные при  $\theta = 3\pi/2$ . Вместо него введем новый оператор

$$H[u] = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \cos^2 \theta^{\text{in}} \right) u. \quad (4.17)$$

Заметим, что поскольку поле  $u$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1) имеет место тождество

$$H[u] = - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \sin^2 \theta^{\text{in}} \right) u. \quad (4.18)$$

Теперь очевидно, что оператор сохраняет граничные условия Дирихле на обеих частях границы.

Исследуем асимптотику решения дифракционной задачи в вершине. В задаче о клине локальные и глобальные координаты совпадают, т.е.  $\rho = r$ ,  $\phi = \theta$ . Разложение имеет вид

$$u = A\rho^{2/3} \sin(2\phi/3) + B\rho^{4/3} \sin(4\phi/3) + O(\rho^2). \quad (4.19)$$

Функция  $H[u]$  имеет асимптотику

$$H[u] = \frac{2}{9}A\rho^{-4/3} \sin\left(\frac{4\phi}{3}\right) - \frac{4}{9}B\rho^{-2/3} \sin\left(\frac{2\phi}{3}\right) + o(1). \quad (4.20)$$

Выписанные члены разложения нарушают условия Мейкснера.

Построим краевые функции Грина. Этих функций будет две: симметричная и антисимметричная. Опишем процедуру построения этих функций. Рассмотрим симметричный случай. Поместим источник в точку с координатами  $(\epsilon, 3\pi/4)$ . Пусть сила источника равна  $\epsilon^\mu$  ( $\mu$  будет определено позднее). Построим асимптотику решения вблизи вершины. Для этого воспользуемся методом конформных отображений:

$$u_\epsilon = \frac{\epsilon^\mu}{2\pi} \operatorname{Re}[\ln(z_+^{2/3} - i\epsilon^{2/3}) - \ln(z_+^{2/3} + i\epsilon^{2/3}) + \dots], \quad (4.21)$$

где  $z_+ = \rho \cos \phi + i\rho \sin \phi$ .

Вычислим внешнюю асимптотику этого решения, т.е. поведение  $u_\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  и при фиксированных  $\rho$  и  $\phi$ :

$$u_\epsilon = \frac{\epsilon^\mu}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{\epsilon}{z_+} \right)^{2/3} \right] + \dots$$

Параметр  $\mu$  выбирается таким образом, чтобы решение стремилось к конечному пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ , т.е., очевидно,  $\mu = -2/3$ . Предел  $u_\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  назовем  $v_s$ . Имеет место асимптотика

$$v_s(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \rho^{-2/3} \sin \left( \frac{2\phi}{3} \right) + O(\rho^{2/3}) \quad (4.22)$$

Построим тем же способом антисимметричную краевую функцию Грина. Разместим источники в точках  $(\epsilon, 3\pi/4 \mp \delta)$ , где  $0 < \delta < 3\pi/4$ . Пусть силы этих источников равны, соответственно,  $\pm \epsilon^\mu$ .

Асимптотика решения, вычисленная указанным выше способом, есть

$$u_\epsilon = -\frac{2\epsilon^\mu}{\pi} \sin \frac{4\delta}{3} \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{\epsilon}{z_+} \right)^{4/3} \right] + \dots$$

Переходя к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$  и полагая  $\mu = -4/3$ ,  $\delta = 3\pi/8$ , получаем асимптотику антисимметричной краевой функции Грина

$$v_a = -\frac{1}{\pi} \rho^{-4/3} \sin \left( \frac{4\phi}{3} \right) + o(1). \quad (4.23)$$

Сравнивая асимптотики (4.22) и (4.23) с (4.20), получаем “слабую” формулу расщепления

$$H[u] = -\frac{2\pi}{9} A v_a + \frac{4\pi}{9} B v_s. \quad (4.24)$$

Заметим, что оператор  $H$  обращает в ноль падающую и отраженные волны. Везде, кроме зоны полутени, рассеянное поле может быть записано с помощью дифракционного коэффициента

$$u \approx -\frac{e^{ik_0r-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0r}} S(\theta; \theta^{\text{in}}).$$

Введем диаграммы направленности для краевых функций Грина:

$$v_{s,a} \approx -\frac{e^{ik_0r-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0r}} S_{s,a}(\theta).$$

Для диаграмм направленности формула расщепления имеет вид

$$k_0^2(\cos^2 \theta^{\text{in}} - \cos^2 \theta) S(\theta; \theta^{\text{in}}) = -\frac{2\pi}{9} A S_a(\theta) + \frac{4\pi}{9} B S_s(\theta). \quad (4.25)$$

Наконец, применим теорему взаимности и найдем коэффициенты  $A$  и  $B$  в терминах функций  $S_{s,a}$ :

$$A = S_s(\theta^{\text{in}}), \quad B = \frac{S_a(\theta^{\text{in}})}{2}.$$

Формула расщепления записывается в виде:

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = \frac{2\pi}{9k_0^2(\cos^2 \theta^{\text{in}} - \cos^2 \theta)} [S_s(\theta) S_a(\theta^{\text{in}}) - S_a(\theta) S_s(\theta^{\text{in}})]. \quad (4.26)$$

Для задачи дифракции на прямом угле известно точное решение, поэтому большой ценности формула (4.26) не представляет. Однако тот же метод может быть применен к задаче дифракции на любом двумерном рассеивателе, имеющем только прямолинейные участки границы, параллельные координатным осям. Пример такого рассеивателя приведен на Рис. 4.4.

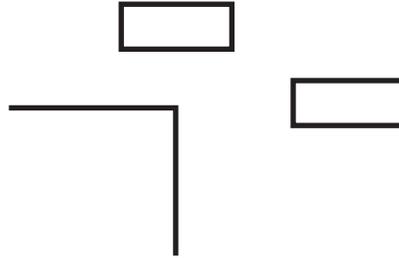


Рис. 4.4: Пример рассеивателя более сложной формы

Усложнив метод, а именно увеличив порядок оператора  $H$ , можно построить формулы расщепления для двумерных задач, содержащие не только прямые углы, но и любые углы, рационально соотносящиеся с  $\pi$ . Пусть рассматривается двумерная задача дифракции на угловой области с раскрывом  $m\pi/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые взаимно простые числа. Пусть одна из граней совпадает с положительной полуосью оси  $x$ . Построим оператор  $H$ , обладающий свойствами оператора расщепления, т.е. сохраняющий уравнение Гельмгольца и граничные условия на сторонах рассеивателя, а также аннулирующий падающую волну. Такой оператор дается формулой

$$H_n = (-ik_0)^n \left[ T_n \left( \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \right) - T_n(\cos \theta^{\text{in}}) \right], \quad (4.27)$$

где  $T_n$  — полином Чебышева, определяемый равенством

$$T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi).$$

Очевидно, оператор  $H_n$  сохраняет уравнение Гельмгольца и аннулирует падающую волну. Покажем, что он сохраняет граничные условия типа Дирихле, Неймана или импедансные. Поскольку оператор содержит только дифференцирования по оси  $x$ , он сохраняет граничное условие на стороне угла, параллельной оси  $x$ . Осталось показать, что оператор сохраняет граничные условия на другой стороне.

Введем операторы

$$H_x = \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial x}, \quad H_y = \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.28)$$

Для поля, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, в свободном пространстве и на прямолинейных участках границы выполняется тождество

$$H_x^2 + H_y^2 = I, \quad (4.29)$$

где  $I$  — тождественный оператор.

Введем также оператор дифференцирования вдоль второй грани клина:

$$H_{x'} = \cos \frac{m\pi}{n} H_x + \sin \frac{m\pi}{n} H_y. \quad (4.30)$$

Докажем, что

$$T_n(H_x) = (-1)^m T_n(H_{x'}). \quad (4.31)$$

Для этого заметим, что для полиномов Чебышева выполняется равенство

$$T_n(\cos \varphi) = (-1)^m T_n \left( \cos \frac{m\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{m\pi}{n} \sin \varphi \right). \quad (4.32)$$

А с алгебраической точки зрения, благодаря тождеству (4.29), пара  $(H_x, H_y)$  не отличается от пары  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

Таким образом, оператор  $H_n$  может быть переписан как оператор, содержащий только дифференцирования вдоль второй стороны угла. Это означает, что данный оператор сохраняет граничное условие на второй стороне рассеивателя.

Оператор  $H_n$  может быть использован для построения формулы расщепления. Он повышает порядок особенности в вершине на  $n$ , т.е. требует введения  $n$  различных краевых функций Грина. Детальное описание краевых функций Грина, а также структуры формулы расщепления в этом случае, можно найти в [133].

Этот же оператор может быть применен в случае рассеивателя (не обязательно углового), состоящего из прямолинейных участков, все углы между которыми кратны  $\pi/n$ .

Некоторые дальнейшие обобщения формул расщепления (например, на практически важный случай дифракции на угле параллелепипеда) описаны в работе [137]. Интересный с методической точки зрения результат получен в [136], где для угловой области с произвольным (не обязательно рациональным) углом строится формула расщепления с помощью нелокального псевдодифференциального оператора.

## §5. Основные результаты главы 1

1. Предложен общий способ вывода формул расщепления для дифракционных задач. Способ заключается в выполнении следующих основных шагов:
  - а) выбирается оператор расщепления, сохраняющий основное уравнение и граничные условия и аннулирующий падающую плоскую волну;
  - б) вводятся краевые функции Грина, представляющие собой решение однородной задачи с более высоким порядком роста вблизи ребер рассеивателя;
  - в) исследуется действие оператора расщепления на решение исходной задачи, сверхсингулярные асимптотики компенсируются вычитанием соответствующих комбинаций краевых функций Грина;
  - г) применяется теорема единственности;
  - д) краевые асимптотики решения исходной задачи выражаются из краевых функций Грина с помощью принципа взаимности.
2. Указан вид оператора расщепления для двумерных задач дифракции, содержащих рациональные углы, а также некоторые другие обобщения формулы расщепления.

## Глава 2

# Обобщение метода Винера-Хопфа для дифракции на двух полосах. Спектральное уравнение

### §6. Постановка функциональных задач для краевых функций Грина

Обратимся к задаче дифракции на двух полосах, сформулированной в §1. Напомним, что данная задача эквивалентна плоской задаче дифракции на двух отрезках. Рассматриваются граничные условия Дирихле. В §1 были введены краевые функции Грина и показано, что выполняется формула расщепления (1.11), связывающая дифракционный коэффициент исходной задачи  $S(\theta; \theta^{\text{in}})$  с диаграммами направленности краевых функций Грина  $S^m(\theta)$ . В настоящей главе строятся уравнения для отыскания  $S^m(\theta)$ . При этом используется метод, родственному методу Винера-Хопфа.

#### Спектральные функции для краевых функций Грина

Задача о нахождении краевых функций Грина для дифракции на двух отрезках представляет собой типичную задачу со смешанными граничными условиями. Рассмотрим полуплоскость  $y \geq 0$  (см. Рис. 1.1). На отрезках  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_3, a_4)$  заданы граничные условия Дирихле, а на интервалах  $(-\infty, a_1)$ ,  $(a_2, a_3)$ ,  $(a_4, \infty)$  — граничные условия Неймана (они следуют из симметрии задачи). Кроме того, вблизи одной из вершин располагается источник. По аналогии с методом Винера-Хопфа, введем “спектральные функции” для данной задачи. Как известно, для применения метода Винера-Хопфа вводятся преобразования Фурье поля и его производных на участках границы. В нашем случае граница разбита на пять участков, поэтому потребуется ввести пять неизвестных функций, зависящих от спектрального параметра. На отрезках  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_3, a_4)$  это

будут преобразования нормальной производной поля, а на интервалах  $(-\infty, a_1)$ ,  $(a_2, a_3)$ ,  $(a_4, \infty)$  — преобразования самого поля.

Сложность заключается в том, что в силу асимптотик (1.9) интеграл, содержащий нормальные производные поля, расходится, а потому требует регуляризации. Воспользуемся для построения спектральных функций методом, дающим регуляризацию и позволяющим легко вывести функциональное уравнение.

Рассмотрим контура  $\Gamma_0 \dots \Gamma_4$ , показанные на Рис. 6.1. Контур  $\Gamma_0$  идет по оси  $x$  из  $-\infty$  до  $a_1 - \epsilon$ , контур  $\Gamma_1$  включает интервал  $(a_1 + \epsilon, a_2 - \epsilon)$  и две полуокружности радиуса  $\epsilon$ , проведенные вокруг точек  $a_1$  и  $a_2$ , контур  $\Gamma_2$  совпадает с отрезком  $(a_2 + \epsilon, a_3 - \epsilon)$ , контур  $\Gamma_3$  идет по отрезку  $(a_3 + \epsilon, a_4 - \epsilon)$  и по двум полуокружностям, проведенным около точек  $a_3$  и  $a_4$ , контур  $\Gamma_4$  идет по полупрямой  $(a_4, \infty)$  по оси  $x$ .

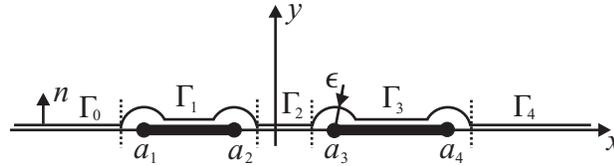


Рис. 6.1: Контура для введения спектральных функций

Введем функцию

$$w(x, y) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \exp\{ikx + i\sqrt{k_0^2 - k^2}y\}, \quad (6.1)$$

где  $k$  — действительный параметр. При  $|k| < k_0$  функция  $w$  представляет собой плоскую волну, уходящую в положительном направлении оси  $y$ . При действительном  $k_0$  и  $|k| > k_0$  функция представляет собой неоднородную волну, затухающую при  $y \rightarrow \infty$ . Отметим, что в обоих случаях  $w(x, y)$  является решением уравнения Гельмгольца (1.1).

Введем единичный нормальный вектор  $n$  к контуру, как показано на рисунке.

Построим спектральные функции следующим образом. Сконструируем интегралы типа формулы Грина, в которые входит функция  $w$  и одна из краевых функций Грина  $v^m$ :

$$U_j^m(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_j} [w \partial_n v^m - v^m \partial_n w] dl, \quad m = 1 \dots 4, \quad j = 0 \dots 4. \quad (6.2)$$

Упростим эти интегралы. Контура состоит из прямых и полукруглых дуг. На прямых участках либо  $v^m = 0$ , либо  $\partial_n v^m = 0$ . Таким образом, в правой части (6.2) один из членов тождественно равен нулю. Обратимся к полукруглым

участкам контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ . Один из контуров (проведенный около вершины  $a_m$ ) расположен около источника краевой функции Грина  $v^m$ . Вблизи соответствующей вершины поле имеет асимптотику  $v^m \sim \rho^{-1/2} \sin \phi/2$ , где  $\rho, \phi$  — радиальные координаты вблизи соответствующей вершины. Вблизи остальных вершин асимптотика  $v^m \sim \rho^{1/2} \sin \phi/2$  (см. (1.9)). Нетрудно показать, что последняя асимптотика гарантирует, что интеграл по дуге стремится к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Соответственно, интегралы по прямолинейным участкам, примыкающим к этим дугам, стремятся к конечным пределам при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Интеграл по дуге при вершине  $a_m$  осуществляет регуляризацию интеграла по соответствующему прямолинейному участку контура  $\Gamma_1$  или  $\Gamma_3$ . То есть спектральные функции  $U_j^m$  могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 U_0^m(k) &= \int_{-\infty}^{a_1} v^m(x, +0) e^{ikx} dx, \\
 U_1^m(k) &= \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{a_1}^{a_2} \partial_y v^m(x, +0) e^{ikx} dx, \\
 U_2^m(k) &= \int_{a_2}^{a_3} v^m(x, +0) e^{ikx} dx, \\
 U_3^m(k) &= \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{a_3}^{a_4} \partial_y v^m(x, +0) e^{ikx} dx, \\
 U_4^m(k) &= \int_{a_4}^{\infty} v^m(x, +0) e^{ikx} dx,
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

где несобственные интегралы регуляризованы с помощью предельного перехода (6.2).

## Связь спектральных функций и диаграмм направленности

Поскольку спектральные функции содержат Фурье-образ поля и его нормальной производной на оси  $x$ , появляется возможность стандартным образом вычислить диаграммы направленности краевых функций Грина. Например, для этого можно взять функцию Грина полуплоскости с граничным условием Дирихле и отнести точку наблюдения на бесконечность. Несложные выкладки дают

$$S^m(\theta) = \sqrt{k_0^2 - k^2} (U_1^m(k) + U_3^m(k)), \tag{6.4}$$

где

$$k = k(\theta) = -k_0 \cos \theta. \quad (6.5)$$

## Функциональные уравнения

Спектральные функции связаны функциональными уравнениями

$$U_0^m(k) + U_1^m(k) + U_2^m(k) + U_3^m(k) + U_4^m(k) = 0 \quad (6.6)$$

для каждого  $m$ . Для того чтобы это показать, замкнем контур  $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  дугой большого радиуса в верхней полуплоскости. Назовем эту дугу  $\Gamma'$ . Суммарный интеграл по замкнутому контуру равен нулю по теореме Грина:

$$\int_{\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma'} [w \partial_n v^m - v^m \partial_n w] dl = 0, \quad m = 1 \dots 4.$$

Интеграл по дуге  $\Gamma'$  стремится к нулю при стремлении радиуса к бесконечности, благодаря условиям излучения. Таким образом, сумма интегралов

$$\int_{\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4} [w \partial_n v^m - v^m \partial_n w] dl = 0, \quad m = 1 \dots 4,$$

что в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  дает (6.6).

## Свойства спектральных функций

Ранее аргумент  $k$  был объявлен действительным. Интегралы (6.3) позволяют построить аналитические продолжения спектральных функций в область комплексных переменных. Эти интегралы позволяют продолжить функции  $U_1^m$ ,  $U_2^m$ ,  $U_3^m$  на всю комплексную плоскость, функцию  $U_0^m$  — в нижнюю полуплоскость, а  $U_4^m$  — в верхнюю полуплоскость.

Выпишем свойства регулярности для аналитических продолжений.

- а) функции  $U_0^m$  регулярны в нижней полуплоскости;
- б) функции  $U_4^m$  регулярны в верхней полуплоскости;
- в) функции  $U_2^m$ ,  $\sqrt{k_0^2 - k^2} U_1^m$ ,  $\sqrt{k_0^2 - k^2} U_3^m$  — целые.

Сформулируем оценки роста неизвестных функций. Эти ограничения следуют из асимптотик (1.9) и леммы Ватсона.

$$\begin{aligned} U_1^m(k) &= i e^{ia_1 k} (k_0^2 - k^2)^{-1/2} [\delta_{m,1} (-ik)^{1/2} + C_1^m (-ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})], \\ U_2^m(k) &= e^{ia_2 k} [-\delta_{m,2} (-ik)^{-1/2} + C_2^m (-ik)^{-3/2} + O(k^{-5/2})], \\ U_3^m(k) &= i e^{ia_3 k} (k_0^2 - k^2)^{-1/2} [\delta_{m,3} (-ik)^{1/2} + C_3^m (-ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})], \\ U_4^m(k) &= e^{ia_4 k} [-\delta_{m,4} (-ik)^{-1/2} + C_4^m (-ik)^{-3/2} + O(k^{-5/2})] \end{aligned} \quad (6.7)$$

в верхней полуплоскости, т.е. при  $0 < \text{Arg}[k] < \pi$  и

$$\begin{aligned}
 U_0^m(k) &= e^{ia_1 k} [-\delta_{m,1}(ik)^{-1/2} + C_1^m(ik)^{-3/2} + O(k^{-5/2})], \\
 U_1^m(k) &= ie^{ia_2 k}(k_0^2 - k^2)^{-1/2} [\delta_{m,2}(ik)^{1/2} + C_2^m(ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})], \\
 U_2^m(k) &= e^{ia_3 k} [-\delta_{m,3}(ik)^{-1/2} + C_3^m(ik)^{-3/2} + O(k^{-5/2})], \\
 U_3^m(k) &= ie^{ia_4 k}(k_0^2 - k^2)^{-1/2} [\delta_{m,4}(ik)^{1/2} + C_4^m(ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})]
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

в нижней полуплоскости, т.е. при  $-\pi < \text{Arg}[k] < 0$ . Здесь  $C_n^m$  — константы из (1.9).

Будем считать константы  $C_n^m$  неизвестными величинами. Мы построили набор из четырех функциональных задач, индексруемых индексом  $m = 1 \dots 4$ , включающих функциональное уравнение (6.6), условия аналитичности (общие для всех задач), и ограничения на рост неизвестных функций (6.7), (6.8). Отметим, что задачи различаются только ограничениями на рост неизвестных функций. Построенные функциональные задачи представляют собой задачи типа Винера-Хопфа с неизвестными целыми функциями.

## §7. Спектральное уравнение для краевых функций Грина

### Вывод спектрального уравнения

Построим матрицу из неизвестных спектральных функций

$$\mathbf{U}(k) = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 & U_4^1 \\ U_1^2 & U_2^2 & U_3^2 & U_4^2 \\ U_1^3 & U_2^3 & U_3^3 & U_4^3 \\ U_1^4 & U_2^4 & U_3^4 & U_4^4 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Каждая строка этой матрицы состоит из спектральных функций, относящихся к одной краевой функции Грина.

**ТЕОРЕМА 7.1** Матрица  $\mathbf{U}$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mathbf{U}' = \mathbf{K}\mathbf{U}, \quad (7.2)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной  $k$ , а коэффициент имеет вид

$$\mathbf{K}(k) = \begin{pmatrix} ia_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ia_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ia_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ia_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{k - k_0} \mathbf{K}^+ + \frac{1}{k + k_0} \mathbf{K}^-, \quad (7.3)$$

$\mathbf{K}^+$  и  $\mathbf{K}^-$  — постоянные по переменной  $k$  матрицы.

Уравнение (7.2) будем называть *спектральным уравнением*.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Заметим, что в матрицу  $\mathbf{U}$  входят не все спектральные функции. В нее не входят функции с нижним индексом, равным 0. Воспользовавшись функциональными уравнениями (6.6), можно показать, что для столбца, сформированного из оставшихся функций, выполняется такое же уравнение:

$$\begin{pmatrix} U_0^1 \\ U_0^2 \\ U_0^3 \\ U_0^4 \end{pmatrix}' = \mathbf{K} \begin{pmatrix} U_0^1 \\ U_0^2 \\ U_0^3 \\ U_0^4 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшей целью будет показать, что матрица коэффициентов  $\mathbf{K}$  спектрального уравнения имеет достаточно простую структуру. Для этого рассмотрим (7.2) как систему линейных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы  $\mathbf{K}$ , считая  $U_n^m$  известными функциями. Решим эту систему с помощью правила Крамера. Элементы матрицы выражаются в виде отношений определителей

$$K_{m,n} = D_{m,n}(k)/D(k), \quad (7.4)$$

где  $D$  определяется формулой

$$D = \begin{vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 & U_1^4 \\ U_2^1 & U_2^2 & U_2^3 & U_2^4 \\ U_3^1 & U_3^2 & U_3^3 & U_3^4 \\ U_4^1 & U_4^2 & U_4^3 & U_4^4 \end{vmatrix}, \quad (7.5)$$

а каждый из определителей  $D_{m,n}$  получается из  $D$  путем замены  $n$ -ого столбца на производную  $m$ -ого столбца, например,

$$D_{2,3} = \begin{vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & (U_1^2)' & U_1^4 \\ U_2^1 & U_2^2 & (U_2^2)' & U_2^4 \\ U_3^1 & U_3^2 & (U_3^2)' & U_3^4 \\ U_4^1 & U_4^2 & (U_4^2)' & U_4^4 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим в качестве примера определитель  $D$  (остальные рассматриваются так же). С помощью функциональных уравнений (6.6) и общих свойств определителей можно построить второе представление  $D$ , в которое входят функции  $U_0^m \dots U_3^m$ :

$$D = - \begin{vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & U_1^3 & U_1^4 \\ U_2^1 & U_2^2 & U_2^3 & U_2^4 \\ U_3^1 & U_3^2 & U_3^3 & U_3^4 \\ U_0^1 & U_0^2 & U_0^3 & U_0^4 \end{vmatrix}. \quad (7.6)$$

Исследуем свойства определителя  $D$  как функции  $k$ . Представление (7.5) дает возможность проанализировать поведение  $D$  в верхней полуплоскости. Пользуясь свойствами регулярности и оценками роста, наложенными на функции  $U_n^m$ , находим, что в верхней полуплоскости произведение  $(k^2 - k_0^2)D(k)$  регулярно и растет как  $k^{-2}\gamma(k)$ , где

$$\gamma(k) = e^{ik(a_1+a_2+a_3+a_4)}. \quad (7.7)$$

Следовательно, функция  $(k^2 - k_0^2)\gamma^{-1}(k)D(k)$  регулярна в верхней полуплоскости переменной  $k$  и растет там не быстрее константы.

Используя представление (7.6), можно исследовать поведение  $D$  в нижней полуплоскости. Рассмотрев условия регулярности и оценки роста, убеждаемся,

что функция  $(k^2 - k_0^2)\gamma^{-1}(k)D(k)$  регулярна в нижней полуплоскости и растет не быстрее константы. Применяя теорему Лиувилля, заключаем, что данная функция тождественно равна константе. Для того, чтобы найти эту константу, рассмотрим старшие члены асимптотических разложений (6.7). Легко видеть, что константа равна единице, и

$$D(k) = \frac{\gamma(k)}{k^2 - k_0^2}. \quad (7.8)$$

В результате применения этой же техники к определителям  $D_{m,n}$  получаем, что все элементы матрицы  $\mathbf{K}$  могут быть представлены в виде  $B_2(k)/(k_0^2 - k^2)$ , где  $B_2$  — полином степени 2, свой для каждого элемента матрицы. Более детальное исследование определителей, опирающееся на асимптотические разложения (6.7) и (6.8), дает представление (7.3).

Таким образом, коэффициенты уравнения (7.2) известны с точностью до 32 неопределенных констант.  $\square$

Уравнение (7.2) с коэффициентами (7.3) — ключевой результат работы. К сожалению, аналитическое решение уравнения типа (7.2) неизвестно.

Для того чтобы воспользоваться уравнением (7.2), необходимо найти матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ , а также начальные условия, т.е. значения функций  $U_n^m$  в какой-либо точке  $k = k_{\text{ref}}$ . Существует принципиальная возможность сделать это, рассматривая уравнение (7.2) совместно с условиями регулярности и оценками роста как *задачу определения параметров*.

### Связь элементов матриц $\mathbf{K}^\pm$ с константами $C_n^m$

К сожалению, не удастся построить выражения для коэффициентов  $\mathbf{K}^\pm$ , используя  $C_n^m$ . Это будет сделано позднее при выводе спектрального уравнения из координатных. При этом в выражение войдут константы  $E_n^m$ , относящиеся к краевым функциям Грина соответствующей задачи Неймана. Здесь мы приводим лишь некоторые тождества, важные для дальнейшего изложения.

Рассмотрим поведение вспомогательных функций  $U_n^m(k)$  на бесконечности. Для анализа коэффициентов уравнения можно воспользоваться асимптотическими разложениями (6.7) и (6.8). Асимптотика определителя  $D$  есть

$$D(k) = \gamma(k)[k^{-2} + i(C_1^1 - C_2^2 + C_3^3 - C_4^4)k^{-3} + O(k^{-4})], \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Сравнивая это разложение с (7.8), приходим к соотношению

$$C_1^1 - C_2^2 + C_3^3 - C_4^4 = 0. \quad (7.9)$$

Асимптотика определителей  $D_{m,m}$ , соответствующих диагональным элементам матриц  $\mathbf{K}^\pm$ , есть

$$D_{m,m}(k) = ia_m k^{-2} + (i(C_1^1 - C_2^2 + C_3^3 - C_4^4) - 1/2)k^{-3} + O(k^{-4}).$$

Подставляя сюда (7.9) и учитывая форму коэффициентов (7.3), получаем

$$K_{m,m}^+ + K_{m,m}^- = -1/2, \quad (7.10)$$

где  $K_{m,n}^\pm$  — элементы матриц  $\mathbf{K}^\pm$ .

Асимптотика недиагональных элементов есть

$$D_{m,n} = \gamma(k)[(-1)^{n-1}C_n^m(a_m - a_n)k^{-3} + O(k^{-4})],$$

следовательно,

$$K_{m,n}^+ + K_{m,n}^- = (-1)^{n-1}(a_m - a_n)C_n^m \quad \text{при } m \neq n. \quad (7.11)$$

## §8. Эволюционные уравнения

### Эволюционные уравнения для вспомогательных функций

До сих пор рассматривалась зависимость функций  $U_n^m$  от переменной  $k$ . Очевидно, что эти функции зависят также от таких параметров задачи, как  $k_0$  и  $a_1 \dots a_4$ . В настоящем параграфе будет описана зависимость решений и, что более важно, коэффициентов спектрального уравнения от  $a_1 \dots a_4$ . Дифференциальные уравнения, описывающие зависимость тех или иных величин от данных параметров, будем называть *эволюционными*.

ТЕОРЕМА 8.1 *Выполняются уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \mathbf{U} = \mathbf{A}^j \mathbf{U} \quad (8.1)$$

*с коэффициентами*

$$A_{m,n}^j(k) = ik \delta_{j,m} \delta_{m,n} + \frac{(K_{m,n}^+ + K_{m,n}^-)(\delta_{j,n} - \delta_{j,m})}{a_n - a_m}, \quad (8.2)$$

где предполагается, что второе слагаемое равно нулю при  $m = n$ ;  $K_{m,n}^\pm$  — элементы матриц  $\mathbf{K}^\pm$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Элементы матриц  $\mathbf{A}^j$  могут быть найдены в результате формального решения уравнений (8.1) относительно этих матриц. Элементы матриц  $\mathbf{A}^j$  даются формулой

$$A_{m,n}^j = D_{m,n}^j / D,$$

где  $D$  — определитель, введенный в (7.5), а  $D_{m,n}^j$  — определители, каждый из которых получается заменой в  $D$  столбца с номером  $n$  на производную столбца с номером  $m$  по параметру  $a_j$ . Например,

$$D_{2,3}^j = \begin{vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & (U_1^2)_{,a_j} & U_1^4 \\ U_2^1 & U_2^2 & (U_2^2)_{,a_j} & U_2^4 \\ U_3^1 & U_3^2 & (U_3^2)_{,a_j} & U_3^4 \\ U_4^1 & U_4^2 & (U_4^2)_{,a_j} & U_4^4 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определители  $D_{m,n}^j$  как функции переменной  $k$ . К ним можно применить методы, развитые ранее для определителей  $D$  и  $D_{m,n}$ . Для каждого

из них строится второе представление с использованием функций  $U_0^m$ , анализируется поведение в верхней и нижней полуплоскости и применяется теорема Лиувилля. Опустив эти несложные, но громоздкие рассуждения, приведем сразу результаты анализа. Оказывается, элементы матриц  $\mathbf{A}^j$  — полиномы переменной  $k$  степени не выше 1, т.е. это константы или линейные функции.

Определим коэффициенты полиномов, представляющих собой элементы  $A_{m,n}^j$  матриц  $\mathbf{A}^j$ . Для этого подставим асимптотические выражения (6.7) в соответствующие определители и вычислим первые члены асимптотических разложений  $A_{m,n}^j$ . В результате получим выражение

$$A_{m,n}^j(k) = \delta_{j,m}\delta_{m,n}(ik - C_1^1 + C_2^2 - C_3^3 + C_4^4) + (-1)^{n-1}C_n^m(\delta_{j,m} - \delta_{j,n}),$$

где  $C_n^m$  — константы, входящие в (1.9). Заметим, что в выражения для двух старших членов не вошли производные коэффициентов  $C_n^m$  по  $a_j$ , а члены более высокого порядка оказываются ненужными в силу теоремы Лиувилля.

Принимая во внимание (7.9) и (7.11), получаем (8.2).  $\square$

Таким образом, коэффициенты эволюционного уравнения (8.1) оказалось возможным выразить через коэффициенты спектрального уравнения (7.2).

### Эволюционные уравнения для матриц $\mathbf{K}^\pm$

Заметим, что величины  $K_{m,n}^+$ , входящие в (8.2) и, соответственно, в (8.1), зависят от параметров  $a_1 \dots a_4$ . Построим уравнение, описывающее эту зависимость. Для этого вычислим смешанную производную матрицы  $\mathbf{U}$  по  $k$  и  $a_j$  двумя способами, воспользовавшись уравнениями (7.2) и (8.1):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial k \partial a_j} = \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} + \mathbf{K} \mathbf{A}^j \right) \mathbf{U} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial a_j \partial k} = \left( \frac{\partial \mathbf{A}^j}{\partial k} + \mathbf{A}^j \mathbf{K} \right) \mathbf{U}.$$

Домножим левую часть полученного уравнения справа на  $\mathbf{U}^{-1}$  (заметим, что определитель матрицы  $\mathbf{U}$  не равен нулю тождественно в силу (7.8)). Получим равенство, не содержащее  $\mathbf{U}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a_j} = \frac{\partial \mathbf{A}^j}{\partial k} + [\mathbf{A}^j, \mathbf{K}], \quad (8.3)$$

где

$$[\mathbf{A}^j, \mathbf{K}] = \mathbf{A}^j \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{A}^j.$$

Равенство (8.3) представляет собой эволюционное уравнение для матрицы  $\mathbf{K}$ . Напомним, что элементы матрицы  $\mathbf{A}^j$ , стоящей в правой части, выражаются через элементы матриц  $\mathbf{K}^\pm$ .

Уравнение (8.3) должно выполняться при всех значениях  $k$ . К счастью, зависимость всех функций, входящих в (8.3), от  $k$  весьма проста. Все компоненты матриц, стоящих в правой и левой части, могут быть представлены в виде

$$b_1 k + b_2 + \frac{b_3}{k - k_0} + \frac{b_4}{k + k_0},$$

где функции  $b_1 \dots b_4$  не зависят от  $k$ . Для того чтобы обеспечить выполнение (8.3) тождественно по  $k$ , необходимо вычислить составляющие этого уравнения при  $k^1$ ,  $k^0$ ,  $(k - k_0)^{-1}$  и  $(k + k_0)^{-1}$  и потребовать их независимого выполнения. Равенства при  $k^1$  и  $k^0$  выполняются автоматически. Остальные два равенства дают следующие эволюционные уравнения, замкнутые относительно элементов матриц  $\mathbf{K}^\pm$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{m,n}^\pm}{\partial a_j} = \pm i k_0 K_{m,n}^\pm (\delta_{m,j} - \delta_{n,j}) + \frac{(K_{m,j}^+ + K_{m,j}^-) K_{j,n}^\pm}{a_j - a_m} + \frac{(K_{j,n}^+ + K_{j,n}^-) K_{m,j}^\pm}{a_n - a_j} + \\ \sum_{l \neq j} \frac{(K_{j,l}^+ + K_{j,l}^-) K_{l,n}^\pm}{a_j - a_l} + \sum_{l \neq j} \frac{(K_{l,j}^+ + K_{l,j}^-) K_{m,l}^\pm}{a_l - a_j}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Подразумевается, что второе слагаемое в правой части равно нулю при  $m = j$ , а третье равно нулю при  $n = j$ .

Таким образом, достаточно определить коэффициенты спектрального уравнения (т.е. матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ ) при каком-то одном наборе значений  $a_1 \dots a_4$  с помощью решения “задачи о нахождении параметров” или каким-либо иным способом. Для любого другого набора  $a_1 \dots a_4$  можно получить  $\mathbf{K}^\pm$ , решая уравнения (8.4) и используя найденные значения  $\mathbf{K}^\pm$  как начальные условия. Такая возможность представляется весьма ценной, поскольку для случая коротких волн коэффициенты спектрального уравнения могут быть найдены с помощью дифракционного ряда. Эволюционные уравнения (8.4) дают возможность продолжить коэффициенты в ту область значений параметров, где размеры рассеивателей сравнимы с длиной волны.

## §9. Формулировка задачи об определении неизвестных констант. Начало

### Что такое локальные и глобальные ограничения?

Рассмотрим спектральное уравнение (7.2). Известна форма коэффициентов этого уравнения, однако численные значения входящих в него констант остались не определены. Настоящий раздел посвящен определению этих констант, а точнее корректной постановке соответствующей задачи. Найти константы аналитически не удастся. Поэтому необходимо найти между константами как можно больше аналитических связей, уменьшив тем самым число свободных скалярных параметров, а затем предложить эффективную численную процедуру для определения этих параметров.

Для того, чтобы решение  $\mathbf{U}(k)$  (см. (7.1)) уравнения (7.2) представлялось в виде интегралов (6.3), необходимо, чтобы оно удовлетворяло определенным ограничениям. А именно, необходимо, чтобы соответствующие элементы матрицы  $\mathbf{U}$  или определенные линейные комбинации этих элементов имели предписанное поведение в особых точках уравнения. Таких особых точек три. Это  $\pm k_0$  и  $\infty$ . Будем пытаться подобрать параметры в коэффициентах спектрального уравнения таким образом, чтобы оно имело решение  $\mathbf{U}$ , имеющее заданные свойства.

Ограничения, накладываемые на коэффициенты уравнения, могут быть двух типов — *локальные* и *глобальные*. Локальные ограничения обеспечивают то, что в данной особой точке уравнение имеет решения с нужными асимптотиками. Эти ограничения даются простыми алгебраическими соотношениями, накладываемыми на коэффициенты. Однако такими ограничениями задача не исчерпывается. В ряде случаев приходится требовать, чтобы один и тот же столбец матрицы  $\mathbf{U}$  имел заданные асимптотики в каждой из особых точек. Это и есть глобальные ограничения.

На языке теории дифференциальных уравнений глобальные ограничения имеют следующую интерпретацию. В каждой из особых точек существует базис фундаментальных решений. Построим решения дифференциального уравнения вдоль некоторого контура, соединяющего две особые точки. Очевидно, эти решения образуют линейное пространство размерности 4. Каждое фундаментальное (базисное) решение в начальной точке контура окажется в конечной точке линейной комбинацией уже других базисных решений. Строя такие линейные комбинации для всех элементов базиса в начальной точке, получим *матрицу связи* для данного контура. Глобальные ограничения диктуют вид таких матриц связи.

Заметим, что в общем случае вычислить матрицу связи аналитически не представляется возможным. Это и приводит к тому, что задача нахождения неизвестных параметров в уравнении (7.2) может быть решена только численно.

Целью этого и последующего параграфов будет показать, что в представленном случае число параметров оказывается равно числу ограничений.

В данном разделе будем для удобства полагать, что  $k_0$  — действительное число. Выберем на комплексной плоскости  $k$  четыре точки  $P_1 \dots P_4$ , соответствующие особым точкам спектрального уравнения. В качестве  $P_1$  и  $P_2$  возьмем  $k_0$  и  $-k_0$ , в качестве  $P_3$  возьмем бесконечно удаленную точку, лежащую на действительной положительной полуоси, а в качестве  $P_4$  — бесконечно удаленную точку, лежащую на действительной отрицательной полуоси. Соединим особые точки контурами  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  как показано на Рис. 9.1.

Мы будем соотносить положения контуров и точек с физическим листом римановой (не зоммерфельдовой!) поверхности. Понятие физического листа римановой поверхности введем только для точек контура, почти везде совпадающего с действительной осью, обходящего точку  $k_0$  снизу, а точку  $-k_0$  — сверху. Будем считать, что точка  $k$  принадлежит физическому листу, если в этой точке все функции  $U_n^m(k)$  непосредственно определяются интегралами (6.3).

Пусть контур  $\Gamma_4$  принадлежит физическому листу, а точка  $P_3$  может быть получена в результате движения вдоль штриховой линии, начинающейся на физическом листе (см. Рис. 9.1) (т.е. точка  $P_3$  также принадлежит физическому листу). При этом точка  $P_4$  и контур  $\Gamma_3$  уже не принадлежат физическому листу.

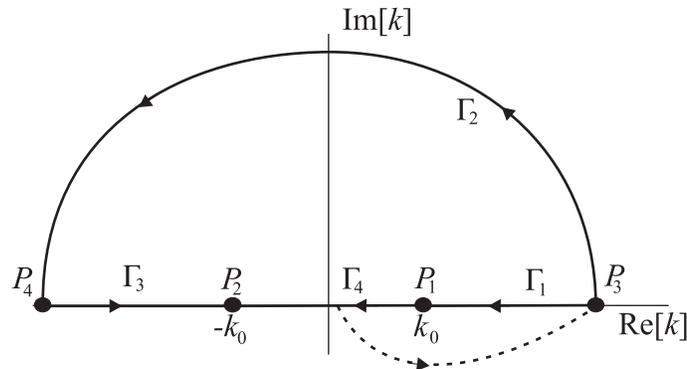


Рис. 9.1: Особые точки и соединяющие их контура

### Формулировка локальных ограничений

В точке  $P_1$  решения-столбцы  $U_2^m$  и  $U_4^m$  регулярны, а решения-столбцы  $U_1^m$  и  $U_3^m$  ведут себя, как регулярные функции, деленные на  $\sqrt{k - k_0}$ . Именно такого поведения необходимо потребовать от решений уравнения вида (7.2).

Как известно, асимптотики решений могут быть найдены с помощью анализа поведения коэффициентов уравнения вблизи особой точки. В данном случае необходимо потребовать выполнения следующего условия:

*Матрица  $\mathbf{K}^+$  должна иметь собственные значения  $-1/2, -1/2, 0, 0$ , и при этом она должна приводиться к диагональному виду (т.е. все жордановы клетки должны состоять из одного элемента).*

Замечание, касающееся жордановых клеток, гарантирует отсутствие логарифмических членов в решениях дифференциального уравнения.

Рассмотрение особой точки  $k = -k_0$  приводит к аналогичному условию для матрицы  $\mathbf{K}^-$ .

Проанализируем поведение решения на бесконечности (т.е. в точках  $P_3, P_4$ ). В верхней полуплоскости должен существовать набор решений, ведущий себя в соответствии с асимптотиками (6.7), а в нижней полуплоскости должен существовать (другой) набор, ведущий себя как (6.8). Нетрудно проверить, что такое поведение гарантируется первым членом в правой части (7.3), а также условием (7.10), накладываемым на диагональные элементы матриц  $\mathbf{K}^\pm$ .

Итак локальные ограничения для коэффициентов (7.3) представляют собой ограничения на собственные значения матриц  $\mathbf{K}^\pm$ , условие диагонализуемости этих матриц и условие (7.10).

Выбор точек  $P_3$  и  $P_4$  может показаться не вполне традиционным с точки зрения теории конфлюэнтных дифференциальных уравнений. Более традиционным был бы выбор контрольных точек, принадлежащих верхней и нижней полуплоскости. Тогда можно было бы говорить о возрастании и убывании соответствующих решений, численно удовлетворительных асимптотиках и т.д. Рассмотрим в такой постановке решения, ведущие себя в верхней полуплоскости, скажем, как  $e^{ik_0a_2}$ . Очевидно, такие решения образуют векторное пространство размерности 3, поскольку такое поведение маскирует собой более быстрое убывание по законам  $e^{ik_0a_3}$  и  $e^{ik_0a_4}$ . Это не слишком удобно, поскольку нет возможности выбрать однозначно “решение, которое растет, как  $e^{ik_0a_2}$ ”. Для того чтобы выбрать такое решение, продолжим все решения, принадлежащие выбранному трехмерному пространству в нижнюю полуплоскость вдоль дуги  $\pi/2 < \text{Arg}[k] < -\pi/2$ . В нижней полуплоскости сперва выберем из них подпространство размерности 2 из функций, растущих не быстрее, чем  $e^{ik_0a_3}$ , а затем подпространство размерности 1 из функций, растущих как  $e^{ik_0a_2}$ . С точностью до постоянного множителя, получено решение, которое растет в верхней и нижней полуплоскости (при продолжении вдоль соответствующей дуги) как  $e^{ik_0a_2}$ . Вместо столь длинного рассуждения можно просто сказать, что данная функция ведет себя как  $e^{ik_0a_2}$  на положительной действительной полуоси.

С точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, точки  $P_3$  и  $P_4$  выбраны на линиях Стокса.

## Формулировка глобальных ограничений

Возьмем уравнение вида (7.2) при произвольных значениях матриц  $\mathbf{K}^\pm$ , удовлетворяющих локальным ограничениям. Среди его решений в общем случае не окажется функций  $U_n^m$ , удовлетворяющих всем условиям регулярности. Будем называть такое уравнение кандидатом на роль спектрального уравнения, а его решения обозначать буквами  $V$  с различными индексами. Опишем глобальное поведение решений  $V$ , соответствующее поведению функций  $U$ .

*a) Ограничения, связанные с контуром  $\Gamma_1$*

Рассмотрим некоторое уравнение-кандидат с коэффициентами, удовлетворяющими описанным выше локальным ограничениям. Построим базис фундаментальных решений  $\mathbf{V}_3$ , обладающих заданными асимптотиками в точке  $P_3$ , т.е. при больших действительных значениях  $k$ . Под базисом будем понимать матрицу, состоящую из функций, каждый столбец которой представляет собой базисное решение. Асимптотики базисных решений зададим в виде:

$$(V_3)_n^m = e^{ik_0 a_n} k^{-1/2} (\delta_{m,n} + O(k^{-1})). \quad (9.1)$$

Очевидно, такой базис можно выбрать единственным образом.

Сформируем из этого базиса новый базис по формуле

$$\mathbf{W} = e^{-i\pi/4} \mathbf{V}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Элементы этого базиса имеют в точке  $P_3$  те же асимптотики, что должны иметь в этой точке функции  $U_n^m$  (к этому выводу приводит продолжение асимптотик (6.7) и (6.8) на действительную положительную полуось). Таким образом, матрица  $\mathbf{W}$  — это кандидат на роль решения функциональной задачи  $\mathbf{U}$ .

Построим вблизи точки  $P_1$  другой базис решений нашего уравнения-кандидата. Назовем этот базис  $\mathbf{V}_1$ . Базис выберем таким образом, чтобы его первые два столбца представляли собой в точке  $P_1$  регулярные функции, деленные на  $\sqrt{k - k_0}$ , а последние два столбца — регулярные функции. Очевидно, выбор такого базиса не единственный. Любое линейное преобразование, оставляющее инвариантным пространство, натянутое на первые два столбца и последние два столбца, приводит к базису, обладающему теми же свойствами.

При продолжении вдоль контура  $\Gamma_1$  элементы базиса  $\mathbf{V}_3$  переходят в линейные комбинации элементов базиса  $\mathbf{V}_1$ , т.е. имеет место равенство

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \mathbf{M}_{31}, \quad (9.3)$$

где  $\mathbf{M}_{31}$  — матрица связи для контура  $\Gamma_1$ .

Учитывая поведение функций  $\mathbf{U}$ , а значит и желаемое поведение функций  $\mathbf{W}$ , в точке  $P_1$ , можно записать соотношение

$$\mathbf{W} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}_1 \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & 0 & 0 \\ m_1^2 & m_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^3 & m_4^3 \\ 0 & 0 & m_3^4 & m_4^4 \end{pmatrix},$$

где  $m_n^m$  — произвольные величины (разумеется, такие, чтобы матрица оказалась невырожденной). Это соотношение было построено так. Сперва были переставлены второй и третий столбцы матрицы  $\mathbf{W}$ , а затем было наложено требование, чтобы первый и второй столбец полученной матрицы имели показатель  $-1/2$ , а третий и четвертый имели показатель 0. Блочная матрица в правой части показывает, что матрица связи для данного контура известна с точностью до линейного преобразования описанного вида.

Таким образом, на матрицу  $\mathbf{M}_{31}$  накладывается ограничение

$$\mathbf{M}_{31}\Xi_1 = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 & 0 & 0 \\ m_1^2 & m_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^3 & m_4^3 \\ 0 & 0 & m_3^4 & m_4^4 \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

где

$$\Xi_1 = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

На практике проверка выполнения этого ограничения должна состоять из численного нахождения матрицы  $\mathbf{M}_{31}$ , вычисления левой части (9.4) и проверки того, что в соответствующих позициях этой матрицы стоят нули. Это и есть глобальные ограничения, связанные с контуром  $\Gamma_1$ . Очевидно, эти ограничения выражаются в форме восьми скалярных равенств.

б) *Ограничения, связанные с контуром  $\Gamma_2$*

Построим в точке  $P_4$  базис решений  $\mathbf{V}_4$ , характеризуемый асимптотиками

$$(V_4)_n^m = e^{ik_0 a_n} (-k)^{-1/2} (\delta_{m,n} + O(k^{-1})) \quad (9.5)$$

при больших по модулю отрицательных действительных  $k$ .

Продолжим базис  $\mathbf{V}_3$  вдоль дуги  $\Gamma_2$ . Очевидно, справедливо соотношение

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_4 \mathbf{M}_{34} \quad (9.6)$$

для некоторой матрицы связи  $\mathbf{M}_{34}$

Учитывая асимптотики функций  $\mathbf{U}$  на отрицательной действительной полуоси, желаемое поведение функций  $\mathbf{W}$  в точке  $P_4$ , продолженной из точки  $P_3$  вдоль контура  $\Gamma_2$ , дается формулой

$$\mathbf{W} = e^{i\pi/4} \mathbf{V}_4 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i & i \end{pmatrix}.$$

Таким образом, желаемым значением матрицы связи  $\mathbf{M}_{34}$  будет

$$\mathbf{M}_{34} = ((\mathbf{V}_4)^{-1} \mathbf{W})(\mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}_3) = - \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & i & 0 & 0 \\ 2i & -2 & i & 0 \\ 2 & 2i & 2 & i \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Это и есть глобальное ограничение для контура  $\Gamma_2$ .

в) *Ограничения, связанные с контуром  $\Gamma_3$*

Построим базис  $\mathbf{V}_2$  фундаментальных решений в точке  $P_2$ . Свойства этого базиса выберем такими же, как у базиса  $\mathbf{V}_1$ , т.е. пусть первые два столбца имеют показатель  $-1/2$ , а последние два — показатель 0.

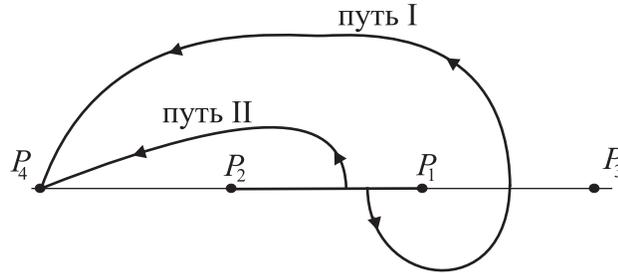


Рис. 9.2: Пути продолжения решений с физического листа

Для построения глобальных ограничений перейдем в точке  $P_4$  от матрицы  $\mathbf{W}$  к аналогу матрицы, состоящей из столбцов  $U_1^m, U_3^m, U_2^m, -U_0^m$ . При этом заметим, что используемое определение матрицы  $\mathbf{W}$ , полученное продолжением из точки  $P_3$  вдоль контура  $\Gamma_2$ , соответствует пути I из некоторой точки, принадлежащей физическому листу (Рис. 9.2). Для того, чтобы воспользоваться аналитичностью функций  $U_0^m$  в точке  $-k_0$ , необходимо построить продолжение вдоль пути II. Для этого достаточно изменить знак у столбцов, являющихся

кандидатами в решения  $U_1^m$  и  $U_3^m$ . Таким образом, приходим к выводу, что

$$\mathbf{W} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}_2 \begin{pmatrix} n_1^1 & n_2^1 & 0 & 0 \\ n_1^2 & n_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^3 & n_4^3 \\ 0 & 0 & n_3^4 & n_4^4 \end{pmatrix}$$

для некоторых величин  $n_i^j$ .

Вводя матрицу связи с помощью соотношения

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_2 \mathbf{M}_{42}, \quad (9.8)$$

получаем глобальное соотношение для контура  $\Gamma_3$ :

$$\mathbf{M}_{42} \Xi_2 = \begin{pmatrix} n_1^1 & n_2^1 & 0 & 0 \\ n_1^2 & n_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^3 & n_4^3 \\ 0 & 0 & n_3^4 & n_4^4 \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

где

$$\Xi_2 = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & i & -i & i \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Можно было бы также построить глобальные ограничения для контура  $\Gamma_4$ , но, очевидно, они будут следовать из ограничений, наложенных на остальные контура.

Оценим количество скалярных глобальных ограничений. Условия (9.4) и (9.9) вместе дают 16 ограничений, а условие (9.7) дает 6 ограничений (теория дифференциальных уравнений гарантирует, что соответствующая матрица связи — нижняя треугольная, и ее диагональные элементы жестко заданы). Всего получается 22 ограничения. При этом свободных скалярных параметров 32 (все элементы матриц  $\mathbf{K}^\pm$ ).

Более детальный анализ показывает, что число свободных скалярных параметров равно восьми. Как будет показано ниже, на глобальные соотношения накладываются симметрии, в результате их число также сокращается до восьми.

## §10. Формулировка задачи об определении неизвестных констант. Окончание

В настоящем разделе будет использоваться симметрия коэффициентов и решения спектрального уравнения, доказанная в Приложении 2 (§35). Эта симметрия связана с теоремой взаимности. Похожий результат легко доказывается в главе об уголкового отражателе в рамках метода координатных уравнений. Раздел §35 посвящен выводу необходимых соотношений в рамках функциональной задачи типа Винера-Хопфа. Основным результатом §35 — тождество для коэффициентов (35.9):

$$\Xi(\mathbf{K}^+)^T \Xi + \mathbf{K}^- = -\frac{1}{2}\mathbf{I}, \quad (10.1)$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Симметрия (35.5), (35.9) очень важна для понимания структуры локальных и глобальных ограничений, накладываемых на спектральное уравнение. С одной стороны, соотношение (35.9) снижает число свободных параметров, а с другой, возможность использовать обратную матрицу (35.5) позволяет установить, что часть глобальных ограничений удовлетворяются автоматически.

Целью данного параграфа будет пересмотреть структуру локальных и глобальных ограничений с учетом (35.5) и (35.9).

### Локальные ограничения

Вернемся к локальным ограничениям, накладываемым на матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ . Будем рассматривать матрицы, удовлетворяющие соотношению (10.1). Это означает, что достаточно построить только одну из матриц, например,  $\mathbf{K}^+$ ; вторая будет определяться из нее при помощи транспонирования и добавления диагональной матрицы.

Заметим, что условие (10.1) гарантирует выполнение локальных ограничений на бесконечности (это эквивалентно (7.10)).

Исследуем локальные ограничения в точке  $k_0$ . Будем рассматривать матрицу  $\mathbf{K}^+$  как линейный оператор, действующий в  $\mathbb{C}^4$ . Для того, чтобы выполнялись локальные ограничения, сформулированные выше, необходимо и достаточно, чтобы в  $\mathbb{C}^4$  можно было выделить два подпространства размерности 2, одно из которых оператор аннулирует, а на другом действует как умножение на  $-1/2$ . Задание этих подпространств определяет матрицу  $\mathbf{K}^+$  однозначно.

Найдем число скалярных параметров, определяющих матрицу  $\mathbf{K}^+$ . Каждое из подпространств задается парой базисных векторов, что дает 16 параметров. С другой стороны, каждая пара базисных векторов определена с точностью до линейного преобразования, задаваемого четырьмя параметрами. Таким образом, имеется 8 лишних параметров. Итого, матрица  $\mathbf{K}^+$ , удовлетворяющая локальным ограничениям для точки  $P_1$ , определяется при помощи 8 параметров.

Нетрудно показать, что матрица  $\mathbf{K}^-$ , определяемая с помощью условия (10.1), удовлетворяет локальным ограничениям для точки  $P_2$  автоматически. Действительно, если  $\mathbf{V}$  — матрица, приводящая  $\mathbf{K}^+$  к диагональному виду, то  $\mathbf{K}^-$  приводится к диагональному виду матрицей  $\Xi(\mathbf{V}^{-1})^T \Xi$ . Собственные значения, очевидно, также равны 0 и  $-1/2$ .

Итак коэффициенты спектрального уравнения, удовлетворяющие всем локальным ограничениям и условию симметрии (10.1), определяются с точностью до 8 скалярных параметров.

### Глобальные ограничения

Вясним, каким свойством обладает решение уравнения-кандидата с коэффициентами, удовлетворяющими соотношению (10.1). Пусть столбцы некоторой матрицы  $\mathbf{V}(k)$  являются решениями уравнения (7.2), то столбцы матрицы

$$\check{\mathbf{V}}(k) \equiv i(k_0^2 - k^2)^{-1/2} \Xi (\mathbf{V}^{-1}(-k))^T \Xi \quad (10.2)$$

также удовлетворяют этому уравнению (это свойство проверяется непосредственно).

Поясним, как можно воспользоваться данным свойством. Пусть выполняются глобальные ограничения (9.4) для контура  $\Gamma_1$ . Покажем, что из этого следует выполнение глобальных ограничений и для контура  $\Gamma_3$ .

Условие на  $\Gamma_1$  связывает базисы  $\mathbf{V}_3$  и  $\mathbf{V}_1$ . Построим матрицу  $\check{\mathbf{V}}_1(k)$  по формуле, сходной с (10.2). Эта матрица является решением уравнения (7.2). Проанализировав асимптотическое поведение этой матрицы в точке  $P_4$ , можно убедиться в том, что

$$\mathbf{V}_3(k) = \check{\mathbf{V}}_4(k).$$

Выберем базис  $\mathbf{V}_2$  таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{V}_2 = \check{\mathbf{V}}_1 \Xi_3,$$

где

$$\Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

иными словами, преобразование симметрии переводит решения с показателями 0 и  $-1/2$  в точке  $P_1$  в решения с показателями  $-1/2$  и 0, соответственно, в точке  $P_2$ .

Очевидно, если матрица  $\mathbf{M}_{31}$  определена с помощью соотношения (9.3), то

$$\check{\mathbf{V}}_3 = \check{\mathbf{V}}_1 \check{\mathbf{M}}_{31}, \quad \text{где} \quad \check{\mathbf{M}}_{31} \equiv \Xi ((\mathbf{M}_{31})^{-1})^T \Xi.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}_{42} = \Xi_3 \check{\mathbf{M}}_{31}.$$

Заметим, что операцию  $\check{\cdot}$ , введенную выше и понимаемую как операция над произвольной матрицей, можно применить к условию (9.4). Эта операция сохраняет порядок умножения матриц, а также переводит правую часть (9.4) в матрицу того же вида. Для того, чтобы проверить выполнение условия (9.9), вычислим комбинацию

$$\Xi_2^{-1} \check{\Xi}_1 \Xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

То, что правая часть имеет вид блочной матрицы, подходящей под шаблон правой части (9.9), означает, что выполняется условие (9.9).

Итак, при наличии симметрии коэффициентов вида (10.1) из глобальных ограничений для контура  $\Gamma_1$  следуют глобальные ограничения для контура  $\Gamma_3$ . Покажем, что если выполняется соотношение (10.1), а также глобальные ограничения для контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ , то выполняется и ограничение (9.7) для контура  $\Gamma_2$ .

Построим матрицу связи для контура, проходящего по большой дуге в положительном направлении из точки  $P_3$  в точку  $\tilde{P}_3$ , лежащую “под” точкой  $P_3$  на другом листе. Заметим, что базис  $\check{\mathbf{V}}_3$  для точки  $\tilde{P}_3$  будет отличаться от аналитического продолжения базиса  $\mathbf{V}_3$  вдоль соответствующего контура.

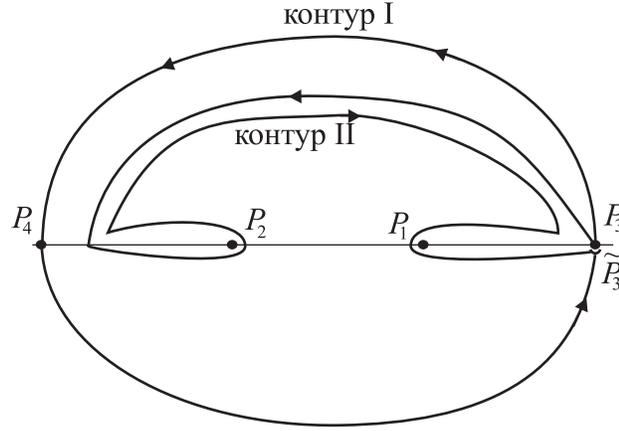
Вычислить матрицу перехода  $\mathbf{M}_{33}$ , заданную с помощью формулы

$$\mathbf{V}_3 = \tilde{\mathbf{V}}_3 \mathbf{M}_{33}$$

(она же является и матрицей монодромии), можно двумя способами, а именно вдоль контуров I и II, изображенных на Рис. 10.1.

Рассмотрим контур I. Он состоит из двух частей, верхней и нижней. Матрица перехода для верхней части есть  $\mathbf{M}_{34}$ . Матрица перехода для нижней части может быть найдена с помощью симметрии. Принимая во внимание, что

$$\mathbf{V}_4 = \check{\mathbf{V}}_3, \quad \tilde{\mathbf{V}}_3 = -\check{\mathbf{V}}_4,$$

Рис. 10.1: Контура для вычисления матрицы  $\mathbf{M}_{33}$ 

закключаем, что матрица  $\mathbf{M}_{33}$ , вычисленная по контуру I, равна

$$\mathbf{M}_{33} = -\check{\mathbf{M}}_{34} \mathbf{M}_{34}. \quad (10.3)$$

С другой стороны, детальное рассмотрение контура II приводит к следующему выражению:

$$\mathbf{M}_{33} = \Xi_1 \Xi_4 \Xi_1^{-1} (\mathbf{M}_{34})^{-1} \Xi_2 \Xi_4 \Xi_2^{-1} \mathbf{M}_{34}, \quad (10.4)$$

где

$$\Xi_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая (10.3) и (10.4), получаем соотношение

$$((\mathbf{M}_{34})^{-1})^T = -(\Xi_1 \Xi_4 \Xi_1^{-1}) (\mathbf{M}_{34})^{-1} (\Xi_2 \Xi_4 \Xi_2^{-1}), \quad (10.5)$$

которое можно трактовать как систему линейных уравнений относительно элементов матрицы  $(\mathbf{M}_{34})^{-1}$ .

В соответствии с теорией дифференциальных уравнений, имеющих иррегулярные особые точки (см. [156]), матрица  $(\mathbf{M}_{34})^{-1}$  должна быть нижней треугольной, причем все диагональные элементы должны быть равны  $i$  (это соответствует множителю  $k^{-1/2}$  в асимптотике на бесконечности). Положим самый общий вид:

$$(\mathbf{M}_{34})^{-1} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & i & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & i & 0 \\ x_4 & x_5 & x_6 & i \end{pmatrix}.$$

Подставим это выражение в (10.5). Получим невырожденную систему линейных уравнений относительно  $x_1 \dots x_6$ . Ее единственным решением являются значения, соответствующие матрице  $\mathbf{M}_{34}$ , определенной с помощью соотношения (9.7).

### Окончательная формулировка задачи о нахождении неизвестных констант в спектральном уравнении

Сформулируем главные результаты, относящиеся к формулировке задачи о нахождении неизвестных констант в спектральном уравнении.

а) Матрицы  $\mathbf{K}^\pm$  удовлетворяют ряду алгебраических ограничений. А именно, матрица  $\mathbf{K}^+$  должна иметь собственные значения  $-1/2$ ,  $-1/2$ ,  $0$ ,  $0$  и приводиться к диагональному виду. Матрица  $\mathbf{K}^-$  находится из соотношения (10.1). Матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ , обладающие этими свойствами, могут быть заданы при помощи 8 неизвестных скалярных комплексных параметров.

б) Для определения неизвестных параметров в коэффициентах спектрального уравнения необходимо использовать глобальные ограничения для контура  $\Gamma_1$ . А именно, для проверки, обладает ли данное спектральное уравнение нужными решениями, необходимо построить матрицу связи для контура  $\Gamma_1$ . Для этого строятся базисы фундаментальных решений спектрального уравнения в точке  $P_1$  и в бесконечно удаленной точке  $P_3$ , после чего строится матрица перехода от одного базиса к другому. Если эта матрица имеет вид (9.4), где  $m_n^j$  могут иметь любые значения, то глобальное ограничение для контура  $\Gamma_1$  выполняется. Это условие эквивалентно восьми скалярным равенствам.

в) Показано, что если выполняется глобальное ограничение для контура  $\Gamma_1$ , то выполняются и все остальные глобальные ограничения, накладываемые на решения спектрального уравнения. Это означает, что спектральное уравнение обладает решением, удовлетворяющим всем условиям функциональной задачи. В свою очередь, эти условия эквивалентны постановке исходной дифракционной задачи.

г) После того, как коэффициенты спектрального уравнения каким-либо образом определены, необходимо найти начальные условия, т.е. значения матрицы  $\mathbf{U}$  в какой-либо точке. Проще всего для этого выбрать бесконечно удаленную точку  $P_3$ . Асимптотики решения  $\mathbf{U}$  в этой точке выражаются через асимптотики фундаментального базиса  $\mathbf{V}_3$  при помощи правой части формулы (9.2). Эти асимптотики играют роль начальных условий для решения  $\mathbf{U}$ , т.е. они позволяют однозначно выделить нужное решение во всем пространстве решений.

Итак, для спектрального уравнения сформулирована задача определения параметров, т.е. задача подбора коэффициентов обыкновенного дифференци-

---

ального уравнения по заданным матрицам связи. Число свободных параметров совпадает с числом ограничений.

## §11. Численное решение спектрального уравнения для одиночной полосы

В настоящем разделе результаты, полученные для дифракции на двух полосах, формулируются для более простого случая дифракции на одиночной полосе. А именно, выписывается формула расщепления и координатное уравнение. Задача об определении неизвестных констант для одиночной полосы есть задача об определении всего двух скалярных параметров. Для определения этих параметров предложена и реализована численная итерационная процедура. В результате появляется возможность построить решение задачи с помощью метода спектрального уравнения и сравнить это решение с решением, полученным другими методами.

### Постановка задачи

Геометрия рассеивателя показана на Рис. 11.1. Рассеиватель представляет собой отрезок  $(-a, a)$  оси  $x$ . На обеих сторонах отрезка заданы граничные условия Дирихле. Можно считать, что данный отрезок — первый из пары отрезков, рассматривавшихся ранее, а второго нет. Многие результаты могут быть получены для одиночного отрезка, полагая  $a_1 = -a$ ,  $a_2 = a$  в рассуждениях, проведенных выше.

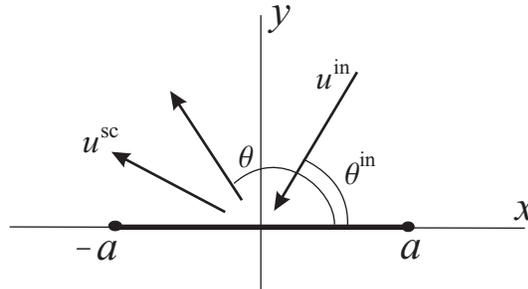


Рис. 11.1: Геометрия задачи рассеяния на одиночной полосе

### Формула расщепления и спектральное уравнение

Введем краевые функции Грина  $v^1$  и  $v^2$ , а также их диаграммы направленности  $S^1(\theta)$ ,  $S^2(\theta)$ . Убирая в формуле (1.11) вклады, относящиеся ко второму отрезку, получаем формулу расщепления для дифракции на одиночном отрезке:

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = \frac{S^2(\theta)S^2(\theta^{\text{in}}) - S^1(\theta)S^1(\theta^{\text{in}})}{k_0(\cos \theta + \cos \theta^{\text{in}})}, \quad (11.1)$$

где  $S(\theta; \theta^{\text{in}})$  — дифракционный коэффициент задачи. Таким образом, нахождение дифракционного коэффициента сводится к вычислению диаграмм направленности краевых функций Грина.

Симметрия задачи приводит к соотношению

$$S^1(\theta) = S^2(\pi - \theta). \quad (11.2)$$

Введем спектральные функции с помощью интегралов, сходных с (6.3):

$$U_0^m(k) = \int_{-\infty}^{-a} u^m(x, 0) e^{ikx} dx, \quad (11.3)$$

$$U_1^m(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{-a}^a \partial_y u^m(x, +0) e^{ikx} dx, \quad (11.4)$$

$$U_2^m(k) = \int_a^{\infty} u^m(x, 0) e^{ikx} dx. \quad (11.5)$$

Интеграл в (11.4) предполагается регуляризованным с помощью метода, предложенного выше.

Выполняются функциональные уравнения

$$U_0^m(k) + U_1^m(k) + U_2^m(k) \equiv 0, \quad m = 1, 2. \quad (11.6)$$

На функции  $U_n^m$  накладываются следующие условия регулярности.

- а) функции  $U_0^{1,2}$  регулярны в нижней полуплоскости;
- б) функции  $U_2^{1,2}$  регулярны в верхней полуплоскости;
- в) функции  $\sqrt{k_0^2 - k^2} U_1^{1,2}$  — целые.

Кроме того, функции  $U_n^m$  имеют следующие асимптотики на бесконечности:

$$\begin{aligned} U_1^m(k) &= i e^{-iak} (k_0^2 - k^2)^{-1/2} [\delta_{m,1} (-ik)^{1/2} + O(k^{-1/2})], \\ U_2^m(k) &= e^{iak} [-\delta_{m,2} (-ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})]. \end{aligned} \quad (11.7)$$

в верхней полуплоскости, т.е. при  $0 < \text{Arg}[k] < \pi$  и

$$\begin{aligned} U_0^m(k) &= e^{-iak} [-\delta_{m,1} (ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})], \\ U_1^m(k) &= i e^{iak} (k_0^2 - k^2)^{-1/2} [\delta_{m,2} (ik)^{1/2} + O(k^{-1/2})], \end{aligned} \quad (11.8)$$

в нижней полуплоскости, т.е. при  $-\pi < \text{Arg}[k] < 0$ .

Диаграммы направленности  $S^m$  связаны со спектральными функциями соотношением

$$S^m(\theta) = \sqrt{k_0^2 - k^2(\theta)} U_1^m(k(\theta)), \quad k(\theta) = -k_0 \cos \theta. \quad (11.9)$$

Спектральное уравнение получается из (7.2) и имеет вид

$$\frac{d}{dk} U_n = \left[ ia \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}^+}{k - k_0} + \frac{\mathbf{K}^-}{k + k_0} \right] U_n, \quad (11.10)$$

где

$$U_n(k) = \begin{pmatrix} U_n^1 \\ U_n^2 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2. \quad (11.11)$$

Как и ранее,  $\mathbf{K}^+$  и  $\mathbf{K}^-$  — матрицы, не зависящие от  $k$ . Спектральное уравнение (11.10) может быть преобразовано в обыкновенное дифференциальное уравнение для диаграмм направленности:

$$\frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix} = \left[ \cot \theta + ia k_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \cot \frac{\theta}{2} \mathbf{K}^+ - \tan \frac{\theta}{2} \mathbf{K}^- \right] \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \end{pmatrix}. \quad (11.12)$$

### Локальные свойства

а) Геометрическая симметрия  $x \rightarrow -x$  дает симметрию  $k \rightarrow -k$ . В силу этой симметрии, выполняются следующие равенства для элементов матриц  $\mathbf{K}^\pm$

$$\begin{aligned} (K^-)_{1,1} &= (K^+)_{2,2}, & (K^-)_{1,2} &= (K^+)_{2,1}, \\ (K^-)_{2,1} &= (K^+)_{1,2}, & (K^-)_{2,2} &= (K^+)_{1,1}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Эти соотношения дают возможность искать только матрицу  $\mathbf{K}^+$ .

Более того, из данной симметрии следует, что

$$\begin{pmatrix} U_1^1(0) \\ U_2^1(0) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.14)$$

где  $A$  — неизвестная константа. Данное соотношение представляется важным, поскольку дает удобное начальное условие для спектрального уравнения. В качестве точки, в которой будет задаваться начальное условие, можно выбрать  $k = 0$ .

б) Поведение решений спектрального уравнения (11.10) в особых точках  $\pm k_0$  позволяет наложить ограничения на матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ . Матрица  $\mathbf{K}^+$ , очевидно, отвечает за поведение решений в точке  $k_0$ . Особая точка является регулярной (с позиции фуксовых дифференциальных уравнений). Из свойств спектральных

функций, сформулированных выше, следует, что показатели в данной особой точке есть 0 и  $-1/2$ . Эти показатели соответствуют собственным числам матрицы  $\mathbf{K}^+$ . Наиболее общий вид такой матрицы есть

$$\mathbf{K}^+ = \mathbf{B} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}, \quad (11.15)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \xi_1 & \sin \xi_2 \\ \sin \xi_1 & \cos \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (11.16)$$

$\xi_1$  и  $\xi_2$  — неизвестные (в общем случае комплексные) параметры.

Таким образом, вычислить диаграммы направленности  $S^{1,2}$  с помощью спектрального уравнения можно, если предварительно найти параметры  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  в коэффициентах и параметр  $A$  в начальном условии.

в) Рассмотрим поведение решений на бесконечности. Пусть параметры  $\xi_1$  и  $\xi_2$  принимают произвольные значения (т.е. спектральное уравнение не обязательно имеет решение, соответствующее физической дифракционной задаче). Заметим, что

$$\text{tr } \mathbf{K}^+ = -1/2. \quad (11.17)$$

Элементарный анализ показывает, что у спектрального уравнения имеется пара решений  $W_0$  и  $W_2$ , компоненты которых имеют следующую асимптотику

$$W_0^m(k) = e^{-iak} [-\delta_{m,1}(ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})] \quad \text{при } -2\pi + \varepsilon < \text{Arg}[k] < \pi - \varepsilon, \quad (11.18)$$

$$W_2^m(k) = e^{iak} [-\delta_{m,2}(-ik)^{-1/2} + O(k^{-3/2})] \quad \text{при } -\pi + \varepsilon < \text{Arg}[k] < 2\pi - \varepsilon. \quad (11.19)$$

Если параметры  $\xi_{1,2}$  подобраны так, что выполняются глобальные ограничения, то  $W_{0,2}$  превращаются в  $U_{0,2}$ .

### Формулировка глобальных ограничений

Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  выбраны произвольно. Зафиксируем пару фундаментальных решений вблизи каждой из особых точек спектрального уравнения (11.10). В окрестности бесконечности такой парой будут описанные ранее  $W_0$  и  $W_2$ . В окрестности точки  $k = k_0$  выберем пару решений  $Z_{1,2}$  имеющих вид

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{k - k_0}} \begin{pmatrix} \sin \xi_2 + O(k - k_0) \\ \cos \xi_2 + O(k - k_0) \end{pmatrix}, \quad (11.20)$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} \cos \xi_1 + O(k - k_0) \\ \sin \xi_1 + O(k - k_0) \end{pmatrix}. \quad (11.21)$$

Аналогично, в окрестности точки  $k = -k_0$  определим пару фундаментальных решений  $Y_{0,1}$ :

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{k+k_0}} \begin{pmatrix} \cos \xi_2 + O(k+k_0) \\ \sin \xi_2 + O(k+k_0) \end{pmatrix}, \quad (11.22)$$

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \sin \xi_1 + O(k+k_0) \\ \cos \xi_1 + O(k+k_0) \end{pmatrix}. \quad (11.23)$$

Выберем начальную точку  $k = 0$  и пару решений спектрального уравнения, образующих базис в этой точке:

$$E_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.24)$$

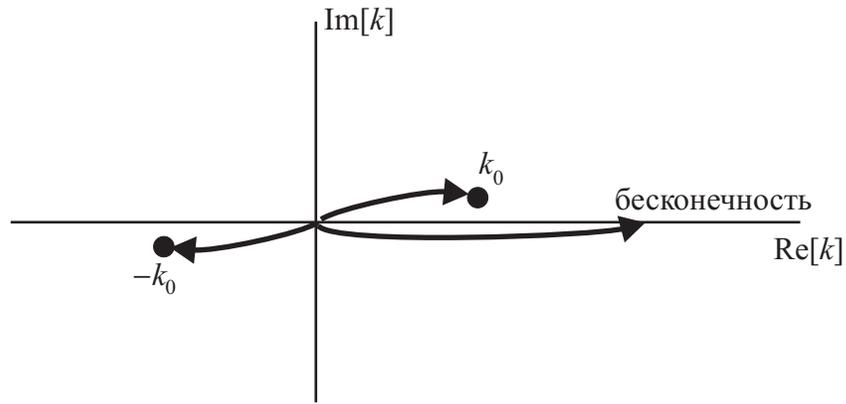


Рис. 11.2: Пути для вычисления матриц перехода

Построим матрицы перехода  $M^+$ ,  $M^-$  и  $M^\infty$ , связывающие начальную точку с особыми точками  $k_0$ ,  $-k_0$  и  $\infty$ , соответственно. Для получения элементов матриц перехода решим спектральное уравнение вдоль путей, показанных на Рис. 11.2. Таким образом, будут построены решения  $E_{1,2}(k)$  вблизи особых точек. Эти решения могут быть разложены в по выбранным ранее базисам:

Вблизи  $k = k_0$ :

$$E_m = M_{m,1}^+ Z_1 + M_{m,2}^+ Z_2. \quad (11.25)$$

Вблизи  $k = -k_0$ :

$$E_m = M_{m,1}^- Y_1 + M_{m,2}^- Y_0. \quad (11.26)$$

Вблизи  $k = \infty$ :

$$E_m = M_{m,1}^\infty W_0 + M_{m,2}^\infty W_2. \quad (11.27)$$

Введем также матрицу

$$\mathbf{M}^{+\infty} = (\mathbf{M}^+)^{-1}\mathbf{M}^\infty, \quad (11.28)$$

имеющую свойство

$$(Z_1, Z_2) = \mathbf{M}^{+\infty}(W_0, W_2). \quad (11.29)$$

Очевидно, матрицы  $\mathbf{M}$  зависят от произведения  $k_0 a$  и от выбора значений параметров  $\xi_{1,2}$ . Очевидно также, что эти матрицы можно вычислить с любой заданной точностью при заданных  $\xi_{1,2}$ , решая спектральное уравнение вдоль путей, показанных на Рис. 11.2.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 11.1** Пусть выполняются равенства

$$M_{2,1}^{+\infty} = 0 \quad (11.30)$$

и

$$M_{1,2}^+ + M_{2,2}^+ = 0. \quad (11.31)$$

Тогда среди решений спектрального уравнения (11.10) существует тройка  $U_n(k)$ ,  $n = 0, 1, 2$ , удовлетворяющая функциональному уравнению (11.6) и сформулированным выше условиям регулярности и ограничениям роста.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

Пусть выполняются условия утверждения. Выберем в качестве  $U_2$  фундаментальное решение  $W_2$ . Из (11.30) следует, что эта функция регулярна в точке  $k = k_0$ , а также во всей верхней полуплоскости, поскольку там нет особых точек, отличных от  $k_0$ . Обозначим компоненты этого вектора как  $U_2^{1,2}(k)$ .

Далее, выберем

$$U_0(k) = \begin{pmatrix} U_2^2(-k) \\ U_2^1(-k) \end{pmatrix}. \quad (11.32)$$

В силу симметрии, этот вектор также удовлетворяет спектральному уравнению. Более того, эта функция удовлетворяет ограничению роста в нижней полуплоскости и регулярна там.

Наконец, выберем

$$U_1 = -U_0 - U_2. \quad (11.33)$$

Эта функция удовлетворяет спектральному уравнению по линейности. Кроме того, в силу симметрии

$$U_1(k=0) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.34)$$

для некоторого  $A$ . Равенство (11.31) гарантирует, что решение  $U_1$  имеет допустимое поведение в точке  $k_0$ , а значит, в силу симметрии, и в точке  $-k_0$ .

Поведение  $U_1$  при больших  $k$  определяется общими свойствами спектрального уравнения и является также допустимым.  $\square$

Заметим, что по построению

$$U_1(k=0) = -\frac{M_{1,1}^\infty - M_{2,1}^\infty}{\det \mathbf{M}^\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.35)$$

Данное выражение определяет константу  $A$  в граничных условиях.

### Итерационная процедура отыскания $\xi_1$ и $\xi_2$

Определим невязки  $\eta_{1,2}$  нашей задачи как

$$\eta_1(\xi_1, \xi_2) = M_{2,1}^{+\infty}, \quad (11.36)$$

$$\eta_2(\xi_1, \xi_2) = M_{1,2}^+ + M_{2,2}^+. \quad (11.37)$$

Очевидно, требуется решить систему уравнений

$$\eta_1(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad (11.38)$$

$$\eta_2(\xi_1, \xi_2) = 0. \quad (11.39)$$

В соответствии с Утверждением 11.1, если удастся найти значения  $\xi_{1,2}$ , обращающие невязки в нуль, то спектральное уравнение будет обладать решениями, имеющими физический смысл спектральных функций дифракционной задачи.

Таким образом, численная процедура отыскания параметров  $\xi_{1,2}$  решается в два этапа. На первом этапе строится метод численной оценки невязок  $\eta_{1,2}$  при произвольных значениях  $\xi_{1,2}$ . На втором этапе решается система уравнений (11.38), (11.39).

Мы не будем подробно останавливаться на процедуре вычисления  $\eta_{1,2}$ . Наиболее сложная часть этой процедуры — вычисление матрицы  $\mathbf{M}^\infty$ . Для этого необходимо численно решить спектральное уравнение на интервале  $(0, \infty)$ , что невозможно. Вместо этого уравнение решается на контуре  $(0, \Sigma)$ , где  $\Sigma$  — большое действительное положительное число. Данный контур обходит точку  $k_0$  снизу. Решение в точке  $k = \Sigma$  срывается со значением асимптотического ряда для бесконечности. Число  $\Sigma$  выбирается положительным действительным, поскольку полуоси действительной оси представляют собой линии Стокса спектрального уравнения (т.е. линий, на которых ни одно из двух фундаментальных решений на бесконечности не является доминирующим).

Пользуясь процедурой вычисления невязок, можно вычислить производные невязок по параметрам

$$J_{ij} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}. \quad (11.40)$$

Для вычисления этих производных используется приближенная формула

$$J_{ij} \approx \frac{\Delta \eta_i}{\Delta \xi_j}, \quad (11.41)$$

т.е. для двух близких значений  $\xi_j$  вычисляются значения невязок и вычисляется отношение приращений.

Для решения системы уравнений (11.38), (11.39) используется итерационная процедура. В качестве нулевого приближения выбирается  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , что соответствует случаю невзаимодействующих точек ветвления зоммерфельдовой поверхности (такая ситуация достигается при больших  $k_0 a$ ). Далее на каждом шаге находятся приращения  $\delta \xi_{1,2}$  из линейных уравнений

$$J_{11} \delta \xi_1 + J_{12} \delta \xi_2 = -\eta_1, \quad (11.42)$$

$$J_{21} \delta \xi_1 + J_{22} \delta \xi_2 = -\eta_2. \quad (11.43)$$

После этого вычисляются новые значения  $\xi_{1,2}$  по формулам

$$\xi_1 \rightarrow \xi_1 + \delta \xi_1, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_2 + \delta \xi_2. \quad (11.44)$$

Далее производится проверка, достигнута ли требуемая точность выполнения уравнений (11.38), (11.39). Если точность не достигнута, делается еще один шаг итерационной процедуры и т.д.

После того, как достигнута требуемая точность, вычисляется начальное условие по формуле (11.35) и решается спектральное уравнение для вектора  $U_1(k)$  на интервале  $(-k_0, k_0)$ , соответствующем  $0 < \theta < \pi$ . По формуле (11.9) находятся диаграммы направленности краевых функций Грина. Наконец, с помощью формулы расщепления вычисляется дифракционный коэффициент  $S(\theta; \theta^{\text{in}})$  для заданных значений  $\theta$  и  $\theta^{\text{in}}$ .

## Численные результаты

Решение задачи дифракции производилось для разных значений произведения  $k_0 a$ . Везде выбиралось значение  $\theta^{\text{in}} = \pi/10$  и строилась функция  $S(\theta; \theta^{\text{in}})$ .

Вычисленные значения дифракционного коэффициента сравнивались со значениями, построенными с помощью интегрального уравнения [88]. А именно, для заданного  $\theta^{\text{in}}$  решалось интегральное уравнение

$$\frac{i}{2} \int_{-a}^a w(x') H_0^{(1)}(k_0 |x - x'|) dx' = \exp\{-ik_0 x \cos \theta^{\text{in}}\}. \quad (11.45)$$

После этого вычислялся дифракционный коэффициент

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = i \int_{-a}^a e^{-ik_0 x \cos \theta} w(x) dx. \quad (11.46)$$

Было выявлено отличное согласие между значениями, полученными с помощью метода спектрального уравнения и с помощью метода координатного уравнения. При этом удалось достигнуть точности, с которой решалось интегральное уравнение. Наблюдалась экспоненциальная сходимость итерационного метода вычисления параметров  $\xi_{1,2}$ . Число шагов, за которые достигалась максимальная техническая точность, было невелико (5–10 шагов).

Результат представлен на Рис. 11.3, Рис. 11.4, Рис. 11.5.

На Рис. 11.6 и Рис. 11.7 показаны графики параметров  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в зависимости от произведения  $k_0 a$ .

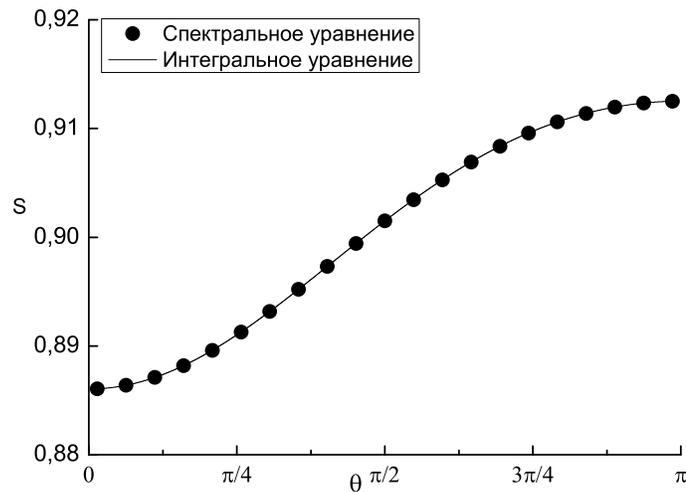


Рис. 11.3: Абсолютная величина дифракционного коэффициента для  $k_0 = 0.1$

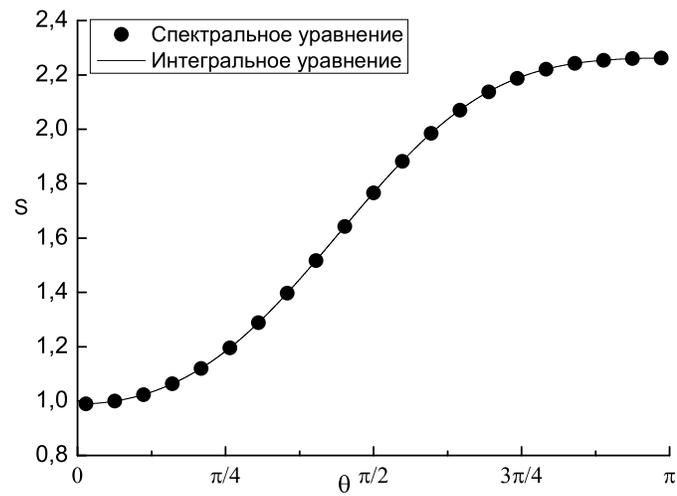


Рис. 11.4: Абсолютная величина дифракционного коэффициента для  $k_0 = 1$

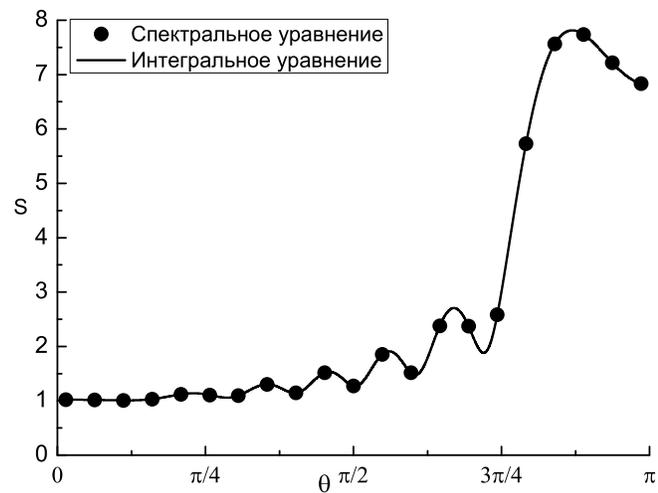


Рис. 11.5: Абсолютная величина дифракционного коэффициента для  $k_0 = 10$

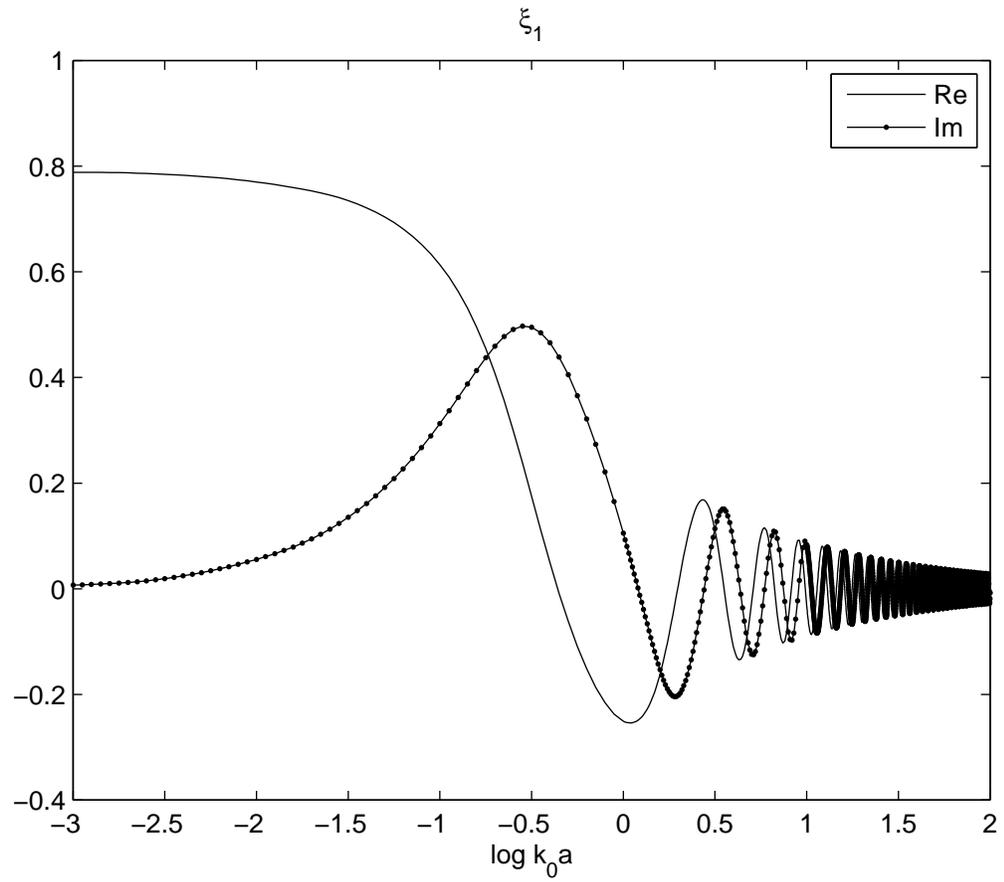
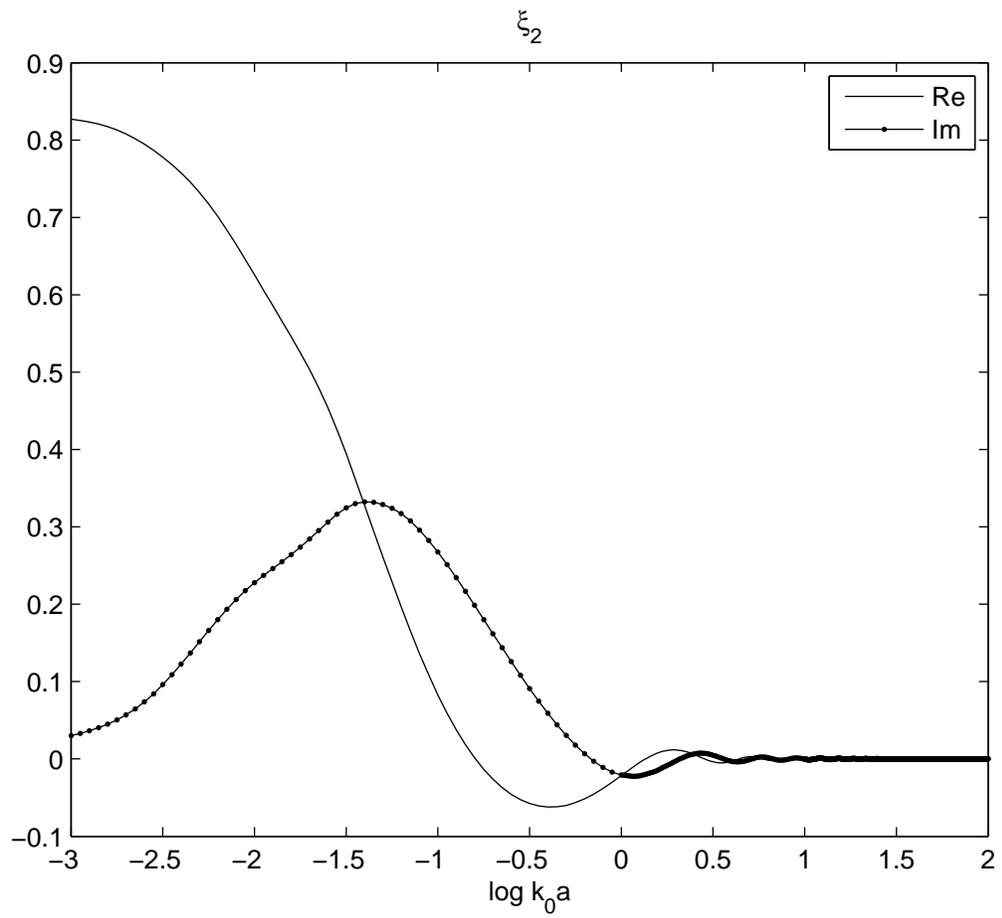


Рис. 11.6: Величина дифракционного коэффициента для  $\xi_1$

Рис. 11.7: Величина дифракционного коэффициента для  $\xi_2$

## §12. Основные результаты главы 2

1. Сформулированы функциональные задачи для краевых функций Грина задачи о дифракции на двух полосах.
2. Доказано, что спектральные функции для краевых функций Грина удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению (7.2) с коэффициентами (7.3). Это уравнение названо в работе спектральным. Доказательство проводится методом анализа определителей типа Вронского.
3. Выведены эволюционные уравнения (8.1), (8.3) и (8.4), описывающие изменение решений и коэффициентов спектрального уравнения при изменении параметров задачи.
4. Сформулирована задача связи для спектрального уравнения. Это означает, что сформулировано ограничение на матрицы связи такое, что при выполнении этого ограничения спектральное уравнение обладает решением, удовлетворяющим всем условиям функциональной задачи. В свою очередь, это гарантирует выполнение всех условий исходной дифракционной задачи. Формулировка задачи связи достаточно громоздка. Она приводится в конце §10. Важно, что число скалярных ограничений равно числу свободных параметров задачи.
5. Предложен и реализован численный алгоритм нахождения коэффициентов спектрального уравнения для одиночной полосы. Проведено сравнение результатов (т.е. значений дифракционного коэффициента, полученных методом спектрального уравнения) с аналогичными результатами, полученными методом интегрального уравнения. Получено хорошее согласие различных методов.

## Глава 3

# Координатные уравнения для дифракции на двух полосах

### §13. Основные свойства координатных уравнений

#### Идея метода

Рассмотрим задачу о дифракции на системе полос с заданным на них граничным условием Дирихле. Постановка этой задачи была подробно описана в §1.

Сформируем вектор неизвестных функций  $u = (u^1, u^2, \dots, u^N)^T$  размерности  $N$  следующим образом. В качестве первой компоненты выберем искомое рассеянное поле:

$$u^1 = u^{\text{sc}}.$$

Остальные компоненты вектора  $u$  — это выбранные специальным образом функции переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению Гельмгольца (1.1). Одна из возможностей — выбрать в качестве компонент  $u^2 \dots u^n$  производные рассеянного поля  $u^{\text{sc}}$  по пространственным координатам  $x$  и  $y$ .

Отметим, что такой выбор вектора неизвестных принципиально возможен, однако он приводит к некоторым неудобствам. Здесь он приводится только по соображениям наглядности. Более практичный вариант — вектор  $u$ , состоящий из краевых функций Грина задач Дирихле и Неймана (или, что эквивалентно, краевых функций Грина  $u^{m\pm}$  на зоммерфельдовой поверхности). Рассуждения, проводимые ниже, в равной степени относятся к обоим вариантам.

Подберем компоненты вектора  $u$  так, чтобы для него при всех  $x, y$  выполнялись уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{X} u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{Y} u, \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{X}(x, y)$  и  $\mathbf{Y}(x, y)$  — матрицы размерности  $N \times N$ . Уравнения (13.1) будем называть *координатными уравнениями*.

Разумеется, выписывать уравнения вида (13.1) имеет смысл лишь в том случае, когда коэффициенты  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  имеют существенно более простую структуру, чем решения уравнения. Будем пытаться построить координатные уравнения, у которых элементы матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — рациональные функции координат.

Выясним, какими свойствами должны обладать матрицы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ , чтобы система координатных уравнений была совместной, а ее решения удовлетворяли бы уравнению Гельмгольца (1.1).

Совместность координатных уравнений заключается в том, что смешанная производная  $u$  по  $x$  и  $y$  не зависит от порядка вычисления производной, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u,$$

что, в силу теоремы Фробениуса, гарантирует локальную разрешимость системы. Выпишем выражения для производных с помощью координатных уравнений. В результате условие совместности переписывается в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{Y} \right) u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{X} \right) u$$

Если координатные уравнения имеют  $N$  линейно независимых решений, можно сформировать из них невырожденную матрицу  $\mathbf{u}$  и домножить последнее соотношение справа на  $\mathbf{u}^{-1}$ . В результате получим соотношение для коэффициентов:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{X}. \quad (13.2)$$

Если для вектора  $u$  выполняются координатные уравнения, то

$$\Delta u + k_0^2 u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^2 + k_0^2 \mathbf{I} \right) u.$$

Для того, чтобы компоненты вектора  $u$  удовлетворяли уравнению Гельмгольца, достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^2 + k_0^2 \mathbf{I} = 0, \quad (13.3)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерности  $N \times N$ .

Условия (13.2) и (13.3) являются достаточными для совместности координатных уравнений и выполнения уравнения Гельмгольца. Они же являются необходимыми, если существует матрица из  $N$  линейно независимых решений

координатных уравнений. Анализ координатных уравнений, выведенных ниже, показывает, что тождества (13.2) и (13.3) выполняются, если существует хотя бы одно “физическое” решение задачи.

Таким образом, по заданным коэффициентам координатных уравнений можно проверить, удовлетворяет ли решение уравнению Гельмгольца. Если удастся проверить также выполнение граничных условий, условий излучения и условий в вершинах для первой компоненты вектора  $u$ , то можно будет утверждать, что задача дифракции сведена к системе координатных уравнений. Проверка этих условий обсуждается в следующем пункте настоящего параграфа.

Поясним, чем система (13.1) лучше исходного уравнения Гельмгольца. Координатные уравнения являются системой уравнений в частных производных, однако их свойства ближе к свойствам обыкновенных дифференциальных уравнений. В то время как для восстановления решения уравнения Гельмгольца необходимо знать его значения на некотором бесконечном или замкнутом контуре, для восстановления решения системы (13.1) достаточно знать вектор  $u$  лишь в одной точке.

Действительно, пусть значения компонент вектора  $u$  известны в точке  $P$ . Найдем вектор  $u$  в какой-либо другой точке  $P'$ . Для этого соединим  $P$  и  $P'$  отрезком, на котором введем координату  $l$ . Ограничение  $u(l)$  на эту линию удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{X} \cos \alpha + \mathbf{Y} \sin \alpha)u,$$

где  $\alpha$  — угол между отрезком  $PP'$  и осью  $x$  (см. Рис. 13.1). Решая это уравнение и пользуясь известными значениями компонент вектора  $u$  в точке  $P$  как начальными условиями, найдем  $u(P')$ . Из сказанного следует, что решения координатных уравнений образуют линейное пространство размерности  $N$ .

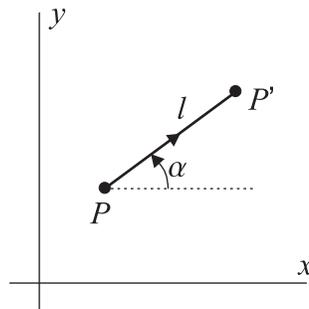


Рис. 13.1: К обсуждению свойств системы (13.1)

## Граничные условия, условия излучения и условия в вершинах

Оговоримся сразу, что рассматриваемые здесь методы относятся к гипотетическому случаю, когда матрицы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  строятся исходя из самых общих представлений о структуре этих матриц. В этом случае необходимо проверить все условия, которым должно удовлетворять рассеянное поле. Ниже координатные уравнения будут выводиться при помощи приема, основанного на теореме единственности. В этом случае нет необходимости проверять все условия (большая часть из них будет выполняться автоматически), а нужно лишь подобрать неизвестные параметры. Поэтому методы, рассматриваемые в данном пункте, могут представлять лишь методический интерес.

До сих пор предполагалось, что  $u^2 \dots u^N$  — некоторые решения уравнения Гельмгольца, а  $u^1$  — решение граничной задачи со смешанными граничными условиями. Здесь будем полагать, что все компоненты вектора  $u$  являются решениями смешанных граничных задач. Граничные условия для всех компонент заданы на интервалах оси  $x$ , на которые эта ось разбивается вершинами рассеивателя (точками  $a_1 \dots a_4$ ). Пусть на каждом из этих пяти интервалов для каждой из компонент вектора  $u$  и заданы (в общем случае неоднородные) граничные условия Дирихле или Неймана.

Выберем один из интервалов и назовем его  $\Gamma$ . Переставим компоненты вектора  $u$  и таким образом, чтобы на первых местах стояли компоненты, для которых на данном интервале заданы граничные условия Дирихле (пусть их количество равно  $r$ ), а на остальных  $N - r$  местах стояли компоненты, для которых заданы граничные условия Неймана. Таким образом, граничные условия можно записать в форме

$$u^m(x, 0) = f^m(x), \quad x \in \Gamma, \quad 1 \leq m \leq r, \quad (13.4)$$

$$\partial_y u^m(x, 0) = g^m(x), \quad x \in \Gamma, \quad r + 1 \leq m \leq N, \quad (13.5)$$

где  $f^m(x)$  и  $g^m(x)$  — некоторые известные функции.

Выпишем первое уравнение системы (13.1) в скалярной форме для первых  $r$  компонент:

$$\partial_x u^j(x, 0) = \sum_{m=1}^N X_m^j u^m \quad x \in \Gamma, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Здесь и ниже обозначим символами  $X_j^m$  и  $Y_j^m$  элементы матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Используя граничные условия, перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{df^j}{dx} = \sum_{m=1}^r X_m^j f^m + \sum_{m=r+1}^N X_m^j u^m, \quad 1 \leq j \leq r. \quad (13.6)$$

Потребуем, чтобы при  $x \in \Gamma$  и  $1 \leq j \leq r$  выполнялись следующие равенства:

$$X_m^j(x, 0) \equiv 0, \quad r + 1 \leq m \leq N, \quad (13.7)$$

$$\frac{df^j(x)}{dx} = \sum_{m=1}^r X_m^j(x, 0) f^m(x). \quad (13.8)$$

Выполнение этих условий гарантирует, что если граничные условия вида (13.4) выполняются в какой-то одной точке отрезка  $\Gamma$ , то эти граничные условия выполняются во всех точках отрезка.

Аналогично рассмотрим уравнения

$$\partial_y u^j(x, 0) = \sum_{m=1}^N Y_m^j u^m \quad x \in \Gamma, \quad r + 1 \leq j \leq N,$$

которые следуют из второго уравнения системы (13.1). Используя граничные условия, эти уравнения можно переписать в виде

$$g^j = \sum_{m=1}^r Y_m^j f^m + \sum_{m=r+1}^N Y_m^j u^m, \quad r + 1 \leq j \leq N. \quad (13.9)$$

Потребуем, чтобы при  $x \in \Gamma$  и  $r + 1 \leq j \leq N$  выполнялись следующие равенства:

$$Y_m^j(x, 0) \equiv 0, \quad r + 1 \leq m \leq N, \quad (13.10)$$

$$g^j(x) = \sum_{m=1}^r Y_m^j(x, 0) f^m(x), \quad r + 1 \leq j \leq N. \quad (13.11)$$

Выполнение этих условий гарантирует, что если граничные условия вида (13.5) выполняются в какой-то одной точке отрезка  $\Gamma$ , то эти граничные условия выполняются во всех точках отрезка.

Таким образом, для выполнения граничных условий (13.4) и (13.5) на отрезке  $\Gamma$  достаточно потребовать, чтобы коэффициенты координатных уравнений удовлетворяли условиям (13.7), (13.8), (13.10), (13.11), а также чтобы решение и удовлетворяло граничным условиям всего в одной точке отрезка.

Такие же условия могут быть сформулированы для каждого из пяти интервалов, на которые ось  $x$  разбивается точками  $a_1 \dots a_4$ . В случае более сложной дифракционной задачи необходимо сформулировать аналогичные условия для всех кусочно-прямолинейных участков границы.

Самый простой случай имеет место, когда заданы однородные граничные условия, т.е.  $f^m(x) = g^m(x) \equiv 0$ . Тогда достаточно проверить только условия

(13.7) и (13.10), т.е. проверить, что соответствующие элементы матриц  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  обращаются в ноль на оси  $x$ .

Построенные ограничения на матрицы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  носят локальный характер, т.е. могут быть непосредственно проверены в каждой точке. Необходимо наложить также глобальные ограничения. Они состоят в следующем. Пусть условия вида (13.7), (13.8), (13.10), (13.11) выполняются на каждом из интервалов оси  $x$ . Выберем на каждом из этих интервалов по одной точке, в которой будем проверять соответствующие граничные условия. Пусть это будут точки  $P_1 \dots P_5$ .

Соотношения (13.7), (13.8), (13.10), (13.11) гарантируют, что в каждой из точек  $P_1 \dots P_5$  имеются решения, удовлетворяющие в этих точках граничным условиям. Также, исследуя асимптотики решений координатных уравнений вдали от начала координат, нетрудно проверить, что имеются решения, удовлетворяющие условию излучения на бесконечности. Соответствующие решения образуют подпространства  $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_\infty$  в  $N$ -мерном пространстве решений координатных уравнений.

Глобальные ограничения заключаются в том, что пространства  $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_\infty$  должны иметь непустое пересечение, т.е. для какого-то решения должны выполняться все условия.

В рассматриваемом ниже случае матрицы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  зависят от нескольких констант. Эти константы необходимо подбирать так, чтобы выполнялись глобальные ограничения.

Ситуация упрощается, если координатные уравнения выводятся для функций на зоммерфельдовой поверхности, а не для функций на физической плоскости с рассеивателями. Для зоммерфельдовой поверхности нет необходимости формулировать граничные условия. Глобальные ограничения формулируются и в этом случае. Необходимо потребовать, чтобы риманова поверхность построенного решения имела заданную структуру.

## §14. Вывод координатных уравнений для комплексных краевых функций Грина

### Сверхсингулярные функции

Координатные уравнения будут выводиться для набора краевых функций Грина, введенных в §2. Как показано в первой главе, решение задачи с падающей плоской волной может быть выражено через краевые формулы Грина с помощью формулы расщепления.

Краевые функции Грина принадлежат линейному пространству сверхсингулярных функций, т.е. волновых полей, имеющих асимптотики в вершинах чуть более сильные, чем разрешено условиями Мейкснера. Более того, краевые функции Грина являются базисом этого пространства.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1** Назовем функцию  $u$ , заданную на данной зоммерфельдовой поверхности, сверхсингулярной, если она:

- удовлетворяет уравнению Гельмгольца на всей зоммерфельдовой поверхности, кроме, быть может, точек ветвления;
- удовлетворяет условию излучения на всех листах зоммерфельдовой поверхности;
- имеет следующие асимптотики в вершинах:

$$u(z_{n+}, z_{n-}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( C_+ z_{n+}^{-1/2} + C_- z_{n-}^{-1/2} \right) + \text{мейкснеровские члены}, \quad (14.1)$$

где под мейкснеровскими членами мы понимаем члены, удовлетворяющие обычным краевым условиям, а  $C_+$  и  $C_-$  – некоторые константы.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 14.1** Пусть  $u$  – сверхсингулярная функция, имеющая в точках ветвления асимптотики (14.1). Тогда выполняется равенство

$$u = - \sum_{n=1}^4 (C_+ u^{n+} + C_- u^{n-}). \quad (14.2)$$

Для доказательства этого достаточно вычесть левую часть из правой и проверить все условия теоремы единственности.

### Координатные уравнения

Введем обозначения

$$\widehat{C}_{n+}^{m+} = (a_n - a_m) C_{n+}^{m+}, \quad \widehat{C}_{n-}^{m-} = (a_n - a_m) C_{n-}^{m-}, \quad (14.3)$$

ТЕОРЕМА 14.1 Вектор  $u$ , определенный как

$$u = (u^{1+}, u^{2+}, u^{3+}, u^{4+}, u^{1-}, u^{2-}, u^{3-}, u^{4-})^T, \quad (14.4)$$

удовлетворяет координатным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z_+} u = \mathbf{Z}_+ u, \quad \frac{\partial}{\partial z_-} u = \mathbf{Z}_- u, \quad (14.5)$$

где

$$\mathbf{Z}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{+11} & \mathbf{Z}_{+12} \\ \mathbf{Z}_{+21} & \mathbf{Z}_{+22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_- = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{-11} & \mathbf{Z}_{-12} \\ \mathbf{Z}_{-21} & \mathbf{Z}_{-22} \end{pmatrix},$$

а элементы матриц  $\mathbf{Z}_{\pm mn}$  даются формулами

$$(\mathbf{Z}_{-11})_n^m = 0, \quad (14.6)$$

$$(\mathbf{Z}_{-12})_n^m = -C_{n-}^{m+}, \quad (14.7)$$

$$(\mathbf{Z}_{-21})_n^m = -\frac{z_{n+}}{z_{m-}} C_{n+}^{m-}, \quad (14.8)$$

$$(\mathbf{Z}_{-22})_n^m = -\frac{1}{z_{m-}} \left( \frac{\delta_{m,n}}{2} + \widehat{C}_{n-}^{m-} \right), \quad (14.9)$$

$$(\mathbf{Z}_{+11})_n^m = -\frac{1}{z_{m+}} \left( \frac{\delta_{m,n}}{2} + \widehat{C}_{n+}^{m+} \right), \quad (14.10)$$

$$(\mathbf{Z}_{+12})_n^m = -\frac{z_{n-}}{z_{m+}} C_{n-}^{m+}, \quad (14.11)$$

$$(\mathbf{Z}_{+21})_n^m = -C_{n+}^{m-}, \quad (14.12)$$

$$(\mathbf{Z}_{+22})_n^m = 0. \quad (14.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Построим следующие комбинации производных краевых функций Грина:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_m} u^{m\pm} \equiv i \left( z_{m+} \frac{\partial}{\partial z_+} - z_{m-} \frac{\partial}{\partial z_-} \right) u^{m\pm}, \quad \frac{\partial}{\partial z_{\mp}} u^{m\pm}. \quad (14.14)$$

Данные комбинации обладают важным свойством. Они сверхсингулярны в том смысле, который был определен выше. Это можно показать, изучая асимптотику данных комбинаций в вершинах. Отметим, что далеко не каждая комбинация первых производных сверхсингулярных функций сверхсингулярна, поскольку дифференцирование приводит к появлению особенности порядка  $\rho_n^{-3/2}$ .

Применим к комбинациям (14.14) Утверждение 14.1. В результате получим равенства

$$\left( z_{m+} \frac{\partial}{\partial z_+} - z_{m-} \frac{\partial}{\partial z_-} \right) u^{m\pm} = \mp \frac{1}{2} u^{m\pm} - \sum_{n=1}^4 (a_n - a_m) (C_{n+}^{m\pm} u^{n+} - C_{n-}^{m\pm} u^{n-}), \quad (14.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_-} u^{m+} = - \sum_{n=1}^4 C_{n-}^{m+} u^{n-}, \quad (14.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_+} u^{m-} = - \sum_{n=1}^4 C_{n+}^{m-} u^{n+}. \quad (14.17)$$

Заметим, что набор (14.14) состоит из 16 комбинаций. С помощью линейных преобразований можно из (14.15), (14.16), (14.16) выразить производные всех неизвестных функций по  $z_{\pm}$ . В результате получаем (14.5)  $\square$

### Координатные уравнения в “действительной” форме

Очевидно, с помощью линейного преобразования можно свести уравнения (14.5) к “действительной” форме (13.1). Будем выписывать уравнения (13.1) для вектора  $u_r$ , составленного из краевых функций Грина задач Дирихле и Неймана:

$$u_r = (v^1, v^2, v^3, v^4, w^1, w^2, w^3, w^4)^T$$

Заметим, что из (2.11)–(2.14) следует, что

$$u = \mathbf{T} u_r, \quad (14.18)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Кроме того, из (2.20) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{\partial}{\partial z_-}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z_+} - \frac{\partial}{\partial z_-} \right). \quad (14.19)$$

Таким образом, для вектора  $\mathbf{u}_r$  выполняются уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial x} = \mathbf{X} \mathbf{u}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial y} = \mathbf{Y} \mathbf{u}_r, \quad (14.20)$$

где

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_-)\mathbf{T}, \quad \mathbf{Y} = i\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Z}_+ - \mathbf{Z}_-)\mathbf{T}. \quad (14.21)$$

## §15. Тождества для параметров, входящих в коэффициенты координатных уравнений

В коэффициенты координатных уравнений входит значительное число параметров, а именно  $C_{n-}^{m+}$ ,  $C_{n+}^{m-}$ ,  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$ ,  $\widehat{C}_{n-}^{m-}$  при  $m$  и  $n$  от 1 до 4. Эти параметры связаны с асимптотиками решения задачи о краевых функциях Грина и изначально не известны. Поэтому для практического использования координатных уравнений необходимо подобрать параметры правильным образом.

Между неизвестными параметрами существуют алгебраические связи. Цель данного параграфа — учесть все такие связи и оставить в коэффициентах координатных уравнений наименьшее возможное число независимых параметров.

### Учет теоремы взаимности

Докажем теорему взаимности для зоммерфельдовой поверхности.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 15.1** Пусть на зоммерфельдовой поверхности задачи о дифракции на двух полосах заданы решения  $u$  и  $v$ , удовлетворяющие неоднородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = f, \quad \Delta v + k_0^2 v = g,$$

условиям Мейкснера в вершинах и условиям излучения.

Тогда

$$\iint (fv - gu) ds = 0, \quad (15.1)$$

где интегрирование проводится по всей зоммерфельдовой поверхности.

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проведем на поверхности разрезы, разделяющие поверхность на отдельные листы, например, как показано на Рис. 15.1.

Запишем вторую формулу Грина на каждом из листов. Для листа I она имеет вид

$$\iint_I (fv - gu) ds = - \int (u_n v - v_n u) d\Gamma.$$

Для листа II формула Грина имеет вид

$$\iint_{II} (fv - gu) ds = \int (u_n v - v_n u) d\Gamma.$$

Правые части этих равенств содержат одинаковые подынтегральные функции. Складывая эти равенства, получаем формулу (15.1).

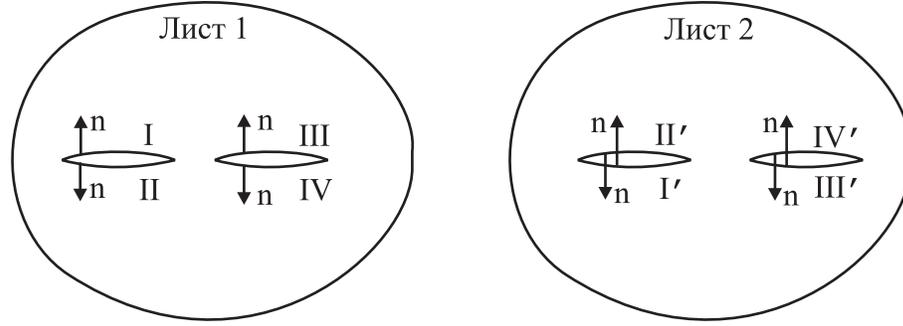


Рис. 15.1: К выводу теоремы взаимности на зоммерфельдовой поверхности

УТВЕРЖДЕНИЕ 15.2 Для коэффициентов  $C_{n\pm}^{m\pm}$ , входящих в асимптотики (2.22), (2.23) выполняются следующие соотношения:

$$C_{n+}^{m+} = C_{m+}^{n+}, \quad C_{n-}^{m-} = C_{m-}^{n-}, \quad (15.2)$$

$$C_{n-}^{m+} = C_{m+}^{n-}, \quad C_{n+}^{m-} = C_{m-}^{n+}. \quad (15.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Краевые функции Грина  $v^m$  и  $w^m$  определяются в результате предельной процедуры, относящейся к неоднородному уравнению Гельмгольца. Соответственно, функции  $u^{m\pm}$  могут быть введены в результате аналогичной процедуры, причем источники имеют вид

$$I_{m+} = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(\rho_m - \epsilon) \{ \delta(\theta_m) - i\delta(\theta_m - \pi) - \delta(\theta_m - 2\pi) + i\delta(\theta_m - 3\pi) \}$$

для функций  $u^{m+}$ , и

$$I_{m-} = \frac{\pi^{1/2}}{\epsilon^{3/2}} \delta(\rho_m - \epsilon) \{ \delta(\theta_m) + i\delta(\theta_m - \pi) - \delta(\theta_m - 2\pi) - i\delta(\theta_m - 3\pi) \}$$

для функций  $u^{m-}$ .

Применим Утверждение 15.1 к функциям  $u^{m\alpha}$  и  $u^{n\beta}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  могут принимать значения  $+$  и  $-$ . При этом вначале построим формулу (15.1) для некоторого ненулевого  $\epsilon$ , а затем перейдем к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Заметим, что ненулевой результат при интегрировании дает только умножение на член асимптотики порядка  $\rho_m^{1/2}$ , причем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint I_{n\pm} z_{n\mp}^{1/2} dx dy = 0,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint I_{n\pm} z_{n\pm}^{1/2} dx dy = \sqrt{\pi}.$$

Учитывая это и беря в формуле (15.1) предел  $\epsilon \rightarrow 0$ , получаем тождества (15.2), (15.3).

Соотношения (15.2) могут быть переписаны с учетом (14.3) как

$$\widehat{C}_{n+}^{m+} = -\widehat{C}_{m+}^{n+}, \quad \widehat{C}_{n-}^{m-} = -\widehat{C}_{m-}^{n-}. \quad (15.4)$$

### Учет соотношений (13.2) и (13.3)

**УТВЕРЖДЕНИЕ 15.3** Для коэффициентов  $C_{n\pm}^{m\pm}$ , входящих в асимптотики (2.22), (2.23) выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{l=1}^4 C_{l-}^{m+} C_{n+}^{l-} = -\frac{k_0^2}{4} \delta_{m,n} \quad (15.5)$$

и

$$\sum_{l=1}^4 \widehat{C}_{l+}^{m+} C_{n-}^{l+} = -\sum_{l=1}^4 C_{l-}^{m+} \widehat{C}_{n-}^{l-}. \quad (15.6)$$

(Здесь коэффициенты  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$  и  $\widehat{C}_{n-}^{m-}$  определяются равенствами (14.3)).

Прежде всего, заметим, что соотношения (15.5) и (14.3) эквивалентны соотношениям (13.2) и (13.3). Для этого перепишем (13.2) и (13.3) в комплексной форме:

$$\frac{\partial}{\partial z_-} \mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_+ \mathbf{Z}_- = \frac{\partial}{\partial z_+} \mathbf{Z}_- + \mathbf{Z}_- \mathbf{Z}_+, \quad (15.7)$$

$$4 \left( \frac{\partial}{\partial z_+} \mathbf{Z}_- + \mathbf{Z}_- \mathbf{Z}_+ \right) + k_0^2 \mathbf{I} = 0 \quad (15.8)$$

и подставим матрицы  $\mathbf{Z}_+$  и  $\mathbf{Z}_-$  в виде (14.6)–(14.13) в соотношения (15.7) и (15.8). Получим, что соотношения (15.7) и (15.8) выполняются тогда и только тогда, когда при всех  $n, m = 1 \dots 4$  выполняются равенства (15.5) и (15.6).

Однако проведенное рассуждение не может считаться доказательством формул (15.5) и (14.3), поскольку, как уже отмечалось, соотношения (13.2) и (13.3) формально не являются необходимыми, пока не доказано существование восьми линейно-независимых решений координатных уравнений, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца. Поэтому доказательство проведем иначе.

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Продолжим ряд Мейкснера для решений  $u^{m\pm}$  до членов порядка  $\rho_n^{3/2}$ :

$$u^{m\pm}(z_{n+}, z_{n-}) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} z_{n\pm}^{-1/2} \left( 1 - \frac{k_0^2}{2} z_{n-} z_{n+} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( C_{n+}^{m\pm} z_{n+}^{1/2} + C_{n-}^{m\pm} z_{n-}^{1/2} \right) + M_{n+}^{m\pm} z_{n+}^{3/2} + M_{n-}^{m\pm} z_{n-}^{3/2} + O(\rho_n^{5/2}) \quad (15.9)$$

с неизвестными коэффициентами  $M_{n\pm}^{m\pm}$ .

Подставим это разложение в первое уравнение (14.5). Домножим первые четыре строки уравнения на  $z_{m+}$ . Рассмотрим асимптотику всех восьми строк вблизи вершины с номером  $n$ ,  $n = 1 \dots 4$ , а именно рассмотрим коэффициенты правой и левой части при  $z_{n-}$ . Первые четыре строки уравнения дают (15.6), вторые четыре строки дают (15.5).  $\square$

Таким образом, доказаны важные соотношения для неизвестных параметров (15.5) и (14.3), и, что еще более важно, доказана совместность и “гельмгольцевость” координатных уравнений (13.2) и (13.3).

**Учет геометрической симметрии задачи**

Геометрическая симметрия  $y \rightarrow -y$  позволяет вывести соотношения

$$C_{n+}^{m-} = (-1)^{m-n} C_{n-}^{m+}, \quad \widehat{C}_{n-}^{m-} = (-1)^{m-n} \widehat{C}_{n+}^{m+}. \quad (15.10)$$

**Параметрическое описание коэффициентов координатного уравнения**

Тождества (15.3), (15.4), (15.5), (15.6) можно аналогичным образом вывести для любой зоммерфельдовой поверхности с точками ветвления второго порядка. Равенства (15.10) специфичны для конкретной зоммерфельдовой поверхности.

Достаточно легко получить параметрическое описание решений системы (15.3), (15.4), (15.5), (15.6). Выберем произвольную ортогональную матрицу и умножим ее на  $-ik_0/2$ . Получится матрица, состоящая из элементов  $C_{n+}^{m-}$  (точнее, кандидатов в эти элементы). Матрица  $C_{n-}^{m+}$  получается в результате транспонирования матрицы  $C_{n+}^{m-}$ . Затем выбирается произвольная кососимметрическая матрица  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$ . Матрица  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$  строится при помощи соотношения

$$\widehat{C}_{n-}^{m-} = \frac{4}{k_0^2} \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^4 C_{l+}^{m-} \widehat{C}_{k+}^{l+} C_{n-}^{k+}, \quad (15.11)$$

следующего из (15.12) и (15.13).

Таким образом, решение системы (15.3), (15.4), (15.5), (15.6) зависит от 12 комплексных параметров. Первые 6 из них определяют ортогональную матрицу (можно считать их комплексными углами поворотов орт системы координат). Вторые 6 параметров задают кососимметрическую матрицу  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$ . Например, это элементы, расположенные над главной диагональю.

Наличие равенств (15.10) усложняет алгебраическую структуру коэффициентов. Исследуем эту структуру, т.е. выразим коэффициенты  $C$  и  $\widehat{C}$  через несколько независимых друг от друга комплексных параметров. Самостоятельный интерес представляет отыскание числа параметров, определяющих коэффициенты.

Будем решать следующую систему уравнений, замкнутую относительно коэффициентов  $C_{n+}^{m-}$  и  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$ :

$$\sum_{l=1}^4 C_{m+}^{l-} C_{n+}^{l-} = -\frac{k_0^2}{4} \delta_{m,n} \quad (15.12)$$

$$\sum_{l=1}^4 (-1)^l \widehat{C}_{m+}^{l+} C_{n+}^{l-} = \sum_{l=1}^4 (-1)^l \widehat{C}_{n+}^{l+} C_{m+}^{l-}, \quad (15.13)$$

$$C_{n+}^{m-} = (-1)^{m-n} C_{m+}^{m-}, \quad (15.14)$$

$$\widehat{C}_{n+}^{m+} = -\widehat{C}_{m+}^{m+}. \quad (15.15)$$

Введем матрицу  $\mathbf{C}$  размерности  $4 \times 4$ , состоящую из элементов  $(-1)^{m-1} C_{n+}^{m-}$  (здесь индекс  $m$  нумерует строки матрицы, индекс  $n$  — столбцы). Кроме того, введем матрицу  $\widehat{\mathbf{C}}$  той же размерности, состоящую из элементов  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$ .

Будем рассматривать матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\widehat{\mathbf{C}}$  как операторы, действующие в линейном пространстве над  $\mathbb{C}^4$  со скалярным произведением, определяемым равенством

$$x \cdot y = \sum_{m=1}^4 x^m y^m.$$

Строго говоря, норма, соответствующая этому скалярному произведению, не является положительно определенной, поэтому можно считать лишь, что введено *псевдоскалярное* произведение. Однако в данном случае разница не существенна.

Рассмотрим свойства матрицы  $\mathbf{C}$ . Из тождеств (15.12) и (15.14) следует, что матрица  $2\mathbf{C}/(ik_0)$  симметрична и ортогональна:

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C}\mathbf{C}^T = -\frac{k_0^2}{4} \mathbf{I}, \quad (15.16)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерностью  $4 \times 4$ . Отсюда следует, что матрица  $\mathbf{C}$  может быть приведена к диагональному виду, и все ее собственные значения равны  $\pm ik_0/2$ .

Таким образом, пространство  $\mathbb{C}^4$  можно разбить на два ортогональных подпространства,  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{N}$ . Первое из них натянуто на собственные векторы оператора  $\mathbf{C}$ , соответствующие собственному значению  $ik_0/2$ , а второе натянуто на собственные векторы, соответствующие значению  $-ik_0/2$ . Оператор  $2\mathbf{C}/(ik_0)$  оставляет на месте элементы пространства  $\mathbf{T}$  и меняет знак у элементов пространства  $\mathbf{N}$ :

$$\frac{2}{ik_0}\mathbf{C}x = x \text{ при } x \in \mathbf{T}, \quad \frac{2}{ik_0}\mathbf{C}x = -x \text{ при } x \in \mathbf{N}. \quad (15.17)$$

Оператор  $2\mathbf{C}/(ik_0)$  осуществляет симметрию пространства  $\mathbb{C}^4$  относительно подпространства  $\mathbf{T}$ .

Зададим матрицу  $\mathbf{C}$  параметрически. Для этого выберем в пространстве  $\mathbb{C}^4$  несколько (от нуля до четырех) произвольных ортогональных и нормированных на единицу векторов  $\mathbf{n}_j$ . Это будет базис пространства  $\mathbf{N}$ . Столбцы  $\mathbf{d}_n$  матрицы  $\mathbf{C}$  определяются соотношением, представляющим собой преобразование симметрии:

$$\mathbf{d}_m = \frac{ik_0}{2} \left( \mathbf{e}_m - 2 \sum_j (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}_j) \mathbf{n}_j \right). \quad (15.18)$$

Здесь  $\mathbf{e}_m$  единичные орты пространства  $\mathbb{C}^4$ , т.е.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность пространства  $\mathbf{N}$  может быть любой от 0 до 4. Однако в случае рассматриваемой дифракционной задачи эту размерность можно определить из дополнительных соображений. Очевидно, эта размерность, будучи дискретным параметром решения, не может меняться при гладком изменении других параметров задачи, например при изменении волнового числа  $k_0$ . Выберем волновое число достаточно большим. Тогда воздействием точек ветвления зоммерфельдовой поверхности друг на друга можно пренебречь и получить приближенную формулу

$$u^{m-} \approx -\frac{e^{ik_0\sqrt{z_m+z_m^-}}}{\sqrt{\pi z_-}}$$

Очевидно, в таком приближении

$$C_{n+}^{m-} \approx -\frac{ik_0}{2} \delta_{m,n}$$

и

$$\mathbf{C} = \frac{ik_0}{2} \text{diag}(-1, 1, -1, 1).$$

Это означает, что в предельном случае больших значений  $k_0$  следует выбрать пространство  $\mathbf{N}$  размерности 2, причем векторы  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  в этом предельном случае необходимо выбрать равными  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_3$ .

Итак, пространство  $\mathbf{N}$  имеет размерность 2. Проанализируем, сколько независимых скалярных параметров задают это пространство. Вектор  $\mathbf{p}_1$  выбираем при помощи 3 параметров, вектор  $\mathbf{p}_2$  — при помощи двух (поскольку он ортогонален  $\mathbf{p}_1$ ), при этом в плоскости  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  эту пару можно как угодно вращать, что приводит к потере одного скалярного параметра. Итого, имеем 4 комплексных скалярных параметра.

Исследуем матрицу  $\widehat{\mathbf{C}}$ . Из тождеств (15.13) и (15.15) следует, что матрица  $\widehat{\mathbf{C}}$  кососимметрична и антикоммутирует с  $\mathbf{C}$ :

$$\widehat{\mathbf{C}}^T = -\widehat{\mathbf{C}}, \quad \widehat{\mathbf{C}}\mathbf{C} = -\mathbf{C}\widehat{\mathbf{C}}. \quad (15.19)$$

Из второго равенства следует, что оператор  $\widehat{\mathbf{C}}$  переводит векторы, принадлежащие  $\mathbf{T}$ , в  $\mathbf{N}$  и наоборот. Продемонстрируем, что это так. Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$ , т.е.

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \frac{ik_0}{2}\mathbf{x}.$$

Проделаем следующие выкладки:

$$\mathbf{C}(\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{x}) = -\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{C}\mathbf{x} = -\frac{ik_0}{2}\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{x}.$$

Это означает, что  $\widehat{\mathbf{C}}\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ . То же можно проделать с вектором  $\mathbf{x}$ , принадлежащим  $\mathbf{N}$ .

Приведем оператор  $\widehat{\mathbf{C}}$  к ортогональному базису, состоящему из собственных векторов оператора  $\mathbf{C}$ . Пусть первые два собственных вектора принадлежат  $\mathbf{T}$ , а вторые два принадлежат  $\mathbf{N}$ . Очевидно, в данном базисе матрица оператора (назовем ее  $\widehat{\mathbf{C}}'$ ) также кососимметрична. Кроме того, в соответствии со сказанным выше, она должна иметь блочную форму

$$\widehat{\mathbf{C}}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M}^T & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{M}$  — произвольная матрица размерности  $2 \times 2$ . Таким образом, при заданной матрице  $\mathbf{C}$  матрица  $\widehat{\mathbf{C}}$  определяется с помощью четырех произвольных параметров.

Опишем формально процедуру построения матрицы  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

Построим базисы пространств  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{T}$ , для определенности ортонормированные. Эти базисы представляют собой пары векторов  $(n_1, n_2)$ ,  $(t_1, t_2)$ , соответственно.

Возьмем 4 произвольные константы  $g_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2$  и построим величины  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$  как линейные комбинации

$$\widehat{C}_{n+}^{m+} = \sum_{i,j=1}^2 g_{i,j} |e_m, e_n, t_i, n_j|. \quad (15.20)$$

В правой части стоят определители, построенные из соответствующих векторов-столбцов.

Очевидно, решение уравнений (15.19) зависит от четырех скалярных параметров, а именно от величин  $g_{i,j}$ .

Итак, после учета геометрических симметрий, теоремы взаимности, совместности и “гельмгольцевости” координатных уравнений, коэффициенты координатных уравнений зависят от *восьми* свободных скалярных параметров. Четыре из них задают матрицу  $\mathbf{C}$ , а другие четыре — матрицу  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

## §16. Связь координатных и спектральных уравнений

Установим связь между координатными уравнениями, выведенными в данной главе и спектральным уравнением, изученным в предыдущей главе. В настоящем разделе показано, что из координатных уравнений следует спектральное. Более общая и детальная совместная теория спектрального и координатных уравнений строится в главе 4 на примере уголкового отражателя со щелью.

### Координатные уравнения в переменных $(r, \theta)$

Построим для комплексных координатных уравнений переход к спектральным уравнениям.

Преобразуем уравнения (14.5) к наиболее симметричной форме. А именно, нам будет мешать наличие в (15.10) множителей, зависящих от  $m$  и  $n$ . Для того, чтобы избавиться от этих множителей, перейдем к новому вектору неизвестных:

$$\tilde{\mathbf{u}} = (u^{1+}, u^{2+}, u^{3+}, u^{4+}, u^{1-}, -u^{2-}, u^{3-}, -u^{4-})^T. \quad (16.1)$$

Для этого вектора можно выписать уравнения, аналогичные (14.5):

$$\frac{\partial}{\partial z_+} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{Z}}_+ \tilde{\mathbf{u}}, \quad \frac{\partial}{\partial z_-} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{Z}}_- \tilde{\mathbf{u}}, \quad (16.2)$$

где матрицы  $\tilde{\mathbf{Z}}_{\pm}$  имеют блочную форму следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_+ = - \begin{pmatrix} (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{I}/2 + \hat{\mathbf{C}}) & (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{C} (z_- \mathbf{I} - \mathbf{P}) \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix}, \quad (16.3)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_- = - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ (z_- \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{C} (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P}) & (z_- \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{I}/2 + \hat{\mathbf{C}}) \end{pmatrix}, \quad (16.4)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $4 \times 4$ , матрица  $\mathbf{P}$  имеет диагональный вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}; \quad (16.5)$$

матрица  $\mathbf{C}$  составлена из элементов  $(-1)^{m-1} C_{n+}^{m-}$ , причем индекс  $m$  нумерует строки,  $n$  нумерует столбцы; матрица  $\hat{\mathbf{C}}$  составлена из элементов  $\hat{C}_{n+}^{m+}$ .

Перейдем от переменных  $(z_+, z_-)$  к переменным  $(r, \theta)$  с помощью очевидных соотношений

$$r = \sqrt{z_+ z_-}, \quad e^{i\theta} = \sqrt{z_+/z_-}.$$

Построим координатные уравнения в координатах  $(r, \theta)$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{z_+ z_-}} (z_+ \tilde{\mathbf{Z}}_+ + z_- \tilde{\mathbf{Z}}_-) \tilde{u}, \quad (16.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{u} = i(z_+ \tilde{\mathbf{Z}}_+ - z_- \tilde{\mathbf{Z}}_-) \tilde{u}. \quad (16.7)$$

### Асимптотики решений координатных уравнений при больших $r$

Построим уравнения для асимптотики поля при больших  $r$ . Исследуем с этой точки зрения уравнение (16.6). Разложим коэффициент в ряд по обратным степеням  $r$  и ограничимся только нулевой степенью. Полученная матрица коэффициентов будет иметь блочную форму вида

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{u} \approx -2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \mathbf{C} \\ e^{i\theta} \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \tilde{u}. \quad (16.8)$$

Как было показано в §15, матрица  $\mathbf{C}$  может быть приведена к диагональному виду с собственными значениями, равными  $-ik_0/2$  и  $ik_0/2$ . Каждое из собственных значений встречается по 2 раза. Обозначим символом  $u_{\parallel}$  любой из собственных векторов, соответствующих собственному значению  $ik_0/2$ , а символом  $u_{\perp}$  — любой из векторов, соответствующих числу  $-ik_0/2$ , т.е.

$$\mathbf{C} u_{\parallel} = \frac{ik_0}{2} u_{\parallel}, \quad \mathbf{C} u_{\perp} = -\frac{ik_0}{2} u_{\perp}. \quad (16.9)$$

Векторы  $u_{\parallel}$  и  $u_{\perp}$  имеют размерность 4.

Теперь построим собственные векторы матрицы, стоящей в правой части (16.8). Эта матрица имеет собственные значения  $\pm ik_0$ . Значению  $ik_0$  соответствуют векторы вида

$$(u_{\parallel}, -e^{i\theta} u_{\parallel})^T, \quad (u_{\perp}, e^{i\theta} u_{\perp})^T. \quad (16.10)$$

Эти векторы записаны в блочной форме, т.е. они составлены из двух векторов размерности 4. Поскольку на месте  $u_{\parallel}$  или на месте  $u_{\perp}$  могут стоять по 2 разных линейно независимых вектора, заключаем, что собственное значение  $ik_0$  имеет кратность 4.

Аналогично, собственному значению  $-ik_0$  соответствуют векторы вида

$$(\mathbf{u}_{\parallel}, e^{i\theta}\mathbf{u}_{\parallel})^T, \quad (\mathbf{u}_{\perp}, -e^{i\theta}\mathbf{u}_{\perp})^T. \quad (16.11)$$

Очевидно, матрица коэффициентов в уравнении (16.8) может быть приведена к диагональному виду.

Таким образом, уравнение (16.6) описывает решения, ведущие себя на бесконечности как  $\sim e^{ik_0r}$  и как  $\sim e^{-ik_0r}$ . Физически эти решения представляют собой расходящиеся и сходящиеся волны. Ограничимся расходящимися волнам, т.е. будем считать, что на большом удалении от начала координат решение имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{e^{ik_0r-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0r}} \tilde{\mathbf{U}}(\theta) + O(e^{ik_0r}r^{-3/2}), \quad (16.12)$$

где диаграмма направленности  $\tilde{\mathbf{U}}(\theta)$  при каждом  $\theta$  представляет собой линейную комбинацию векторов (16.10).

### Спектральное уравнение

Проанализируем уравнение (16.7). Рассмотрим его правую часть при больших значениях  $r$ . Разложив ее в ряд по обратным степеням  $r$  и ограничившись нулевой степенью, получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{\mathbf{u}} \approx -i \begin{pmatrix} \mathbf{I}/2 + \hat{\mathbf{C}} & -\mathbf{C}\mathbf{P} + e^{-2i\theta}\mathbf{P}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{P} - e^{2i\theta}\mathbf{P}\mathbf{C} & -(\mathbf{I}/2 + \hat{\mathbf{C}}) \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}. \quad (16.13)$$

Приближенное уравнение (16.13) может быть переписано как *точное уравнение в обыкновенных производных* для диаграмм направленности  $\tilde{\mathbf{U}}$ :

$$\frac{d}{d\theta}\tilde{\mathbf{U}} = -i \begin{pmatrix} \mathbf{I}/2 + \hat{\mathbf{C}} & -\mathbf{C}\mathbf{P} + e^{-2i\theta}\mathbf{P}\mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{P} - e^{2i\theta}\mathbf{P}\mathbf{C} & -(\mathbf{I}/2 + \hat{\mathbf{C}}) \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}. \quad (16.14)$$

Уравнение (16.14) является первым шагом к построению спектрального уравнения. От спектрального уравнения для данной задачи его отличает то, что (16.14) имеет размерность 8, в то время, как спектральное уравнение имеет размерность 4. Выделим из уравнения (16.14) замкнутое уравнение размерности 4 для диаграмм направленности расходящихся волн.

Представим вектор  $\tilde{\mathbf{U}}$  в блочной форме, разбив его на подвекторы размерности 4:

$$\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{U}}^+, \tilde{\mathbf{U}}^-)^T.$$

Заметим, что разложение каждого из подвекторов по подпространствам матрицы  $\mathbf{C}$ , соответствующим различным собственным числам, дается формулой:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\parallel}^{\pm} = \left( \frac{\mathbf{I}}{2} + \frac{\mathbf{C}}{ik_0} \right) \tilde{\mathbf{U}}^{\pm}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_{\perp}^{\pm} = \left( \frac{\mathbf{I}}{2} - \frac{\mathbf{C}}{ik_0} \right) \tilde{\mathbf{U}}^{\pm}.$$

Это значит, что всякий вектор  $\tilde{\mathbf{U}}$ , принадлежащий подпространству расходящихся волн (16.10), имеет вид

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left( \tilde{\mathbf{U}}^+, -\frac{2e^{i\theta}\mathbf{C}}{ik_0}\tilde{\mathbf{U}}^+ \right). \quad (16.15)$$

Подставляя (16.15) в (16.14) и используя тот факт, что

$$\mathbf{C}^2 = -\frac{k_0^2\mathbf{I}}{4}, \quad (16.16)$$

получим уравнение размерности 4:

$$\frac{d}{d\theta}\tilde{\mathbf{U}}^+(\theta) = -i \left\{ \frac{\mathbf{I}}{2} + \hat{\mathbf{C}} + \frac{2e^{i\theta}}{ik_0}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C} - \frac{ik_0e^{-i\theta}}{2}\mathbf{P} \right\} \tilde{\mathbf{U}}^+(\theta). \quad (16.17)$$

Наконец, приведем уравнение (16.17) к виду (7.2), (7.3). Перейдем к неизвестным функциям  $S^1(\theta) \dots S^4(\theta)$ , являющимся диаграммами направленности полей  $v^1 \dots v^4$ . Напомним, что функции  $v^1 \dots v^4$  представляют собой краевые функции Грина для задачи Дирихле, а функции  $S^m$  входят в формулу расщепления (1.11). Построим вектор

$$\mathbf{S} = (S^1(\theta), S^2(\theta), S^3(\theta), S^4(\theta))^T.$$

Воспользуемся тождествами (2.11)–(2.14). Эти тождества вместе с (16.15) дают связь

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{J} \left( \mathbf{I} + \frac{2e^{i\theta}}{ik_0}\mathbf{C} \right) \tilde{\mathbf{U}}^+, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.18)$$

Перейдем в уравнении (16.17) к независимой переменной  $k = -k_0 \cos \theta$  и к вектору неизвестных функций

$$\mathbf{W}(k) = -\frac{\mathbf{S}(k)}{\sqrt{k_0^2 - k^2}}.$$

Именно относительно этого вектора в главе 2 было составлено спектральное уравнение. После алгебраических преобразований получим для  $\mathbf{W}$  уравнение вида (7.2) с коэффициентами (7.3) и представление матриц  $\mathbf{K}^\pm$  в виде

$$\mathbf{K}^\pm = \frac{1}{2}\mathbf{J} \left[ -\mathbf{I} + \mathbf{Q} \pm \frac{2}{ik_0}\mathbf{Q}\mathbf{C} \right] \mathbf{J}^{-1}, \quad (16.19)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{I}}{2} + \widehat{\mathbf{C}} + \mathbf{P}\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{P}.$$

### Связь между решениями задач Дирихле и Неймана

Вектор, относительно которого записывается спектральное уравнение задачи Неймана, состоит из диаграмм направленности краевых функций Грина  $w^m$ . Обозначим этот вектор символом  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Из уравнений (2.11)–(2.14) следует, что

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{i}{2}\mathbf{J}^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{2}{ik_0}e^{i\theta}\mathbf{C} \right) \tilde{\mathbf{U}}^+. \quad (16.20)$$

Сравнивая это соотношение с (16.18), получаем после несложных выкладок

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left[ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{J}^2 + \frac{2}{ik_0\sin\theta}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{J}^{-1} \right] \mathbf{S}. \quad (16.21)$$

## §17. Вычисления на основе координатных уравнений для одиночной полосы

### Дифракция на одиночной полосе. Координатные уравнения

Как и в главе 2, продемонстрируем применение координатных уравнений на примере одной полосы. Благодаря наличию симметрий, коэффициенты координатных уравнений зависят лишь от двух независимых параметров, что позволяет избежать слишком громоздких выкладок.

Для наглядности координатные уравнения будем выписывать для вектора, состоящего из краевых функций Грина на физической плоскости с рассеивателями, т.е. для  $u_r = (v^1, v^2, w^1, w^2)^T$ . Более того, представим координатные уравнения не в виде (14.5), а в виде (14.20) (в производных  $\partial_x$  и  $\partial_y$ ).

Итак, пусть имеется одиночная полоса с вершинами  $a_1 = -a$  и  $a_2 = a$ . В расчетах будем полагать для определенности, что  $a = 1$ . Локальные полярные координаты в этих вершинах задаются так же, как в задаче о дифракции на паре полос.

Запишем координатные уравнения для вектора  $u_r$  с коэффициентами в блочной форме

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^1 & \mathbf{X}_2^1 \\ \mathbf{X}_1^2 & \mathbf{X}_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1^1 & \mathbf{Y}_2^1 \\ \mathbf{Y}_1^2 & \mathbf{Y}_2^2 \end{pmatrix}, \quad (17.1)$$

где элементы матриц  $\mathbf{X}_j^i$  и  $\mathbf{Y}_j^i$  задаются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_1^1)_n^m &= \frac{(-1)^{m-1}(x - a_m)(Q_n^m - (x - a_m)T_n^m)}{(x - a_m)^2 + y^2}, \\ (\mathbf{X}_2^1)_n^m &= -\frac{y(R_n^m - (x - a_m)B_n^m)}{(x - a_m)^2 + y^2}, \\ (\mathbf{X}_1^2)_n^m &= -\frac{y(Q_n^m - (x - a_m)T_n^m)}{(x - a_m)^2 + y^2}, \\ (\mathbf{X}_2^2)_n^m &= \frac{(-1)^m(x - a_m)(R_n^m - (x - a_m)B_n^m)}{(x - a_m)^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (17.2)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Y}_1^1)_n^m &= \frac{(-1)^{m-1}y(Q_n^m - (x - a_m)T_n^m)}{(x - a_m)^2 + y^2}, \\
(\mathbf{Y}_2^1)_n^m &= \frac{(x - a_m)R_n^m + y^2B_n^m}{(x - a_m)^2 + y^2}, \\
(\mathbf{Y}_1^2)_n^m &= \frac{(x - a_m)Q_n^m + y^2T_n^m}{(x - a_m)^2 + y^2}, \\
(\mathbf{Y}_2^2)_n^m &= \frac{(-1)^m y(R_n^m - (x - a_m)B_n^m)}{(x - a_m)^2 + y^2}.
\end{aligned} \tag{17.3}$$

Здесь  $Q_n^m$ ,  $R_n^m$ ,  $B_n^m$  и  $T_n^m$  — элементы матриц размерности  $2 \times 2$ . Эти матрицы имеют вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2aE_2^1 \\ 2aE_1^2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2aC_2^1 \\ 2aC_1^2 & -1/2 \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

$$\mathbf{B} = - \begin{pmatrix} C_1^1 + E_1^1 & C_2^1 - E_2^1 \\ C_1^2 - E_1^2 & C_2^2 + E_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = - \begin{pmatrix} C_1^1 + E_1^1 & E_2^1 - C_2^1 \\ E_1^2 - C_1^2 & C_2^2 + E_2^2 \end{pmatrix}. \tag{17.5}$$

Коэффициенты  $C_n^m$  и  $E_n^m$  входят в асимптотики (2.6), (2.8).

### Тождества для параметров

Пользуясь теоремой взаимности, сокращаем число неизвестных параметров:

$$C_1^2 = C_2^1, \quad E_1^2 = E_2^1. \tag{17.6}$$

Кроме того, задача обладает естественной симметрией относительно оси  $Oy$ , поэтому, очевидно,

$$C_2^2 = C_1^1, \quad E_2^2 = E_1^1. \tag{17.7}$$

Таким образом, для построения координатных уравнений необходимо найти всего 3 параметра, а именно

$$E_2^1, \quad C_2^1, \quad C_1^1 + E_1^1.$$

На эти параметры наложено ограничение

$$k_0^2 + (C_1^1 + E_1^1)^2 - (C_2^1 - E_2^1)^2 = 0, \tag{17.8}$$

в данном случае гарантирующее выполнение (13.3). Удобно считать  $E_2^1$  и  $C_2^1$  независимыми параметрами. При этом

$$C_1^1 + E_1^1 = -i\sqrt{k_0^2 - (C_2^1 - E_2^1)^2}. \tag{17.9}$$

Заметим, что условие (13.2) в нашем случае выполняется тождественно.

Таким образом, коэффициенты уравнения зависят от двух параметров. Проанализируем ограничения, накладываемые на искомый вектор  $u_r$ . Решение должно удовлетворять граничным условиям и условию излучения. Вычисляя локальные асимптотики решений координатных уравнений, можно убедиться, что краевые условия в вершинах удовлетворяются автоматически, т.е. решения не могут иметь асимптотики более сильные, чем у краевых функций Грина.

### Итерационная процедура подбора параметров

Как уже указывалось, по отношению к граничным условиям координатные уравнения обладают замечательным свойством. Вся граница (ось  $x$ ) разбита на 3 участка:  $(-\infty, -a)$ ,  $(-a, a)$ ,  $(a, \infty)$ . Для проверки того, что решение  $u_r$  удовлетворяет граничным условиям, достаточно выбрать по одной точке на каждом из участков и проверить выполнение граничных условий в этих точках. При этом нет необходимости проверять в данной точке выполнение всех граничных условий. Достаточно проверить выполнение только условий типа Дирихле. Выполнение условий типа Неймана будет следовать из структуры координатных уравнений.

В точке с координатами  $(0, 0)$  выберем начальные условия вида

$$u_r(0, 0) = (0, 0, 1, 1)^T, \quad (17.10)$$

что обеспечивает выполнение граничных условий на отрезке  $(-a, a)$ , а также симметрию решения

$$v^2(x, y) = v^1(-x, y), \quad w^2(x, y) = w^1(-x, y). \quad (17.11)$$

Очевидно, найденное с такими начальными условиями решение  $u_r$  может отличаться от искомого решения  $u_r$  только постоянным множителем.

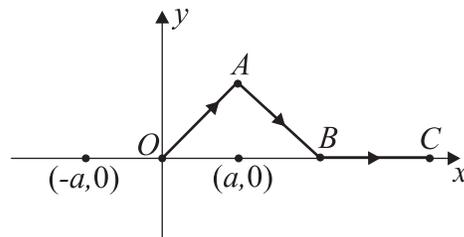


Рис. 17.1: Путь, вдоль которого решаются координатные уравнения

Зададимся некоторыми значениями параметров  $C_2^1$  и  $E_2^1$ . С помощью алгебраического соотношения (17.9) построим комбинацию  $C_1^1 + E_1^1$  (полагая при этом, что выбрана положительная действительная ветвь квадратного корня).

Решим систему координатных уравнений с выбранными коэффициентами и начальными условиями вдоль отрезков  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  (см. Рис. 17.1). Точки имеют координаты, соответственно,  $O = (0, 0)$ ,  $A = (a, a)$ ,  $B = (2a, 0)$ ,  $C = (aN, 0)$ ,  $N = 50$ . Точка  $B$  необходима для проверки граничных условий на интервале  $(a, \infty)$ , точка  $C$  необходима для проверки условий излучения (величина  $aN$  считается “большой”). Точка  $A$  необходима для того, чтобы путь, вдоль которого решаются координатные уравнения, не проходил через особую точку  $(a, 0)$ .

В точках  $B$  и  $C$  строятся *невязки*  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , указывающие, насколько решение отклоняется от заданных граничных условий и условий излучения. Подбор параметров признается завершенным, когда  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  с заданной точностью. Структура невязок будет рассмотрена ниже.

В результате описанной выше процедуры паре параметров  $(C_2^1, E_2^1)$  ставится в соответствие пара невязок  $(\eta_1, \eta_2)$ . Будем считать, что задано отображение  $\Pi$ :

$$(\eta_1, \eta_2) = \Pi(C_2^1, E_2^1). \quad (17.12)$$

Блок-схема вычисления этого отображения показана на Рис. 17.2.



Рис. 17.2: Блок-схема вычисления отображения  $\Pi$

Подбор параметров производится итерационным градиентным способом. Начальные значения выбираем в виде  $(C_2^1)_0 = (E_2^1)_0 = 0$ , что соответствует дифракции на невзаимодействующих полуплоскостях. Стоим невязки

$$(\eta_1, \eta_2) = \Pi((C_2^1)_0, (E_2^1)_0).$$

Предполагая отображение  $\Pi$  достаточно гладким, строим частные производные

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial C_2^1}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial E_2^1}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial C_2^1}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial E_2^1}.$$

Производные строятся так. Выбираем достаточно малое значение  $\epsilon$ . Вычисляем невязки

$$(\eta'_1, \eta'_2) = \Pi((C_2^1)_0 + \epsilon, (E_2^1)_0).$$

$$(\eta''_1, \eta''_2) = \Pi((C_2^1)_0, (E_2^1)_0 + \epsilon).$$

Производные приближенно определяются по формулам

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial C_2^1} = \frac{\eta'_1 - \eta_1}{\epsilon}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial E_2^1} = \frac{\eta''_1 - \eta_1}{\epsilon}, \quad (17.13)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial C_2^1} = \frac{\eta_2' - \eta_2}{\epsilon}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial E_2^1} = \frac{\eta_2'' - \eta_2}{\epsilon}. \quad (17.14)$$

Параметр  $\epsilon$  необходимо выбирать достаточно малым, чтобы можно было пренебречь квадратичными членами в соответствующем ряде Тейлора, однако достаточно большим, чтобы вычисление производной таким способом дало достаточно точный результат.

Вычисляем приращения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  к параметрам  $C_2^1$  и  $E_2^1$ , решая систему линейных уравнений

$$\Delta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial C_2^1} + \Delta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial E_2^1} + \eta_1 = 0, \quad (17.15)$$

$$\Delta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial C_2^1} + \Delta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial E_2^1} + \eta_2 = 0. \quad (17.16)$$

Наконец, вычисляем новые приближения к  $C_2^1$  и  $E_2^1$  по формулам

$$(C_2^1)_1 = (C_2^1)_0 + \Delta_1, \quad (E_2^1)_1 = (E_2^1)_0 + \Delta_2. \quad (17.17)$$

Таким образом, закончена одна итерация процедуры определения  $C_2^1$ ,  $E_2^1$ . Эта процедура повторяется, давая  $((C_2^1)_2, (E_2^1)_2) \dots$  до тех пор, пока невязки не станут достаточно малыми. Блок-схема итерационной процедуры показана на Рис. 17.3.

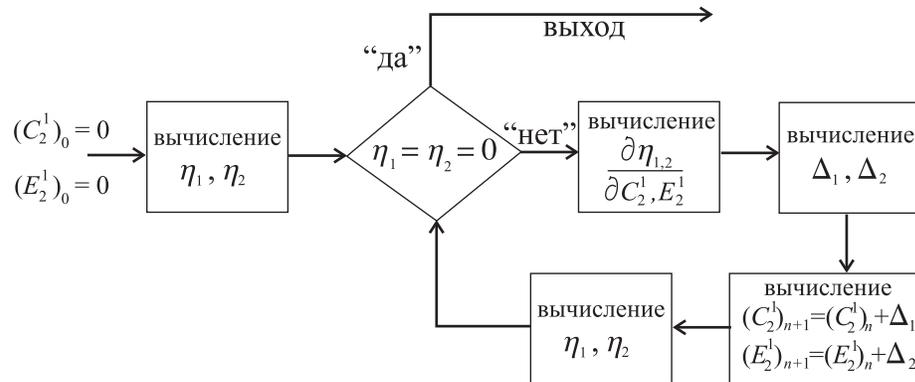


Рис. 17.3: Блок-схема итерационной процедуры вычисления  $C_2^1$  и  $E_2^1$

Поясним, что представляют из себя невязки  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Для проверки граничных условий на интервале  $(a, \infty)$  достаточно убедиться, что в точке  $B$  выполняются условия

$$w^1 = 0, \quad w^2 = 0.$$

Покажем, что одно из этих условий можно опустить. Детальное исследование поведения решений координатных уравнений в окрестности точки  $(a, 0)$  показывает, что можно выбрать базис из четырех линейно независимых решений, имеющих различный тип симметрий на интервалах  $(-a, a)$  и  $(a, \infty)$ . А именно, эти 4 типа характеризуются следующими условиями:

тип	$(-a, a)$	$(a, \infty)$
I	$v^{1,2} = 0$	$w^{1,2} = 0$
II	$v^{1,2} = 0$	$v^{1,2} = 0$
III	$w^{1,2} = 0$	$w^{1,2} = 0$
IV	$w^{1,2} = 0$	$v^{1,2} = 0$

В соответствии с начальными условиями в точке  $O$ , построенное решение представляет собой линейную комбинацию решения типа I и решения типа II. Необходимо потребовать, чтобы коэффициент при решении типа II был равен нулю. Таким образом, имеется всего одно линейное ограничение, например  $w^1(B) = 0$ . Условие  $w^2(B) = 0$  будет при этом удовлетворяться автоматически. В качестве первой невязки выберем

$$\eta_1 = w^1(B). \quad (17.18)$$

Обратимся к условиям излучения на бесконечности. Для контроля этих условий используем точку  $C$ , расположенную на достаточно большом расстоянии от рассеивателя. Предполагаем, что в этой точке решения хорошо описываются асимптотиками дальнего поля. Построив эти асимптотики, наложим линейное ограничение, гарантирующее отсутствие волны, имеющей экспоненциальный множитель  $e^{-ik_0x}$ .

При построении асимптотик предположим, что на интервале  $y = 0$ ,  $(a, \infty)$  выполняются требуемые граничные условия  $w^1 = w^2 = 0$ . Компоненты  $v^1$  и  $v^2$  на интервале  $(a, \infty)$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \mathbf{X}_1^1 \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \quad (17.19)$$

Построим асимптотику решения этого матричного уравнения при  $x \rightarrow \infty$ . Будем ограничиваться членами третьего порядка малости.

Разложим матрицу  $\mathbf{X}_1^1$  при больших  $x$ :

$$\mathbf{X}_1^1 = \mathbf{X}_0 + \frac{1}{x}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{x^2}\mathbf{X}_2 + \dots \quad (17.20)$$

где

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} C_1^1 + E_1^1 & E_2^1 - C_2^1 \\ C_2^1 - E_2^1 & -(C_1^1 + E_1^1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_1 = - \begin{pmatrix} 1/2 & 2aE_2^1 \\ 2aE_2^1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} a/2 & 2a^2E_2^1 \\ -2a^2E_2^1 & -a/2 \end{pmatrix}.$$

Бесконечность является иррегулярной особой точкой данного уравнения. Решение представляется асимптотическим рядом

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix} e^{\lambda x} x^\mu + \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} e^{\lambda x} x^{\mu-1} + \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} e^{\lambda x} x^{\mu-2} + \dots \quad (17.21)$$

Подставим такое решение в уравнение, вынесем за скобки экспоненциальный множитель и приравняем нулю члены, содержащие  $x$  в одинаковой степени. При  $e^{\lambda x} x^\mu$  имеем

$$(\mathbf{X}_0 - \lambda \mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix} = 0. \quad (17.22)$$

Отсюда следует, что возможные значения  $\lambda$  совпадают с собственными числами матрицы  $\mathbf{X}_0$ . Из соотношения (17.8) можно сделать вывод, что они равны

$$\lambda = \pm ik_0. \quad (17.23)$$

Рассмотрим значение  $\lambda = ik_0$ .

При  $e^{ik_0 x} x^{\mu-1}$  имеем уравнение

$$(\mathbf{X}_0 - ik_0 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} = (-\mathbf{X}_1 + \mu \mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix}. \quad (17.24)$$

Замечая, что  $(v_0^1, v_0^2)^T$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{X}_0$ , соответствующий собственному значению  $ik_0$ , приходим к выводу о том, что для разрешимости уравнения (17.24) относительно  $v_1^1$  и  $v_1^2$  необходимо потребовать

$$\mu = -1/2. \quad (17.25)$$

Пока сделанные выводы полностью соответствуют нашим представлениям о поведении волнового поля.

Общая форма вектора  $(v_0^1, v_0^2)^T$  есть

$$\begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_2^1 - E_2^1 \\ C_1^1 + E_1^1 - ik_0 \end{pmatrix}, \quad (17.26)$$

где  $M$  — некоторый коэффициент. Считая значение  $M$  известным, построим поправку, а именно вектор  $(v_1^1, v_1^2)^T$ .

Из уравнения (17.24) находим ограничение

$$v_1^1 v_0^2 - v_1^2 v_0^1 = 2aE_2^1 v_0^2. \quad (17.27)$$

Для нахождения  $v_1^1$  и  $v_1^2$  необходимо построить еще одно уравнение, содержащее эти величины.

Рассмотрим члены уравнения, стоящие при  $e^{ik_0 x} x^{\mu-2}$ :

$$(\mathbf{X}_0 - ik_0 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix} = (-\mathbf{X}_1 - \frac{3}{2} \mathbf{I}) \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} - \mathbf{X}_2 \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{pmatrix}. \quad (17.28)$$

Построим достаточные условия разрешимости этого уравнения относительно  $v_2^1$  и  $v_2^2$ . Матрица коэффициентов, стоящая в левой части, является вырожденной, поэтому необходимо наложить на правую часть определенное ограничение. Это ограничение имеет вид

$$-v_1^1 v_0^1 + v_1^2 v_0^2 = 4a^2 (E_2^1)^2 v_0^2 + \frac{a}{2} ((v_0^1)^2 + (v_0^2)^2) + 4a^2 E_2^1 v_0^1 v_0^2. \quad (17.29)$$

Из уравнений (17.27) и (17.29) находим

$$v_1^1 = \frac{Av_0^2 + Bv_0^1}{(v_0^2)^2 - (v_0^1)^2}, \quad v_1^2 = \frac{Bv_0^2 + Av_0^1}{(v_0^2)^2 - (v_0^1)^2}, \quad (17.30)$$

где

$$A = 2aE_2^1 v_0^2, \\ B = 4a^2 (E_2^1)^2 v_0^2 + \frac{a}{2} ((v_0^1)^2 + (v_0^2)^2) + 4a^2 E_2^1 v_0^1 v_0^2.$$

Теперь мы можем сформулировать условие излучения. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения (17.21), можно утверждать, что решение

$$(v^1(x), v^2(x))$$

представляет собой уходящую волну, если при больших  $x$  выполняется равенство

$$\frac{v^1(x)}{v^2(x)} = \frac{v_0^1 + v_1^1/x}{v_0^2 + v_1^2/x} \quad (17.31)$$

Избавляясь от параметра  $M$ , входящего в  $v_1^{1,2}$  линейно, запишем невязку в виде

$$\eta_2 = \frac{1}{M} \{v^1(aN)(v_0^2 + v_1^2/(aN)) - v^2(aN)(v_0^1 + v_1^1/(aN))\}. \quad (17.32)$$

(Здесь принято во внимание, что в точке  $C$  выполняется  $x = aN$ .)

Таблица 3.1: Сходимость градиентного метода

Шаг	$C_2^1$	$E_2^1$	$ \eta_1 $	$ \eta_2 $
0	0	0	0.58	0
1	0.0507265-0.0214536i	-0.08317-0.45783i	0.12	$1.05 \cdot 10^{-3}$
2	0.0587315-0.0326611i	-0.19653-0.55807i	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$3.48 \cdot 10^{-4}$
3	0.0585479-0.0331587i	-0.20764-0.55130i	$4.38 \cdot 10^{-5}$	$3.61 \cdot 10^{-6}$
4	0.0585461-0.0331625i	-0.20759-0.55129i	$5.09 \cdot 10^{-10}$	$5.78 \cdot 10^{-11}$

Заметим, что можно было бы не проводить столь громоздких выкладок и построить невязку, используя лишь члены нулевого приближения:

$$\eta_2 = \frac{1}{M} [v^1(aN)v_0^2 - v^2(aN)v_0^1].$$

Однако такой вид невязки дает очень неточное соблюдение условий излучения при относительно небольших  $N$ , а увеличение параметра  $N$  приводит к увеличению времени счета.

Оценка точности соблюдения граничных условий при равенстве нулю невязки (17.32) может быть проделана следующим образом. Очевидно, ошибка имеет порядок первого отброшенного члена, т.е. относительная ошибка составляет  $1/(k_0aN)^2$ . В нашем случае, т.е. при

$$k_0 = 1, \quad a = 1, \quad N = 50, \quad (17.33)$$

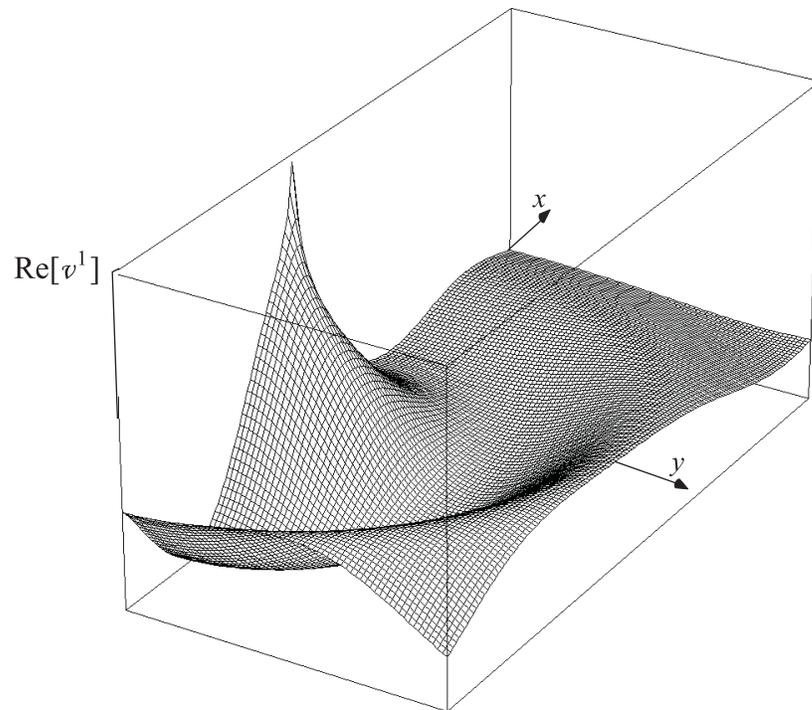
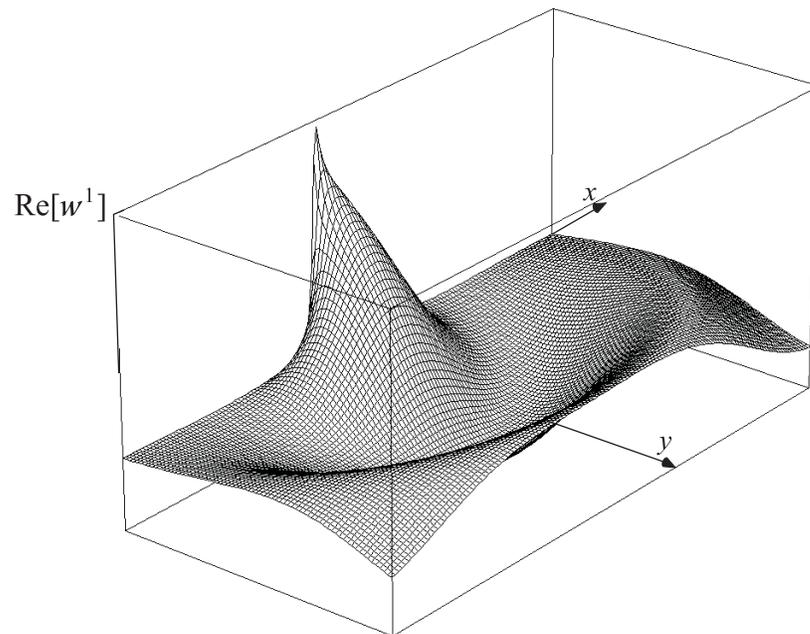
относительная ошибка составляет порядка  $10^{-3}$ .

Граничные условия на интервале  $(-\infty, -a)$  выполняются автоматически в силу соотношений (17.11), поэтому строить еще одну невязку для них не надо.

## Результаты вычислений

Перейдем к описанию результатов численных расчетов, проделанных в соответствии с описанной процедурой. Параметры были выбраны в соответствии с (17.33). Параметр  $\epsilon$  имел значение  $10^{-4}$ . Сходимость градиентного метода иллюстрируется Таблицей 3.1.

После определения коэффициентов координатных уравнений появляется возможность вычислить поля  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$ . Для этого координатные уравнения решаются вдоль отрезка  $x = 0, y = 0..7$ . Значения решений табулируются на этом отрезке с шагом 0.1. Полученные решения в точках  $(0, n/10)$  используются как начальные условия для решения координатных уравнений на отрезках  $x = -7..7, y = n/10$ . В результате этой процедуры решение оказывается вычисленным на площадке  $x = -7..7, y = 0.1..7$  с шагом 0.1. Графики функций  $\text{Re}[v^1]$  и  $\text{Re}[w^1]$  показаны на Рис. 17.4 и 17.5.

Рис. 17.4: График функции  $\text{Re}[v^1]$ Рис. 17.5: График функции  $\text{Re}[w^1]$

## §18. Основные результаты главы 3

1. Главный результат главы 3 — Теорема 14.1. Показано, что краевые функции Грина задачи о дифракции на двух полосах удовлетворяют системе уравнений одного частного вида (координатных уравнений). Коэффициенты уравнений таковы, что система совместна, а любая любое ее решение удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца.
2. Показано, что из координатных уравнений следует спектральное уравнение, выведенное раньше. Переход к спектральному уравнению осуществляется путем исследования асимптотики решения в дальнем поле.
3. Исследована структура алгебраических ограничений, накладываемых на коэффициенты спектрального уравнения для задачи о двух полосах. Показано, что после учета всех локальных ограничений свободными остаются восемь скалярных параметров.
4. Приведен пример численного решения координатного уравнения для задачи об одной полосе. Относительная простота задачи позволяет осуществить отыскание неизвестных параметров градиентным методом. Показано, что итерационная процедура в этом случае сходится достаточно быстро.

## Глава 4

# Координатные и спектральные уравнения для дифракции на уголкового отражателя со щелью

### §19. Координатные уравнения для уголкового отражателя со щелью

В настоящей главе выводятся координатные и спектральные уравнения для рассеивателя, состоящего из двух перпендикулярных полупрямых с зазором между ними. Геометрия рассеивателя показана на Рис. 2.5. Дифракционная задача для такого рассеивателя была поставлена в §2. Там же были введены краевые функции Грина для этой задачи и было показано, что решение дифракционной задачи сводится к отысканию краевых функций Грина (их диаграмм направленности).

Вывод спектральных уравнений с помощью обобщения метода Винера-Хопфа для данной задачи затруднен (хотя возможен), поэтому спектральное уравнение выводится из координатных. Строится совместная теория спектрального и координатных уравнений.

Ценность данного примера заключается в его общности. Геометрические симметрии не принимаются во внимание, и все сказанное для уголкового отражателя может быть применено к любой зоммерфельдовой поверхности, имеющей точки ветвления только второго порядка.

### Вывод координатных уравнений для краевых функций Грина

Вывод координатных уравнений для данной задачи слово в слово повторяет рассуждения, сделанные в §15. А именно, вводится понятие сверхсингулярного решения (т.е. имеющего в асимптотике в вершине единственный сверх-

мейкснеровский член порядка  $\rho_m^{-1/2}$ ) и строится набор из 16 сверхсингулярных комбинаций, содержащих производные неизвестных функций. Это следующий набор:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_m} u^{m\pm}, \quad \frac{\partial}{\partial z_{\mp}} u^{m\pm}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \phi_m} = i \left( z_{m+} \frac{\partial}{\partial z_{m+}} - z_{m-} \frac{\partial}{\partial z_{m-}} \right).$$

Исследуя асимптотики сверхсингулярных комбинаций и применяя теорему единственности, получаем представления

$$\frac{\partial u^{m\pm}}{\partial \phi_m} = \mp \frac{i u^{m\pm}}{2} - i \sum_{n=1}^4 [(p_n - p_m) C_{n+}^{m\pm} u^{n+} - (\bar{p}_n - \bar{p}_m) C_{n-}^{m\pm} u^{n-}], \quad (19.1)$$

$$\frac{\partial u^{m+}}{\partial z_-} = - \sum_{n=1}^4 C_{n-}^{m+} u^{n-}, \quad (19.2)$$

$$\frac{\partial u^{m-}}{\partial z_+} = - \sum_{n=1}^4 C_{n+}^{m-} u^{n+}. \quad (19.3)$$

Сформируем вектор неизвестных

$$\mathbf{u} = (u^{1+}, u^{2+}, u^{3+}, u^{4+}, u^{1-}, u^{2-}, u^{3-}, u^{4-})^T.$$

Будем искать координатные уравнения в виде, сходном с (14.5):

$$\frac{\partial}{\partial z_+} \mathbf{u} = \mathbf{Z}_+ \mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial z_-} \mathbf{u} = \mathbf{Z}_- \mathbf{u}. \quad (19.4)$$

Матрицы  $\mathbf{Z}_{\pm}$  найдем, воспользовавшись соотношениями (19.1)–(19.3). Эти матрицы запишем в блочной форме

$$\mathbf{Z}_+ = \begin{pmatrix} (\mathbf{Z}_+)_+^+ & (\mathbf{Z}_+)_-^+ \\ (\mathbf{Z}_+)_+^- & (\mathbf{Z}_+)_-^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_- = \begin{pmatrix} (\mathbf{Z}_-)_+^+ & (\mathbf{Z}_-)_-^+ \\ (\mathbf{Z}_-)_+^- & (\mathbf{Z}_-)_-^- \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц имеют вид

$$(\mathbf{Z}_-)^{m+}_{n+} = 0, \quad (19.5)$$

$$(\mathbf{Z}_-)^{m+}_{n-} = -C_{n-}^{m+}, \quad (19.6)$$

$$(\mathbf{Z}_-)^{m-}_{n+} = -\frac{z_{n+}}{z_{m-}} C_{n+}^{m-}, \quad (19.7)$$

$$(\mathbf{Z}_-)^{m-}_{n-} = -\frac{1}{z_{m-}} \left( \frac{\delta_{mn}}{2} + \widehat{C}_{n-}^{m-} \right), \quad (19.8)$$

$$(\mathbf{Z}_+)_{n+}^{m+} = -\frac{1}{z_{m+}} \left( \frac{\delta_{mn}}{2} + \widehat{C}_{n+}^{m+} \right), \quad (19.9)$$

$$(\mathbf{Z}_+)_{n-}^{m+} = -\frac{z_{n-}}{z_{m+}} C_{n-}^{m+}, \quad (19.10)$$

$$(\mathbf{Z}_+)_{n+}^{m-} = -C_{n+}^{m-}, \quad (19.11)$$

$$(\mathbf{Z}_+)_{n-}^{m-} = 0, \quad (19.12)$$

где введены обозначения

$$\widehat{C}_{n+}^{m+} = (p_n - p_m) C_{n+}^{m+}, \quad \widehat{C}_{n-}^{m-} = (\bar{p}_n - \bar{p}_m) C_{n-}^{m-}. \quad (19.13)$$

В выражениях (19.5)–(19.12), например,  $(\mathbf{Z}_-)_{n+}^{m+}$  представляет собой элемент матрицы  $(\mathbf{Z}_-)_{+}^{\dagger}$ , стоящий на пересечении строки с номером  $m$  и столбца с номером  $n$ .

Очевидно, форма коэффициентов координатных уравнений для задачи об уголке *точно такая же*, как форма коэффициентов координатных уравнений для задачи о паре полос (точнее, форма для системы полос является частным случаем только что выведенной при  $\bar{p}_m = p_m$ ). При этом, конечно, наборы неизвестных констант  $C$  и  $\widehat{C}$  другие. Можно предположить, что форма (19.5)–(19.12) останется той же для любой задачи на зоммерфельдовой поверхности с точками ветвления второго порядка.

Запишем коэффициенты координатных уравнений в матричной форме

$$\mathbf{Z}_+ = - \begin{pmatrix} (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \cdot (\mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_+^+), & (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{C}_+^+ \cdot (z_- \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}) \\ \mathbf{C}_+^-, & 0 \end{pmatrix}, \quad (19.14)$$

$$\mathbf{Z}_- = - \begin{pmatrix} 0, & \mathbf{C}_-^+ \\ (z_- \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}})^{-1} \cdot \mathbf{C}_+^- \cdot (z_+ \mathbf{I} - \mathbf{P}), & (z_- \mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}})^{-1} \cdot (\mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_-^-), \end{pmatrix} \quad (19.15)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, p_3, p_3)$ ,  $\mathbf{C}_-^+$ ,  $\mathbf{C}_+^-$ ,  $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$ ,  $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$  — матрицы  $4 \times 4$ , состоящие из элементов  $C_{n-}^{m+}$ ,  $C_{n+}^{m-}$ ,  $\widehat{C}_{n+}^{m+}$ ,  $\widehat{C}_{n-}^{m-}$ , соответственно ( $m$  — номер строки,  $n$  — номер столбца).

Координатные уравнения в более привычной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} = \mathbf{X} \mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} = \mathbf{Y} \mathbf{u} \quad (19.16)$$

можно получить, воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_-, \quad \mathbf{Y} = i(\mathbf{Z}_+ - \mathbf{Z}_-).$$

### Тождества для параметров $C_{n\pm}^{m\pm}$ , входящих в коэффициенты координатных уравнений

Коэффициенты координатных уравнений зависят от значительного числа неизвестных параметров. Необходимо учесть все соотношения между ними, чтобы сократить число независимых параметров до минимума.

#### а. Учет теоремы взаимности

Повторяя рассуждения §15, относившиеся к теореме взаимности, приходим к выводу о том, что

$$\begin{aligned} C_{n+}^{m+} &= C_{m+}^{n+}, & C_{n-}^{m+} &= C_{m+}^{n-}, \\ C_{n+}^{m-} &= C_{m-}^{n+}, & C_{n-}^{m-} &= C_{m-}^{n-}. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Соответственно,

$$\hat{C}_{n+}^{m+} = -\hat{C}_{m+}^{n+}, \quad \hat{C}_{n-}^{m-} = -\hat{C}_{m-}^{n-}.$$

#### б. Совместность и “гельмгольцевость” координатных уравнений

Совместность координатных уравнений (19.4) следует из матричного тождества

$$\frac{\partial}{\partial z_-} \mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_+ \mathbf{Z}_- = \frac{\partial}{\partial z_+} \mathbf{Z}_- + \mathbf{Z}_- \mathbf{Z}_+. \quad (19.18)$$

То, что каждая компонента произвольного решения координатных уравнений удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1), следует из матричного тождества

$$4 \left( \frac{\partial}{\partial z_+} \mathbf{Z}_- + \mathbf{Z}_- \mathbf{Z}_+ \right) + k_0^2 \mathbf{I} = 0. \quad (19.19)$$

Тождества (19.18), (19.19), в свою очередь, следует из соотношений для коэффициентов вида

$$\hat{C}_+^+ \mathbf{C}_-^+ + \mathbf{C}_-^+ \hat{C}_-^- = 0, \quad (19.20)$$

$$\mathbf{C}_+^- \mathbf{C}_-^+ = -\frac{k_0^2}{4} \mathbf{I}. \quad (19.21)$$

Повторяя рассуждения §15 с незначительными изменениями, убеждаемся в справедливости соотношений (19.20) и (19.21).

## §20. Спектральное уравнение для для уголкового отражателя со щелью. Аналитические свойства его решений

### Вывод спектрального уравнения из координатных уравнений

Выведем спектральное уравнение с помощью метода, предложенного в §16. Прежде всего, перепишем координатные уравнения (19.4) в координатах  $(r, \theta)$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} u = \frac{1}{\sqrt{z_+ z_-}} (z_+ \mathbf{Z}_+ + z_- \mathbf{Z}_-) u, \quad (20.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} u = i(z_+ \mathbf{Z}_+ - z_- \mathbf{Z}_-) u. \quad (20.2)$$

Запишем асимптотику решения  $u$  в дальнем поле:

$$u = -\frac{e^{ik_0 r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} S(\theta) + O(e^{ik_0 r} r^{-3/2}) \quad (20.3)$$

для некоторой векторной диаграммы направленности  $S$ .

Подставим асимптотику (20.3) в (20.1). В старшем порядке по  $r$  получим алгебраическое линейное уравнение для  $S$ :

$$ik_0 S(\theta) = -2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \mathbf{C}_-^+ \\ e^{i\theta} \mathbf{C}_+^- & 0 \end{pmatrix} S(\theta). \quad (20.4)$$

Представим вектор  $S$  в блочной форме, т.е. составленным из двух векторов размерности 4:

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \mathbf{U}^- \end{pmatrix}. \quad (20.5)$$

Из (20.4) следует, что

$$\mathbf{U}^- = \frac{2i}{k_0} e^{i\theta} \mathbf{C}_+^- \mathbf{U}^+. \quad (20.6)$$

Подставим (20.3) в (20.2). В старшем порядке по  $r$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение для  $S(\theta)$ :

$$\frac{d}{d\theta} S(\theta) = -i \begin{pmatrix} \mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_+^+ & e^{-2i\theta} \mathbf{P} \mathbf{C}_-^+ - \mathbf{C}_-^+ \bar{\mathbf{P}} \\ \mathbf{C}_+^- \mathbf{P} - e^{2i\theta} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{C}_+^- & -(\mathbf{I}/2 + \widehat{\mathbf{C}}_-^-) \end{pmatrix} S(\theta). \quad (20.7)$$

Подставляя (20.6) в (20.7), получаем уравнение порядка 4 для вектора  $U^+$ :

$$\frac{d}{d\theta}U^+(\theta) = -\left(\frac{i}{2}\mathbf{I} + i\widehat{\mathbf{C}}_+^+ + \frac{e^{-i\theta}k_0}{2}\mathbf{P} + \frac{2e^{i\theta}}{k_0}\mathbf{C}_-^+\bar{\mathbf{P}}\mathbf{C}_+^-\right)U^+(\theta). \quad (20.8)$$

Это и есть искомое спектральное уравнение.

### Вывод координатных уравнений из спектрального

Если  $u$  — решение координатных уравнений, то его диаграмма направленности представляет собой решение соответствующего спектрального уравнения. Построим обратный переход, т.е. по решению спектрального уравнения вычислим соответствующее решение координатных.

**ТЕОРЕМА 20.1** Пусть векторы  $U^\pm$  удовлетворяют соотношению (20.6), пусть вектор  $U^+$  удовлетворяет спектральному уравнению (20.8) на комплексной плоскости  $\theta$ , и пусть вектор  $S$  составлен из  $U^+$  и  $U^-$  (см. 20.5). Тогда интеграл

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ik_0r \cos \varphi} S(\theta + \varphi) d\varphi \quad (20.9)$$

сходится при всех действительных  $\theta$  и  $r > \max(|p_m|)$  и удовлетворяет координатным уравнениям (19.16) в этой области. Диаграмма направленности поля  $u$  в дальней зоне есть  $S$ .

Предполагается, что замена  $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$  дается формулами  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Сходимость интеграла устанавливается с помощью выписанных ниже асимптотик (21.2), (21.3) решений спектрального уравнения.

Непосредственной проверкой устанавливается, что вектор  $u$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения в тех областях, где он определяется интегралом (20.9). То, что его диаграмма направленности совпадает с  $S$ , проверяется с помощью метода стационарной фазы.

Докажем, что поле  $u$  удовлетворяет координатным уравнениям (19.16). Вычислим производные интеграла (20.9):

$$\frac{\partial u}{\partial z_+} = -\frac{ik_0}{4\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{-i(\theta+\varphi)} e^{ik_0r \cos \varphi} S(\theta + \varphi) d\varphi, \quad (20.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_-} = -\frac{ik_0}{4\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{i(\theta+\varphi)} e^{ik_0 r \cos \varphi} S(\theta + \varphi) d\varphi. \quad (20.11)$$

Интегралы (20.10) и (20.11) вычисляются следующим способом. Запишем (20.6) и (20.8) в форме системы (20.4), (20.7). Комбинируя эти два уравнения и используя соотношения (19.20), (19.21), получаем

$$\frac{d}{d\theta} S = (e^{-i\theta} \mathbf{K}_1 + e^{i\theta} \mathbf{K}_2) S, \quad (20.12)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2}{k_0} \begin{pmatrix} -k_0^2 \mathbf{P}/4 & \mathbf{C}_-^+ / 2 + \hat{\mathbf{C}}_+^+ \mathbf{C}_-^+ \\ 0 & \mathbf{C}_+^- \mathbf{P} \mathbf{C}_-^+ \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{2}{k_0} \begin{pmatrix} -\mathbf{C}_-^+ \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{C}_+^- & 0 \\ -(\mathbf{C}_+^- / 2 + \hat{\mathbf{C}}_-^- \mathbf{C}_+^-) & k_0^2 \bar{\mathbf{P}} / 4 \end{pmatrix}$$

Дифференцируя (20.9), устанавливаем справедливость следующей формулы:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ik_0 r \cos \varphi} \frac{\partial S(\theta + \varphi)}{\partial \theta} d\varphi = i \left( z_+ \frac{\partial u}{\partial z_+} - z_- \frac{\partial u}{\partial z_-} \right). \quad (20.13)$$

Подставляя (20.12) в (20.13) и используя (20.10), (20.11), получаем соотношение

$$\left( z_- - \frac{2}{k_0} \mathbf{K}_2 \right) \frac{\partial u}{\partial z_-} = \left( z_+ + \frac{2}{k_0} \mathbf{K}_1 \right) \frac{\partial u}{\partial z_+}. \quad (20.14)$$

Подставляя (20.4) в (20.10) и (20.11), получаем второе соотношение:

$$\frac{4}{k_0^2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{C}_-^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z_+} + \frac{4}{k_0^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}_+^- & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z_-} = u \quad (20.15)$$

Разрешая (20.14) и (20.15) как систему из линейных уравнений относительно компонент  $\partial u / \partial z_+$  и  $\partial u / \partial z_-$ , получаем (19.16).  $\square$

## Базис решений спектрального уравнения

Пусть известно решение  $u$  координатных уравнений, представляющее собой вектор, составленный из краевых функций Грина. Этому решению соответствует одно решение  $U$  спектрального уравнения. Для целей, сформулированных ниже, потребуется базис из четырех линейно независимых решений спектрального уравнения. Построим такой базис. Для этого с помощью интегральной формулы построим четыре решения координатных уравнений, а затем вычислим их диаграммы направленности.

ТЕОРЕМА 20.2 Пусть  $\Gamma$  — контур на зоммерфельдовой поверхности, концы которого уходят на бесконечность. Тогда интеграл

$$u_\Gamma(p) = \int_\Gamma [g(p, p') \partial_n u(p') - \partial_n g(p, p') u(p')] dl, \quad (20.16)$$

где  $\partial_n$  — нормаль к контуру  $\Gamma$ ,  $g$  — функция Грина неограниченной плоскости

$$g(p, p') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |pp'|)$$

определяет функцию, не имеющую особенностей в односвязной области, ограниченной контуром  $\Gamma$  и бесконечно большой дугой, “соединяющей концы” контура  $\Gamma$ . Эта функция удовлетворяет в данной области уравнению Гельмгольца, условию излучения и координатным уравнениям.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем считать, что волновое число  $k_0$  имеет малую мнимую добавку. Это позволяет сделать оценки роста подынтегральной функции и показать, что интеграл сходится и определяет функцию, не имеющую особенностей. По построению, эта функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Оценки роста показывают, что функция удовлетворяет условию излучения. Самая сложная часть доказательства — пункт, касающийся координатных уравнений. Необходимо показать, что если поле  $u$  удовлетворяет координатным уравнениям в окрестности контура  $\Gamma$ , то функция  $u_\Gamma$  также удовлетворяет этим уравнениям там, где она определена.

Воспользуемся координатными уравнениями в неявной форме, а именно (19.1), (19.2), (19.3). Каждое из этих уравнений может быть записано в виде

$$e \cdot \partial_q u + c \cdot u = 0, \quad (20.17)$$

где  $e$  и  $c$  — постоянные вектор-строки размерности 8,  $\partial_q$  — оператор дифференцирования по угловой или линейной (комплексной) координате.

Обозначим оператор в правой части (20.16) как  $L$ , т.е.

$$u_\Gamma = Lu.$$

Применим оператор  $L$  к (20.17). Заметим, что

$$\partial_q Lu = L \partial_q u. \quad (20.18)$$

Это равенство следует из инвариантности ядра интегрального преобразования относительно трансляций и поворотов, а также из возможности трансформировать контура интегрирования.

Пользуясь этим соотношением, получим

$$e \cdot \partial_q L u + c \cdot L u = 0.$$

Последнее равенство представляет собой координатное уравнение для  $u_\Gamma$ , записанное в неявной форме.  $\square$

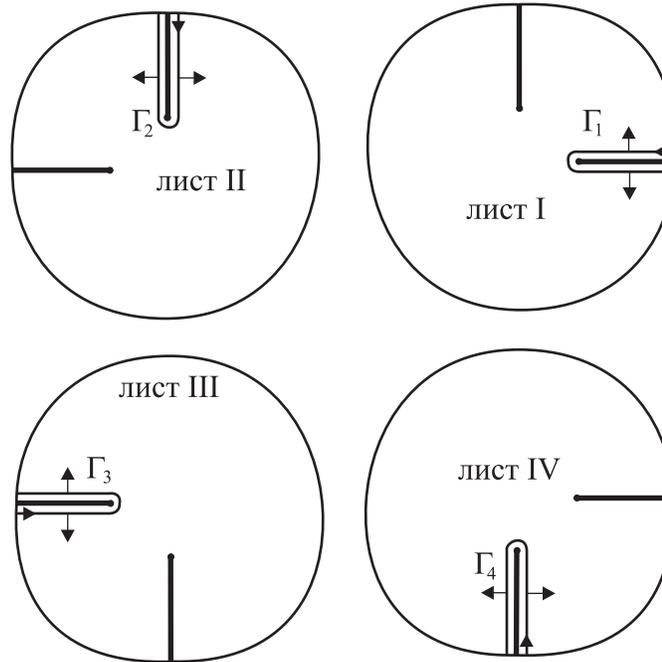


Рис. 20.1: Контура  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  и нормали к ним

Построим функции  $u_1^* \dots u_4^*$ , используя контура  $\Gamma_1 \dots \Gamma_4$ , показанные на Рис. 20.1:

$$u_m^*(p) = \int_{\Gamma_m} [g(p, p') \partial_n u(p') - \partial_n g(p, p') u(p')] dl. \quad (20.19)$$

Будем считать, что интегралы описывают соответствующие поля в той области, куда указывает вектор нормали к контуру. Нетрудно показать, что каждое из полей  $u_m^*$  имеет вблизи точки  $p_m$  асимптотику, совпадающую с асимптотикой  $u$  в точке  $p_m$ . Линейная независимость построенных функций следует из структуры их точек ветвления.

В соответствии со II формулой Грина, функция  $u$  выражается через  $u_m^*$  как

$$u = u_1^* - u_2^*. \quad (20.20)$$

Для каждой из построенных функций можно определить диаграмму направленности  $S_n^*(\theta)$  с помощью асимптотик, записанных в полярных координатах

$$u_n^*(r, \theta) = -\frac{e^{ik_0r - i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k_0r}} S_n^*(\theta) + O(e^{ik_0r} r^{-3/2}). \quad (20.21)$$

Каждая из этих диаграмм определена в секторе шириной  $2\pi$ , а именно, будем считать, что функции  $S_1^*$ ,  $S_2^*$ ,  $S_3^*$  и  $S_4^*$  определены в секторах  $(0, 2\pi)$ ,  $(\pi/2, 5\pi/2)$ ,  $(\pi, 3\pi)$  и  $(3\pi/2, 7\pi/2)$  соответственно.

Диаграммы направленности  $S_n^*$  можно ввести с помощью интегралов типа формулы Грина. Воспользуемся формулой (20.16) и отнесем точку наблюдения на большое расстояние от начала координат. Если точка наблюдения находится на большом удалении, а источник имеет координаты  $(x, y)$ , то функция Грина приближенно представляет собой плоскую волну вида

$$g \approx -\frac{i}{2} \frac{e^{ik_0r - i\pi/2}}{\sqrt{2\pi k_0r}} w_\theta(x, y),$$

где  $r$  расстояние до источника,  $\theta$  — направление на точку наблюдения,

$$w_\theta(x, y) \equiv e^{-ik_0(x \cos \theta + y \sin \theta)}.$$

Простые вычисления дают следующее представление для диаграмм направленности:

$$S_m^*(\theta) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_m} [w_\theta \partial_n u - u \partial_n w_\theta] dl. \quad (20.22)$$

Для каждой функции  $S_m^*$  построим функцию  $U_m^+$ , представляющую собой вектор размерности четыре, составленный из первых четырех компонент вектора  $S_m^*$  (напомним, последний имеет размерность восемь).

Функции  $U_m^+$  являются решениями спектрального уравнения и представляют собой базис решений этого уравнения.

Формула (20.19) совместно с Теоремой 20.2 устанавливает существование четырех линейно-независимых решений координатных уравнений, удовлетворяющих условию излучения.

## О базисе решений координатных уравнений

Пусть  $k_0$  — действительное число. Построим базис решений координатных уравнений. Первые четыре решения — функции  $u_m^*$ ,  $m = 1 \dots 4$ , построенные выше. Данные решения удовлетворяют условию излучения, т.е. ведут себя на бесконечности как  $r^{-1/2} \exp\{ik_0r\}$ . Построим оставшиеся четыре базисных решения координатных уравнений. Будем искать эти решения среди функций, ведущих себя на бесконечности как  $r^{-1/2} \exp\{-ik_0r\}$ , т.е. представляющих только приходящие волны.

Прежде, чем строить оставшиеся базисные решения, выведем основные соотношения для нового выбора асимптотики дальнего поля. Соотношение (20.4) преобразуется в

$$ik_0S(\theta) = 2 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta}C_-^+ \\ e^{i\theta}C_+^- & 0 \end{pmatrix} S(\theta), \quad (20.23)$$

а спектральное уравнение (20.8) будет иметь вид

$$\frac{d}{d\theta}U^+(\theta) = - \left( \frac{i}{2}I + i\hat{C}_+^+ - \frac{e^{-i\theta}k_0}{2}P - \frac{2e^{i\theta}}{k_0}C_-^+P C_+^- \right) U^+(\theta). \quad (20.24)$$

Сохраняет справедливость Теорема 20.1 при условии, что решение задается интегралом

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{-ik_0r \cos \varphi} S(\theta + \varphi) d\varphi. \quad (20.25)$$

Процедура построения новых базисных решений такова. С помощью процедуры, описанной выше, строятся решения  $u_m^*$  и вычисляются их диаграммы направленности  $S_m^*(\theta)$ . Берутся первые 4 компоненты этих диаграмм  $U_m^+(\theta)$ . Данные вектора удовлетворяют спектральному уравнению (20.8). Далее строятся вектора

$$V_m^+(\theta) = U_m^+(\theta + \pi). \quad (20.26)$$

Нетрудно проверить, что эти вектора удовлетворяют уравнению (20.24). По формуле

$$S_m^{**}(\theta) = \begin{pmatrix} V_m \\ (-2ie^{-i\theta}/k_0)V_m \end{pmatrix}, \quad (20.27)$$

строятся вектора  $S_m^{**}(\theta)$  размерности 8. Наконец, с помощью интеграла (20.25) строятся решения  $u_m^{**}$ .

Вектора  $u_m^*$ ,  $u_m^{**}$  представляют собой базис решений координатных уравнений.

## §21. Свойства координатных и спектральных уравнений для задачи об уголкового отражателе

Целью настоящего и следующего параграфов является изучение структуры глобальных ограничений, накладываемых на спектральные и координатные уравнения для задачи об уголкового отражателе. Более точно, необходимо поставить задачу об определении скалярных параметров, входящих, например, в спектральное уравнение. Эта задача ставится путем наложения ограничений на связи между коэффициентами асимптотических разложений решений. Ограничения не должны быть алгебраически связаны друг с другом, а число таких ограничений должно быть равно числу неизвестных свободных скалярных параметров. Кроме того, из наложенных ограничений должно следовать, что построенные решения спектрального уравнения могут быть преобразованы в решения исходной дифракционной задачи.

Формулировка задачи об определении неизвестных параметров оказывается достаточно громоздкой. В настоящем параграфе введены основные понятия, относящиеся к спектральным и координатным уравнениям, а также сформулированы некоторые базовые утверждения, касающиеся этих понятий. Большинство утверждений могут быть получены вполне традиционными методами, поэтому соответствующие утверждения формулируются, а их доказательства в полном объеме не приводятся.

В следующем параграфе будут описаны более тонкие свойства спектральных и координатных уравнений, и будет закончена формулировка задачи об определении параметров.

Сделаем важное замечание. Координатные уравнения записаны в “комплексных” переменных  $z_+$  и  $z_-$ , причем  $z_- = \bar{z}_+$ . До настоящего момента такая запись была формальной. Она лишь позволяла в удобной форме переписать “действительные” координатные уравнения. Здесь координатным уравнениям придается иной смысл. Поскольку в коэффициенты координатных уравнений входят только рациональные функции от  $z_+$  и  $z_-$ , и уравнения совместны при любых  $z_+$  и  $z_-$ , появляется возможность считать  $z_+$  и  $z_-$  независимыми переменными и рассматривать аналитические продолжения волновых полей на двумерную комплексную плоскость  $(z_+, z_-)$ . Это соответствует продолжению волновых полей в область комплексных  $x$  и  $y$ .

### Свойства координатных уравнений

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.1** *Координатные уравнения (19.16) имеют особые точки, образующие (комплексные) прямые  $z_+ = p_m$  и  $z_- = \bar{p}_m$ ,  $m = 1 \dots 4$ . В окрестности каждой из особых точек имеется базис из восьми решений. Семь из*

этих решений регулярны во всех точках соответствующей прямой, а восьмое имеет асимптотику следующего вида:

для прямой  $z_+ = p_m$  это

$$\begin{aligned} u^{n+}(z_+, z_-) &= \delta_{m,n}(z_+ - p_m)^{-1/2} \psi^{m+}(z_+, z_-) - 2\hat{C}_{m+}^{m+}(z_+ - p_m)^{1/2} \psi_{m+}^{n+}(z_+, z_-), \\ u^{n-}(z_+, z_-) &= -2\hat{C}_{m+}^{m-}(z_+ - p_m)^{1/2} \psi_{m+}^{n-}(z_+, z_-), \end{aligned}$$

а для прямой  $z_- = \bar{p}_m$  это

$$\begin{aligned} u^{n-}(z_+, z_-) &= \delta_{m,n}(z_- - \bar{p}_m)^{-1/2} \psi^{m-}(z_+, z_-) - 2\hat{C}_{m-}^{m-}(z_- - \bar{p}_m)^{1/2} \psi_{m-}^{n-}(z_+, z_-), \\ u^{n+}(z_+, z_-) &= -2\hat{C}_{m-}^{m+}(z_- - \bar{p}_m)^{1/2} \psi_{m-}^{n+}(z_+, z_-). \end{aligned}$$

Символы  $\psi$  с различными индексами обозначают произвольные функции, регулярные и равные единице в точках соответствующих прямых.

Данное утверждение нетрудно проверить. Построим ограничение координатных уравнений на множество одномерных окрестностей, перпендикулярных одной из прямых и пересекающих ее. С помощью этого ограничения устанавливается общий вид асимптотик. Затем строится ограничение координатных уравнений на саму прямую. С помощью этого устанавливаются коэффициенты в асимптотиках.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.2** Пусть решение  $u$  удовлетворяет условию излучения для некоторого направления в (действительной) плоскости  $(x, y)$ . Тогда оно удовлетворяет условию излучения для всех направлений, которые можно получить из данного непрерывным перемещением бесконечно удаленной точки в этой плоскости.

Данное утверждение следует из того, что диаграммы направленности уходящих и приходящих решений координатных уравнений удовлетворяют спектральным уравнениям. Если в какой-либо бесконечно удаленной точке одна из диаграмм равна нулю, то она равна нулю для всех направлений, которые можно получить из данного непрерывным перемещением бесконечно удаленной точки.

Из данного утверждения не следует, что если решение удовлетворяет условию излучения для одного направления, то оно удовлетворяет условию излучения везде. Некоторые (действительные) ветви решения могут получаться в результате продолжения вдоль контура, с необходимостью проходящего в конечной области (между вершинами рассеивателя).

## Свойства спектрального уравнения (20.8)

Рассмотрим комплексную плоскость угловой переменной  $\theta$ . Имеет смысл изучать асимптотику решений спектральных уравнений в двух различных областях, а именно при больших положительных значениях  $\text{Im}[\theta]$  и при больших

отрицательных значениях  $\text{Im}[\theta]$ . Соответственно, будем говорить о *верхней* и *нижней* асимптотике.

Построим в плоскости  $\theta$  полуполосы  $s_j^{\text{up}}$  и  $s_j^{\text{dn}}$  уходящие в верхнюю и нижнюю бесконечность, соответственно (Рис. 21.1). Положение полуполос определяется параметрами  $\alpha_j$ . Значения этих параметров при  $j = 1 \dots 4$  даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \text{Arg}[p_2 - p_1] - \pi, & \alpha_2 &= \text{Arg}[p_3 - p_2] + \pi, \\ \alpha_3 &= \text{Arg}[p_4 - p_3] + \pi, & \alpha_4 &= \text{Arg}[p_1 - p_4] + \pi, \end{aligned} \quad (21.1)$$

Для получения полуполос с другими  $-\infty < j < \infty$  необходимо продолжить диаграмму на Рис. 21.1 периодически с периодом  $2\pi$  вдоль  $\text{Re}[\theta]$ . Увеличению номера полуполосы на один будет соответствовать один шаг вправо.

Проведенные линии в каждой из полуплоскостей представляют собой *линии Стокса* для данного уравнения.

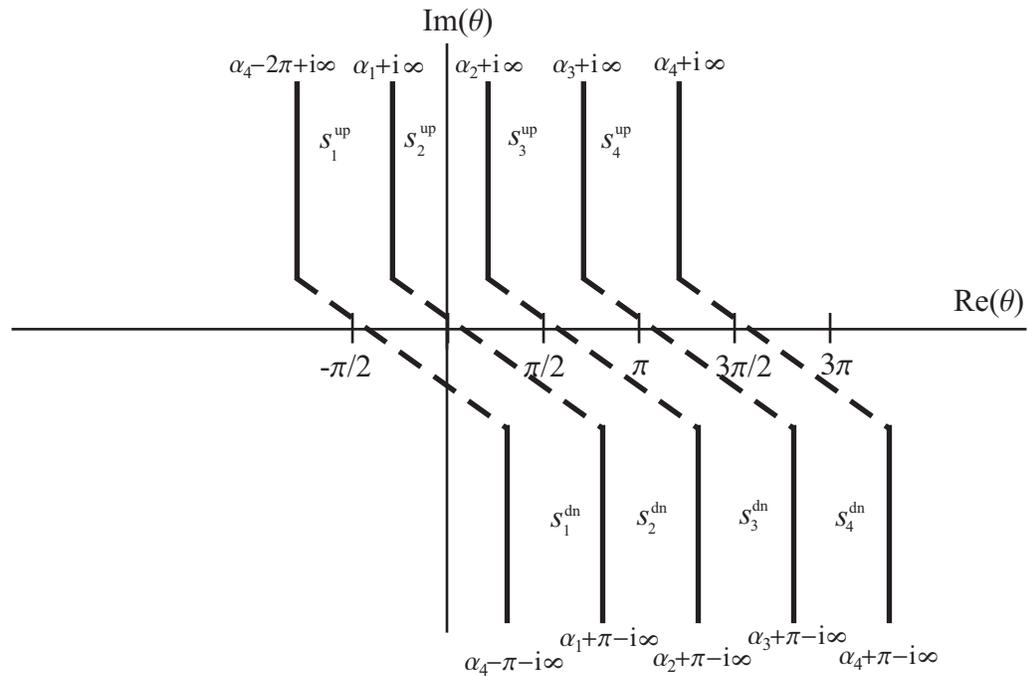


Рис. 21.1: Области справедливости асимптотик решений спектрального уравнения на бесконечности

Сформулируем асимптотические свойства решений спектрального уравнения для верхней бесконечности и нижней бесконечности. Поскольку эти свойства могут быть получены стандартными методами [157], приведем их без доказательства.

Введем экспоненциальные множители в верхних и нижних полуполосах, соответственно:

$$F_m^{\text{up}} = \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2} p_m e^{-i\theta} \right\}, \quad m = 1 \dots 4,$$

$$F_m^{\text{dn}} = \exp \left\{ -\frac{ik_0}{2} \bar{p}_m e^{i\theta} \right\}, \quad m = 1 \dots 4.$$

Заметим, что множитель с индексом  $m$  доминирует над остальными, соответственно, в верхней или нижней полуполосе с индексом  $m$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.3** *Существуют решения  $V_1 \dots V_4$  спектрального уравнения (20.8), имеющие в полуполосах*

$$\bigcup_{j=1}^5 s_j^{\text{up}}, \quad \bigcup_{j=2}^6 s_j^{\text{up}}, \quad \bigcup_{j=3}^7 s_j^{\text{up}}, \quad \bigcup_{j=4}^8 s_j^{\text{up}},$$

соответственно, следующие асимптотики:

$$V_m^n = e^{-i\varphi/2} (\delta_{m,n} + O(e^{i\theta})) F_m^{\text{up}}(\theta). \quad (21.2)$$

*Существуют также решения  $W_1 \dots W_4$  спектрального уравнения (20.8), имеющие в полуполосах*

$$\bigcup_{j=1}^5 s_j^{\text{dn}}, \quad \bigcup_{j=2}^6 s_j^{\text{dn}}, \quad \bigcup_{j=3}^7 s_j^{\text{dn}}, \quad \bigcup_{j=4}^8 s_j^{\text{dn}},$$

соответственно, следующие асимптотики:

$$W_m^n = \frac{2ie^{-i\theta/2}}{k_0} (C_{m-}^{n+} + O(e^{-i\theta})) F_m^{\text{dn}}(\theta). \quad (21.3)$$

Здесь  $V_m^n$  и  $W_m^n$ ,  $n = 1 \dots 4$  — компоненты векторов  $V_m$  и  $W_m$ .

Поясним коротко, откуда следует данное утверждение. Возьмем в качестве примера решение  $V_1$ . С точностью до коэффициента, это произвольное решение, имеющее асимптотику  $e^{-i\theta/2} F_1^{\text{up}}$  в полуполосе  $s_3^{\text{up}}$ . В данной полуполосе эта асимптотика является самой *слабой*, поэтому то же самое представление должно выполняться в четырех соседних полуполосах.

Пусть  $U$  — некоторое решение спектрального уравнения (20.8). Определим для этого решения последовательности  $\sigma[j]$  и  $\beta[j]$ ,  $-\infty < j < \infty$ , следующим образом.

Пусть в полуполосе  $s_j^{\text{up}}$  доминирует верхняя асимптотика  $V_m$  (т.е.  $m \equiv j \pmod{4}$ ). Тогда поле в этой полуполосе представимо в виде

$$U(\theta) = \sigma[j] V_m(\theta) + \text{экспоненциально малые члены.} \quad (21.4)$$

Коэффициент  $\sigma[j]$  и есть член выстраиваемой последовательности.

Аналогично, коэффициенты  $\beta[j]$  определяются с помощью нижних асимптотик, а именно с помощью разложения

$$U(\theta) = \beta[j] W_m(\theta) + \text{экспоненциально малые члены,} \quad (21.5)$$

справедливого в полуполосе  $s_m^{\text{dn}}$  при  $m \equiv j \pmod{4}$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.4** Пусть  $U_1 \dots U_4$  — четыре произвольных решения спектрального уравнения (20.8). Тогда определитель, составленный из этих решений, дается формулой

$$\text{Det}(U_1, U_2, U_3, U_4) = A e^{-2i\theta} \prod_{m=1}^4 F_m^{\text{up}}(\theta) F_m^{\text{dn}}(\theta), \quad (21.6)$$

где  $A$  — константа.

Данное утверждение следует из того, что определитель, составленный из решений, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\theta} \text{Det}(U_1, U_2, U_3, U_4) = \text{Sp}[\mathbf{K}] \text{Det}(U_1, U_2, U_3, U_4), \quad (21.7)$$

где символом  $\text{Sp}[\mathbf{K}]$  обозначен след матрицы коэффициентов спектрального уравнения (20.8):

$$\text{Sp}[\mathbf{K}] = - \left( 2i + \frac{k_0 e^{-i\theta}}{2} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) - \frac{k_0 e^{i\theta}}{2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4) \right). \quad (21.8)$$

Решая уравнение (21.7), получаем (21.6).

Пусть  $\{\sigma_m[j]\}$  и  $\{\beta_m[j]\}$  — последовательности, введенные для решений  $U_m(\varphi)$ ,  $m = 1 \dots 4$ . Определим следующие матрицы:

$$\mathbf{s}[j] = \begin{pmatrix} \sigma_1[j] & \sigma_2[j] & \sigma_3[j] & \sigma_4[j] \\ \sigma_1[j+1] & \sigma_2[j+1] & \sigma_3[j+1] & \sigma_4[j+1] \\ \sigma_1[j+2] & \sigma_2[j+2] & \sigma_3[j+2] & \sigma_4[j+2] \\ \sigma_1[j+3] & \sigma_2[j+3] & \sigma_3[j+3] & \sigma_4[j+3] \end{pmatrix}, \quad (21.9)$$

$$\mathbf{b}[j] = \begin{pmatrix} \beta_1[j] & \beta_2[j] & \beta_3[j] & \beta_4[j] \\ \beta_1[j+1] & \beta_2[j+1] & \beta_3[j+1] & \beta_4[j+1] \\ \beta_1[j+2] & \beta_2[j+2] & \beta_3[j+2] & \beta_4[j+2] \\ \beta_1[j+3] & \beta_2[j+3] & \beta_3[j+3] & \beta_4[j+3] \end{pmatrix}. \quad (21.10)$$

Оценки поведения набора решений в верхней (нижней) бесконечности позволяют выразить коэффициент  $A$  из (21.6) следующим образом:

$$A = (-1)^{j-1} \text{Det}(\mathbf{s}[j]) = (-1)^{j-1} \text{Det}(\mathbf{b}[j]) \text{Det}(\mathbf{C}_\pm^+), \quad (21.11)$$

где  $\text{Det}(\mathbf{C}_\pm^+) = k_0^4/16$ .

Как следствие, получаем, что величины  $(-1)^j \text{Det}(\mathbf{s}[j])$  и  $(-1)^j \text{Det}(\mathbf{b}[j])$  не зависят от  $j$ .

Верно также следующее утверждение:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.5** *Каждое решение спектрального уравнения (20.8) однозначно определяется набором из четырех последовательно идущих значений  $\sigma[j], \sigma[j+1], \sigma[j+2], \sigma[j+3]$  или из четырех значений  $\beta[j], \beta[j+1], \beta[j+2], \beta[j+3]$ . Если все значения в наборе (сигма или бета) равны нулю, то решение тождественно равно нулю.*

Будем обозначать решения спектрального уравнения, явным образом указывая индекс  $j$  и четверку элементов последовательности  $\sigma$  или  $\beta$ . Так, построим обозначения

$$U(\theta) = U_j^{\text{up}}(\sigma[j], \sigma[j+1], \sigma[j+2], \sigma[j+3]; \theta)$$

или

$$U(\theta) = U_j^{\text{dn}}(\beta[j], \beta[j+1], \beta[j+2], \beta[j+3]; \theta).$$

Заметим, что решения  $V_1 \dots V_4$  и  $W_1 \dots W_4$ , встречавшиеся в Утверждении 21.3, получают следующие обозначения:

$$V_m = U_m^{\text{up}}(1, 0, 0, 0; \theta) = U_{m+1}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta), \quad (21.12)$$

$$W_m = U_m^{\text{dn}}(1, 0, 0, 0; \theta) = U_{m+1}^{\text{dn}}(0, 0, 0, 1; \theta). \quad (21.13)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21.1** *Спектральное уравнение (20.8) с некоторыми заданными коэффициентами  $\mathbf{C}_\pm^+, \mathbf{C}_\pm^-, \hat{\mathbf{C}}_\pm^-$  и  $\hat{\mathbf{C}}_\pm^+$  называется сбалансированным, если при  $m = 1 \dots 4$*

$$U_1^{\text{up}}(\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m}; \theta) = \lambda_m U_1^{\text{dn}}(\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m}; \theta) \quad (21.14)$$

для некоторых не равных нулю чисел  $\lambda_1 \dots \lambda_4$ .

Функции, стоящие в левой части (21.14), могут использоваться как базис в пространстве решений спектрального уравнения. Отметим, что за счет симметрии уравнения по отношению к сдвигу  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  этот базис можно переносить на  $2\pi n$ . В результате легко доказывается следующее утверждение:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.6** Пусть спектральное уравнение (20.8) сбалансированно,  $\mathbf{U}(\theta)$  — одно из его решений,  $\{\sigma[j]\}$ ,  $\{\beta[j]\}$  — асимптотические последовательности, определенные для данного решения. Тогда для любого  $j$

$$\beta[j] = \lambda_m \sigma[j], \quad (21.15)$$

где  $m$  — целое число между 1 и 4 такое, что  $j \equiv m \pmod{4}$ .

### Симметрия спектрального уравнения, связанная с теоремой взаимности

Выше из принципа взаимности были выведены соотношения (19.17). С точки зрения предлагаемых здесь методов, теорема взаимности представляется чужеродным элементом, поскольку она не имеет непосредственной связи с дифференциальными уравнениями и функциональными задачами. Однако в приложении (§35) показано, что важное свойство симметрии спектрального уравнения можно вывести для задачи о нескольких полосах, оставаясь в рамках функциональных методов. Для задачи об уголке это тоже возможно. Однако такой вывод был бы весьма громоздким и не добавил бы ничего к пониманию свойств уравнения. Здесь рассуждение, проделанное в главе 2, будет повторено лишь отчасти, а именно будет построено преобразование матрицы решений (сдвиг, обращение и транспонирование), и будут выведены некоторые свойства решений, следующие из того, что уравнение допускает такое преобразование.

Пусть векторы  $U_1(\theta) \dots U_4(\theta)$  представляют собой четыре линейно независимых решения спектрального уравнения (20.8). Составим *матричное решение* этого уравнения

$$\mathbf{U} = (U_1(\theta), U_2(\theta), U_3(\theta), U_4(\theta)). \quad (21.16)$$

Используя  $\mathbf{U}$  определим  $\mathbf{U}^A$  с помощью соотношения

$$\mathbf{U}^A(\theta) \equiv -ie^{-i\theta} ((\mathbf{U}(\theta + \pi))^{-1})^T, \quad (21.17)$$

т.е. матрица сдвигается, инвертируется, транспонируется и умножается на скалярный множитель.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 21.7** Пусть коэффициенты спектрального уравнения (20.8) удовлетворяют соотношениям (19.17). Пусть  $\mathbf{U}$  — матричное решение этого уравнения. Тогда столбцы матрицы  $\mathbf{U}^A$  удовлетворяют уравнению (20.8).

Данное утверждение нетрудно проверить непосредственно.

Следующим шагом будет выяснить, как преобразование (21.17) действует на базисные решения спектрального уравнения и на элементы последовательностей  $\sigma$  и  $\beta$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.8 *Пусть*

$$\mathbf{B}_j = (U_1(\theta), U_2(\theta), U_3(\theta), U_4(\theta)),$$

где

$$U_m = U_j^{\text{up/dn}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \theta) \quad (21.18)$$

(имеется в виду, что индекс *up/dn* принимает во всех формулах одно и то же значение). Пусть матрица  $(\mathbf{B}_j)^A$  построена по формуле (21.17). Обозначим ее столбцы как

$$(\mathbf{B}_j)^A = (U_1^A(\theta), U_2^A(\theta), U_3^A(\theta), U_4^A(\theta)),$$

Тогда эти столбцы имеют вид базисных решений

$$U_1^A(\theta) = U_{j-3}^{\text{up/dn}}(0, 0, 0, 1; \theta), \quad (21.19)$$

$$U_2^A(\theta) = U_{j-2}^{\text{up/dn}}(0, 0, 0, 1; \theta), \quad (21.20)$$

$$U_3^A(\theta) = U_{j-2}^{\text{up/dn}}(1, 0, 0, 0; \theta), \quad (21.21)$$

$$U_4^A(\theta) = U_{j-1}^{\text{up/dn}}(1, 0, 0, 0; \theta). \quad (21.22)$$

Доказательство основано на исследовании асимптотик столбцов матрицы  $(\mathbf{B}_j)^A$  в соответствующих полуполосах. При исследовании нижних асимптотик принимается во внимание следующее соотношение:

$$\left( \frac{2i\mathbf{C}_-^+}{k_0} \right)^{-1, T} = \frac{2i\mathbf{C}_-^+}{k_0}. \quad (21.23)$$

Для столбцов матрицы  $\mathbf{U} = (U_1(\theta), U_2(\theta), U_3(\theta), U_4(\theta))$ , составленной из четырех произвольных линейно независимых решений (20.8) построим последовательности  $\{\sigma_m[j]\}$  и  $\{\beta_m[j]\}$ ,  $m = 1 \dots 4$ . Построим матрицы  $\mathbf{s}[j]$  и  $\mathbf{b}[j]$  в соответствии с (21.9) и (21.10).

Построим матрицу  $\mathbf{U}^A = (U_1^A(\theta), U_2^A(\theta), U_3^A(\theta), U_4^A(\theta))$ , и поставим ее столбцам в соответствие последовательности  $\{\sigma_m^A[j]\}$  and  $\{\beta_m^A[j]\}$ ,  $m = 1 \dots 4$ . Следующее утверждение позволяет выразить  $\{\sigma_m^A[j]\}$  и  $\{\beta_m^A[j]\}$  через  $\{\sigma_m[j]\}$  и  $\{\beta_m[j]\}$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.9 *Элементы последовательностей  $\sigma_m^A[j]$  и  $\beta_m^A[j]$  могут быть найдены по формулам*

$$\sigma_m^A[j] = (\mathbf{s}^{-1,T}[j])_m^1, \quad \beta_m^A[j] = (\mathbf{b}^{-1,T}[j])_m^1. \quad (21.24)$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что при любом  $j$

$$\mathbf{U}(\theta) = \mathbf{B}_j(\theta) \cdot \mathbf{s}[j], \quad (21.25)$$

а следовательно,

$$\mathbf{D}^A = \mathbf{B}_j^A (\mathbf{s}[j])^{-1,T}. \quad (21.26)$$

Принимая во внимание представления столбцов  $(\mathbf{B}_j)^A$  (21.19)–(21.22), получим (21.24).

УТВЕРЖДЕНИЕ 21.10 *Пусть спектральное уравнение (20.8) сбалансированно. Тогда каждый из параметров  $\lambda_m$ ,  $m = 1 \dots 4$  (см. (21.15)) равен 1 или  $-1$ .*

Для доказательства рассмотрим матрицу

$$\mathbf{B} = (\mathbf{U}_1(\theta), \mathbf{U}_2(\theta), \mathbf{U}_3(\theta), \mathbf{U}_4(\theta)),$$

где

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_1^{\text{up}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \theta). \quad (21.27)$$

По свойству (21.15), эти же решения могут быть записаны как

$$\mathbf{U}_m = \lambda_m \mathbf{U}_1^{\text{dn}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \theta). \quad (21.28)$$

Рассмотрим первый столбец матрицы  $(\mathbf{B})^A$ . Его можно вычислить, ориентируясь на верхнюю асимптотику. Получится  $\mathbf{U}_{-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$  и, следовательно  $\lambda_1 \mathbf{U}_{-2}^{\text{dn}}(0, 0, 0, 1; \theta)$ . Если тот же столбец вычисляется с помощью нижней асимптотики, то он получается равным  $\lambda_1^{-1} \mathbf{U}_{-2}^{\text{dn}}(0, 0, 0, 1; \theta)$ . Таким образом,  $\lambda_1 = \lambda_1^{-1}$ . Остальные соотношения устанавливаются аналогично.

Таким образом, сбалансированные спектральные уравнения можно классифицировать по набору констант  $\lambda_m$ . Очевидно, при непрерывном изменении геометрических параметров задачи этот набор величин меняться не должен. Таким образом, можно выяснить, к какому классу принадлежат “физически реализуемые” спектральные уравнения, например, рассмотрев коротковолновую задачу. Аккуратное рассмотрение показывает, что в физически реализуемых сбалансированных уравнениях  $\lambda_m = 1$  при всех  $m$ .

## §22. Постановка задачи об определении параметров для уголкового отражателя

В настоящем разделе завершается постановка задачи об определении неизвестных параметров для уголкового отражателя. Для этого изучаются совместные свойства спектральных и координатных уравнений.

Обозначим символом  $\Upsilon$  четырехлистную поверхность, показанную на Рис. 2.3 б, т.е. поверхность для уголкового отражателя со щелью.

### Связь асимптотических свойств решений спектрального уравнения с топологическими свойствами решений координатного

Пусть вектор

$$S = \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} \quad (22.1)$$

удовлетворяет соотношению (20.4) и спектральному уравнению (20.8). Тогда интеграл (20.9) задает волновое поле  $u$ , удовлетворяющее условию излучения на поверхности, имеющей вид спирали Рис. 22.1.

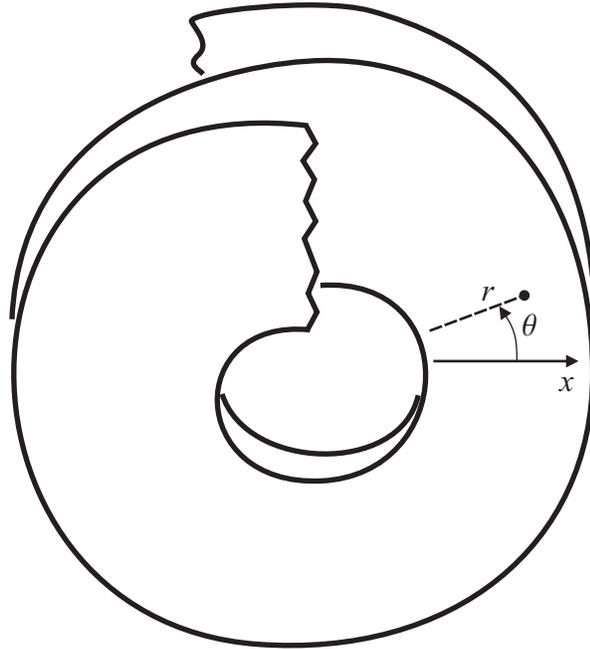


Рис. 22.1: Область, в которой поле определяется интегралом (20.9)

Угол  $\theta$  принимает значения от  $-\infty$  до  $\infty$ . Зафиксируем его значение равным  $\theta = \pi k/2$  для некоторого целого  $k$ . Продолжим поле, определяемое интегралом (20.9) от больших значений  $r$ , где интеграл сходится, к малым  $r$ . При стремлении точки наблюдения к соответствующей вершине, т.е. к точке  $p_m$ , где  $m$  — целое число от 1 до 4 такое, что

$$m - 1 \equiv k \pmod{4}, \quad (22.2)$$

поле, вообще говоря, имеет сингулярность.

Следующее утверждение описывает связь сингулярности поля с элементами последовательностей  $\{\sigma[j]\}$  и  $\{\beta[j]\}$ , введенных в предыдущем параграфе для функции  $U = U^+$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.1** Пусть выполняется (22.1), пусть  $U^+$  и  $U^-$  удовлетворяют (20.4), а  $U^+$  удовлетворяет спектральному уравнению (20.8). Определим последовательности  $\{\sigma[j]\}$  и  $\{\beta[j]\}$  для решения  $U^+$ . Пусть  $\theta = \theta_k = \pi k/2$ , а  $m$  определяется как (22.2). Тогда асимптотики компонент с индексами  $m+$  и  $m-$  функции  $u$ , определяемой интегралом (20.9), вблизи точки

$$r = |p_m|, \quad \theta = \theta_k$$

определяются как

$$u^{m+}(r, \theta_k) = \frac{ie^{-i\theta_k/2}\sigma[k-1]}{\sqrt{2\pi k_0}(r - |p_m|)} + O(1) \quad (22.3)$$

и

$$u^{m-}(r, \theta_k) = \frac{ie^{i\theta_k/2}\beta[k-1]}{\sqrt{2\pi k_0}(r - |p_m|)} + O(1). \quad (22.4)$$

Асимптотики остальных компонент вектора  $u$  определяются в соответствии с Утверждением 21.1.

Продолжение функции  $u$  в точку  $(r = |p_m|, \theta = \theta_k)$  регулярно в этой точке тогда и только тогда, когда

$$\sigma[k-1] = 0 \quad \text{и} \quad \beta[k-1] = 0. \quad (22.5)$$

Доказательство сводится к исследованию асимптотики интеграла (20.9).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.2** Пусть матрицы  $C_-^+$ ,  $C_+^-$ ,  $\hat{C}_-^-$  и  $\hat{C}_+^+$  подобраны таким образом, что решение соответствующего координатного уравнения представляет собой волновое поле, определенное и однозначное на введенной ранее четырехлистной поверхности  $\Upsilon$  и удовлетворяющее условию излучения. Тогда соответствующее спектральное уравнение (20.8) сбалансированно.

Для доказательства данного утверждения построим по физическому решению  $u$  четыре решения координатных уравнений  $u_1^* \dots u_4^*$  с помощью формулы (20.19), а затем, вычислив их диаграммы направленности, построим четыре базисных решения спектрального уравнения  $U_1^* \dots U_4^*$  (см. (20.22)).

Заметим, что каждое решение  $u_m$  регулярно вне контура  $\Gamma_m$ . Это значит, оно не имеет сингулярностей в трех точках, соответствующих вершинам. По Утверждению 22.1, диаграммы направленности этих решений совпадают с точностью до постоянного множителя с решениями

$$U_1^{\text{up/dn}}(1, 0, 0, 0; \theta) \dots U_4^{\text{up/dn}}(1, 0, 0, 0; \theta).$$

Символ “up/dn” означает, что с точностью до коэффициента каждое решение может трактоваться и как “up”, и как “dn”. Набор из четырех таких векторов может быть с помощью преобразования  $U \rightarrow U^A$  заменен на набор

$$U_1^{\text{up/dn}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \theta)$$

при  $m = 1 \dots 4$ . Таким образом, спектральное уравнение (20.8) обладает набором решений, делающим его сбалансированным.

### Формулы аналитического продолжения

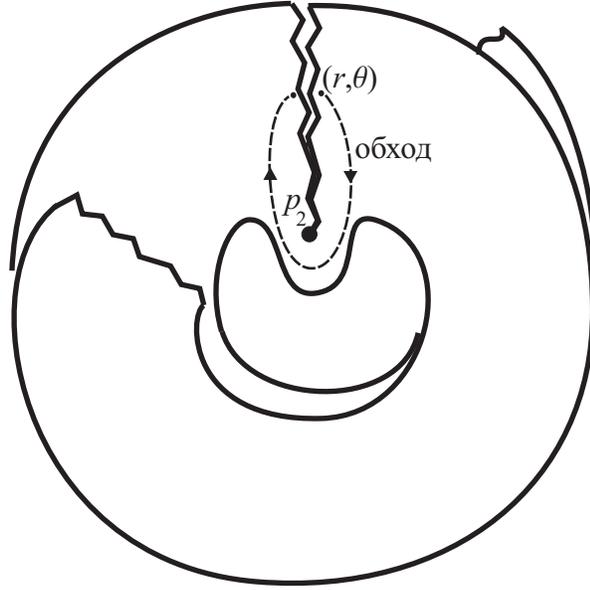
Пусть  $U$  — некоторое решение спектрального уравнения (20.8), а  $u$  — соответствующее решение координатных уравнений (19.16), определенное на спирали  $r > \max(|p_m|)$ ,  $-\infty < \theta < \infty$ , изображенной на Рис. 22.1. Рассмотрим продолжение  $u$  вдоль контура, обходящего одну из вершин. Например обход вокруг  $p_2$  показан на Рис. 22.2. Сформулируем два вопроса об этом продолжении:

1. Удовлетворяет ли решение  $u(r, \theta)$  условию излучения при  $r \rightarrow \infty$  после обхода?
2. Если оно удовлетворяет условию излучения, то как изменяется его диаграмма направленности?

Поскольку диаграмма направленности является решением спектрального уравнения, в рамках второго вопроса необходимо найти преобразование решения спектрального уравнения, соответствующее данному обходу в координатной области.

Ответ на оба вопроса дается следующим утверждением.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.3** Пусть спектральное уравнение (20.8) сбалансированно, пусть  $U$  — его решение, а  $\sigma[j]$  — верхняя асимптотическая последовательность, построенная для этого решения. Пусть вокруг вершины с координатами  $\theta = \theta_k = \pi k/2$ ,  $r = |p_m|$ ,  $m - 1 \equiv k \pmod{4}$  совершен обход.

Рис. 22.2: Обход вокруг вершины  $p_2$ 

Тогда функция  $u$  удовлетворяет условию излучения после обхода, а ее диаграмма направленности после обхода определяется соотношением

$$U^{\text{after}}(\theta) = U^{\text{before}}(\theta) - \sigma[k+1](U_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta) + U_{k+1}^{\text{up}}(1, 0, 0, 0; \theta)) \quad (22.6)$$

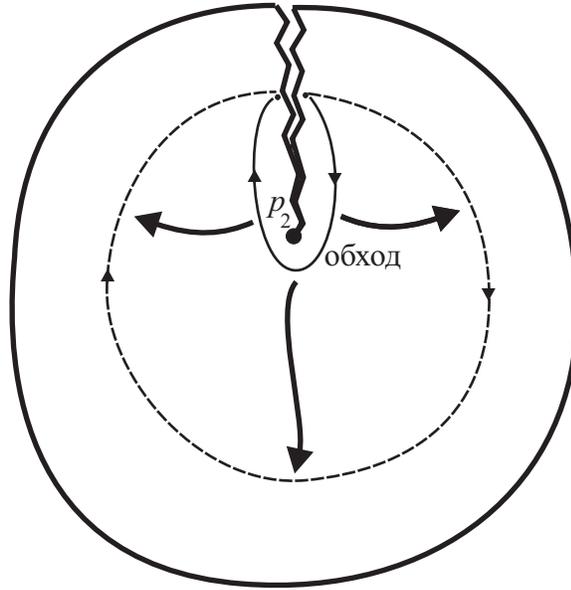
Для доказательства заметим, что комбинация

$$U(\theta) - \sigma[k+1]U_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$$

не имеет точки ветвления в вершине  $\theta = \theta_k = \pi k/2$ ,  $r = |p_m|$ , следовательно, ее продолжение равно ей самой. С другой стороны, построим решение спектрального уравнения  $U_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$  и соответствующее ему решение координатного уравнения, которое назовем  $u_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$ . Данное решение координатного уравнения на некотором листе действительных переменных  $x$  и  $y$  имеет только одну точку ветвления, и можно деформировать обход вокруг этой точки ветвления, как показано на Рис. 22.3. Таким образом, продолжение диаграммы  $U_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$  дается формулой

$$(U_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta))^{\text{after}} = U_{k-2}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta - 2\pi) = -U_{k+1}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$$

Последнее равенство следует из свойств периодичности спектрального уравнения.

Рис. 22.3: Деформация обхода для  $U_{-1}^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$ 

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.4** Пусть координатное уравнение вида (19.16) имеет решение, представляющее собой краевые функции Грина на четырехлистной поверхности  $\Upsilon$ . Пусть спектральное уравнение (20.8) соответствует координатному уравнению (19.16). Пусть  $U(\theta)$  — произвольное решение (20.8), и  $\{\sigma[j]\}$  — верхняя асимптотическая последовательность для этого решения. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\zeta[j]\sigma[j] = \zeta[j-1]\sigma[j-1] + \zeta[j-3]\sigma[j-3] - \zeta[j-4]\sigma[j-4], \quad (22.7)$$

где коэффициенты  $\zeta[j]$  определяются как

$$\zeta[j] = \begin{cases} 1, & \text{при } j \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{8} \\ -1, & \text{при } j \equiv 5, 6, 7, 8 \pmod{8} \end{cases} \quad (22.8)$$

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Последовательности  $\{\sigma[j]\}$ , соответствующие различным решениям уравнения (20.8), образуют линейное пространство размерности 4. Построим четыре линейно независимые последовательности в этом пространстве, т.е. его базис.

Рассмотрим вектор-функцию  $u$ , состоящую из краевых функций Грина. По условию, такая функция является решением координатных уравнений.

Дальнее поле данной функции состоит из двух листов (Рис. 2.7, Рис. 2.8). Внутренний лист имеет период  $2\pi$ . Элементы последовательности  $\sigma[j]$  для этого листа при  $j = 1 \dots 8$  можно вычислить непосредственно:

$$\sigma_1[1 \dots 8] = 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1. \quad (22.9)$$

Период последовательности равен 8 (заметим, что множитель  $e^{-i\theta/2}$  в (21.2) изменяет знак при переходе  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ ).

Внешний лист имеет период  $6\pi$ . Следовательно,  $\sigma$ -последовательность для этой ветви решения имеет период 24. Элементы этой последовательности при  $j = 1 \dots 24$  также могут быть вычислены непосредственно:

$$\sigma_2[1 \dots 24] = -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0. \quad (22.10)$$

Последовательность  $\sigma_3$  может быть получена, если повернуть решение, соответствующее  $\sigma_2$ , на угол  $2\pi$ , т.е. на четыре элемента:

$$\sigma_3[1 \dots 24] = 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1. \quad (22.11)$$

Если повернуть решение, соответствующее  $\sigma_2$ , на угол  $4\pi$ , в результате получится последовательность, линейно зависящая от  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Поэтому для отыскания четвертой последовательности используем более сложный способ.

Построим решение  $U_1^{\text{up}}(0, 0, 0, 1; \theta)$  и будем считать, что последовательность  $\sigma_4$  соответствует этому решению. Заметим, что решение, соответствующее последовательности  $\sigma_2$ , может быть получено из  $\sigma_1$  в результате обхода вокруг вершины  $p_4$ . Применим к этому обходу формулу (22.6). В результате получим соотношение:

$$\sigma_4[j] + \sigma_4[j - 4] = \sigma_1[j] - \sigma_2[j].$$

Эта формула дает рекуррентное соотношение для  $\sigma_4$ . В результате можно вычислить элементы  $\sigma_4[j]$  для  $j = 5 \dots 8$ :

$$\sigma_4[1 \dots 8] = 0, 0, 0, 1, -1, -1, -2, -2 \quad (22.12)$$

Последовательности  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  образуют базис линейного пространства. Формула (22.7) может быть проверена для каждой из этих последовательностей при  $j = 5 \dots 8$ . Для остальных  $j$  она выполняется в силу свойств периодичности задачи.  $\square$

Наконец, объединяя Утверждения 22.3 и 22.1, получим обратное утверждение:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.5** Пусть коэффициенты  $\mathbf{C}_-^+$ ,  $\mathbf{C}_+^-$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_+^+$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_-^-$  спектрального уравнения (20.8) подобраны так, что 1) уравнение сбалансированно, все константы  $\lambda_m$ , определенные в (21.15), равны единице, и 2) последовательности  $\sigma$  для всех решений удовлетворяют рекуррентной формуле (22.7).

Тогда соответствующие координатные уравнения (19.16) имеют решение  $u(x, y)$ , однозначное на зоммерфельдовой поверхности  $\Upsilon$  и удовлетворяющее условию излучения на всех листах. Асимптотики решения имеют вид (2.27), (2.28).

Для доказательства данного утверждения достаточно найти среди  $\sigma$ -последовательностей (а значит и решений спектрального уравнения) решения с периодом  $2\pi$  и  $6\pi$  и изучить, как изменяется решение при обходе вершин. Выведенные формулы позволяют утверждать, что решения с периодом  $2\pi$  и  $6\pi$  преобразуются точно так же, как искомые физические решения.

Условие 1 Утверждения 22.6 гарантирует, что условия излучения остаются справедливыми после обхода особых точек. Условие 2 фиксирует топологию поверхности, на которой определено решение  $u$ .

Условие 1 эквивалентно 12 скалярным соотношениям между элементами последовательностей  $\sigma$  и  $\beta$ .

Формально, условие 2 эквивалентно 16 скалярным соотношениям, однако Утверждение 21.4 и формула (21.11) гарантирует выполнение четырех из них.

Таким образом, требования Утверждения 22.6 эквивалентны 24 скалярным ограничениям, что вдвое больше числа свободных параметров. Ниже показано, что ограничения не являются независимыми, и число ограничений можно уменьшить до 12.

### Учет симметрии (21.17)

Прежде всего, модифицируем условие 1 утверждения 22.5.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.6** *Для произвольным образом зафиксированных коэффициентов спектрального уравнения (20.8) определим матрицу*

$$\mathbf{T} = \mathbf{b}[1](\mathbf{s}[1])^{-1}, \quad (22.13)$$

где матрицы  $\mathbf{s}[1]$  и  $\mathbf{b}[1]$  построены по формулам (21.9) и (21.10). Если  $\mathbf{T}$  имеет верхнюю треугольную форму

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 & T_4^1 \\ 0 & T_2^2 & T_3^2 & T_4^2 \\ 0 & 0 & T_3^3 & T_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & T_4^4 \end{pmatrix}, \quad (22.14)$$

то уравнение (20.8) сбалансированно.

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Не ограничивая общности, будем считать, что  $\mathbf{s}[1]$  имеет вид единичной матрицы, т.е. матричное решение  $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$  состоит из функций

$U_m(\theta) = U_m^{\text{up}}(\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m}; \theta)$ . В этом случае матрица  $\mathbf{T}$  совпадает с  $\mathbf{b}[1]$ . По определению, уравнение (20.8) сбалансированно тогда и только тогда, когда  $\mathbf{T}$  — диагональная матрица.

Построим матрицу  $\mathbf{U}^A$  по формуле (21.17). По Утверждению 21.7, столбцы матрицы  $\mathbf{U}^A$  удовлетворяют уравнению (20.8). Рассмотрим  $\sigma$ - и  $\beta$ -последовательности, соответствующие столбцам  $\mathbf{U}^A$ . Обозначим эти последовательности  $\sigma_m^A[j]$  и  $\beta_m^A[j]$ . Составим из этих последовательностей матрицы  $\mathbf{s}^A[j]$  и  $\mathbf{b}^A[j]$ .

Используя формулу (21.24), нетрудно показать, что при произвольных элементах последовательностей  $\sigma_m[j]$ ,  $j > 4$ , матрица  $\mathbf{s}^A[1]$  является нижней треугольной. Это означает, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^A \mathbf{L}, \quad (22.15)$$

где  $\mathbf{L} = (\mathbf{s}^A[1])^{-1}$  — нижняя треугольная матрица.

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{b}^A[1]$ . Матрица  $\mathbf{b}[1] = \mathbf{T}$  является верхней треугольной. Используя формулу (21.24), можно показать, что матрица  $\mathbf{b}^A[1]$  должна быть нижней треугольной. В силу (22.15),

$$\mathbf{b}[1] = \mathbf{b}^A[1] \mathbf{L}, \quad (22.16)$$

и, следовательно, матрица  $\mathbf{b}[1] = \mathbf{T}$  должна быть нижней треугольной. Следовательно,  $\mathbf{T}$  является одновременно верхней и нижней треугольной матрицей, т.е. это диагональная матрица.  $\square$

Прежде, чем модифицировать условие 2 Утверждения 22.6, введем обозначение

$$\tilde{\sigma}[j] = \zeta[j] \sigma[j], \quad (22.17)$$

где  $\zeta[j]$  определяется как (22.8). Формула (22.7) в новых обозначениях запишется как

$$\tilde{\sigma}[j] = \tilde{\sigma}[j-1] + \tilde{\sigma}[j-3] - \tilde{\sigma}[j-4], \quad (22.18)$$

Для любых четырех решений спектрального уравнения (20.8) определим матрицу  $\tilde{\mathbf{s}}[j]$  соотношением, сходным с (21.9). Определим последовательности  $\tilde{\sigma}_m^A[j]$  для решений, полученных в результате преобразования (21.17). Заметим, что имеет место формула, сходная с (21.24):

$$\tilde{\sigma}_m^A[j] = (\tilde{\mathbf{s}}^{-1,T}[j])_m^1. \quad (22.19)$$

Определитель  $\tilde{\mathbf{s}}[j]$  не зависит от  $j$ :

$$\text{Det}(\tilde{\mathbf{s}}[j]) = \text{const}. \quad (22.20)$$

Это следует из (21.11).

При произвольном выборе коэффициентов спектрального уравнения формула (22.18) может не выполняться, однако, при любом  $j$  можно подобрать числа  $A_1[j] \dots A_4[j]$  такие, что

$$\tilde{\sigma}[j] = A_1[j]\tilde{\sigma}[j-1] + A_2[j]\tilde{\sigma}[j-2] + A_3[j]\tilde{\sigma}[j-3] + A_4[j]\tilde{\sigma}[j-4]. \quad (22.21)$$

Эти числа находятся по формуле

$$\begin{pmatrix} A_4[j] \\ A_3[j] \\ A_2[j] \\ A_1[j] \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{s}}[j-4])^{-1,T} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1[j] \\ \tilde{\sigma}_2[j] \\ \tilde{\sigma}_3[j] \\ \tilde{\sigma}_4[j] \end{pmatrix} \quad (22.22)$$

для любых последовательностей  $\tilde{\sigma}_1 \dots \tilde{\sigma}_4$ , соответствующих линейно независимым решениям уравнения (20.8).

Периодичность коэффициентов спектрального уравнения дает

$$A_m[j] = A_m[j+4], \quad (22.23)$$

следовательно, имеет смысл рассматривать только  $A_m[j]$  при  $j = 1 \dots 4$ .

В соответствии с (22.20), равенство

$$A_4[j] = -1 \text{ при любом } j \quad (22.24)$$

выполняется априори.

Таким образом, в рекуррентную формулу для последовательности  $\{\tilde{\sigma}\}$  входят 12 неизвестных величин  $A_m[j]$ .

Следующее утверждение говорит о том, что эти величины не являются независимыми.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 22.7** Пусть выполняются следующие соотношения для  $A_m[j]$ :

$$A_3[1] = A_1[1] = A_3[2] = A_3[3] = 1, \quad A_2[1] = A_2[2] = 0. \quad (22.25)$$

Тогда верна формула (22.18), т.е. выполняются оставшиеся соотношения

$$A_1[2] = A_1[3] = A_1[4] = A_3[4] = 1, \quad A_2[3] = A_2[4] = 0. \quad (22.26)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

По условию утверждения, матрица  $A_m[j]$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_4[1] & A_4[2] & A_4[3] & A_4[4] \\ A_3[1] & A_3[2] & A_3[3] & A_3[4] \\ A_2[1] & A_2[2] & A_2[3] & A_2[4] \\ A_1[1] & A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & A_3[4] \\ 0 & 0 & A_2[3] & A_2[4] \\ 1 & A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] \end{pmatrix}. \quad (22.27)$$

Преобразуем рекуррентные соотношения для последовательностей  $\{\tilde{\sigma}\}$  в соотношения для матриц  $\tilde{\mathbf{s}}[j]$ :

$$\tilde{\mathbf{s}}^T[j] = \tilde{\mathbf{s}}^T[1] \mathbf{T}_{j-1}, \quad (22.28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}_1 &= \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3, \\ \mathbf{T}_4 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{t}_4, \\ \mathbf{T}_5 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{t}_4 \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{T}_6 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{t}_4 \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{T}_7 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{t}_4 \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3, \\ \mathbf{T}_8 &= \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{t}_4 \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3 \mathbf{t}_4, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_1[2] \end{pmatrix}, \quad (22.29)$$

$$\mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & A_2[3] \\ 0 & 0 & 1 & A_1[3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & A_3[4] \\ 0 & 1 & 0 & A_2[3] \\ 0 & 0 & 1 & A_1[3] \end{pmatrix}. \quad (22.30)$$

Пусть последовательности  $\tilde{\sigma}_m[j]$  определены для четырех линейно независимых решений спектрального уравнения  $U_m$ , сгруппированных в матричное решение  $\mathbf{U}$ . Построим матрицу  $\mathbf{U}^A$  и определим для ее столбцов последовательности  $\tilde{\sigma}_m^A[j]$ .

В соответствии с (22.19),

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1^A[j] \\ \tilde{\sigma}_2^A[j] \\ \tilde{\sigma}_3^A[j] \\ \tilde{\sigma}_4^A[j] \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{s}}[1])^{-1} \begin{pmatrix} ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^1 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^2 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^3 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^4 \end{pmatrix} \quad (22.31)$$

Найдем коэффициенты  $A'_m[j]$ , для которых выполняется соотношение

$$\tilde{\sigma}^A[j] = A'_1[j] \tilde{\sigma}^A[j-1] + A'_2[j] \tilde{\sigma}^A[j-2] + A'_3[j] \tilde{\sigma}^A[j-3] + A'_4[j] \tilde{\sigma}^A[j-4]. \quad (22.32)$$

Для этого при  $j = 5 \dots 8$  решим систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^4 A'_m[j] \begin{pmatrix} ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^1 \\ ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^2 \\ ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^3 \\ ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^1 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^2 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^3 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^4 \end{pmatrix}. \quad (22.33)$$

Используя явный вид матриц (22.29), (22.30) и выполняя вычисления, получим

$$\begin{pmatrix} A'_4[5] & A'_4[6] & A'_4[7] & A'_4[8] \\ A'_3[5] & A'_3[6] & A'_3[7] & A'_3[8] \\ A'_2[5] & A'_2[6] & A'_2[7] & A'_2[8] \\ A'_1[5] & A'_1[6] & A'_1[7] & A'_1[8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] & 1 \\ A_2[3] & A_2[4] & 0 & 0 \\ A_3[4] & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.34)$$

Заметим, что  $A'_m[j] = A'_m[j - 4]$ .

По Утверждению 21.7, столбцы  $\mathbf{U}^A$  являются решениями спектрального уравнения, поэтому последовательности  $\{\sigma_m^A\}$  должны удовлетворять формуле (22.21). Следовательно, коэффициенты  $A_m[j]$  и  $A'_m[j]$  должны совпадать, и

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & A_3[4] \\ 0 & 0 & A_2[3] & A_2[4] \\ 1 & A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] & 1 \\ A_2[3] & A_2[4] & 0 & 0 \\ A_3[4] & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22.35)$$

отсюда получаем (22.26).  $\square$

### Постановка задачи об определении констант для уголкового отражателя со щелью

Приведенные выше рассуждения о постановке задачи об определении неизвестных констант были довольно громоздки. Подведем итог сказанному.

Соотношения (19.17), (19.20) и (19.21) приводят к тому, что коэффициенты спектрального и координатных уравнений выражаются через 12 скалярных комплексных переменных.

Первые 6 параметров позволяют построить матрицу  $\mathbf{C}_+^+$ . Соотношения (19.17) и (19.21) означают, что  $\mathbf{C}_+^+$  представляет собой ортогональную матрицу, умноженную на  $ik_0/4$ . Ортогональная матрица может рассматриваться как матрица ортогонального преобразования. Шесть свободных параметров представляют собой углы поворота базисных векторов (три степени свободы для первого вектора, две для второго и одна для третьего). Матрица  $\mathbf{C}_+^-$  находится из (19.21).

Оставшиеся шесть параметров определяют произвольную кососимметрическую матрицу  $\hat{\mathbf{C}}_+^+$ . Матрица  $\hat{\mathbf{C}}_+^-$  находится из (19.20).

Подставляя 12 произвольных параметров в координатные уравнения, находим матричное решение  $\mathbf{u}$ . Это решение, вообще говоря, имеет нефизическое поведение на бесконечности и топологию зоммерфельдовой поверхности, отличающуюся от  $\Upsilon$ . Именно поэтому приходится накладывать на коэффициенты уравнения определенные глобальные ограничения.

Предлагаемые глобальные ограничения строятся на основе асимптотик решений спектрального уравнения. Выполнение всех соотношений проверяется по единой схеме. Вычисляются четыре линейно независимых решения спектрального уравнения, и для этих решений строятся асимптотические последовательности  $\{\sigma_m[j]\}$  и  $\{\beta_m[j]\}$ . Данные последовательности представляют собой набор коэффициентов, стоящих при доминирующих асимптотиках в соответствующих полосах. Все глобальные ограничения имеют вид

$$f_i(\{\sigma_m[j]\}, \{\beta_m[j]\}) = 0, \quad i = 1 \dots 12, \quad (22.36)$$

где  $f_i$  — некоторые многочлены от конечного числа элементов последовательностей  $\{\sigma_m[j]\}$  и  $\{\beta_m[j]\}$ . Последовательности являются бесконечными в обе стороны, однако для проверки соотношений необходимы только элементы с индексами  $j = -3 \dots 4$ . При практическом отыскании коэффициентов спектрального уравнения необходимо решать задачу отыскания нулей невязок глобальных ограничений, т.е. значений  $f_k(\{\sigma_m[j]\}, \{\beta_m[j]\})$ .

Первые шесть ограничений сформулированы в Утверждении 22.6. Они имеют вид

$$T_1^2 = T_1^3 = T_2^3 = T_1^4 = T_2^4 = T_3^4 = 0, \quad (22.37)$$

где матрица  $\mathbf{T}$  определяется из (22.13). Как следует из Утверждения 22.6, если выполняются соотношения (22.37), то спектральное уравнение сбалансированно. Если  $\mathbf{U}$  — решение сбалансированного спектрального уравнения, а  $\mathbf{u}$  — соответствующее ему решение координатного уравнения, то все продолжения  $\mathbf{u}$  на (действительной) зоммерфельдовой поверхности удовлетворяют условию излучения. Это доказано в Утверждении 22.3.

Сбалансированное уравнение может принадлежать к одному из нескольких классов по виду констант  $\lambda_m$  (они могут быть равны  $+1$  и  $-1$ ). Необходимо проводить процедуру численного отыскания констант таким образом, чтобы уравнение на каждом шаге принадлежало классу, для которого все константы  $\lambda_m$  равны  $+1$ .

Оставшиеся шесть ограничений представлены соотношениями (22.25), для которых коэффициенты  $A_m[j]$  определяются в (22.22). В соответствии с Утверждением 22.7 и формулой (22.24), из ограничений (22.25) следует формула (22.7). В соответствии с Утверждением 22.5, если выполняется формула (22.7), то у координатных уравнений есть решение  $\mathbf{u}(x, y)$ , которое удовлетворяет усло-

---

виям излучения на всех листах и имеет нужную структуру зоммерфельдовой поверхности.

## §23. Основные результаты главы 4

1. Применение формулы расщепления и метода отражений позволили свести задачу об уголкового отражателе к задаче о нахождении краевых функций Грина на четырехлистной поверхности  $\Upsilon$ . Вершины (точки ветвления поверхности) имеют координаты  $(a_1, 0)$ ,  $(0, a_2)$ ,  $(-a_3, 0)$  и  $(0, -a_4)$ . Такая постановка является более общей по отношению к задаче об уголке, поскольку игнорирует геометрические симметрии задачи.
2. Для краевых функций Грина выведены координатные уравнения (19.4) и спектральное уравнение (20.8). Стоит отметить, что данные уравнения сохраняют свою форму для любой зоммерфельдовой поверхности с точками ветвления второго порядка.
3. Исследованы свойства решений координатных уравнений и спектрального уравнения. Показано, что из решения спектрального уравнения можно по формуле (20.9) построить решение соответствующих координатных уравнений.
4. Исследованы алгебраические (локальные) ограничения, накладываемые на неизвестные константы, входящие в коэффициенты координатных и спектральных уравнений. Показано, что с учетом этих ограничений остается 12 свободных скалярных параметров.
5. В конце §22 сформулирована система глобальных ограничений для определения свободных параметров.

## Глава 5

# Дифракция на плоском конусе

### §24. Постановка задачи. Формулы расщепления. Модифицированные формулы Смышляева

#### Вводные замечания

Пусть сформулирована задача о дифракции на конусе (возможно, не круговом). В трехмерном пространстве задана поверхность рассеивателя, обладающая тем свойством, что если точка  $(x, y, z)$  принадлежит поверхности, то любая точка  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ ,  $\alpha > 0$  также принадлежит этой поверхности. Пусть на поверхности заданы граничные условия Дирихле или Неймана. В пространстве выполняется трехмерное уравнение Гельмгольца. На конус падает плоская волна. Направление, из которого приходит падающая волна, может быть представлено как точка на единичной сфере. Обозначим эту точку как  $\omega^{\text{in}}$ . Полное поле может быть представлено как сумма падающей и рассеянной волн. Рассеянная волна имеет достаточно сложную структуру. В этой структуре выделяется компонента, имеющая вид сферической волны, промодулированной по направлению рассеяния. Коэффициент модуляции  $S$ , зависящий от  $\omega$  (направление рассеяния) и  $\omega^{\text{in}}$ , есть дифракционный коэффициент, и это основная величина, подлежащая определению.

Ниже рассматривается дифракция на плоском конусе. Для такой задачи рассеянное поле состоит из сферической волны, о которой шла речь выше, геометрически отраженной плоской волны, а также волн, рассеянных ребрами плоского конуса, имеющими достаточно сложную структуру, близкую к цилиндрической. Кроме того, возможно присутствие волн, испытавших рассеяние на ребрах несколько раз. В этом многообразии волновых явлений амплитуда сферической волны (дифракционный коэффициент) занимает особое место. Дело в том, что он выражается через Фурье-образ поля на поверхности рассеивателя, т.е. дифракционный коэффициент и его аналитическое продолжение содержат

всю необходимую информацию для восстановления полного волнового поля. Амплитуды остальных волн представляют собой особенности дифракционного коэффициента.

Традиционный путь решения задач о дифракции на конусах следующий. На первом шаге задача формулируется в сферических координатах  $(r, \omega)$ , и радиальная переменная  $r$  отделяется от угловых. Зависимость компонент решения от  $r$  дается функциями Бесселя и Ханкеля, а для определения зависимости от  $\omega$  необходимо решать уравнение Лапласа-Бельтрами на единичной сфере с граничными условиями, заданными на некотором контуре. Детальное описание этой процедуры можно найти в работах [101, 104]. В результате получается следующая формула для дифракционного коэффициента:

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma_1} e^{-i\pi\nu} g(\omega, \omega^{\text{in}}, \nu) \nu d\nu. \quad (24.1)$$

Будем называть эту формулу *формулой Смьшляева*. Здесь  $\nu$  — константа разделения,  $g$  — функция Грина соответствующей задачи на единичной сфере. Контур интегрирования обсуждается ниже.

На втором шаге ищут функцию Грина  $g$ . Обычно функцию Грина выражают через собственные функции  $\Phi_j$  и собственные числа  $\nu_j$  сферической задачи:

$$g(\omega, \omega^{\text{in}}, \nu) = \sum_j \frac{\Phi_j(\omega) \Phi_j(\omega^{\text{in}})}{\nu^2 - \nu_j^2}. \quad (24.2)$$

Напомним, что для плоского конуса задача допускает разделение переменных в координатах эллиптического конуса, а собственные функции выражаются через функции Ламе (см. напр. [92]). В случае, если разделение переменных не может быть осуществлено, функция  $g$  находится численно в результате решения граничного интегрального уравнения.

Мы рассматриваем дифракцию на плоском конусе и собираемся усовершенствовать только что описанную процедуру, внося в нее два изменения. Прежде всего, будет изменено интегральное представление (24.1). На основе формул расщепления будут выведены *модифицированные формулы Смьшляева*. В этих формулах вместо обычной функции Грина  $g$  будут использоваться краевые функции Грина  $v^{1,2}$  на сфере, полностью аналогичные краевым функциям Грина, введенным в предыдущих главах для дифракционных задач на плоскости.

Полученная таким образом модифицированная формула Смьшляева обладает важным преимуществом по сравнению с “обычной” формулой (24.1). А именно, модифицированная формула позволяет осуществить переход к экспоненциально сходящемуся интегралу для более широкой области углов падения и рассеяния.

Второе изменение коснется метода вычисления функций  $v^{1,2}$ . Вместо разложения (24.2) и граничных интегральных уравнений будет применена техника, основанная на координатных уравнениях, введенных в главе 3. Напомним, что данный метод заключается в сведении уравнения в частных производных к многомерному дифференциальному уравнению на двумерном многообразии. Будет показано, что данный метод приводит к эффективному вычислению краевых функций Грина.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу о дифракции на плоском конусе. Пусть в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0. \quad (24.3)$$

Временная зависимость всех величин выбирается в виде  $e^{-i\Omega t}$  и нигде явно не выписывается.

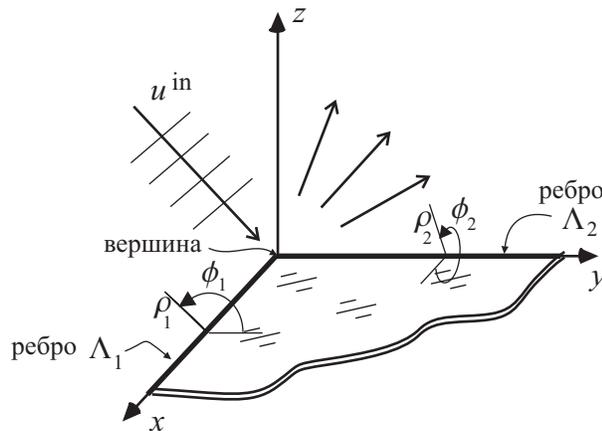


Рис. 24.1: Геометрия задачи

Рассеиватель (плоский конус) представляет собой четвертьплоскость  $z = 0, x > 0, y > 0$  (см. Рис. 24.1). Везде, кроме §26 (об эволюционных уравнениях), рассматривается рассеяние на плоском конусе с углом  $\pi/2$  при вершине. Однако все выкладки могут быть аналогичным образом проделаны для произвольного угла при вершине. Координатные уравнения для плоского конуса с произвольным углом  $\Psi$  выписаны в §26.

На поверхностях рассеивателя выполняются граничные условия Дирихле:

$$u(x > 0, y > 0, z = \pm 0) = 0. \quad (24.4)$$

На рассеиватель падает из бесконечности плоская волна

$$u^{\text{in}} = \exp\{-i(k_x^{\text{in}}x + k_y^{\text{in}}y + k_z^{\text{in}}z)\}, \quad (24.5)$$

где  $(k_x^{\text{in}})^2 + (k_y^{\text{in}})^2 + (k_z^{\text{in}})^2 = k_0^2$ .

Для корректной постановки дифракционной задачи необходимо сформулировать условие излучения, а также условия на ребрах системы и в вершине. Условие излучения для такой задачи можно сформулировать следующим образом. Вместо падающей плоской волны рассматривается точечный источник, расположенный на конечном, но большом расстоянии от вершины. Поле, полученное в результате этой процедуры, должно быть экспоненциально убывающим на бесконечности, если  $k_0$  обладает малой положительной мнимой частью, т.е. если в среде имеется затухание.

В настоящей работе столь сложные построения не требуются. В силу специфики предлагаемой процедуры, достаточно констатировать, что в рассеянном поле нет вкладов, приходящих из бесконечности. В полном поле такой вклад дает падающая волна.

Условие на ребре строится с помощью известного решения задачи Зоммерфельда о полуплоскости. Очевидно, поле вблизи ребра должно иметь ту же локальную структуру, т.е.

$$u \sim \rho_{1,2}^{1/2} \sin \frac{\phi_{1,2}}{2}, \quad (24.6)$$

где  $\rho_{1,2}$  и  $\phi_{1,2}$  — локальные цилиндрические координаты вблизи ребер  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , соответственно. Данное условие может быть интерпретировано как условие Мейкснера, т.е. как условие отсутствия источников вблизи ребра.

Условие в вершине также может быть сформулировано как условие Мейкснера, т.е. как условие конечности энергии в любой конечной области пространства. В данном случае условие имеет вид

$$u = o(1), \quad \nabla u = o(r^{-1/2}) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad (24.7)$$

где  $r$  — расстояние до вершины.

Для данной задачи верна *теорема единственности*, т.е. если некоторая функция  $w$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничным условиям, условиям излучения (в  $w$  нет вкладов, приходящих из бесконечности), условиям на ребрах и условию в вершине, то  $w \equiv 0$ .

### Диаграмма направленности

Проанализируем структуру поля  $u$ , которое является решением дифракционной задачи. Стандартный анализ, основанный на методе перевала, позволяет выделить вдали от рассеивателя падающую и отраженную плоские волны,

две цилиндрические волны, рассеянные ребрами, а также сферическую волну. Отраженные и цилиндрические волны существуют не во всем пространстве; в переходных зонах (например, на границе геометрической зоны, занятой отраженной волной) формируется быстро осциллирующее полутеневое поле.

Будем рассматривать только компоненту поля, соответствующую сферической волне. Эта компонента имеет вид

$$u^{\text{sc}}(\omega, r) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} S(\omega) + O(e^{ik_0 r} (k_0 r)^{-2}). \quad (24.8)$$

Здесь  $r$  — расстояние до вершины,  $\omega$  — точка на единичной сфере, указывающая направление на точку наблюдения,  $S(\omega)$  — дифракционный коэффициент. Имеет смысл также явно указать на зависимость функции  $S$  от направления падения:

$$S = S(\omega; \omega^{\text{in}}).$$

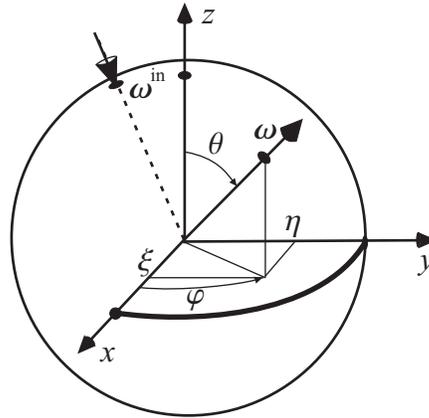


Рис. 24.2: Координаты на сфере

Точки на сфере  $\omega^{\text{in}}$  и  $\omega$ , обозначающие направления на источник и точку наблюдения, показаны на Рис. 24.2. Для описания этих точек будут использоваться два набора координат. Прежде всего, это обычные сферические координаты  $(\theta, \varphi)$ . Положительное направление оси  $z$  соответствует оси  $\theta = 0$ . Положительные направления осей  $x$  и  $y$  соответствуют точкам  $(\theta = \pi/2, \varphi = 0)$  и  $(\theta = \pi/2, \varphi = \pi/2)$ .

Кроме сферических координат, будут использоваться “декартовы” координаты точек на сфере, а именно пары  $(\xi, \eta)$ , представляющие собой координаты проекций точек сферы на плоскость  $(x, y)$ . Такие пары определяют точки на сфере неоднозначно, поэтому данные координаты будут использоваться лишь там, где это не приводит к недоразумениям.

Сферические и “декартовы” координаты связаны соотношениями

$$\xi = \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta = \sin \theta \sin \varphi.$$

Координаты  $\xi^{\text{in}}$  и  $\eta^{\text{in}}$  соответствуют точке  $\omega^{\text{in}}$ . Заметим, что с помощью этих переменных падающая волна может быть записана в виде

$$u^{\text{in}} = \exp\{-ik_0(\xi^{\text{in}}x + \eta^{\text{in}}y + \sqrt{1 - (\xi^{\text{in}})^2 - (\eta^{\text{in}})^2}z)\}.$$

Дифракционный коэффициент  $S(\omega; \omega^{\text{in}})$  представляет собой основную функцию, которую необходимо вычислить для описания поля. Данная функция входит в асимптотическое представление (24.8), однако она содержит информацию, достаточную для *точного* описания поля во всем пространстве. Действительно, введем следующую функцию, представляющую собой скачок производной поля на рассеивателе:

$$[u_z](x, y) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, +0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, -0).$$

Используя стандартный подход, можно связать эту функцию с дифракционным коэффициентом  $S(\omega, \omega^{\text{in}})$ :

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \iint_0^\infty [u_z](x, y) e^{-ik_0(\xi x + \eta y)} dx dy,$$

т.е. с помощью обратного преобразования Фурье можно получить  $[u_z]$  из  $S$ . С другой стороны, по известным значениям  $[u_z]$  можно восстановить поле во всем пространстве с помощью формулы Грина.

Заметим, что для выполнения обратного преобразования Фурье необходимо знать значения  $S$  при всех действительных  $\xi$  и  $\eta$ , в то время как дифракционный коэффициент определен только при  $\xi^2 + \eta^2 < 1$ . Однако метод координатных уравнений, применяемый ниже, позволяет вычислить  $S$  в том числе и для комплексных углов  $\theta$  и  $\varphi$ , что соответствует значениям  $\xi^2 + \eta^2 > 1$ .

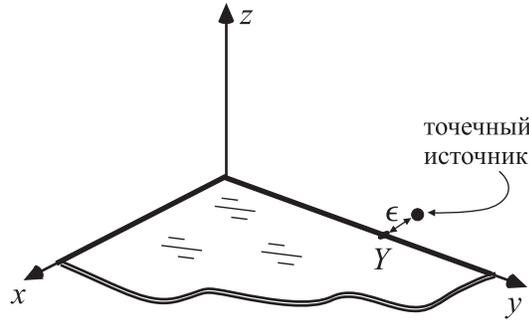
### Формулы расщепления для трехмерной задачи

Для вывода формул расщепления мы используем технику, подробно описанную в главе 1.

Для получения первой из формул применим к полному полю  $u(x, y, z)$  оператор

$$H_x = \frac{\partial}{\partial x} + ik_x^{\text{in}}.$$

Согласно рассуждениям, проделанным выше, функция  $H_x[u]$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничным условиям и условию излучения, но не удовлетворяет условиям в вершине и на ребрах

Рис. 24.3: К определению краевой функции Грина  $v_y$ 

Для компенсации сингулярного поведения на ребрах введем краевую функцию Грина  $v_y$ . Как и ранее, поместим точечный источник на расстоянии  $\epsilon$  от ребра, а именно в точку  $(z = 0, x = -\epsilon, y = Y)$  (см. Рис. 24.3), решим соответствующую дифракционную задачу, состоящую из неоднородного уравнения Гельмгольца

$$[\Delta + k_0^2] \hat{v}_y(x, y, z; Y, \epsilon) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \delta(x + \epsilon, y - Y, z),$$

граничных условий Дирихле, условий излучения и мейкснеровских условий с вершине и ребрах, и возьмем предел

$$v_y(x, y, z; Y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{v}_y(x, y, z; Y, \epsilon).$$

Заметим, что краевая функция Грина  $v_y$  отличается от краевых функций Грина, введенных в главе 1, постоянным множителем (это сделано по соображениям удобства). Основным свойством краевой функции Грина является асимптотика ее свертки с произвольной достаточно гладкой весовой функцией  $h(Y)$ . Исследуем интеграл

$$I(x, y, z) = \int_0^{\infty} h(Y) v_y(x, y, z; Y) dY.$$

Нетрудно показать, что он имеет следующую асимптотику вблизи ребра  $\Lambda_2$ :

$$I(\rho_2, \phi_2, Y) = -\frac{h(Y)}{\sqrt{\pi}} \rho_2^{-1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\rho_2^{1/2} \sin \frac{\phi_2}{2})$$

в локальных цилиндрических координатах.

Пусть асимптотика поля  $u$ , соответствующего задаче о падении плоской волны, имеет вид:

$$u(\rho_1, \phi_1, x) = \frac{2C_x(x)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\rho_1^{3/2}) \quad (24.9)$$

на ребре  $\Lambda_1$ , и

$$u(\rho_2, \phi_2, y) = \frac{2C_y(y)}{\sqrt{\pi}} \rho_2^{1/2} \sin \frac{\phi_2}{2} + O(\rho_2^{3/2}) \quad (24.10)$$

на ребре  $\Lambda_2$ . Здесь  $C_x$  и  $C_y$  — неизвестные коэффициенты.

Конструируем функцию, в которой сингулярности на ребре и в вершине оказываются скомпенсированными:

$$u^*(x, y, z) = H_x[u(x, y, z)] - \int_0^\infty C_y(Y) v_y(x, y, z; Y) dY. \quad (24.11)$$

В соответствии с теоремой единственности, эта функция должна быть тождественно равна нулю, и

$$H_x[u(x, y, z)] = \int_0^\infty C_y(Y) v_y(x, y, z; Y) dY. \quad (24.12)$$

Данное выражение есть слабая форма формулы расщепления.

Используя рассуждения, основанные на принципе взаимности, получаем следующее представление:

$$C_y(Y) = -\frac{(2\pi)^2}{k_0} S_y(\omega^{\text{in}}; Y), \quad (24.13)$$

где  $S_y$  — диаграмма направленности для краевой функции Грина. Эта диаграмма входит в асимптотику

$$v_y(\omega, r; Y) = 2\pi \frac{e^{ik_0 r}}{k_0 r} S_y(\omega; Y) + O(e^{ik_0 r} (k_0 r)^{-2}). \quad (24.14)$$

Подставим (24.13) в (24.12) и перейдем к диаграммам направленности полей в левой и правой части. В результате получим формулу расщепления в сильной форме:

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{i4\pi^2}{k_0^2(\xi + \xi^{\text{in}})} \int_0^\infty S_y(\omega; Y) S_y(\omega^{\text{in}}; Y) dY. \quad (24.15)$$

Аналогично, применение оператора

$$H_y = \frac{\partial}{\partial y} + ik_0\eta^{\text{in}}$$

дает другую формулу расщепления

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{i4\pi^2}{k_0^2(\eta + \eta^{\text{in}})} \int_0^\infty S_x(\omega; X) S_x(\omega^{\text{in}}; X) dX, \quad (24.16)$$

где  $S_x(\omega; X)$  — функция, аналогичная  $S_y(\omega; Y)$ , с источником, расположенным вблизи ребра  $\Lambda_1$ . В силу симметрии задачи,

$$S_x(\xi, \eta; X) = S_y(\eta, \xi; X). \quad (24.17)$$

Имеет смысл вывести еще одну формулу расщепления. Рассмотрим оператор

$$H_{xy} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + ik_0\xi^{\text{in}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + ik_0\eta^{\text{in}} \right). \quad (24.18)$$

Применим этот оператор к полю  $u$ . Используя технику, описанную выше, получим следующее представление для  $S$ :

$$\begin{aligned} & -k_0^2(\xi + \xi^{\text{in}})(\eta + \eta^{\text{in}})S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \\ & -i4\pi^2 \left( \xi^{\text{in}} \int_0^\infty S_x(\omega; X) S_x(\omega^{\text{in}}; X) dY + \eta^{\text{in}} \int_0^\infty S_y(\omega; Y) S_y(\omega^{\text{in}}; Y) dY \right) - \\ & \frac{4\pi^2}{k_0} \left( \int_0^\infty S_x(\omega; X) \frac{\partial}{\partial X} S_x(\omega^{\text{in}}; X) dY + \int_0^\infty S_y(\omega; Y) \frac{\partial}{\partial Y} S_y(\omega^{\text{in}}; Y) dY \right) \end{aligned} \quad (24.19)$$

Рассмотрим функцию

$$\frac{\partial}{\partial Y} v_y(x, y, z; Y).$$

Пусть асимптотика  $v_y$  на ребре  $\Lambda_1$  имеет вид:

$$v_y(\rho_1, \phi_1, x; Y) = \frac{2C_G(x; Y)}{\sqrt{\pi}} \rho_1^{1/2} \sin \frac{\phi_1}{2} + O(\rho_1^{3/2}).$$

Компенсируя особенности на ребре и используя теорему единственности, получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial y} v_y(x, y, z; Y) = -\frac{\partial}{\partial Y} v_y(x, y, z; Y) + \int_0^\infty C_G(X; Y) v_x(x, y, z; X) dX,$$

которое может быть преобразовано в соотношение для диаграмм направленности:

$$\frac{\partial}{\partial Y} S_y(\omega^{\text{in}}; Y) = -ik_0\eta^{\text{in}} S_y(\omega^{\text{in}}; Y) + \int_0^\infty C_G(X; Y) S_x(\omega^{\text{in}}; X) dX. \quad (24.20)$$

Аналогичную формулу можно вывести и для производной  $S_x$ :

$$\frac{\partial}{\partial Y} S_x(\omega^{\text{in}}; X) = -ik_0\eta^{\text{in}} S_x(\omega^{\text{in}}; X) + \int_0^\infty C_G(Y; X) S_y(\omega^{\text{in}}; Y) dY. \quad (24.21)$$

Заметим, что, в силу симметрии и принципа взаимности, коэффициент  $C_G$  в (24.21) совпадает с коэффициентом (24.20).

Окончательно переписываем (24.19) в виде

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{4\pi^2}{k_0^3(\xi + \xi^{\text{in}})(\eta + \eta^{\text{in}})} \times \iint_0^\infty (S_x(\omega; X) S_y(\omega^{\text{in}}; Y) + S_x(\omega^{\text{in}}; X) S_y(\omega; Y)) C_G(X; Y) dX dY. \quad (24.22)$$

Последнее соотношение также представляет собой формулу расщепления для плоского конуса. Она выглядит сложнее, чем формулы (24.15) и (24.16), однако использование именно формулы (24.22) представляется предпочтительным по следующим соображениям. Функция  $S(\omega, \omega^{\text{in}})$  должна иметь сингулярности на множествах  $\xi + \xi^{\text{in}} = 0$  и  $\eta + \eta^{\text{in}} = 0$ . Эти сингулярности соответствуют цилиндрическим волнам, рассеиваемым ребрами. Пересечение этих множеств соответствует отраженной плоской волне.

Данные особенности явно присутствуют во внеинтегральном множителе в (24.22), а сам интеграл оказывается регулярной функцией  $\omega$  и  $\omega^{\text{in}}$  на данных множествах.

С физической точки зрения отсутствие особых направлений у интеграла в (24.22) легко объяснимо. Действительно, оператор  $H_{xy}$  обращает в нуль не только плоские падающую и отраженную волны, но и обе цилиндрические волны, рассеянные ребрами.

## Краевые функции Грина на сфере

Определим оператор Лапласа-Бельтрами на сфере, пользуясь сферическими координатами:

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Сформулируем задачу на собственные значения для этого оператора. Пусть для функции  $v$  выполняется уравнение Лапласа-Бельтрами

$$\left(\tilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4}\right) v(\omega, \nu) = 0 \quad (24.23)$$

на сфере с разрезом, проведенным по дуге, совпадающей с сечением плоского конуса (т.е. дуга задается соотношениями  $\theta = \pi/2$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ ).

На дуге  $S$  заданы граничные условия Дирихле. На концах  $L_1$  и  $L_2$  этой дуги (они соответствуют ребрам плоского конуса; будем называть их *вершинами* сферической задачи) заданы условия Мейкснера. Эти условия приводят к тому, что поле вблизи вершин растет не быстрее  $\kappa^{1/2}$ , где  $\kappa$  — угловое расстояние до соответствующей вершины.

Функции  $v$ , удовлетворяющие всем этим условиям, существуют лишь для дискретного набора значений  $\nu$ , называемого *спектром* задачи. Точки спектра будем обозначать как  $\nu_j$ , а соответствующие им собственные функции как  $\Phi_j$ . Все  $\nu_j$  лежат на действительной оси. Будем считать их положительными и упорядоченными по возрастанию. Можно показать (см. [158]), что все  $\nu_j > 1/2$ .

Будем полагать, что собственные функции нормализованы следующим образом:

$$\iint \Phi_m(\omega) \Phi_n(\omega) d\omega = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Предполагается, что интегрирование производится по всей сфере.

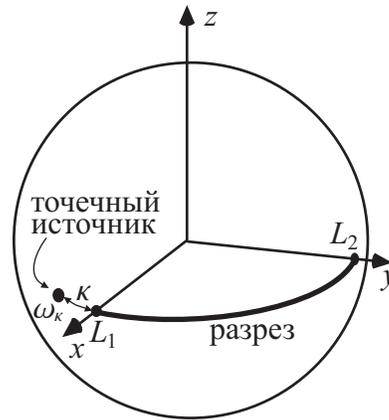


Рис. 24.4: К определению сферической краевой функции Грина  $v^1$

Определим сферическую краевую функцию Грина  $v^1(\omega, \nu)$  для значений  $\nu$ , не принадлежащих спектру, следующим образом. Прежде всего, введем функцию  $\hat{v}^1(\omega, \nu; \kappa)$  как решение сферической задачи с точечным источником, рас-

положенным вблизи вершины  $\varphi = 0$ . Предполагаем, что выполняется неоднородное уравнение Лапласа-Бельтрами

$$\left(\tilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4}\right)\hat{v}^1(\omega, \nu, \kappa) = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}\delta(\omega - \omega_\kappa).$$

Источник расположен в точке  $\omega_\kappa$  с координатами  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = -\kappa$  (см. Рис. 24.4). Граничные условия и условия в вершинах предполагаются имеющими тот же вид, что и для однородной задачи.

Решим неоднородную задачу при всех достаточно малых  $\kappa$  и возьмем предел

$$v^1(\omega, \nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \hat{v}^1(\omega, \nu, \kappa).$$

Сферическая краевая функция Грина  $v^1$  может быть представлена через собственные функции однородной задачи. Введем константы  $C_j$  как коэффициенты в асимптотических разложениях собственных функций

$$\Phi_j(\omega_\kappa) = \frac{2C_j}{\sqrt{\pi}}\kappa^{1/2} + O(\kappa^{3/2}) \quad (24.24)$$

при  $\kappa \rightarrow 0$ . Используя ортогональность и полноту набора собственных функций, получаем представление

$$v^1(\omega, \nu) = 2 \sum_j \frac{C_j \Phi_j(\omega)}{\nu^2 - \nu_j^2}. \quad (24.25)$$

Аналогично, выбирая источник в точке  $\tilde{\omega}_\kappa = (\pi/2, \pi/2 + \kappa)$  вблизи вершины  $L_2$ , можно построить вторую сферическую краевую функцию Грина  $v^2(\omega, \nu)$ . В силу симметрии,  $v^2(\theta, \varphi, \nu) = v^1(\theta, \pi/2 - \varphi, \nu)$ . Используя коэффициенты асимптотики

$$\Phi_j(\tilde{\omega}_\kappa) = \frac{2\tilde{C}_j}{\sqrt{\pi}}\kappa^{1/2} + O(\kappa^{3/2}), \quad (24.26)$$

можно построить следующее представление:

$$v^2(\omega, \nu) = 2 \sum_j \frac{\tilde{C}_j \Phi_j(\omega)}{\nu^2 - \nu_j^2}. \quad (24.27)$$

Введем также коэффициенты  $C_2^1(\nu)$ , которые будут использованы ниже. Эти коэффициенты описывают асимптотику сферической краевой функции Грина  $v^1$ , вычисленную вблизи вершины  $L_2$ :

$$C_2^1(\nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\kappa}} v^1(\theta = \pi/2, \varphi = \pi/2 + \kappa) = 2 \sum_j \frac{C_j \tilde{C}_j}{\nu^2 - \nu_j^2}.$$

## Модифицированные формулы Смышляева

Докажем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 24.1 Верны следующие интегральные представления для  $f(\omega, \omega^{\text{in}})$ :

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{1}{4\pi i(\eta + \eta^{\text{in}})} \int_{\Gamma_1} e^{-i\pi\nu} [v^1(\omega^{\text{in}}, \nu)v^1(\omega, \nu + 1) + v^1(\omega, \nu)v^1(\omega^{\text{in}}, \nu + 1)] d\nu, \quad (24.28)$$

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{1}{4\pi i(\xi + \xi^{\text{in}})} \int_{\Gamma_1} e^{-i\pi\nu} [v^2(\omega^{\text{in}}, \nu)v^2(\omega, \nu + 1) + v^2(\omega, \nu)v^2(\omega^{\text{in}}, \nu + 1)] d\nu, \quad (24.29)$$

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{i}{8\pi(\xi + \xi^{\text{in}})(\eta + \eta^{\text{in}})} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{-i\pi\nu}}{\nu} C_2^1(\nu) [B(\omega, \omega^{\text{in}}, \nu) + B(\omega^{\text{in}}, \omega, \nu)] d\nu, \quad (24.30)$$

где

$$B(\omega, \omega^{\text{in}}, \nu) = (v^1(\omega, \nu + 1) - v^1(\omega, \nu - 1))(v^2(\omega^{\text{in}}, \nu + 1) - v^2(\omega^{\text{in}}, \nu - 1)),$$

контура интегрирования  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  показаны на Рис. 24.5 и Рис. 24.6. Контур  $\Gamma_2$  состоит из бесконечной петли и двух маленьких замкнутых петель, обходящих  $1 - \nu_1$  и  $-1 + \nu_1$ .

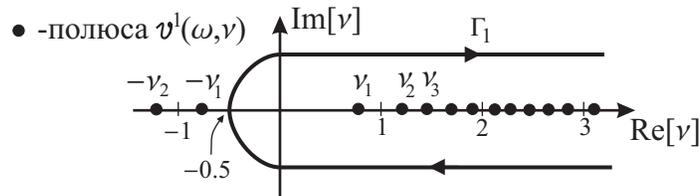


Рис. 24.5: Контур интегрирования для формул (24.28), (24.29)

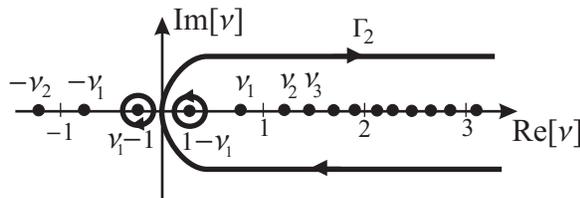


Рис. 24.6: Контур интегрирования для формулы (24.30)

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем следовать процедуре, предложенной В.П.Смышляевым [101, 104]. Перепишем оператор Лапласа для трехмерного пространства в координатах, допускающих разделение переменных:

$$\Delta = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^{-2} \tilde{\Delta}.$$

Запишем также функцию  $v_x(x, y, z; X)$  в сферических координатах, т.е. как  $v_x(\omega, r; X)$ . Построим представление этой функции в терминах собственных функций сферической задачи  $\Phi_j$ . Вернемся к определению данной вспомогательной функции как предела  $\hat{v}_x(x, y, z; X, \epsilon)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Используя метод, описанный в [101], запишем  $v_x(\omega, r; X, \epsilon)$  в виде

$$v_x(\omega, r; X, \epsilon) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \sum_j g_j(r, X) \Phi_j(\omega) \Phi_j(\omega_\kappa), \quad (24.31)$$

где  $\kappa$  и  $\epsilon$  связаны соотношением

$$\kappa = \frac{\epsilon}{X},$$

а функция  $g_j(r, X)$  является решением дифференциального уравнения

$$\left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + k_0^2 r^2 - \nu_j^2 + \frac{1}{4} \right] g_j(r, X) = \delta(r - X), \quad (24.32)$$

удовлетворяющим условию излучения и мейкснеровскому условию в вершине конуса.

Такое решение дается формулой (см. [101]):

$$g_j(r, X) = \frac{\pi}{2i} (rX)^{-1/2} J_{\nu_j}(k_0 r_<) H_{\nu_j}^{(1)}(k_0 r_>), \quad (24.33)$$

где  $r_< \equiv \min\{r, X\}$ ,  $r_> \equiv \max\{r, X\}$ ;  $J$  и  $H$  — функции Бесселя и Ханкеля.

В силу симметрии, суммирование в (24.31) производится только по собственным функциям, симметричным относительно плоскости  $\theta = \pi/2$ . Используя (24.24), перепишем (24.31) в виде

$$v_x(\omega, r; X) = \frac{\pi}{i\sqrt{rX}} \sum_j C_j \Phi_j(\omega) J_{\nu_j}(k_0 r_<) H_{\nu_j}^{(1)}(k_0 r_>). \quad (24.34)$$

Построим диаграмму направленности  $S_x(\omega)$ . Выберем  $r \gg X$  и используем асимптотику функции Ханкеля (см. напр. [159]):

$$H_{\nu_j}^{(1)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp \left\{ ik_0 r - i\frac{\pi}{2} \nu - i\frac{\pi}{4} \right\} + O(e^{ik_0 r} (k_0 r)^{-3/2}).$$

В результате получим представление

$$S_x(\omega; X) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} \frac{e^{-i3\pi/4}}{X} \sum_j C_j \Phi_j(\omega) J_{\nu_j}(k_0 X) e^{-i\pi\nu_j/2}. \quad (24.35)$$

Подставим (24.35) в (24.16):

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = -\frac{2\pi}{k_0(\eta + \eta^{\text{in}})} \sum_{m,n} C_m C_n \Phi_m(\omega) \Phi_n(\omega^{\text{in}}) I_{m,n} e^{-i\pi(\nu_m + \nu_n)/2}, \quad (24.36)$$

где

$$I_{m,n} = \int_0^\infty \frac{J_{\nu_m}(k_0 X) J_{\nu_n}(k_0 X)}{X^2} dX.$$

Заметим, что интеграл сходится при всех  $m$  и  $n$ . Этот интеграл может быть вычислен при помощи табличной формулы [159]:

$$I_{m,n} = -\frac{4k_0}{\pi} \frac{\cos[\frac{\pi}{2}(\nu_m - \nu_n)]}{((\nu_m + 1)^2 - \nu_n^2)((\nu_m - 1)^2 - \nu_n^2)} \quad (24.37)$$

окончательно получаем

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{4}{\eta + \eta^{\text{in}}} \sum_{m,n} \frac{C_m C_n \Phi_m(\omega) \Phi_n(\omega^{\text{in}})}{((\nu_m + 1)^2 - \nu_n^2)((\nu_m - 1)^2 - \nu_n^2)} (e^{-i\pi\nu_m} + e^{-i\pi\nu_n}). \quad (24.38)$$

С помощью прямых, однако громоздких, вычислений, основанных на методе вычетов, отсюда можно получить формулу (24.28). Формула (24.29) получается из (24.15) аналогичным образом.

Наконец, рассмотрим формулу (24.22). Используя ту же технику, получаем после утомительных выкладок формулу (24.30). Ключевым соотношением при этих вычислениях является формула

$$\begin{aligned} & \iint_0^\infty J_\mu(t) J_\lambda(z) J_\beta(\min(t, z)) H_\beta^{(1)}(\max(t, z)) \frac{dt dz}{tz} = \\ & = -\frac{2}{\pi^2} \left[ \frac{e^{i\pi(\lambda + \mu - 2\beta)/2}}{(\mu^2 - \beta^2)(\lambda^2 - \beta^2)} + \frac{e^{i\pi(\mu - \lambda)/2}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \beta^2)} + \frac{e^{i\pi(\lambda - \mu)/2}}{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \lambda^2)} \right]. \end{aligned}$$

Контур  $\Gamma_2$  состоит из большой незамкнутой петли и двух маленьких замкнутых, обходящих полюс подынтегральной функции  $1 - \nu_1$  в положительном направлении, а полюс  $\nu_1 - 1$  — в отрицательном (см. Рис. 24.6). При построении контуров был использован тот “эмпирический” факт, что  $\nu_1$  — единственное собственное значение, удовлетворяющее неравенству  $1/2 < \nu < 1$ .

## Преимущества модифицированных формул Смышляева

Сравним свойства модифицированных формул Смышляева со свойствами формулы (24.1). Имеются две особенности, делающие использование формул расщепления предпочтительным в практических вычислениях.

1. Функции  $v^{1,2}(\omega, \nu)$  зависят от трех скалярных переменных, в то время, как функция  $g(\omega, \omega^{\text{in}}, \nu)$  зависит от пяти. Следовательно, табулирование краевых функций Грина требует меньших вычислительных усилий, чем табулирование функции  $g$ .

2. Формулы (24.28), (24.29) и (24.30) оказываются предпочтительнее с точки зрения сходимости входящих в них интегралов.

Прокомментируем последнее утверждение. Интеграл (24.1) сходится лишь в смысле обобщенных функций. Для его вычисления применяется достаточно громоздкий метод. Однако авторы [104] обсуждают вопрос о возможности преобразования контура интегрирования таким образом, чтобы подынтегральная функция на этом контуре экспоненциально убывала. В нашем случае это оказывается возможным, если для точек  $\omega$  и  $\omega^{\text{in}}$  одновременно выполняются неравенства

$$\arccos \xi + \arccos \xi^{\text{in}} > \pi \quad (24.39)$$

и

$$\arccos \eta + \arccos \eta^{\text{in}} > \pi. \quad (24.40)$$

Исследуем рост подынтегральных функций в (24.28), (24.29) и (24.30). Следуя работам [104] и [160], получаем оценки

$$\begin{aligned} v^1(\omega, \nu) &\sim \exp\{-|\operatorname{Im} \nu| \arccos \xi\} |\nu|^{-1/2}, \\ v^2(\omega, \nu) &\sim \exp\{-|\operatorname{Im} \nu| \arccos \eta\} |\nu|^{-1/2}, \\ C_2^1(\nu) &\sim \exp\{-|\operatorname{Im} \nu| \pi/2\} \end{aligned}$$

Подынтегральную функцию в (24.28) можно оценить как

$$|\nu|^{-1} \exp\{-i\pi\nu - |\operatorname{Im} \nu|(\arccos \xi + \arccos \xi^{\text{in}})\}.$$

Следовательно, интеграл (24.28) сходится для всех  $\omega$ ,  $\omega^{\text{in}}$ , а если выполняется неравенство (24.39), то его можно преобразовать в экспоненциально сходящийся с помощью трансформации контура  $\Gamma_1$  в контур  $\Gamma'_1$ , как показано на Рис. 24.7 а. Заметим, что выполнения неравенства (24.40) при этом не требуется.

Формула (24.29) может быть исследована аналогичным образом.

Подынтегральную функцию в (24.30) можно оценить как

$$|\nu|^{-2} \exp\{-i\pi\nu\} \left( \exp\{-|\operatorname{Im} \nu|(\arccos \xi + \arccos \eta^{\text{in}} + \pi/2)\} + \right.$$

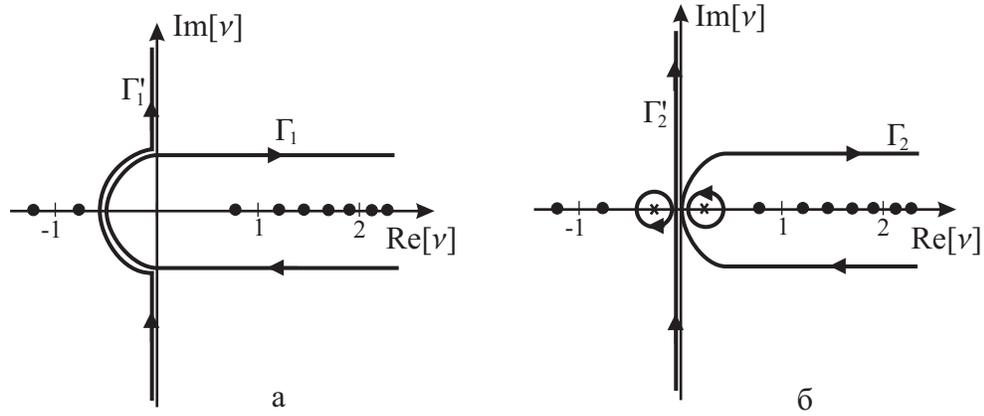


Рис. 24.7: Преобразование контуров интегрирования

$$+ \exp\{-|\operatorname{Im} \nu|(\arccos \xi^{\text{in}} + \arccos \eta + \pi/2)\}.$$

Снова интеграл сходится при всех  $\omega$  и  $\omega^{\text{in}}$ . (Почти при всех — экспоненциальный множитель должен иметь показатель, отличный от нуля). Если выполняются неравенства

$$\arccos \xi + \arccos \eta^{\text{in}} > \pi/2 \quad (24.41)$$

и

$$\arccos \xi^{\text{in}} + \arccos \eta > \pi/2, \quad (24.42)$$

то незамкнутая петля контура интегрирования  $\Gamma_2$  может быть трансформирована в  $\Gamma'_2$ , как показано на Рис. 24.7 б, превращая интеграл в экспоненциально сходящийся.

Рассмотрим неравенства (24.39), (24.40), (24.41) и (24.42). В тех точках, где они превращаются в равенства, следует ожидать появления особенностей диаграммы направленности.

Все особенности дифракционного коэффициента могут быть найдены в рамках простого лучевого рассмотрения. Цилиндрические волны, получаемые при рассеянии падающей волны краями плоского конуса, соответствуют простым полюсам дифракционного коэффициента. Эти полюса расположены на “прямых”  $\xi + \xi^{\text{in}} = 0$  и  $\eta + \eta^{\text{in}} = 0$ . Пересечение этих прямых соответствует отраженной плоской волне. Помимо этих множеств, дифракционный коэффициент может иметь вторичные сингулярности, соответствующие лучам, рассеянным сначала одним ребром, а потом другим (см. Рис. 24.8). Эти лучи соответствуют точкам ветвления, расположенным на множествах  $\eta = \sqrt{1 - (\xi^{\text{in}})^2}$  и  $\xi = \sqrt{1 - (\eta^{\text{in}})^2}$ . Важно отметить, что данные особенности имеют место только при условиях  $\xi^{\text{in}} > 0$  и  $\eta^{\text{in}} > 0$ , соответственно.

В соответствии в этими рассуждениями можно сказать, что формула расщепления позволяет вынести из интеграла некоторые сингулярности дифракционного коэффициента. В формулах (24.28) и (24.29) выносятся по одной первичной сингулярности, а в формуле (24.29) выносятся обе первичных сингулярности. При этом остаются лишь вторичные сингулярности.

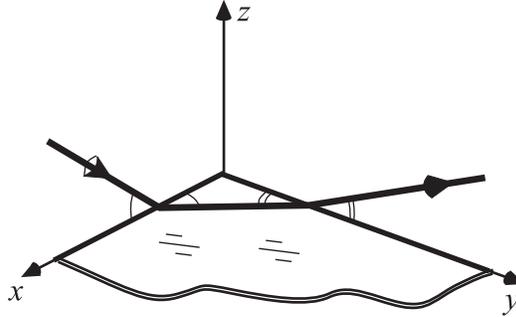


Рис. 24.8: Лучи, соответствующие вторичным сингулярностям

Данное свойство формулы расщепления становится ясным, если заметить, что оператор  $H_{xy}$  превращает в нуль падающую волну, отраженную и обе рассеянные ребрами цилиндрические.

## §25. Координатные уравнения для отыскания сферических краевых функций Грина

### Построение вектора неизвестных

Нашей задачей в этом параграфе будет построение координатных уравнений для функций  $v^{1,2}(\omega, \nu)$ . В соответствии с развитой выше теорией, такие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u} = \mathbf{X} \mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{u} = \mathbf{Y} \mathbf{u}, \quad (25.1)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор, среди компонент которого встречаются искомые функции  $v^1$  и  $v^2$ , а  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  — матрицы-коэффициенты, элементы которых достаточно просто зависят от координат  $\theta$  и  $\varphi$ .

Рассматриваемая здесь задача о сфере с разрезом во многом аналогична задаче о дифракции на полосе. Придерживаясь этой аналогии, построим вектор  $\mathbf{u}$  следующим образом. Этот вектор будет иметь размерность 4. В качестве двух первых его компонент возьмем функции  $v^1$  и  $v^2$ . В качестве двух других компонент возьмем функции  $w^1$  и  $w^2$ , представляющие собой сферические краевые функции Грина для задачи о сфере с разрезом, на котором заданы граничные условия Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0.$$

Более точно, функции  $w^1(\omega, \nu)$  и  $w^2(\omega, \nu)$  строятся при помощи предельного перехода, аналогичного выполненному при определении  $v^{1,2}$ . Введем локальные сферические координаты  $(\zeta_{1,2}, \phi_{1,2})$  вблизи вершин  $L_1, L_2$ , как показано на Рис. 25.1. Для малых  $\kappa$  определим приближение  $\widehat{w}_\kappa^{1,2}(\omega, \nu)$  как решение неоднородного уравнения Лапласа-Бельтрами

$$\left( \widetilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \widehat{w}_\kappa^{1,2}(\omega, \nu) = \frac{\pi^{1/2}}{2\kappa^{3/2}} \delta(\zeta_{1,2} - \kappa) [\delta(\phi_{1,2} - 0) - \delta(\phi_{1,2} + 2\pi + 0)]. \quad (25.2)$$

Это уравнение рассматривается совместно с условиями Неймана на разрезе и мейкснеровскими условиями в ребрах:

$$\widehat{w}_\kappa^{1,2} \sim \zeta_{1,2}^{1/2}.$$

Функции  $w^{1,2}(\omega, \nu)$  определяются как предел

$$w^{1,2}(\omega, \nu) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \widehat{w}_\kappa^{1,2}(\omega, \nu).$$

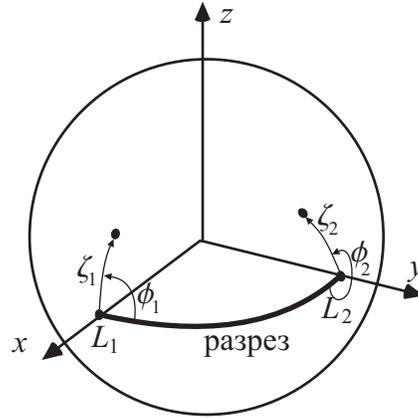


Рис. 25.1: Локальные сферические координаты

Асимптотики краевых функций Грина вблизи ребер рассеивателя имеют вид

$$v^m(\zeta_n, \phi_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{-1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + \frac{2C_n^m}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + O(\zeta_n^{3/2}) \quad (25.3)$$

и

$$w^m(\phi_n, \zeta_n) = -\frac{\delta_{m,n}}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{-1/2} \cos \frac{\phi_n}{2} + \frac{2E_n^m}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{1/2} \cos \frac{\phi_n}{2} + O(\zeta_n^{3/2}), \quad (25.4)$$

где  $m, n = 1, 2$ ,  $C_n^m$  и  $E_n^m$  — некоторые неизвестные коэффициенты, зависящие от  $\nu$ . Заметим, что коэффициент  $C_2^1$  встречается в формуле расщепления (24.30).

Как и раньше, асимптотики вспомогательных функций нарушают условия Мейкснера. Очевидно, это вызвано наличием источников вблизи ребер.

Заметим, что коэффициенты асимптотик (25.3) и (25.4) подчиняются очевидным соотношениям, следующим из симметрии задачи:

$$C_2^1 = C_1^2, \quad E_2^1 = E_1^2, \quad C_1^1 = C_2^2, \quad E_1^1 = E_2^2. \quad (25.5)$$

Ниже не будет указываться зависимость функций  $C_n^m$ ,  $E_n^m$ ,  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$  от  $\nu$ . Предполагается, что выбранные значения  $\nu$  не принадлежат спектрам задачи Дирихле и задачи Неймана. Это означает, что функция, удовлетворяющая однородному уравнению Лапласа-Бельтрами при данном  $\nu$ , граничным условиям Дирихле или Неймана и условиям Мейкснера, тождественно равна нулю.

Введем понятие сверхсингулярной функции на сфере с разрезом. Будем говорить, что функция  $v$  сверхсингулярна, если она удовлетворяет однородному уравнению Бельтами-Лапласа при данном  $\nu$ , условиям Дирихле или Неймана на разрезе и имеет асимптотики

$$v(\phi_n, \zeta_n) = \frac{C_n}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{-1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} + O(\zeta_n^{1/2}),$$

или

$$v(\phi_n, \zeta_n) = \frac{E_n}{\sqrt{\pi}} \zeta_n^{-1/2} \cos \frac{\phi_n}{2} + O(\zeta_n^{1/2}),$$

соответственно, в случае Дирихле и Неймана.

Сверхсингулярную функцию можно представить в виде линейной комбинации краевых функций Грина.

$$v = -C_1 v^1 - C_2 v^2, \quad \text{или} \quad v = -E_1 w^1 - E_2 w^2. \quad (25.6)$$

Это следует из того, что разность правой и левой части каждого из уравнений удовлетворяет уравнению Лапласа-Бельтрами, граничным условиям Дирихле или Неймана, мейкснеровким условиям в ребрах, и при этом  $\nu$  не принадлежит спектру задачи.

### Вывод координатных уравнений

Пусть вектор  $u$  определен как

$$u = (v^1, v^2, w^1, w^2)^T. \quad (25.7)$$

Попытаемся вывести уравнения вида (25.1) для этого вектора. Для этого необходимо построить достаточное число комбинаций, содержащих производные компонент вектора  $u$  и являющихся сверхсингулярными функциями. Далеко не любая производная, скажем, функции  $v^1$  по углу является сверхсингулярной, поскольку в общем случае такая производная содержит члены порядка  $\zeta_1^{-3/2}$  вблизи ребра  $L_1$ .

Введем дифференциальные операторы  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$ . Оператор  $H_3$  представляет собой дифференцирование по азимутальной координате:

$$H_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (25.8)$$

Два других оператора представляют собой также дифференцирования по отношению к поворотам. В качестве осей поворотов выбираются оси  $x$  и  $y$  соответственно. Данные дифференцирования можно записать как

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \quad (25.9)$$

где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  используются как глобальные (а не локальные, как раньше) переменные. Явный вид операторов  $H_1$  и  $H_2$  следующий:

$$\begin{aligned} H_1 &= -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ H_2 &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Очевидно, если некоторая функция  $v$  удовлетворяет уравнению Лапласа-Бельтрами, то  $H_j[v]$  также удовлетворяет этому уравнению. Это следует из того, что оператор Лапласа-Бельтрами коммутирует с вращениями сферы. Кроме того, справедлива следующая лемма:

**ЛЕММА 25.1** Пусть функция  $v(\theta, \varphi)$  удовлетворяет уравнению Лапласа-Бельтрами на сфере вне разреза, непрерывна на разрезе и

1) удовлетворяет граничному условию Дирихле на разрезе. Тогда  $H_3[v]$  удовлетворяет условию Дирихле на разрезе;  $H_1[v]$  и  $H_2[v]$  удовлетворяют условию Неймана на разрезе;

или

2) удовлетворяет условию Неймана на разрезе. Тогда  $H_3[v]$  удовлетворяет условию Неймана на разрезе;  $H_1[v]$  и  $H_2[v]$  удовлетворяют условию Дирихле на разрезе.

Доказательство очевидно для оператора  $H_3$  в обоих случаях и для операторов  $H_{1,2}$  в пункте 2). Некоторые комментарии нужны лишь для операторов  $H_{1,2}$  в пункте 1). Рассмотрим, например, оператор  $H_1$ . Перепишем уравнение Лапласа-Бельтрами в координатах  $(\zeta_1, \phi_1)$ . В результате получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \phi_1^2} = -\sin^2 \zeta_1 \left\{ \frac{1}{\sin \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left( \sin \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \right) + \nu^2 - \frac{1}{4} \right\} v.$$

Заметим, что правая часть обращается в нуль на разрезе. Следовательно,  $\partial v / \partial \phi_1$  удовлетворяет условию Неймана на разрезе.

Построим искомые сверхсингулярные комбинации производных. В качестве первых четырех комбинаций возьмем следующие:

$$H_1[v^1], \quad H_1[w^1], \quad H_2[v^2], \quad H_2[w^2].$$

Другие четыре комбинации имеют вид

$$H_3[v^1] + H_2[w^1], \quad H_2[v^1] - H_3[w^1], \quad H_3[v^2] - H_1[w^2], \quad H_2[v^2] + H_3[w^2].$$

Исследуя асимптотики построенных комбинаций, найдем восемь представлений вида (25.6):

$$H_1[v^1] = C_2^1 w^2 + \frac{1}{2} w^1, \quad (25.10)$$

$$H_1[w^1] = E_2^1 v^2 - \frac{1}{2} v^1, \quad (25.11)$$

$$H_2[v^2] = C_1^2 w^1 + \frac{1}{2} w^2, \quad (25.12)$$

$$H_2[w^2] = E_1^2 v^1 - \frac{1}{2} v^2, \quad (25.13)$$

$$H_3[v^1] + H_2[w^1] = (C_1^1 + E_1^1)v^1 - C_2^1v^2, \quad (25.14)$$

$$H_2[v^1] - H_3[w^1] = (C_1^1 + E_1^1)w^1 - E_2^1w^2, \quad (25.15)$$

$$H_3[v^2] - H_1[w^2] = C_1^2v^1 - (C_2^2 + E_2^2)v^2, \quad (25.16)$$

$$H_1[v^2] + H_3[w^2] = -E_1^2w^1 + (C_2^2 + E_2^2)w^2. \quad (25.17)$$

Система (25.10)–(25.17) состоит из 8 уравнений и содержит 8 производных функций  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$  по сферическим координатам  $(\theta, \varphi)$ . Прделаем необходимые выкладки и выпишем явные выражения для производных в виде уравнений (25.1) для вектора (25.7). Коэффициенты этих уравнений будут иметь вид:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_2^1 & X_3^1 & X_4^1 \\ X_1^2 & X_2^2 & X_3^2 & X_4^2 \\ X_1^3 & X_2^3 & X_3^3 & X_4^3 \\ X_1^4 & X_2^4 & X_3^4 & X_4^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1^1 & Y_2^1 & Y_3^1 & Y_4^1 \\ Y_1^2 & Y_2^2 & Y_3^2 & Y_4^2 \\ Y_1^3 & Y_2^3 & Y_3^3 & Y_4^3 \\ Y_1^4 & Y_2^4 & Y_3^4 & Y_4^4 \end{pmatrix}, \quad (25.18)$$

где

$$X_1^1 = \cos \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \varphi - 2(C_1^1 + E_1^1) \sin \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)},$$

$$X_2^1 = -\cos \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{E_2^1 \cos \varphi - C_2^1 \sin \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta},$$

$$X_3^1 = \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi \cos^2 \theta - \sin \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)},$$

$$X_4^1 = -\frac{E_2^1 \cos \varphi \cos^2 \theta + C_2^1 \sin \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta},$$

$$X_1^2 = \sin \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{C_2^1 \cos \varphi - E_2^1 \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta},$$

$$X_2^2 = -\sin \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi - \sin \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)},$$

$$X_3^2 = \frac{C_2^1 \cos \varphi + E_2^1 \cos^2 \theta \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta},$$

$$X_4^2 = \frac{\cos \varphi - 2(C_1^1 + E_1^1) \cos^2 \theta \sin \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)},$$

$$\begin{aligned}
X_1^3 &= \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi \cos^2 \theta + \sin \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
X_2^3 &= -\frac{C_2^1 \cos \varphi \cos^2 \theta + E_2^1 \sin \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
X_3^3 &= \cos \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \sin \varphi + \cos \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
X_4^3 &= \cos \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{C_2^1 \cos \varphi - E_2^1 \sin \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1^4 &= \frac{E_2^1 \cos \varphi + C_2^1 \cos^2 \theta \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
X_2^4 &= -\frac{2(C_1^1 + E_1^1) \cos^2 \theta \sin \varphi + \cos \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
X_3^4 &= \sin \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{C_2^1 \sin \varphi - E_2^1 \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
X_4^4 &= \sin \varphi \cos \theta \sin \theta \frac{\sin \varphi + 2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1^1 &= \sin \varphi \sin^2 \theta \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \sin \varphi - \cos \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
Y_2^1 &= \sin \varphi \sin^2 \theta \frac{E_2^1 \cos \varphi - C_2^1 \sin \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
Y_3^1 &= -\cos \theta \sin \theta \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \sin \varphi + \cos \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
Y_4^1 &= \cos \theta \sin \theta \frac{E_2^1 \sin \varphi - C_2^1 \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1^2 &= \cos \varphi \sin^2 \theta \frac{C_2^1 \cos \varphi - E_2^1 \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
Y_2^2 &= -\cos \varphi \sin^2 \theta \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi - \sin \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
Y_3^2 &= \cos \theta \sin \theta \frac{E_2^1 \cos \varphi - C_2^1 \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
Y_4^2 &= -\cos \theta \sin \theta \frac{\sin \varphi + 2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1^3 &= \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \varphi - 2(C_1^1 + E_1^1) \sin \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
Y_2^3 &= -\cos \theta \sin \theta \frac{E_2^1 \cos \varphi - C_2^1 \sin \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
Y_3^3 &= -\sin \varphi \sin^2 \theta \frac{\cos \varphi + 2(C_1^1 + E_1^1) \sin \varphi}{2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
Y_4^3 &= \sin \varphi \sin^2 \theta \frac{E_2^1 \sin \varphi - C_2^1 \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
\\
Y_1^4 &= \cos \theta \sin \theta \frac{C_2^1 \cos \varphi - E_2^1 \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
Y_2^4 &= -\cos \theta \sin \theta \frac{2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi - \sin \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)}, \\
Y_3^4 &= \cos \varphi \sin^2 \theta \frac{C_2^1 \sin \varphi - E_2^1 \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}, \\
Y_4^4 &= \cos \varphi \sin^2 \theta \frac{\sin \varphi + 2(C_1^1 + E_1^1) \cos \varphi}{2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)}.
\end{aligned}$$

### Некоторые свойства построенных координатных уравнений

Рассмотрим уравнения (25.1) с коэффициентами (25.18).

1. Должно выполняться условие совместности уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} u \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} u \right).$$

Достаточное условие для этого имеет вид:

$$\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{X} - \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{Y} = 0. \quad (25.19)$$

Нетрудно убедиться, что построенные матрицы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  удовлетворяют этому условию тождественно.

2. Все компоненты вектора  $u$  должны удовлетворять уравнению Лапласа-Бельтрами (24.23). С учетом уравнений (25.1) оператор Лапласа-Бельтрами можно записать в следующем виде:

$$\tilde{\Delta} u = \left[ \mathbf{X}^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{X} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \mathbf{Y}^2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y} \right) \right] u. \quad (25.20)$$

Подставляя (25.18) в (25.20) и проводя громоздкие выкладки, убеждаемся, что

$$\mathbf{X}^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{X} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \mathbf{Y}^2 + \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{Y} \right) = \left( \frac{1}{4} + (C_1^1 + E_1^1)^2 - (C_2^1)^2 - (E_2^1)^2 \right) \mathbf{I}, \quad (25.21)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерности  $4 \times 4$ . Заметим, что

$$\left( \tilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \mathbf{u} = 0. \quad (25.22)$$

Данное условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$(C_1^1 + E_1^1)^2 = (C_2^1)^2 + (E_2^1)^2 - \nu^2. \quad (25.23)$$

Последнее выражение позволяет выразить комбинацию коэффициентов  $C_1^1 + E_1^1$  через  $C_2^1$  и  $E_2^1$ . Это означает, что коэффициенты (25.18) содержат только два неизвестных параметра, зависящих от  $\nu$ . Напомним, что значения величины  $C_2^1(\nu)$  очень важны, поскольку эта величина входит в модифицированную формулу Смышляева (24.30). К сожалению, коэффициенты  $C_2^1$  и  $E_2^1$  могут быть найдены только численно. Ниже будет продемонстрирована процедура для численного нахождения параметров  $C_2^1$  и  $E_2^1$ .

3. На действительной сфере (т.е. в области  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ ) уравнение имеет четыре особые точки  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$  (см. Рис. 25.2). Элементарный анализ показывает, что в каждой из особых точек имеется четыре линейно независимых решения, два из которых регулярны, а два сингулярны (т.е. ведут себя как  $\sin(\phi/2)$  или  $\cos(\phi/2)$ ).

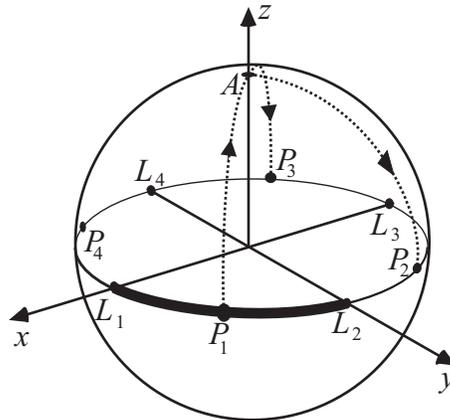


Рис. 25.2: Особые точки координатных уравнений

4. Рассмотрим ограничение уравнений (25.1) на разрезе. Напомним, что граничные условия на разрезе имеют вид

$$v^1 = 0, \quad v^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} w^1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} w^2 = 0. \quad (25.24)$$

Исследовав матрицу  $\mathbf{X}$  из (25.18), убеждаемся, что последние два условия следуют из первых двух. Кроме того, форма матрицы  $\mathbf{Y}$  такова, что если условия  $v^1 = v^2 = 0$  выполняются в одной точке разреза (например, в точке  $P_1$ ), то они выполняются и на всем разрезе.

С точки зрения координатных уравнений, разрез  $(L_1, L_2)$  ничем не отличается от дуг  $(L_2, L_3)$ ,  $(L_3, L_4)$  и  $(L_4, L_1)$ , лежащих на экваторе. Заметим, что на этих дугах должны выполняться граничные условия  $w^1 = w^2 = 0$ ,  $\partial v^1 / \partial \theta = \partial v^2 / \partial \theta = 0$ . Достаточно проверить выполнение лишь первой пары условий в точках  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ .

Точки  $P_1 \dots P_4$  выбираются на экваторе  $\theta = \pi/2$  имеющими координаты  $\varphi$  равные, соответственно,  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$  и  $7\pi/4$ .

## §26. Эволюционные уравнения для задачи на сфере

Можно выделить два параметра, по отношению к которым имеет смысл строить эволюционные уравнения, — это угол при вершине плоского конуса и константа разделения  $\nu$ . К сожалению, построить эволюционные уравнения по  $\nu$  не удастся. Это связано с тем, что изменение  $\nu$  сопровождается неизоморфной деформацией (комплексифицированных) координатных уравнений. Поэтому в настоящем параграфе будет проведен вывод эволюционных уравнений по углу при вершине.

### Координатные уравнения для произвольного угла при вершине

В предыдущем параграфе были построены координатные уравнения для плоского конуса с прямым углом при вершине. Точно таким же способом координатные уравнения могут быть выведены для плоского конуса с произвольным углом  $\Psi < \pi$  при вершине (см. Рис. 26.1).

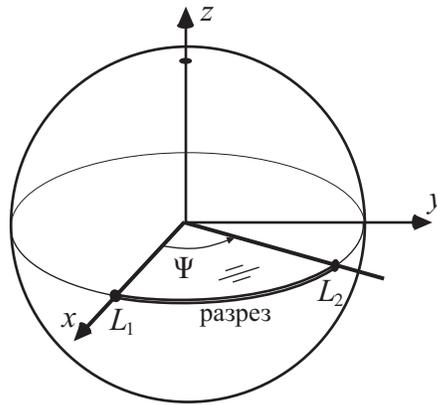


Рис. 26.1: Плоский конус с произвольным углом  $\Psi$  при вершине

Выпишем координатные уравнения для данной задачи. При этом оставим координатные уравнения в “неразрешенном” виде, т.е. содержащими операторы

$H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  (по аналогии с уравнениями (25.10)–(25.17)):

$$H_2[w^1] + \sin \Psi H_3[v^1] = \sin \Psi [(C_1^1 + E_1^1)v^1 - C_2^1 v^2] - \frac{1}{2} \cos \Psi v^1, \quad (26.1)$$

$$H_2[v^1] + \sin \Psi H_3[w^1] = \sin \Psi [(C_1^1 + E_1^1)w^1 - E_2^1 w^2] + \frac{1}{2} \cos \Psi w^1, \quad (26.2)$$

$$H_1[w^2] - \sin \Psi H_3[v^2] = \sin \Psi [(C_2^2 + E_2^2)v^2 - C_1^2 v^1] - \frac{1}{2} \cos \Psi v^2, \quad (26.3)$$

$$H_1[v^2] + \sin \Psi H_3[w^2] = \sin \Psi [(C_2^2 + E_2^2)w^2 - E_1^2 w^1] + \frac{1}{2} \cos \Psi w^2, \quad (26.4)$$

$$H_1[v^1] = \sin \Psi C_2^1 w^2 + \frac{1}{2} w^1, \quad (26.5)$$

$$H_1[w^1] = \sin \Psi E_2^1 v^2 - \frac{1}{2} v^1, \quad (26.6)$$

$$H_2[v^2] = \sin \Psi C_1^2 w^1 + \frac{1}{2} w^1, \quad (26.7)$$

$$H_2[w^2] = \sin \Psi E_1^2 v^1 - \frac{1}{2} v^2, \quad (26.8)$$

где  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$  — сферические краевые функции Грина, введенные, как и в предыдущем параграфе, с помощью точечных источников, расположенных асимптотически близко к вершинам  $L_1$  и  $L_2$ . Асимптотики вспомогательных функций в локальных координатах, введенных рядом с вершинами, имеют вид (25.3), (25.4).  $H_{1,2,3}$  — операторы дифференцирования по отношению к вращениям сферы вокруг вершин  $L_1$ ,  $L_2$  и полюса, соответственно. Операторы  $H_1$  и  $H_3$  определены так же, как и в предыдущем параграфе, а оператор  $H_2$  имеет вид

$$H_2 = -\sin(\varphi - \Psi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos(\varphi - \Psi) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (26.9)$$

Уравнения (26.1)–(26.8) можно разрешить алгебраически по отношению к производным неизвестных функций по координатам  $\theta$  и  $\varphi$ . В результате получатся уравнения вида (25.1) с коэффициентами, выглядящими несколько более громоздко, чем (25.18). Здесь они не выписываются.

Соотношения между коэффициентами ((25.5)) остаются справедливыми. Подстановка коэффициентов в (25.19) показывает, что это соотношение также выполняется. Компоненты вектора  $u$  удовлетворяют уравнению Лапласа-Бельтрами (25.22) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$(C_1^1 + E_1^1)^2 - (C_2^1)^2 - (C_2^2)^2 - 2 \cos \Psi C_2^1 E_2^1 + \nu^2 = 0. \quad (26.10)$$

Данное соотношение позволяет, как и в случае  $\Psi = \pi/2$ , свести число неизвестных параметров задачи к двум. Удобно, как и раньше, взять в качестве этих параметров  $C_2^1$  и  $E_2^1$ .

### Эволюционные уравнения для краевых функций Грина

Рассмотрим комбинации

$$\frac{\partial v^1}{\partial \Psi}, \quad \frac{\partial w^1}{\partial \Psi}, \quad \frac{\partial v^2}{\partial \Psi} + \frac{\partial v^2}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial w^2}{\partial \Psi} + \frac{\partial w^2}{\partial \varphi}.$$

Детальное исследование поведения этих комбинаций (прежде всего, их асимптотик в вершинах) показывает, что они сверхсингулярны в том смысле, который использовался раньше. Следовательно, их можно представить в виде линейных комбинаций функций  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$ . Исследуя асимптотики в вершинах, получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial v^1}{\partial \Psi} = C_2^1 v^2, \quad (26.11)$$

$$\frac{\partial w^1}{\partial \Psi} = -E_2^1 v^2, \quad (26.12)$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial \Psi} + \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} = C_2^1 v^1, \quad (26.13)$$

$$\frac{\partial w^2}{\partial \Psi} + \frac{\partial w^2}{\partial \varphi} = -E_2^1 w^1. \quad (26.14)$$

Принимая во внимание, что производные по  $\varphi$  могут быть выражены из координатных уравнений через компоненты вектора  $\mathbf{u}$ , выпишем эволюционные уравнения в виде

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (26.15)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица, элементы которой — тригонометрические функции  $\theta$  и  $\varphi$ , зависящие от  $C_2^1$  и  $E_2^1$  как от параметров. Матрица  $\mathbf{A}$  здесь не выписывается ввиду ее громоздкости.

### Эволюционные уравнения для $C_2^1$ и $E_2^1$

Рассмотрим уравнение (26.11). Исследуем асимптотики обеих частей вблизи вершины  $L_1$ . Оставляя члены, растущие как  $\zeta_1^{1/2}$ , получаем

$$\frac{\partial C_1^1}{\partial \Psi} = (C_2^1)^2. \quad (26.16)$$

Аналогично, из уравнения (26.12) получаем

$$\frac{\partial E_1^1}{\partial \Psi} = -(E_2^1)^2. \quad (26.17)$$

Выразим коэффициенты  $C_1^1$  и  $E_1^1$  через  $C_2^1$  и  $E_2^1$ . Одно из соотношений, позволяющих построить необходимые выражения, есть (26.10). Второе соотношение может быть получено в результате исследования членов (26.5), растущих, как  $\zeta_1^{1/2}$  около вершины  $L_1$ . В результате получается соотношение

$$C_1^1 - E_1^1 = 2 \sin \Psi C_2^1 E_2^1. \quad (26.18)$$

Исключим  $C_1^1$  и  $E_1^1$  из (26.16) и (26.17) и введем новые неизвестные функции

$$M(\Psi, \nu) = 2C_2^1 E_2^1, \quad N(\Psi, \nu) = (C_2^1)^2 + (E_2^1)^2$$

Для этих функций получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \Psi}(M \sin \Psi) = N, \quad (26.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} \sqrt{N + M \cos \Psi - \nu^2} = \sqrt{N^2 - M^2}. \quad (26.20)$$

Эта система представляет собой эволюционные уравнения для  $C_2^1$  и  $E_2^1$ . Они аналогичны эволюционным уравнениям для задачи о полосе.

Возможные применения эволюционных уравнений следующие. Во-первых, они могут оказаться полезны при табулировании  $C_2^1$  и  $E_2^1$  в в каком-то диапазоне углов  $\Psi$ . Во-вторых, их можно использовать для решения обратной задачи, т.е. задачи распознавания рассеивателя по данным рассеяния.

## §27. Примеры вычислений для дифракции на плоском конусе

В настоящем разделе полученные выше формулы используются для численного нахождения дифракционного коэффициента. При этом ставятся две независимые задачи: проверка возможности вычислить дифракционный коэффициент с помощью модифицированной формулы Смышляева и проверка возможности вычислить краевую функцию Грина с помощью координатных уравнений. Для реализации таких тестов строится процедура вычисления краевой функции Грина без помощи координатных уравнений.

### Вычисление дифракционного коэффициента с помощью модифицированной формулы Смышляева (24.28)

Построим процедуру вычисления дифракционного коэффициента для задачи дифракции на плоском конусе произвольного угла раскрытия, геометрия которого показана на Рис. 26.1. Модифицированная формула Смышляева для такой задачи имеет вид

$$S(\omega; \omega^{\text{in}}) = \frac{\sin \Psi}{4\pi i(\xi + \xi^{\text{in}})} \int_{\Gamma_1} e^{-i\pi\nu} [v^2(\omega^{\text{in}}, \nu)v^2(\omega, \nu + 1) + v^2(\omega, \nu)v^2(\omega^{\text{in}}, \nu + 1)] d\nu, \quad (27.1)$$

отличающийся от (24.29) только наличием множителя  $\sin \Psi$ . Формула выводится так же, как (27.1). Проводить вычисления будем в “комфортной зоне”, т.е. в области значений углов  $\omega, \omega^{\text{in}}$ , где возможно деформировать контур интегрирования  $\Gamma_1$  в прямую, параллельную мнимой оси  $\nu$ . Эта область определяется в конце §24. В нашем случае условие имеет вид

$$\alpha(\omega, L_2) + \alpha(\omega^{\text{in}}, L_2) > \pi, \quad (27.2)$$

где  $\alpha(\omega, \omega')$  представляет собой угловое расстояние между точками на сфере, а  $L_2$  — точка на сфере с полярными координатами  $(\pi/2, \Psi)$ , соответствующая вершине рассеивателя.

Результаты вычислений сравниваются с (24.1). Функция Грина  $g$  сферы с разрезом (точнее, отраженная часть функции Грина) вычисляется как потенциал простого слоя, а именно

$$g(\omega) = \int_S g_0(\omega, \omega', \nu) \mu(\omega') dl', \quad (27.3)$$

где  $\mu$  — неизвестный потенциал,

$$g_0(\omega, \omega', \nu) = -\frac{1}{4 \cos \pi\nu} P_{\nu-1/2}(-\cos \alpha(\omega, \omega')), \quad (27.4)$$

$P$  — функция Лежандра. Интегрирование проводится по дуге  $S : \theta = \pi/2$ ,  $0 < \varphi < \Psi$ .

Потенциал  $\mu$  находится из интегрального уравнения

$$\int_S g_0(\omega, \omega', \nu) \mu(\omega') dl' = -g_0(\omega_0, \omega, \nu), \quad \omega \in S. \quad (27.5)$$

Уравнение решается численно.

Для применения формулы (27.1) необходимо построить процедуру вычисления краевой функции Грина. Поскольку в данный момент цель — проверка модифицированной формулы Смьшляева, мы строим краевую функцию Грина без применения координатных уравнений.

Введем локальные сферические координаты  $\zeta_2, \phi_2$  вблизи точки  $L_2$ . При этом  $\zeta_2 = 0$  соответствует точке  $L_2$ , а  $\phi_2 = 0$ ,  $0 < \zeta < \Psi$  соответствует дуге  $S$ .

Краевую функцию Грина  $v^2$  ищем в виде суммы

$$v^2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2. \quad (27.6)$$

Функция  $v_0^2$  определяется как

$$v_0^2 = -\frac{\nu}{\sqrt{2} \sin \pi \nu} P_{\nu-1/2}^{-1/2}(-\cos \zeta_2) \sin(\phi_2/2). \quad (27.7)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа-Бельтрами при  $0 < \phi_2 < 2\pi$ , обладает заданной асимптотикой вблизи точки  $L_2$  и удовлетворяет граничному условию Дирихле на дуге  $S$ . В то же время, эта функция имеет разрыв первой производной на дуге  $S' : \phi_2 = 0, \Psi < \zeta_2 < \pi$ , т.е. на продолжении  $S$ . Таким образом, на  $S'$  нарушается уравнение Лапласа-Бельтрами.

Функция  $v_1^2$  “поправляет” поведение функции  $v_0^2$  на  $S'$ :

$$v_1^2(\omega) = -\int_{S'} g_0(\omega, \omega', \nu) \frac{v_0^2(\omega')}{\sin(\zeta_1(\omega'))} dl'. \quad (27.8)$$

Сумма  $v_0^2 + v_1^2$  обладает заданной сверхсингулярной асимптотикой вблизи  $L_2$  и является гладкой на  $S'$ , но из-за функции  $v_1^2$  нарушаются граничные условия на  $S$ . Функция  $v_2^2$  исправляет эти граничные условия. А именно, функция  $v_2^2$  ищется в виде потенциала простого слоя

$$v_2^2(\omega) = \int_S g_0(\omega, \omega', \nu) \mu(\omega') dl', \quad (27.9)$$

где плотность  $\mu$  есть решение интегрального уравнения

$$\int_S g_0(\omega, \omega', \nu) \mu(\omega') dl' = -v_1^2(\omega), \quad \omega \in S. \quad (27.10)$$

Нетрудно видеть, что сумма (27.6) удовлетворяет всем условиям, накладываемым на краевую функцию Грина.

Изложенная процедура кажется громоздкой, однако она позволяет избежать расходимостей в интегралах.

Для сравнения дифракционных коэффициентов, вычисленных по формулам (27.1) и (24.1) выбиралось направление падающей волны на оси симметрии задачи:  $\omega^{\text{in}} = (\theta = \pi/2, \phi = \pi + \Psi/2)$ . Направления наблюдения выбирались с координатами  $(\theta, \pi + \Psi/2)$  при различных  $\theta$ . Действительная часть дифракционного коэффициента, оказывается малой (теоретически это нуль), поэтому сравнивались мнимые части дифракционного коэффициента. Результат показан на Рис. 27.1. Вычисления велись для  $\Psi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ . Крестики соответствуют расчету на основе модифицированной формулы (27.1), сплошные линии — формуле (24.1). Разница не превосходила  $3 \times 10^{-4}$ , т.е. получено очень хорошее согласие.

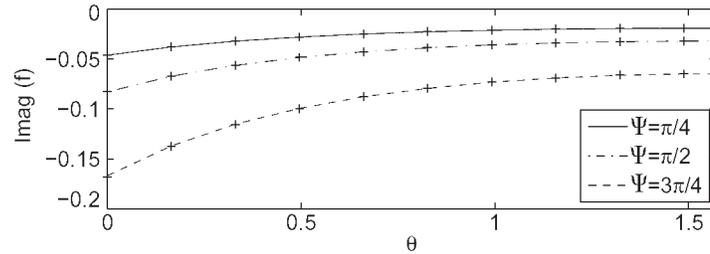


Рис. 27.1: Дифракционный коэффициент для трех значений  $\Psi$

## Вычисление краевых функций Грина с помощью координатных уравнений

Приведем пример вычисления функций  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$  при помощи координатных уравнений. Этот пример будет во многом напоминать выкладки, проделанные для задачи об одиночной полосе, проделанные в §17.

Зафиксируем некоторое значение  $\nu$ , не принадлежащее спектрам задач Дирихле и Неймана. Например, возьмем  $\nu$ , имеющим ненулевую мнимую часть.

Прежде всего, необходимо корректно сформулировать задачу о нахождении неизвестных параметров  $C_2^1$  и  $E_2^1$ . Напомним, что если эти параметры найдены, то можно вычислить и все остальные параметры, входящие в коэффициенты координатных уравнений.

Параметры  $C_2^1$  и  $E_2^1$  подбираются таким образом, чтобы координатные уравнения имели решение, удовлетворяющее нужным граничным условиям на дугах

$(L_1, L_2)$ ,  $(L_2, L_3)$ ,  $(L_3, L_4)$  и  $(L_4, L_1)$ . Заметим, что при этом условии у решения будет нужное асимптотическое поведение во всех особых точках уравнения.

В силу симметрии, в точке  $P_1$  искомое решение имеет вид

$$u(P_1) = Nu_0, \quad u_0 = (0, 0, 1, -1)^T, \quad (27.11)$$

где  $N$  — некоторый численный коэффициент. На время забудем об этом коэффициенте. Будем решать координатные уравнения с граничным условием

$$u(P_1) = u_0, \quad (27.12)$$

найдем  $C_2^1$  и  $E_2^1$ , а затем подберем  $N$  таким, чтобы функции  $v^{1,2}$  и  $w^{1,2}$  имели в вершинах  $L_1$  и  $L_2$  нужные асимптотики при сверхсингулярных членах (см. (25.3) и (25.4)).

Решим координатное уравнение для  $\partial/\partial\theta$  сначала вдоль дуги, соединяющей  $P_1$  и  $A$ , а затем вдоль дуг, соединяющих  $A$  с точками  $P_2$  и  $P_3$ . Все граничные условия будут выполняться, если  $w^1 = w^2 = 0$  в точках  $P_2$  и  $P_3$ . Точку  $P_4$  проверять не надо из-за симметрии уравнений и граничных условий относительно плоскости  $\varphi = \pi/4$ .

Проанализируем поведение решения в точке  $P_2$ . Нетрудно убедиться в том, что координатные уравнения имеют два линейно независимых решения, удовлетворяющих на разрезе граничным условиям  $v^1 = v^2 = 0$ . Одно из этих решений удовлетворяет на дуге  $(L_2, L_3)$  граничным условиям  $v^1 = v^2 = 0$ , а другое — граничным условиям  $w^1 = w^2 = 0$ . Нас устраивает только второе решение. При произвольных  $C_2^1$  и  $E_2^1$  решение, построенное по граничному условию (27.12) будет в  $P_2$  линейной комбинацией разрешенного и неразрешенного решений. Необходимо потребовать, чтобы коэффициент при запрещенном решении был равен нулю. Таким образом, имеется одно скалярное ограничение. Его можно сформулировать, например, в виде  $w^1(P_2) = 0$ . В соответствии со сказанным выше, почти всегда из этого условия будет следовать  $w^2(P_2) = 0$ .

Таким образом, в точке  $P_2$  надо проверять выполнение только одного равенства, а именно  $w^1(P_2) = 0$ . Аналогично, в точке  $P_3$  надо проверять только одно равенство, например  $w^1(P_3) = 0$ . При произвольных  $C_2^1$  и  $E_2^1$  эти равенства выполняться не будут. Наша задача — подобрать такие  $C_2^1$  и  $E_2^1$ , чтобы эти равенства выполнялись.

Введем невязки для нашей задачи следующим образом:

$$\eta_1(C_2^1, E_2^1) \equiv w^1(P_2), \quad \eta_2(C_2^1, E_2^1) \equiv w^1(P_3). \quad (27.13)$$

Формально говоря, необходимо решить систему уравнений

$$\eta_1(C_2^1, E_2^1) = 0, \quad \eta_2(C_2^1, E_2^1) = 0. \quad (27.14)$$

Сложность этой системы заключается в том, что процедура вычисления функций  $\eta_{1,2}$  включает решение обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль контуров  $(P_1, A, P_2)$  и  $(P_1, A, P_3)$ .

Процедура численного решения системы (27.14) полностью аналогична описанной в §26. Эта процедура представляет собой градиентный спуск. Возьмем некоторые начальные значения  $(C_2^1)_0$  и  $(E_2^1)_0$ . Построим по ним невязки  $\eta_{1,2}((C_2^1)_0, (E_2^1)_0)$ . Кроме того, построим частные производные

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial C_2^1}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial E_2^1}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial C_2^1}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial E_2^1}.$$

Для этого, например, возьмем близкие к  $(C_2^1)_0$  и  $(E_2^1)_0$  значения, вычислим невязки и произведем вычитание.

Вычислим поправки  $\delta C$  и  $\delta E$ , решив систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \delta C \frac{\partial \eta_1}{\partial C_2^1} + \delta E \frac{\partial \eta_1}{\partial E_2^1} &= -\eta_1((C_2^1)_0, (E_2^1)_0), \\ \delta C \frac{\partial \eta_2}{\partial C_2^1} + \delta E \frac{\partial \eta_2}{\partial E_2^1} &= -\eta_2((C_2^1)_0, (E_2^1)_0), \end{aligned}$$

т.е. эти поправки обращают в нуль невязки в предположении линейной зависимости невязок от  $C_2^1$  и  $E_2^1$ .

Наконец, вычислим исправленные значения  $C_2^1$  и  $E_2^1$  по формулам

$$(C_2^1)_1 = (C_2^1)_0 + \delta C, \quad (E_2^1)_1 = (E_2^1)_0 + \delta E. \quad (27.15)$$

На этом заканчивается первый шаг процедуры. Затем проделываем такой же второй шаг, в результате чего получаем значения  $(C_2^1)_2$  и  $(E_2^1)_2$  и т.д. Если процедура сходится, то на каждом новом шаге невязки будут все меньше и меньше. Остановим процедуру, когда невязки станут достаточно малы.

После этого решим координатное уравнение для  $\partial/\partial\varphi$  вдоль дуги  $(P_1, L_1)$ , найдем асимптотику решения у вершины  $L_1$  и вычислим коэффициент  $N$ .

Теперь известны коэффициенты координатных уравнений и граничные условия (т.е. значение  $u$  в опорной точке  $P_1$ ).

Для вычисления искомым функций Грина решаем координатное уравнение для  $\partial/\partial\theta$  вдоль дуг  $(P_1, A)$ ,  $(A, P_2)$ ,  $(A, P_3)$ ,  $(A, P_4)$  и табулируем полученные решения на достаточно плотных сетках. После этого решаем координатные уравнения для  $\partial/\partial\varphi$  на окружностях  $\theta = \text{const}$ , расположенных достаточно часто. При этом используем протабулированные ранее решения как начальные условия. Схематически данная процедура изображена на Рис. 27.2.

Продемонстрируем результаты описанной процедуры. Возьмем два значения  $\nu$ , а именно

$$\nu = 0 \quad \text{и} \quad \nu = 20 + i.$$

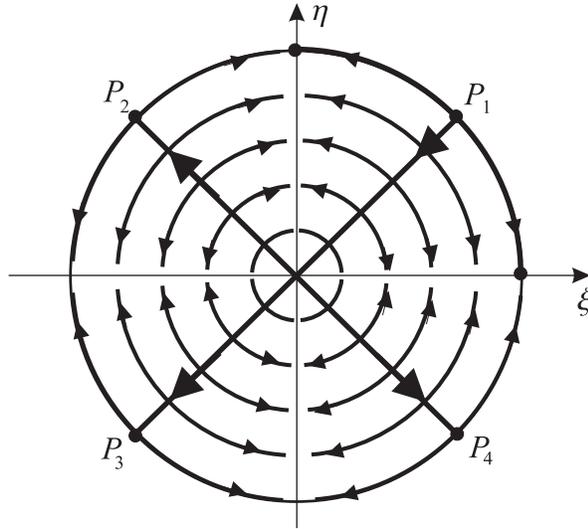


Рис. 27.2: К вычислению сферических краевых функций Грина

Таблица 5.1: Сходимость градиентного метода для  $\nu = 0$ 

n	$(C_2^1)_n$	$(E_2^1)_n$	$(C_1^1 + E_1^1)_n$	$ \eta_1 $	$ \eta_2 $
0	0	0	0	1	0
1	-0.450	0.450	0.637	0.587	1.159
2	-0.270	0.248	0.366	0.022	0.381
3	-0.191	0.293	0.349	0.005	0.018
4	-0.186	0.293	0.347	$7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$
5	-0.186	0.293	0.347	$4 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-9}$

Таблицы 5.1 и 5.2 иллюстрируют сходимость градиентного метода для этих значений  $\nu$ . Начальные значения  $C_2^1$  и  $E_2^1$  в обоих случаях были выбраны равными нулю. Очевидно, пяти шагов достаточно для достижения весьма высокой точности.

Численный эксперимент показывает, что градиентный метод хорошо сходится, когда значения параметра  $\nu$  расположены достаточно далеко от спектра. Если, напротив,  $\nu$  лежит близко к спектру (например,  $\nu$  действительно и больше  $1/2$ ), то начальные значения  $C_2^1$  и  $E_2^1$  должны быть очень близки к точным значениям этих величин. В противном случае метод быстро расходится.

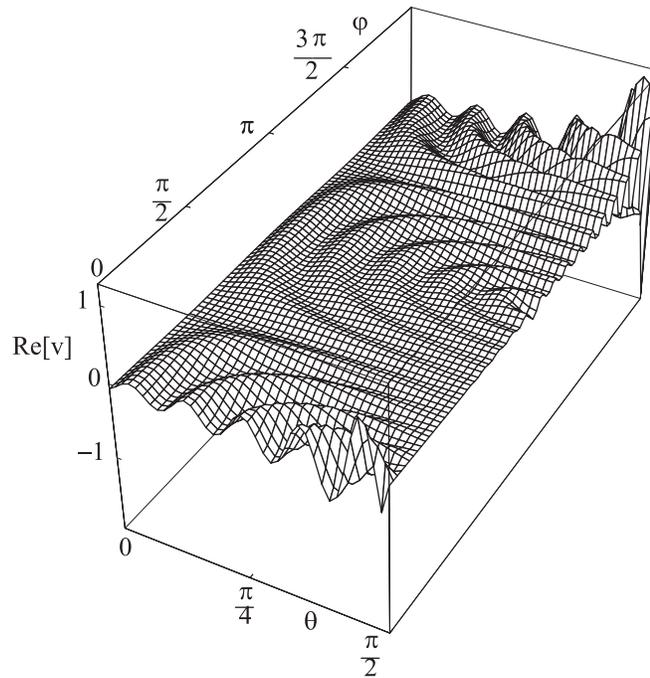
Рисунки 27.3 и 27.4 демонстрируют решения  $v^1$  и  $w^1$  для  $\nu = 20 + i$ .

Проводилось также сравнение краевых функций Грина, вычисленных с помощью координатных уравнений и вычисленных с помощью метода, описанного выше (т.е. на основе интегрального уравнения). Было получено хорошее согла-

Таблица 5.2: Сходимость градиентного метода для  $\nu = 20 + i$ 

$n$	$(C_2^1)_n$	$(E_2^1)_n$	$(C_1^1 + E_1^1)_n$	$ \eta_1 $	$ \eta_2 $
0	0	0	-20i	1	0
1	0.020+0.014i	0.558-0.512i	1.014-19.999i	0.158	0.252
2	0.015+0.017i	0.535-0.514i	1.014-20.000i	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$
3	0.015+0.017i	0.535-0.514i	1.014-20.000i	$4 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-11}$

ние результатов.

Рис. 27.3: Трехмерная визуализация  $\text{Re}[v^1]$  для  $\nu = 20 + i$

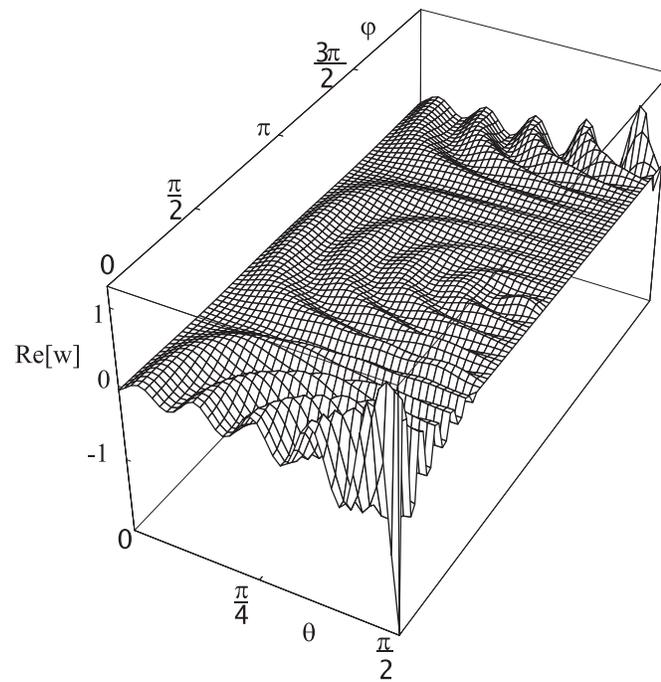


Рис. 27.4: Трехмерная визуализация  $\text{Re}[w^1]$  для  $\nu = 20 + i$

## §28. Основные результаты главы 5

1. Для задачи о дифракции на четвертьплоскости выведены формулы (24.28), (24.29), (24.30). Эти формулы представляют собой замену известной формуле (24.1). В новых формулах в подынтегральное выражение входят краевые функции Грина сферической задачи (вместо обыкновенной функции Грина). Использование модифицированных формул расширяет область быстрой сходимости интеграла.
2. Для краевых функций Грина на сфере выведены координатные уравнения (25.1) с коэффициентами (25.18).
3. Рассмотрена задача о дифракции на плоском конусе с произвольным углом раскрыва. Показано, что для неизвестных параметров выполняются эволюционные уравнения (26.19), (26.20), описывающие зависимость неизвестных параметров от угла раскрыва плоского конуса.

## Глава 6

# Отражение от торца плоского волновода

### §29. Постановка задачи для параболического уравнения на многолистной поверхности

В данной главе развитые ранее методы (а именно, формула расщепления и координатное уравнение) применяются к задаче о дифракции на односторонней апертурной линии, к которой сводится классическая задача об отражении от открытого конца плоского волновода. С точки зрения развитой теории, данная задача представляет интерес, поскольку зоммерфельдова поверхность содержит бесконечное число точек ветвления и листов. Кроме того, задача формулируется для параболического уравнения, что упрощает граничные и краевые условия. Поскольку известно точное решение данной задачи, цель автора в данном случае — сравнить классический результат с тем, что дают развитые в работе методы.

Задача о падении волноводной моды на открытый конец плоского волновода была решена Л.А.Вайнштейном [7, 122] с помощью метода Винера-Хопфа. Исследовались амплитуды волноводных мод, отраженных от открытого конца, а также диаграмма направленности поля, излучаемого во внешнее пространство.

Самым неожиданным результатом для данной задачи является значение коэффициента отражения волноводной моды в коротковолновом случае при частоте, близкой к точке отсечки. Такая волна может быть представлена как суперпозиция двух плоских волн, распространяющихся почти перпендикулярно к оси волновода. Вычисленное значение коэффициента отражения оказывается близко к  $-1$ . Поправка к этому значению позволяет оценить энергию, отражаемую в другие моды и излучаемую в открытое пространство. Данный результат особенно важен для расчета плоскопараллельных оптических, акустических и микроволновых резонаторов. В двумерном случае такой резонатор рассматривается как отрезок волновода, и значения коэффициентов отражения позволяют вычислить добротность соответствующей моды [161, 162].

Применение метода отражений позволяет переформулировать задачу о рассеянии моды на открытом конце волновода как задачу дифракции на односторонней апертурной линии, т.е. на периодической системе поглощающих экранов.

Представляют интерес обобщения задачи Вайнштейна на случай дифракции на более сложных периодических структурах. Некоторые из таких структур рассмотрены в работах [127, 128, 129, 130].

### Исходная постановка задачи. Формулировка задачи на многолистной поверхности

Рассмотрим задачу о волноводе, геометрия которого показана на Рис. 29.1. Стенки волновода представляют собой полупрямые  $x = 0, y > 0$  и  $x = a, y > 0$  в плоскости  $(x, y)$ . На полупрямых заданы граничные условия Неймана.

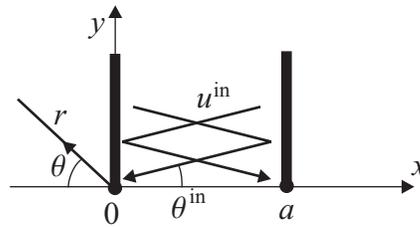


Рис. 29.1: Геометрия задачи об отражении моды от открытого конца плоского волновода

На плоскости выполняется уравнение Гельмгольца (1.1). Падающая волна бежит по волноводу в сторону отрицательных  $y$  и имеет вид

$$u^{\text{in}} = 2 \cos(k_0 x \cos \theta^{\text{in}}) \exp\{-ik_0 y \sin \theta^{\text{in}}\}, \quad 0 < x < a, \quad (29.1)$$

где  $\theta^{\text{in}}$  — параметр, имеющий смысл угла падения парциальной волны. Очевидно, данный параметр должен удовлетворять соотношению

$$\exp\{2iak_0 \cos \theta^{\text{in}}\} = 1. \quad (29.2)$$

Полное поле в волноводе представляется в виде

$$u = u^{\text{in}} + 2 \sum_n R_n \cos(k_0 x \cos \theta_n) \exp\{ik_0 y \sin \theta_n\}, \quad (29.3)$$

т.е. в виде суммы падающей и отраженных волноводных мод. Здесь  $\theta_n$  — параметр, нумерующий моды и удовлетворяющий соотношению

$$\exp\{2iak_0 \cos \theta_n\} = 1. \quad (29.4)$$

Отметим, что в сумму (29.3) входят не только распространяющиеся, но и затухающие моды. Нашей целью является отыскание коэффициентов отражения  $R_n$ .

Применим к поставленной задаче метод отражений. Физический лист представляет собой плоскость, разрезанную вдоль стенок волновода. По обычным правилам построим отраженные экземпляры плоскости. Отметим, что отраженных экземпляров плоскости будет бесконечное число, поскольку в постановке задачи присутствуют два параллельных зеркала. Структура поверхности показана на Рис. 29.2.

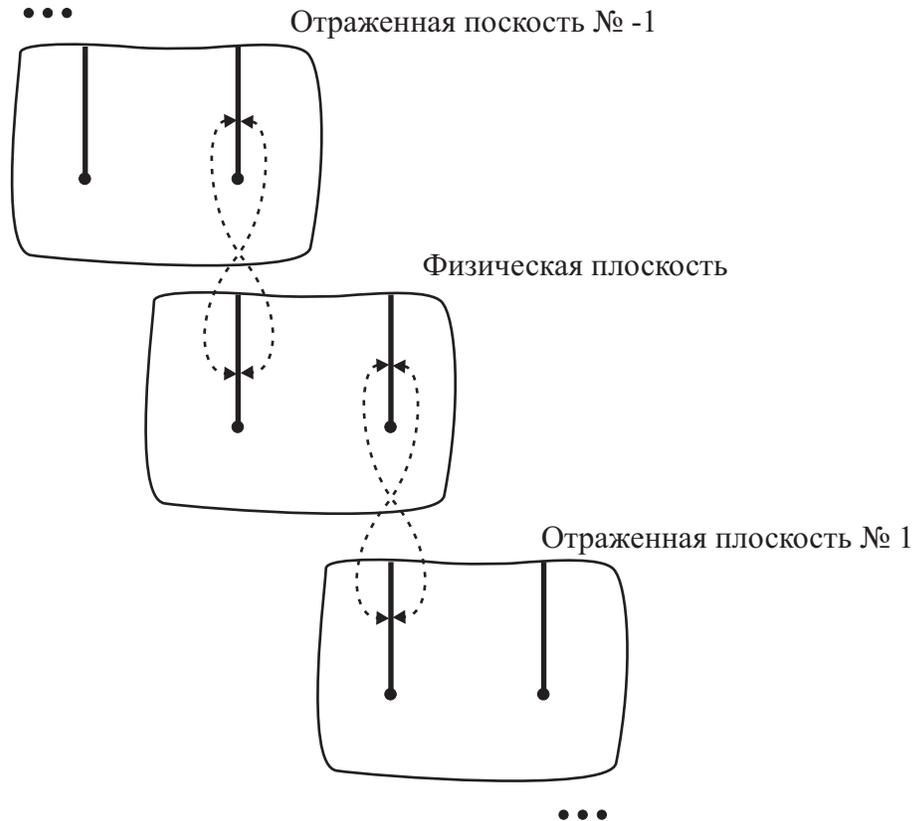


Рис. 29.2: Структура зоммерфельдовой поверхности

Та же самая поверхность может быть представлена по-другому. Проведем разрезы из точек ветвления вдоль полупрямых  $x = an, y < 0$ . В результате поверхность распадется на лист, имеющий бесконечное число точек ветвления (этот лист назовем “верхним”) и бесконечное число листов, каждый из которых имеет только одну точку ветвления (будем называть их “нижними” листами). Схема поверхности показана на Рис. 29.3.

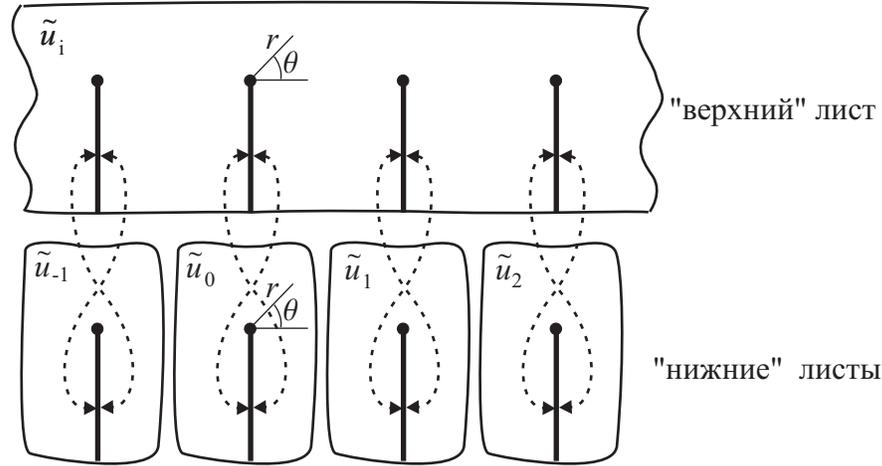


Рис. 29.3: Альтернативное представление зоммерфельдовой поверхности

Верхний лист соответствует многократно отраженной внутренности волновода и его продолжения, а нижние листы соответствуют внешнему пространству, т.е.  $x < 0$  и  $x > a$ . Волновые поля на верхнем листе будем обозначать  $u_i$  (от “inner”), а поля на нижних листах —  $u_n$ , где  $n$  — номер листа. Будем считать, что нижний лист с номером  $n$  соединяется с верхним листом в точке ветвления  $y = 0, x = an, n$  — целый индекс.

Падающая волна на зоммерфельдовой поверхности представляет собой сумму двух плоских волн, бегущих в положительном и отрицательном направлении оси  $x$ . Воспользуемся симметрией геометрии задачи и оставим только волну, бегущую в положительном направлении. Таким образом, падающая волна на верхнем листе имеет вид

$$u_i^{\text{in}} = \exp\{ik_0(x \cos \theta^{\text{in}} - y \sin \theta^{\text{in}})\}. \quad (29.5)$$

Рассеянная волна на верхнем листе имеет вид

$$u^{\text{sc}} = \sum_n R'_n \exp\{ik_0(x \cos \theta_n + y \sin \theta_n)\} + \sum_n R''_n \exp\{ik_0(-x \cos \theta_n + y \sin \theta_n)\} \quad (29.6)$$

где  $R'$  — коэффициенты отражения, соответствующие рассеянию вперед, а  $R''$  — коэффициенты отражения, соответствующие рассеянию назад. Далее мы пренебрегаем рассеянием назад и считаем, что коэффициенты из (29.3) есть коэффициенты рассеяния вперед:

$$R_n \approx R'_n. \quad (29.7)$$

При соблюдении условия (29.2) поле на зоммерфельдовой поверхности будет обладать периодичностью с периодом  $2a$ . Условие периодичности можно

ослабить, потребовав выполнения условия

$$\exp\{iak_0(\cos \theta^{\text{in}} - \cos \theta_n)\} = 1, \quad (29.8)$$

следующего из теории Флоке, и сняв условия (29.2) и (29.4).

### Переход к параболическому уравнению

Будем рассматривать коротковолновый случай, т.е.

$$k_0 a \gg 1.$$

Кроме того, будем интересоваться модами вблизи частоты отсечки. Такие моды распространяются почти перпендикулярно стенкам волновода, что соответствует

$$\theta^{\text{in}} \ll 1.$$

Рассматривается скользящее по отношению к оси  $x$  падение. Очевидно, что основная часть энергии рассеивается также под скользящими углами, т.е.

$$\theta_n \ll 1$$

Наиболее интересный случай — дифракция волны, падающей под очень малым углом, т.е. таким, что

$$\theta^{\text{in}} \sqrt{k_0 a} \ll 1. \quad (29.9)$$

Таким образом, рассмотрение сводится к “приосевому” процессу, т.е. к волновому процессу с узким угловым спектром. Центром углового спектра является положительное направление оси  $x$ . Описание таких волн естественно производить с помощью параболического уравнения [163]

$$(\partial_y^2 + 2k_0 i \partial_x) \tilde{u} = 0. \quad (29.10)$$

Новая неизвестная величина  $\tilde{u}$  связана со старой величиной  $u$  с помощью соотношения

$$u(x, y) = \tilde{u}(x, y) \exp\{ik_0 x\}. \quad (29.11)$$

Главным преимуществом параболического уравнения (29.10) перед уравнением Гельмгольца (1.1) является более простая структура граничных условий. Параболическое уравнение имеет первый порядок по переменной  $x$ , поэтому на участках границ, параллельных оси  $y$ , возможна постановка лишь одного граничного условия (вместо двух для уравнения Дирихле).

Сформулируем граничные условия, описывающие сращивание полей при переходе с листа на лист зоммерфельдовой поверхности. Очевидно, достаточно потребовать лишь непрерывности поля на прямых  $x = an$ :

$$\tilde{u}_i(an + 0, y) = \tilde{u}_n(an - 0, y) \Xi(-y) + \tilde{u}_i(an - 0, y) \Xi(y), \quad (29.12)$$

$$\tilde{u}_n(an + 0, y) = \tilde{u}_i(an - 0, y) \Xi(-y) + \tilde{u}_n(an - 0, y) \Xi(y), \quad (29.13)$$

где  $\Xi(y)$  — функция Хевисайда

$$\Xi(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

В параболическом приближении падающее поле (29.5) на верхнем листе выглядит как

$$\tilde{u}_i^{\text{in}} = \exp\{-ik_0x(\theta^{\text{in}})^2/2 - ik_0y\theta^{\text{in}}\}. \quad (29.14)$$

Разложение (29.6) переходит в

$$\tilde{u}^{\text{sc}} = \sum_n R_n \exp\{-ik_0x\theta_n^2/2 + ik_0y\theta_n\}, \quad (29.15)$$

а условие (29.8) в

$$(\theta_n)^2 - (\theta^{\text{in}})^2 = \frac{4\pi n}{k_0 a} \quad (29.16)$$

Волны, описываемые параболическим уравнением, распространяются только вперед. Поэтому, с точки зрения верхнего листа, разрезы  $x = an$ ,  $y < 0$  представляют собой идеально поглощающие экраны. Поскольку падающая волна приходит только по верхнему листу, на нижних листах

$$\tilde{u}_n(an - 0, y) \equiv 0. \quad (29.17)$$

Следовательно,

$$\tilde{u}_i(an + 0, y) \equiv 0 \quad \text{при } y < 0. \quad (29.18)$$

Таким образом, задача об отражении от открытого конца волновода сводится к задаче об отражении от периодической последовательности бесконечно тонких идеально поглощающих экранов (полупрямых). Геометрия данной задачи показана на Рис. 29.4. Будем называть последнюю задачу задачей о дифракции на односторонней апертурной линии.

Параболическая постановка задачи является приближенной. Наиболее существенно внесенные изменения сказываются на структуре поля вблизи точек ветвления и, как следствие, на рассеяние под большими углами. То есть построенная модель неадекватно описывает “дифракцию Келлера”, но вполне адекватно описывает “дифракцию Френеля”.

Отметим, что подход, основанный на параболическом уравнении, является стандартными для коротковолновых задач, связанных с резонаторами (см. например [122]). На этом подходе основаны, в частности, широко применяемые интегральные уравнения Фокса-Ли.

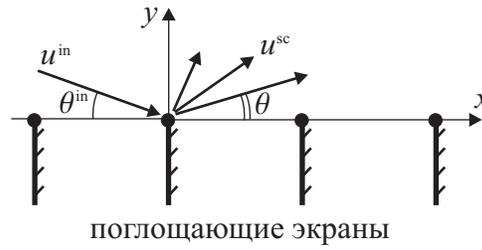


Рис. 29.4: Задача о дифракции на односторонней апертурной линии

## §30. Формула расщепления для апертурной линии

В настоящем разделе исследуется параболическое уравнение (29.10) на построенной в предыдущем разделе зоммерфельдовой поверхности. Мы будем опускать тильду в обозначении полей, т.е. здесь  $u(x, y)$  обозначает  $\tilde{u}(x, y)$ .

### Функция Грина параболического уравнения

Обычная функция Грина плоскости без рассеивателей и точек ветвления имеет вид

$$g(x, y) = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi x}} \exp \left\{ \frac{ik_0 y^2}{2x} - \frac{i\pi}{4} \right\}. \quad (30.1)$$

Эта функция Грина соответствует неоднородному параболическому уравнению

$$\left( \frac{1}{2ik_0} \partial_y^2 + \partial_x \right) g = \delta(x) \delta(y) \quad (30.2)$$

или однородному параболическому уравнению в области  $x > 0$  с граничным условием

$$g(x + 0, y) = \delta(y). \quad (30.3)$$

Важным свойством параболического уравнения является следующая формула. Пусть в области  $x_1 < x < x_2$  нет точек ветвления и рассеивателей. Тогда

$$u(x_2, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, y') g(x_2 - x_1, y - y') dy'. \quad (30.4)$$

Эта формула используется ниже для построения явных формул для краевой функции Грина.

### Краевая функция Грина параболического уравнения

Построим краевую функцию Грина для зоммерфельдовой поверхности. Будем обозначать эту функцию символом  $v(x, y)$  с индексами, а именно пусть  $v_i(x, y)$  обозначает поле на верхнем листе, а  $v_n(x, y)$  — поле на нижних листах. Рассмотрим параболическое уравнение (29.10) на зоммерфельдовой поверхности. Будем считать, что поля на всех листах, т.е.  $u_i$  и  $u_n$ , тождественно равны нулю при  $x < 0$ . На линии  $x = 0$  выполняются граничные условия

$$v_i(x + 0, y) = \delta(y), \quad (30.5)$$

$$v_0(x+0, y) = -\delta(y), \quad (30.6)$$

$$v_n(x+0, y) = 0, \quad n \neq 0 \quad (30.7)$$

Таким образом, источники присутствуют только вблизи точки ветвления  $(0, 0)$ , при этом источники имеют характерную дипольную структуру. На верхнем листе имеется источник положительной амплитуды, а на нижнем листе с  $n = 0$  — источник отрицательной амплитуды.

В случае параболического уравнения краевую функцию Грина можно выписать в явном виде. А именно, при  $0 < x < a$  поле не равно нулю только на листах  $v_i$  и  $v_0$ , и

$$v_i = g(x, y), \quad (30.8)$$

$$v_0 = -g(x, y). \quad (30.9)$$

Рассмотрим поле на верхнем листе, т.е.  $v_i$ . Пусть

$$x = an + \Delta x, \quad n > 0, \quad 0 < \Delta x \leq a.$$

Тогда явная формула для  $v_i$  есть

$$v_i(x, y) = \quad (30.10)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(a, y_1) g(a, y_2 - y_1) \dots g(a, y_n - y_{n-1}) g(\Delta x, y - y_n) dy_1 \dots dy_n$$

Построим также явные формулы для компонент  $v_n$ . Отметим, что  $v_n(x, y) \equiv 0$  при  $n < 0$  или  $x < an$ , так что будем рассматривать только случай  $n > 0$  и  $x > an$ .

Пусть

$$x = an + \Delta x, \quad n > 0, \quad \Delta x > 0.$$

Тогда

$$v_n(x, y) = \quad (30.11)$$

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g(a, y_1) g(a, y_2 - y_1) \dots g(a, y_n - y_{n-1}) g(\Delta x, y - y_n) dy_1 \dots dy_n$$

Введем диаграммы направленности краевых функций Грина, обозначаемые как  $S_i(\theta)$  и  $S_n(\theta)$ . Функция  $S_i$  относится к верхнему листу, функции  $S_n$  — к нижним листам. Краевая функция Грина имеет вид цилиндрической волны,

модулированной по углу. Диаграмму направленности определим как модулирующий коэффициент. Представление на верхнем листе имеет вид

$$v_i(x, \theta x) = g(x, \theta x)S_i(\theta) + o(x^{-1/2}), \quad (30.12)$$

где  $x$  и  $\theta$  предполагаются положительными. “Угол”  $\theta$  определяется как  $\theta = y/x$ . Мы пользуемся тем, что тангенс малого угла в первом приближении равен самому углу.

Диаграммы направленности на нижних листах введем с помощью соотношений

$$v_n(x, \theta(x - an)) = g(x - an, \theta(x - an))S_n(\theta) + O((x - an)^{-3/2}), \quad (30.13)$$

где “угол”  $\theta$  определяется как  $\theta = y/(x - an)$ , т.е. диаграмма центрирована по точке  $(an, 0)$ .

Отметим, что из-за наличия бесконечного числа рассеивателей представление (30.12) может быть равномерным только при  $\theta > \epsilon$  для произвольно малого положительного  $\epsilon$ . Это нас вполне устраивает. Необходимо только выбрать  $\epsilon \ll \theta^{\text{in}}$ . Кроме того, диаграммы  $S_i$  и  $S_n$  могут быть определены с помощью Фурье-преобразований поля. Такой подход позволяет не использовать представления (30.12) и (30.13), однако лишает изложение наглядности.

## Формула расщепления

**ТЕОРЕМА 30.1** *Коэффициенты отражения  $R_n$ , определенные в (29.15) для падающей плоской волны, связаны с диаграммой направленности краевой функции Грина  $S_i$  соотношением*

$$R_n = \frac{S_i(\theta_n)S_i(\theta^{\text{in}})}{ik_0a(\theta_n + \theta^{\text{in}})\theta_n}. \quad (30.14)$$

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Вернемся к задаче с падающей плоской волной. Применим к полному полю  $u$  оператор  $H$ :

$$H[u] = (\partial_y + ik_0\theta^{\text{in}})u. \quad (30.15)$$

Этот оператор обладает свойствами, которыми обладали введенные ранее операторы для вывода формул расщепления. А именно, он переводит решения уравнения (29.10) в решения и обращает в нуль падающую волну. При этом из-за дифференцирования изменяется характер особенностей поля вблизи точек ветвления, что эквивалентно появлению источников поля вблизи этих точек.

Проанализировать особенность поля вблизи точек ветвления сложнее, чем в случае уравнения Гельмгольца. Поэтому здесь используется другой метод. Рассмотрим поле в точке  $(x, y)$ ,  $0 < x < a$  на верхнем листе. Используем формулу (30.4) и применим интегрирование по частям. В результате получим

$$H[u_i](x, y) = u_i(0, +0)g(x, y) + \int_0^\infty H[u_i](0, y')g(x, y - y')dy'. \quad (30.16)$$

Последнее равенство означает, что в точке  $(0, 0)$  имеется источник амплитуды  $u(0, +0)$ . Аналогично, поле  $H[u_i]$  имеет источники во всех точках ветвления  $(an, 0)$ . Амплитуды источников есть  $u_i(an, +0)$ .

Источники полей  $H[u_n]$  на нижних листах также находятся в точках ветвления  $(an, 0)$ , но их амплитуды есть  $-u_i(an, 0)$ , то есть амплитуда источника на нижнем листе противоположна амплитуде соответствующего источника на верхнем листе. Заметим, что источники поля  $H[u]$  повторяют дипольную структуру, выбранную для построения краевой функции Грина.

Пусть

$$u_i(0, +0) = C. \quad (30.17)$$

В силу теории Флоке,

$$u_i(an, +0) = C \exp\{-ik_0 an(\theta^{\text{in}})^2/2\} \quad (30.18)$$

Поскольку падающая волна обращается в нуль, поле  $H[u]$  порождается *только* источниками в точках ветвления. Следовательно, поле является линейной комбинацией краевых функций Грина, взятых с соответствующими амплитудами:

$$H[u_i](x, y) = C \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-ik_0 am(\theta^{\text{in}})^2/2\} v_i(x - am, y), \quad (30.19)$$

$$H[u_n](x, y) = C \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-ik_0 am(\theta^{\text{in}})^2/2\} v_{n-m}(x - am, y). \quad (30.20)$$

Формулы (30.19) и (30.20) представляют собой слабую формулу расщепления для рассматриваемой задачи.

Выразим константу  $C$  в терминах краевой функции Грина. Как и ранее, для этого необходимо использовать теорему взаимности. Введем функцию Грина зоммерфельдовой поверхности  $G(x, y; x', y')$ , где  $(x', y')$  — координаты источника, а  $(x, y)$  — координаты точки наблюдения. Для определенности полагаем, что точка наблюдения и источник располагаются на верхнем листе. Непосредственной проверкой (с применением формулы (30.4)) получаем, что

$$G(x, y; x', y') = G(-x', y'; -x, y). \quad (30.21)$$

Пусть точечный источник расположен в точке  $(-x', \theta^{\text{in}}x')$  при достаточно большом  $x'$ . В области небольших  $x, y$  такой источник создает падающее поле, близкое к плоской волне, приходящей под углом  $\theta^{\text{in}}$  и имеющей амплитуду  $g(x', -\theta^{\text{in}}x')$ . Таким образом,

$$G(x, y; -x', \theta^{\text{in}}x') = g(x', -\theta^{\text{in}}x')[u_i(x, y) + o(1)], \quad (30.22)$$

где асимптотика берется при  $x' \rightarrow \infty$ . Заметим, что  $g(x', y') = g(x', -y')$ .

Коэффициент  $C$  находится как

$$C = \lim_{x' \rightarrow \infty} G(0, 0; -x', \theta^{\text{in}}x')(g(x', \theta^{\text{in}}x'))^{-1}. \quad (30.23)$$

Применим теорему взаимности, и заметим, что по определению краевой функции Грина  $v_i(x, y) = G(x, y; 0, 0)$ :

$$C = \lim_{x' \rightarrow \infty} v_i(x', \theta^{\text{in}}x')(g(X, \theta^{\text{in}}X))^{-1}. \quad (30.24)$$

Наконец, используя (30.12), получаем

$$C = S_i(\theta^{\text{in}}). \quad (30.25)$$

Таким образом, сильная формула расщепления имеет вид

$$H[u_i](x, y) = S_i(\theta^{\text{in}}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-ik_0 am(\theta^{\text{in}})^2/2\} v_i(x - am, y), \quad (30.26)$$

$$H[u_n](x, y) = S_i(\theta^{\text{in}}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{-ik_0 am(\theta^{\text{in}})^2/2\} v_{n-m}(x - am, y). \quad (30.27)$$

Выразим коэффициенты отражения  $R_n$  через  $S_i$  с помощью формулы (30.26). В соответствии с теорией Флоке, поле  $H[u_i](x, y)$  при  $y > 0$  можно записать как ряд

$$H[u_i](x, y) = \sum_n W_n \exp\{-ik_0 x \theta_n^2/2 + ik_0 y \theta_n\}. \quad (30.28)$$

Выполняя Фурье-преобразование, получим выражения для коэффициентов

$$W_n = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x_0+a} H[u_i](x, y) \exp\{ik_0 x \theta_n^2/2 - ik_0 y \theta_n\} dx. \quad (30.29)$$

для любого  $x_0$  и  $y > 0$ . Используя (30.26) и (30.29), получаем

$$W_n = \frac{S_i(\theta^{\text{in}})}{a} \int_{-\infty}^{\infty} v_i(x, y) \exp\{ik_0 x \theta_n^2/2 - ik_0 y \theta_n\} dx. \quad (30.30)$$

Стандартными методами можно связать диаграмму направленности поля  $v_i$  с Фурье-преобразованием этого поля:

$$S_i(\theta) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} v_i(x, y) \exp\{ik_0 x \theta_n^2/2 - ik_0 y \theta_n\} dx. \quad (30.31)$$

Сравнивая ряды (30.28) и (29.15), и принимая во внимание действие оператора  $H$  на плоские волны, получаем

$$W_n = ik_0(\theta_n + \theta^{\text{in}})R_n. \quad (30.32)$$

Выражая  $R_n$  из (30.32) и используя (30.30) и (30.31), получаем (30.14).  $\square$

Формула (30.14) кажется несимметричной по углам падения и рассеяния, однако детальное рассмотрение показывает, что эта формула удовлетворяет теореме взаимности. Определим  $R(\theta_n; \theta^{\text{in}})$  как  $R_n$ , явно указывая угол падения. Теорема взаимности для волновода имеет вид

$$\theta_n R(\theta_n; \theta^{\text{in}}) = \theta^{\text{in}} R(\theta^{\text{in}}; \theta_n). \quad (30.33)$$

Формально говоря, в выражение (30.14) входит диаграмма направленности краевой функции Грина, известной явно. Однако применить явное представление к вычислению  $R_n$  затруднительно. Причина состоит в том, что в выражение для  $v_i$  входят вложенные интегралы, причем количество интегралов зависит от целой части  $x/(an)$ . В следующем разделе предложен метод вычисления  $S_i(\theta)$ , не использующий явное представления для  $v_i$ .

## §31. Спектральные уравнения для апертурной линии

### Вывод спектральных уравнений

Введем значения краевой функции Грина в точках ветвления:

$$C_m = v_i(am, +0). \quad (31.1)$$

Определим величины  $\bar{C}(p; \theta)$  и  $\bar{S}(p; \theta)$  как

$$\bar{C}(p; \theta) = a \sum_{m=1}^{\infty} m C_m \exp\{ik_0 am\theta^2/2 + ipm\}, \quad (31.2)$$

$$\bar{S}(p; \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(\theta) \exp\{ik_0 am\theta^2/2 + ipm\}. \quad (31.3)$$

Предполагается, что  $p$  — произвольное комплексное число, принадлежащее области  $0 \leq \operatorname{Re}[p] < 2\pi$ ,  $\operatorname{Im}[p] \geq 0$ .

ТЕОРЕМА 31.1 *Выполняются следующие соотношения:*

$$\frac{dS_i(\theta)}{d\theta} = \bar{C}(0; \theta)S_i(\theta), \quad (31.4)$$

$$\frac{d\bar{S}(p; \theta)}{d\theta} = \bar{C}(p; \theta)\bar{S}(p; \theta), \quad (31.5)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (31.4) и (31.5) (по переменной  $\theta$ ) будем называть *спектральными уравнениями* для данной задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Применим к краевой функции Грина  $v$  дифференциальный оператор

$$K = x \frac{\partial}{\partial y} - ik_0 y. \quad (31.6)$$

Перечислим свойства функции  $K[v](x, y)$ .

Функция  $K[v](x, y)$  удовлетворяет параболическому уравнению (29.10). Это следует из того, что оператор  $K$  коммутирует с оператором  $L = \partial_y^2 + 2ik_0 \partial_x$ . Заметим, что оператор  $K$  аналогичен дифференцированию по углу в цилиндрической системе координат для уравнения Гельмгольца.

Функция  $K[v](x, y)$  не содержит компонент поля, приходящих из бесконечности.

Функция  $K[v](x, y)$  тождественно равна нулю при  $x < a$ . Это можно проверить непосредственно с помощью формул (30.8) и (30.9). Данное утверждение весьма важно, так как оно означает, что оператор  $K$  аннулирует источник для поля  $v$ .

Поскольку оператор  $K$  содержит дифференцирование по  $y$ , его применение приведет к появлению источников вблизи точек ветвления  $(an, 0)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Сила источников вычисляется с помощью способа, описанного в предыдущем разделе. В результате получается, что сила источника вблизи точки  $(an, 0)$  на верхнем листе равна  $anC_n$ , а сила источника на соответствующем (имеющем номер  $n$ ) нижнем листе равна  $-anC_n$ . В силу отсутствия волн, приходящих из бесконечности, поле  $K[u]$  может быть записано как линейная комбинация краевых функций Грина:

$$K[v_i](x, y) = a \sum_{m=1}^{\infty} mC_m v_i(x - am, y), \quad (31.7)$$

$$K[v_n](x, y) = a \sum_{m=1}^{\infty} mC_m v_{n-m}(x - am, y). \quad (31.8)$$

Исследуем асимптотику соотношений (31.7) и (31.8) в дальнем поле. Для анализа левой части заметим, что оператор  $K$  действует на диаграмму направленности  $S_i$  как оператор дифференцирования:

$$S_i \xrightarrow{K} \frac{dS_i}{d\theta}. \quad (31.9)$$

Для анализа правой части исследуем поведение диаграммы направленности при сдвиге поля вдоль оси  $x$ :

$$v_i(x - am, y) = g(x, y) \exp\{ik_0 am\theta^2/2\} S_i(\theta) + O(x^{-3/2}), \quad \theta = y/x. \quad (31.10)$$

Подставляя (31.9) и (31.10) в (31.7), получаем

$$\frac{dS_i(\theta)}{d\theta} = a S_i(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \exp\{ik_0 na\theta^2/2\}, \quad (31.11)$$

т.е. (31.4).

Аналогично, исследование дальнего поля (31.8) дает

$$\frac{d}{d\theta} [\exp\{ik_0 an\theta^2/2\} S_n(\theta)] = a \exp\{ik_0 an\theta^2/2\} \sum_{m=1}^{\infty} mC_m S_{n-m}(\theta). \quad (31.12)$$

Последнее выражение представляет собой набор из бесконечного числа дифференциальных уравнения относительно бесконечного числа неизвестных функций. Преобразуем этот набор. Введем величину

$$\hat{S}_n(\theta) = \exp\{ik_0 a n \theta^2 / 2\} S_n(\theta).$$

Для этой величины уравнение (31.12) упрощается:

$$\frac{d\hat{S}_n(\theta)}{d\theta} = a \sum_{m=1}^{\infty} m C_m \exp\{ik_0 a m \theta^2 / 2\} \hat{S}_{n-m}(\theta). \quad (31.13)$$

Заметим, что (31.13) имеет характер свертки по индексу. Для использования этого обстоятельства введем дискретное Фурье-преобразование по индексу, а именно, определим величины  $\bar{C}$  и  $\bar{S}$ , как в (31.2) и (31.3). Переменная  $p$  является спектральной переменной данного преобразования.

Умножая каждое равенство (31.13) на  $\exp\{ipn\}$ , складывая все равенства и перегруппировывая слагаемые в правой части, получаем (31.5).  $\square$

Отметим, что уравнения (31.4) и (31.5) содержат коэффициент  $\bar{C}$ , который пока не определен. Для его вычисления можно воспользоваться формулой

$$C_m = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k_0}{2\pi a n}} e^{-i\pi/4}, \quad (31.14)$$

полученной в [164, 165] из явного представления

$$C_m = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g(a, y_1) g(a, y_2 - y_1) \dots g(a, y_{m-2} - y_{m-1}) g(a, -y_{m-1}) dy_1 dy_2 \dots dy_{m-1}. \quad (31.15)$$

Вычисления достаточно сложны, к тому же нам хотелось бы оставаться в рамках развиваемых в настоящей работе методов. Поэтому коэффициент  $\bar{C}$  будет найден ниже из граничных условий, накладываемых на уравнение (31.5).

Отметим пока элементарное свойство коэффициента  $\bar{C}(p; \theta)$ , не зависящее от конкретных значений  $C_m$ :

$$\bar{C}(p; \theta) = \bar{C}(p + k_0 a \theta^2 / 2). \quad (31.16)$$

## Граничные условия для спектральных уравнений

Построим “граничные условия” для функций  $\bar{S}$  и  $S_i$ . Под граничными условиями будем здесь понимать асимптотики неизвестных функций при  $\theta \rightarrow \pm\infty$  (при фиксированном  $p$ ). Будем исследовать члены, имеющие величину  $O(1)$

в этих асимптотиках. С физической точки зрения, такие члены порождаются прямыми (т.е. недифрагированными) лучами, идущими от источника под большими углами. Любой дифрагированный луч дает вклад не выше  $1/|\theta|$ . Это рассуждение позволяет построить искомую асимптотику при  $\theta \rightarrow \infty$ :

$$S_i(+\infty) = 1, \quad (31.17)$$

$$\bar{S}(p; +\infty) = -1, \quad (31.18)$$

Асимптотика диаграммы направленности на верхнем листе не имеет физического смысла при  $\theta \rightarrow -\infty$ , поскольку лист имеет разрезы в нижней полуплоскости. В то же время, асимптотики при  $\theta \rightarrow -\infty$  могут быть построены для диаграмм на нижних листах  $S_m$ , а значит и для  $\bar{S}$ .

Выясним, какие прямые (т.е. идущие непосредственно от источника) лучи присутствуют в поле краевой функции Грина на нижних листах при  $\theta < 0$ . Такой луч имеется на листе с нулевым индексом (луч 1 на Рис. 31.1), т.е.

$$S_0(\theta) = -1 + O(1/|\theta|) \quad \text{при } \theta \rightarrow -\infty. \quad (31.19)$$

Имеется еще один прямой луч, идущий от источника по верхнему листу и попадающий на нижний лист с индексом 1. Это луч 2 на Рис. 31.1. Этот луч дает асимптотику

$$S_1(-\infty) = \exp\{-ik_0a\theta^2/2\} + O(1/|\theta|) \quad \text{при } \theta \rightarrow -\infty. \quad (31.20)$$

Остальные нижние листы не содержат прямых лучей, поэтому соответствующие диаграммы направленности не содержат членов  $O(1)$ .

Итоговая асимптотика есть

$$\bar{S}(p; -\infty) = -1 + e^{ip}. \quad (31.21)$$

Таким образом, задача сводится к следующей. Необходимо подобрать коэффициенты  $C_m$  таким образом, чтобы спектральное уравнение (31.5) при любом допустимом  $p$  обладало решением, удовлетворяющим граничным условиям (31.18) и (31.21).

### Вычисление $C_m$ и решение спектрального уравнения

Подставим (31.2) с произвольным набором коэффициентов  $C_m$  в уравнения (31.4) и (31.5). Решим эти уравнения, используя (31.17) и (31.18) как граничные условия. В результате получим

$$S_i(\theta) = \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\pi ia}{2k_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m} C_m \operatorname{erfc} \left( \sqrt{-ik_0 m a / 2} \theta \right) \right\}, \quad (31.22)$$

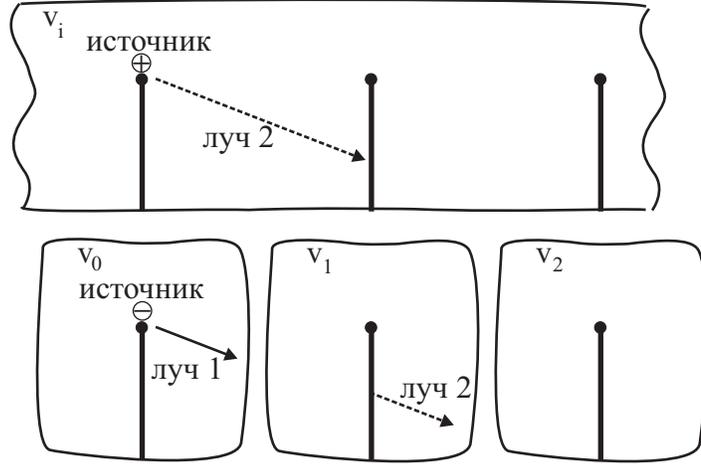


Рис. 31.1: К вычислению граничных условий для спектрального уравнения

$$\bar{S}(p; \theta) = -\exp \left\{ -\sqrt{\frac{\pi i a}{2k_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m} C_m e^{ipm} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{-ik_0 m a / 2\theta} \right) \right\}, \quad (31.23)$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (31.24)$$

Используя (31.23), вычислим  $\bar{S}(p; \theta)$ . При этом используем тот факт, что  $\operatorname{erfc}(-\infty) = 2$ . Сравнивая результат с (31.21), получим уравнение

$$-\exp \left\{ -\sqrt{\frac{2\pi i a}{k_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m} C_m e^{ipm} \right\} = -(1 - e^{ip}). \quad (31.25)$$

Возьмем логарифм от правой и левой части (31.25). Используем разложение в ряд

$$\log(1 - e^{ip}) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{ipm}}{m}.$$

Приравнивая почленно коэффициенты при  $e^{ipm}$  в правой и левой части, получим

$$C_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{k_0}{2\pi i a n}} = \frac{g(an, 0)}{n}, \quad (31.26)$$

что совпадает с (31.14). Данное выражение можно подставить в (31.22) и получить  $S_i(\theta)$  в явном виде.

### Анализ решения

Подставим (31.22) в формулу расщепления (30.14) и выпишем коэффициенты отражения  $R_n$ . Для удобства введем обозначения

$$\beta = \sqrt{k_0 a} \theta, \quad \beta^{\text{in}} = \sqrt{k_0 a} \theta^{\text{in}}. \quad (31.27)$$

В этих обозначениях

$$R_n = \frac{\exp\{s(\beta) + s(\beta^{\text{in}})\}}{i\beta(\beta + \beta^{\text{in}})}, \quad (31.28)$$

$$s(\beta) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{-in/2} \beta)}{n}, \quad (31.29)$$

Функцию  $s(\beta)$  можно непосредственно вычислить, суммируя ряд (31.29). Результат представлен на Рис. 31.2.

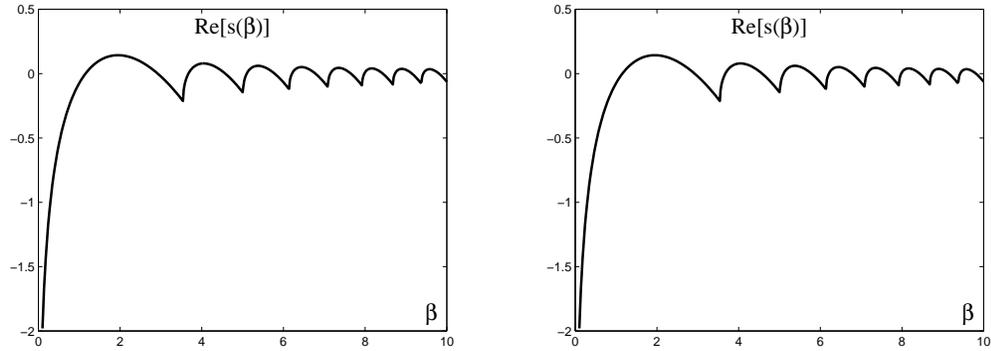


Рис. 31.2: Действительная и мнимая части  $s(\beta)$

На графике имеются особенности при

$$\beta_m = \sqrt{4\pi m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (31.30)$$

В этих точках ряд (31.29) сходится, а его производная расходится. Такая диаграмма направленности характерна для дифракции на периодической структуре.

В наиболее важном случае  $\beta \ll 1$  нетрудно получить асимптотику

$$s(\beta) = \log(\sqrt{-2i}\beta) + \zeta(1/2)\sqrt{-i/(2\pi)}\beta + O(\beta^3), \quad (31.31)$$

где  $\zeta$  — дзета-функция Римана. С учетом этой асимптотики, коэффициент отражения в моду с  $\theta = \theta^{\text{in}}$  есть

$$R \approx -\exp\left\{-0.824(1-i)\sqrt{k_0 a} \theta^{\text{in}}\right\}, \quad (31.32)$$

где принято во внимание, что

$$\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{\pi}} \approx -0.824.$$

Выражение (31.31) представляет собой классический результат для коэффициента отражения от открытого конца волновода.

Сравним полученное решение с решением Вайнштейна. Введем вспомогательную функцию

$$s(\alpha; \beta) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{in(\beta^2 - \alpha^2)/2\} \frac{\operatorname{erfc}(\sqrt{-in/2} \alpha)}{n}, \quad (31.33)$$

Эта функция непосредственно связана с решением уравнения (31.5). Заметим, что при выполнении условия

$$\exp\{in(\beta^2 - \alpha^2)/2\} = 1$$

выполняется

$$s(\alpha; \beta) = s(\beta).$$

Функция  $s(\alpha, \beta)$  выражается через функцию Л.А. Вайнштейна  $U$ :

$$s(\alpha, \beta) = U(\alpha, \beta^2/(4\pi)) \quad (31.34)$$

(см. форм. (В.22) в [7]). Формула для  $R_n$  также совпадает с полученной Л.А. Вайнштейном.

## §32. Основные результаты главы 6

Глава 6 представляет собой пример применения построенных в работе методов (формулы расщепления и спектрального уравнения) к задаче дифракции на периодической структуре, состоящей из идеально поглощающих полупрямых. Предполагается, что волна падает под скользящим углом по отношению к прямой, соединяющей концы экранов. Рассматривается коротковолновое приближение. Случай скользящего падения и коротковолновое приближение позволяют использовать параболическое уравнение теории дифракции.

К данной задаче сводится задача об отражении моды, набегающей на открытый конец плоского волновода. Это классическая задача дифракции, решение которой было получено Л.А.Вайнштейном с помощью метода Винера-Хопфа. Целью написания данной главы являлась проверка предложенных методов. Кроме того, в перспективе возможно применение этих методов к более широкому классу задач, в частности, к задачам, не допускающим применение метода Винера-Хопфа.

Были получены следующие основные результаты.

1. Сформулирована задача для параболического уравнения на многолистной (зоммерфельдовой) поверхности.
2. Введена краевая функции Грина для данной зоммерфельдовой поверхности. Введены также диаграммы направленности, относящиеся к краевой функции Грина. Этих диаграмм бесконечное число, поскольку на каждом листе поверхности имеется своя диаграмма. Особую роль играет так называемый “верхний” лист, соответствующий внутреннему пространству волновода.
3. Выведена формула расщепления (30.14) для коэффициентов отражения мод в волноводе. Данная формула выражает коэффициенты отражения через значения диаграммы направленности краевой функции Грина.
4. Выведены спектральные уравнения (31.4), (31.5) для диаграмм направленности краевой функции Грина. Данные спектральные уравнения содержат неизвестные коэффициенты  $C_n$ , представляющие собой значения краевой функции Грина в точках ветвления.
5. Построены асимптотики (31.17), (31.18), (31.21) диаграмм направленности. С помощью этих асимптотик вычислены значения коэффициентов  $C_n$  (31.26), после чего строятся решения спектральных уравнений.
6. Показано, что построенное решение совпадает с классическим решением, полученным Л.А.Вайнштейном.

# Заключение

В работе выводятся новые точные соотношения для дифракционных задач. Дифракционные задачи понимаются в смысле задач математической физики, т.е. присутствует некоторая идеализация физических задач. Так, в большинстве случаев предполагается, что экраны являются идеально отражающими (типа Дирихле или Неймана) и идеально тонкими. Термин “точные соотношения” означает, что данные соотношения справедливы для произвольного волнового числа, т.е. не имеют асимптотического характера (длинноволнового или коротковолнового). Все задачи предполагаются стационарными и акустическими (одномодовыми).

Соотношения делятся на два типа. К первому типу относятся формулы расщепления, а ко второму — спектральные и координатные уравнения. Формулы расщепления справедливы для весьма широкого класса дифракционных задач, однако они не позволяют проникнуть в структуру решения слишком глубоко. Суть формул расщепления состоит в следующем. Традиционный вопрос, решаемый для каждой дифракционной задачи, состоит в отыскании дифракционного коэффициента. Дифракционный коэффициент есть функция, зависящая от направлений (в двумерном случае — углов) падения и излучения, и показывающая амплитуду рассеяния волны из одного направления в другое. Формула расщепления связывает дифракционный коэффициент с диаграммами направленности краевых функций Грина.

Краевые функции Грина вводятся в работе как поля, создаваемые точечными источниками, расположенными вблизи краев рассеивателя. Непосредственно расположить источник в краевой точке нельзя, поэтому для определения краевой функции Грина используется несложная предельная процедура. Данная процедура во многом сходна с традиционным определением дипольных, квадрупольных и т.п. источников. В двумерном случае имеется дискретное (часто — конечное) множество краевых точек, соответственно набор краевых функций Грина дискретный или даже конечный. В трехмерном случае множество краевых функций Грина индексируется положением источника на ребрах рассеивателя, т.е. в общем случае это одномерное множество. Для каждой из краевых функций Грина вводится ее диаграмма направленности.

Формула расщепления представляет собой представление дифракционного коэффициента исходной задачи в виде простого алгебраического (для двумерных задач) или интегрального (для трехмерных) задач соотношения, включающего диаграммы направленности краевых функций Грина, зависящих от направлений падения и рассеяния, а также элементарные функции углов. Непо-

средственным следствием применение формулы расщепления является то, что неизвестная функция, зависящая от, например, двух переменных оказывается выражена с помощью другой неизвестной функции, зависящей от одной переменной. Очевидно, это дает преимущества при табулировании неизвестных функций.

Другим следствием является то, что часть сингулярностей дифракционного коэффициента выражается как особенности элементарных функций. В первую очередь это относится к двумерным задачам, в которых удается выделить полюс дифракционного коэффициента, соответствующий границе освещенной и теневой области. При переходе от дифракционного коэффициента к координатному представлению поля получаем стандартное (т.е. не зависящее от деталей конкретной задачи) описание полутеневой зоны. В трехмерном случае ситуация усложняется, поскольку особенности дифракционного коэффициента могут иметь различную природу. Однако и в этом случае применение формул расщепления дает заметные преимущества. За счет выноса особенностей за знак интеграла удается улучшить сходимость интегралов, описывающих дифракционный коэффициент.

Таким образом, концепция краевой функции Грина может оказаться весьма полезной в практических задачах. Нетрудно предложить способ экспериментального определения диаграммы направленности краевой функции Грина.

Вторым типом соотношений, предложенных в работе, являются спектральные и координатные уравнения. Их область применимости гораздо уже, чем область применимости формул расщепления. А именно, спектральные и координатные уравнения применимы только к двумерным зоммерфельдовым задачам, т.е. к задачам дифракции, которые можно с помощью метода отражений свести к задачам распространения на многолистных поверхностях. В работе рассматриваются такие поверхности над плоскостью и над сферой.

Спектральные и координатные уравнения являются менее общим, но более сильным результатом по сравнению с формулами расщепления. Формула расщепления приводит лишь к переформулированию дифракционной задачи. Вместо дифракционного коэффициента предлагается искать диаграмму направленности краевой функции Грина, что столь же сложно. Спектральное и координатное уравнения предлагают рецепт для отыскания диаграммы направленности краевой функции Грина.

Обратимся к спектральному уравнению. Необходимо отметить, что это уравнение не выводится из уравнения Гельмгольца непосредственно. Вместо этого доказывается, что вектор, составленный из диаграмм направленности краевых функций Грина, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению достаточно простого вида. В качестве независимой переменной выступает угол рассеяния. Коэффициенты уравнения определены с точностью до несколь-

ких неизвестных констант (зависящих от длины волны и геометрических размеров рассеивателя). Начальные условия для уравнения также неизвестны. Для практического использования спектрального уравнения необходимо уметь вычислять константы, входящие в коэффициенты уравнения, а также начальные условия. В работе показано, что в качестве диаграмм направленности можно взять не любое решение спектрального уравнения, а лишь решение, удовлетворяющее определенным ограничениям. Эти ограничения связывают поведение решений в различных особых точках спектрального уравнения. Важно, что данных ограничений достаточно для того, чтобы определить неизвестные константы и начальные условия. Выяснению структуры накладываемых ограничений посвящена значительная и наиболее сложная часть работы. Каждое из ограничений удастся представить в виде невязки, т.е. значения, которое должно быть нулем для того, чтобы решение спектрального уравнения могло быть интерпретировано как диаграмма направленности соответствующей задачи.

Использование спектрального уравнения для численного отыскания диаграмм направленности предполагает следующую схему. Задаются начальные приближения для неизвестных констант и начальных условий. Эти значения могут, например, быть взяты из коротковолновой асимптотики решения. Решается спектральное уравнение и вычисляются невязки, соответствующие наложенным ограничениям. С помощью градиентной процедуры находят следующие приближения к константам и начальным условиям, и процесс повторяется снова.

Несмотря на определенную сложность предложенной схемы, она представляется привлекательной с точки зрения скорости вычислений. Важным параметром является количество  $N$  значений угла, в которых необходимо вычислить диаграмму направленности. (Во многих случаях  $N$  можно оценить как  $k_0 a$ , т.е. как произведение волнового числа на характерный размер рассеивателя.) Число операций, необходимое для решения спектрального уравнения, пропорционально  $N$ . Это число должно быть умножено на количество итераций, необходимое для достаточно точного определения неизвестных констант. Можно сделать предположение о достаточно быстрой сходимости метода (проведенные численные эксперименты подтверждают это предположение) и оценить число операций как  $\sim \log N$ . Таким образом, итоговая оценка есть  $N \log N$ , что значительно лучше основных конкурирующих методов. Эту оценку можно улучшить, если необходимо табулирование диаграмм направленности для гребенки значений какого-либо из геометрических параметров (или волнового числа). В этом случае итерационная процедура применяется лишь один раз, а затем неизвестные константы находятся путем численного решения эволюционных уравнений.

Обратимся к координатным уравнениям. Координатные уравнения представляют собой “многомерное обыкновенное дифференциальное уравнение”, опи-

сывающее вектор, составленный из краевых функций Грина. Краевые функции Грина в данном случае представляют собой функции координат. Многомерное ОДУ есть система из двух совместных уравнений первого порядка, описывающих изменение вектора неизвестных по первой и второй координате. Важной особенностью многомерного ОДУ по сравнению с уравнением в частных производных является то обстоятельство, что решение полностью определяется значением вектора неизвестных в одной точке.

Координатные уравнения во многом сходны со спектральными. Их коэффициенты содержат неизвестные константы, а начальные условия неизвестны. Можно сформулировать набор ограничений (невязок) и решить координатные уравнения с помощью итерационной процедуры.

Координатные уравнения тесно связаны со спектральным. В работе показано, что координатные уравнения могут быть выведены из спектрального или наоборот. Более того, для задач, содержащих только бесконечно тонкие экраны типа Дирихле или Неймана, выведена универсальная форма координатных и спектральных уравнений. При этом неизвестные параметры выражаются через асимптотики краевых функций Грина в вершинах (концевых точках) рассеивателя.

# Приложение 1

## §34. О математической строгости

Основная часть работы выполнена “на физическом уровне строгости”. При этом подразумевается, что все результаты могут быть получены также и математически строго.

С точки зрения теории уравнений в частных производных, имеются следующие сложности, связанные с материалом работы.

1. Исходные задачи дифракции должны быть корректно поставлены. А именно, должны быть математически правильно сформулированы краевые условия и условия излучения. Кроме того, должен быть определен класс функций, в котором ищется решение. Отметим, что в случае экранов бесконечной длины формулировка условий излучения не является элементарной.
2. Должна быть доказана теорема существования и единственности для исходной дифракционной задачи и для поля на зоммерфельдовой поверхности.
3. Поле на бесконечности может быть представлено в виде асимптотического ряда. Свойства этого ряда должны быть сформулированы, поскольку предполагается дифференцирование полей при выводе формул расщепления и координатных уравнений.
4. Изложение в значительной степени опирается на свойства разложений поля в степенные (мейксеровские) ряды в окрестностях краевых точек. Должны быть сформулированы свойства соответствующих рядов.
5. Необходимо корректно поставить задачу о нахождении краевой функции Грина.

Данный раздел посвящен этим вопросам.

## Дифракция на системе полос. Постановка задачи

Проще всего корректно поставить дифракционную задачу для рассеивателей конечных размеров. Будем искать *рассеянное поле*  $u^{\text{sc}}$  как решение уравнения Гельмгольца (1.1), обладающее всеми производными везде, кроме точек границы  $\Gamma$ , непрерывное на границе, удовлетворяющее на границе условиям

$$u^{\text{sc}}|_{\Gamma} = -u^{\text{in}}|_{\Gamma} \quad \text{или} \quad \partial_n u^{\text{sc}}|_{\Gamma} = -\partial_n u^{\text{in}}|_{\Gamma} \quad (34.1)$$

в точках границы ( $u^{\text{in}}$  — плоская волна).

При этом значение интеграла

$$\int (|u|^2 + |\nabla u|^2) ds$$

по любой компактной области должно быть конечно (краевое условие), а на бесконечности рассеянное поле должно удовлетворять условиям

$$u^{\text{sc}}(r, \theta) = O(r^{-1/2} e^{ik_0 r}), \quad (\partial_r - ik_0)u^{\text{sc}}(r, \theta) = o(r^{-1/2} e^{ik_0 r}). \quad (34.2)$$

Известно (см. [166]), что решение данной задачи существует и единственно (см. также [80, 81]). При этом в окрестности концевых точек экранов справедливы оценки

$$u = O(\rho^{1/2}), \quad |\nabla u| = O(\rho^{-1/2}), \quad (34.3)$$

где  $u$  — полное поле (сумма рассеянного поля и падающей плоской волны).

## Локальные разложения поля

Пользуясь результатом (34.3), можно доказать следующее утверждение:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 34.1** *В окрестности концевых точек экранов полное поле  $u$  имеет асимптотическое разложение*

$$u(\rho, \phi) = \rho^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n f_n(\phi), \quad (34.4)$$

где  $\rho, \phi$  — локальные координаты, а  $f_n$  — некоторые гладкие функции, периодические с периодом  $4\pi$ .

Более того, все частные производные поля могут быть представлены в виде аналогичных асимптотических рядов:

$$\partial_{\alpha} u^{\text{sc}}(\rho, \phi) = \rho^{1/2-n(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m f_{m,\alpha}(\phi), \quad (34.5)$$

где  $\alpha$  — мультииндекс, обозначающий соответствующую производную,  $n(\alpha)$  — порядок этого индекса.

Везде асимптотичность предполагается равномерной по  $\phi$ .

Для доказательства данного утверждения выразим полное поле  $u$  вблизи края рассеивателя с помощью формулы Грина

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} [u(\mathbf{r}') \partial_{n'} w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_{n'} u(\mathbf{r}')] dl', \quad (34.6)$$

где  $w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — функция Грина задачи о дифракции на полуплоскости. Данная функция Грина дается явным выражением, полученным в работе [167] и подробно проанализированным в монографии [168]:

$$w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = I(\rho, \phi; \rho', \phi') \mp I(\rho, \phi; \rho', -\phi'), \quad (34.7)$$

знаки минус и плюс соответствуют граничным условиям Дирихле и Неймана,  $(\rho, \phi)$  и  $(\rho', \phi')$  — полярные координаты векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ ,

$$I(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\xi}^{\infty} \exp\{ik_0 R \operatorname{ch} x\} dx, \quad (34.8)$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}, \quad \xi = \operatorname{Arch} \left( \frac{\rho + \rho'}{R} \right). \quad (34.9)$$

Контур интегрирования  $\Gamma$  выберем, как показано на Рис. 34.1 (нормаль направлена внутрь). В силу граничных условий, интегрирование по прямолинейным участкам контура дает нуль. В силу асимптотики (34.3), интегрирование по малой дуге также дает нуль. Поэтому можно ограничиться интегрированием только по большой дуге.

Разложим функцию  $I$  в степенной ряд по малым  $\rho$ :

$$I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} \cos \left( \frac{\phi - \phi'}{2} \right) + O(\rho). \quad (34.10)$$

При фиксированном радиусе большой дуги  $\rho'$  данная асимптотика равномерна по угловым координатам (нетрудно непосредственно оценить остаточные члены). Аналогичные формулы могут быть получены и для производных от  $I$ . Подставляя полученные выражения в интеграл (34.6), устанавливаем справедливость асимптотического разложения (34.5).

Аналогичное доказательство может быть проведено для всех локальных разложений, встречающихся в работе.

То, что локальные разложения полей и их производных представлены соответствующими асимптотическими рядами, оправдывает выкладки, проделанные при выводе формул расщепления и координатных уравнений. Например,

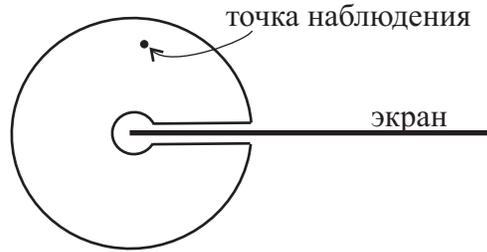


Рис. 34.1: Область для доказательства Утверждения 34.1

при доказательстве Утверждения 14.1 необходимо показать, что сверхсингулярная функция, полученная в результате вычитания краевых функций Грина из производной поля, удовлетворяет краевому условию. Это легко может быть сделано с помощью Утверждения 34.1.

Кроме того, наличие соответствующих асимптотических разложений позволяет применить лемму Ватсона [157] и установить справедливость соответствующих асимптотик Фурье-образов поля и его производной на бесконечности. Данный результат необходим для оценки определителей в главе 2.

### Разложение поля на бесконечности

То, что поле удовлетворяет условию излучения в виде (34.2), позволяет получить более сильное ограничение на поведение поля на бесконечности.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 34.2** *Рассеянное поле  $u^{\text{sc}}$  и любая его частная производная может быть представлена в виде асимптотического ряда*

$$\partial_{\alpha} u^{\text{sc}} = \exp\{ik_0 r\} r^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} r^{-m} f_{m,\alpha}(\theta). \quad (34.11)$$

Здесь  $r, \theta$  — полярные координаты,  $\alpha$  — мультииндекс (возможно, пустой), обозначающий производную,  $f_{m,\alpha}$  — гладкие функции.

Доказательство данного утверждения сходно с доказательством Утверждения 34.1. Применим к области, показанной на Рис. 34.2, вторую формулу Грина. В качестве первого решения возьмем  $u^{\text{sc}}$ , а в качестве второго — функцию Грина безграничной плоскости. В силу условий (34.2), интеграл по большой окружности обращается в нуль. Функция Грина представляется в виде асимптотического ряда требуемого вида. Интеграл позволяет оценить остаточные члены.

Данное рассуждение достаточно стандартно. Например, оно приводится в монографии [169] при обсуждении теоремы Реллиха. Там же показано, что построенный ряд оказывается сходящимся абсолютно и равномерно.

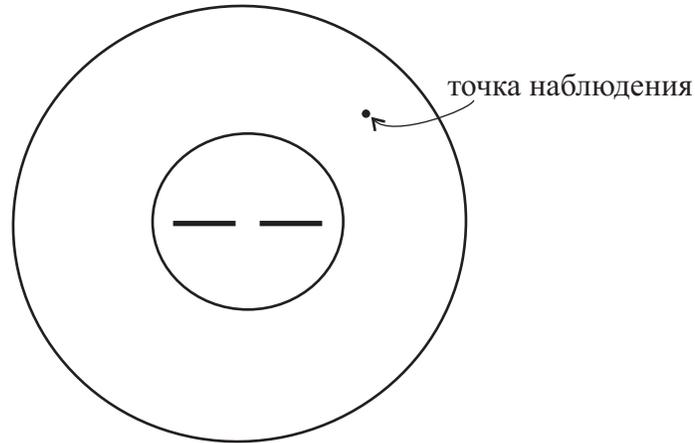


Рис. 34.2: Область для доказательства Утверждения 34.2

Данное утверждение может быть распространено на случай произвольной зоммерфельдовой поверхности. В качестве примера рассмотрим поверхность для задачи об уголке. На бесконечности четыре листа этой поверхности ведут себя так: один лист изолирован, а для трех других бесконечность является точкой ветвления порядка 3. Для изолированного листа асимптотичность разложения (34.11) проверяется так же, как и для плоскости. Для трех разветвленных листов используется формула Грина для зоммерфельдовой поверхности и функция Грина для простейшей поверхности, имеющей на бесконечности точку ветвления порядка 3. Последняя поверхность сходна с римановой поверхностью функции  $(x + iy)^{1/3}$ . Функцию Грина для такой поверхности дает известное решение задачи о дифракции цилиндрической волны на клине с раскрывом  $3\pi/2$  с идеальными границами.

Разложение (34.2) также необходимо для строгого доказательства Утверждения 14.1.

## К постановке задачи об уголкового отражателе со щелью

Постановка задач, содержащих только конечные экраны, заметно проще постановки задач, содержащих полубесконечные экраны. В данной работе к первому типу относится задача о двух полосах, а ко второму — об уголкового отражателе со щелью. Разница состоит в том, что при наличии полубесконечных экранов поле содержит плоские отраженные волны, а также полутеневые зоны. Кроме того, дифракционные коэффициенты имеют сингулярности в особых направлениях, поэтому оценки (34.2) не могут выполняться равномерно.

Отметим, что сложности возникают только при постановке задачи о дифракции плоской волны. Задача о нахождении функции Грина ставится так

же, как и в случае компактных рассеивателей.

В случае действительного  $k_0$  будем использовать интегральное условие излучения, предложенное Магнусом

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \int |\partial_r u^d - ik_0 u^d|_{r=R}^2 d\theta = 0 \quad (34.12)$$

Здесь  $u^d$  — дифрагированная часть поля, т.е. разность между полным полем и суммой геометрически видимых падающей и отраженных плоских волн. Интегрирование ведется по окружности радиуса  $R$  в случае задачи на физической плоскости. В случае задачи на зоммерфельдовой поверхности, интегрирование ведется по множеству точек, отстоящих от начала координат на расстояние  $R$ . Для задачи об уголке это окружность на одном листе и кривая  $r = R$ ,  $0 \leq \theta < 6\pi$  на трех других.

Интегральная формулировка такого типа не предполагает равномерности асимптотики дифрагированного поля в дальней зоне, а следовательно позволяет учесть полутеневые зоны.

## О теоремах единственности и существования

Изложение в существенной степени опирается на теоремы единственности для дифракционных задач на зоммерфельдовых поверхностях. Эти теоремы доказываются стандартными методами. Как обычно, для действительных  $k_0$  имеются два пути.

Во-первых, можно использовать условие излучения в форме (34.2) или (34.12) и рассуждение, основанное на полноте собственных функций задачи в той или иной секториальной области. Данное рассуждение приведено для условий излучения (34.2) в [170], а для условий (34.12) в [3]. Наиболее близко к нашему случаю подходит рассуждение из [3], поскольку оно относится к задачам в секториальных областях. Любая зоммерфельдова поверхность с конечным числом листов и точек ветвления вдали от начала координат представляет собой несколько несвязанных между собой “секториальных областей” величиной в  $2\pi n$ . Для каждого из таких секторов нетрудно построить систему уходящих волн, обладающую полнотой по угловой координате. Такая система необходима для рассуждения, приводящего к теореме единственности.

Слово в слово повторяя выкладки из [3], приходим к утверждению о том, что поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца, условиям Мейкснера и условиям излучения на зоммерфельдовой поверхности, тождественно равно нулю при  $r > R$  для некоторого  $R$ . В силу аналитичности решений уравнения Гельмгольца [170], поле тождественно равно нулю на всей поверхности.

Во-вторых, можно воспользоваться принципом предельного поглощения и рассмотреть уравнение Гельмгольца с параметром  $k_0$ , имеющим малую положительную мнимую добавку. В этом случае условие излучения формулируется

еще проще. Поле должно быть пределом убывающих решений. Пусть  $u$  — поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца на зоммерфельдовой поверхности, условиям Мейкснера и условиям излучения. Применяя формулу Грина к функциям  $u$  и  $\bar{u}$ , получим, что

$$\operatorname{Im}[k_0]\operatorname{Re}[k_0] \iint |u|^2 ds = 0,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности. Данный подход также изложен в [3].

Теоремы существования доказываются для задач на физической плоскости с рассеивателями в рамках метода интегральных уравнений. Задача дифракции формулируется в виде интегрального уравнения, например для плотностей потенциалов на рассеивателях. Далее доказываемость соответствующих уравнений и из единственности решения (доказанной выше) выводится существование.

Непосредственно доказательство существования решения для нескольких полос содержится в [166]. Более общие случаи рассматриваются там же и, например, в [42, 79, 80, 81].

## Постановка задачи отыскания краевой функции Грина

Краевые функции Грина в работе вводятся в результате предельного перехода. Рассматриваются задачи о точечных источниках, находящихся близко к краю рассеивателя и имеющих амплитуду, пропорциональную расстоянию до края в степени  $-1/2$ . Такой подход физически нагляден, однако при формальном доказательстве существования краевой функции Грина он приводит к некоторым сложностям. Необходимо исследовать асимптотики обычной функции Грина задачи при данном предельном переходе.

Продемонстрируем другой способ введения краевой функции Грина. Пусть имеется край рассеивателя, вблизи которого введены локальные полярные координаты  $(\rho, \phi)$ . Построим краевую функцию Грина, источник которой находится на этом крае. Пусть рассматривается задача Дирихле.

Будем искать краевую функцию Грина в следующем виде:

$$u = -\sqrt{k_0/2} J_{-1/2}(k_0\rho) \sin \frac{\phi}{2} \psi(\rho) + u', \quad (34.13)$$

где  $\psi(\rho)$  — функция, равная единице при  $\rho < \delta_1$ , равная нулю при  $\rho > \delta_2$  и имеющая все производные (см. Рис. 34.3). Параметры  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — некоторые достаточно малые числа, причем  $\delta_1 < \delta_2$ .

Функция  $u'$  — решение неоднородного уравнения

$$\Delta u' + k_0^2 u' = \sqrt{k_0/2} \sin \frac{\phi}{2} \left[ 2 \frac{dJ'_{-1/2}(k_0\rho)}{d\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + J_{-1/2}(k_0\rho) \frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \rho^{-1} J_{-1/2}(k_0\rho) \frac{d\psi}{d\rho} \right], \quad (34.14)$$

удовлетворяющее краевым условиям и условию излучения. Уравнение (34.14) подобрано таким образом, чтобы функция  $u$  при  $\rho > 0$  удовлетворяла однородному уравнению Гельмгольца. Правую часть можно сделать сколь угодно гладкой по координате  $\rho$ .

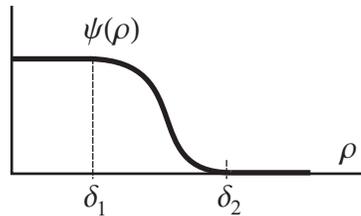


Рис. 34.3: Функция  $\psi(\rho)$

Несмотря на произвол в выборе функции  $\psi$ , краевая функция Грина определяется однозначно (это нетрудно доказать с помощью теоремы единственности).

## Об асимптотиках спектральных функций

Содержание первой главы в значительной степени опирается на асимптотики (6.7), (6.8). Данные асимптотики представляют собой результат применения леммы Ватсона [157] к интегралам типа Фурье. Лемма Ватсона в стандартной формулировке гарантирует эти асимптотики только в секторах  $|\text{Arg}[k] - \pi/2| < \pi/2 - \epsilon$  и  $|\text{Arg}[k] + \pi/2| < \pi/2 - \epsilon$  при произвольно малом  $\epsilon$ . Отметим, что эти сектора не пересекаются. В то же время, применение теоремы Лиувилля требует, чтобы данные сектора пересекались.

Покажем, что можно расширить действие асимптотик (6.7), (6.8) следующим образом. Последняя асимптотика в (6.7), т.е. асимптотика для  $U_4^m$ , справедлива в секторе  $|\text{Arg}[k] - \pi/2| < 3\pi/2 - \epsilon$ . Первая асимптотика в (6.8), т.е. асимптотика для  $U_0^m$ , справедлива в секторе  $|\text{Arg}[k] + \pi/2| < 3\pi/2 - \epsilon$ . Асимптотики для остальных функций справедливы в перекрывающихся секторах  $|\text{Arg}[k] - \pi/2| < \pi/2 + \epsilon$ ,  $|\text{Arg}[k] + \pi/2| < \pi/2 + \epsilon$ , причем в области перекрытия необходимо брать суммы соответствующих асимптотик.

Для доказательства рассмотрим поля на двулистной зоммерфельдовой поверхности и введем на этой поверхности контра интегрирования  $\Gamma_1 \dots \Gamma_4$ , как показано на Рис. 34.4.

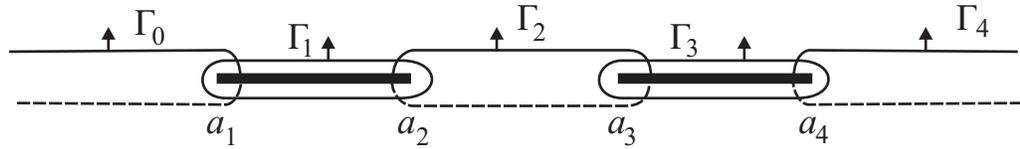


Рис. 34.4: Контура интегрирования

Определим функцию

$$u_p(x, y) = \exp\{ikx + i\sqrt{k_0^2 - k^2}\}. \quad (34.15)$$

Переопределим интегралы (6.3):

$$U_n^m(k) = \frac{1}{2i\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{\Gamma_n} [v^m \partial_n u_p - u_p \partial_n v^m] dl, \quad n = 0 \dots 5. \quad (34.16)$$

Заметим, что для сходящихся интегралов из (6.3) старые определения эквивалентны новым. Для того, чтобы показать это, достаточно деформировать контура интегрирования, вплотную приблизив их к соответствующим отрезкам оси  $x$ .

Расширение справедливости асимптотик спектральных функций основано на том, что спектральные функции определяются с помощью контурных интегралов (34.16), а контура интегрирования можно деформировать. Примеры деформации для контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_4$  показаны на Рис. 34.5.



Рис. 34.5: Деформация контуров интегрирования

На примере контура  $\Gamma_4$  покажем, каким образом деформация приводит к расширению области справедливости соответствующей асимптотики. Пусть угол поворота контура равен  $\Psi$ . Пусть также  $m \neq 4$ , т.е. соответствующая спектральная функция не требует регуляризации (случай  $m = 4$  рассматривается похожим образом, но чуть сложнее). Введем координату  $r$ , направленную вдоль контура от вершины  $a_4$ . Ограничение плоской волны (34.15) на контуре имеет вид

$$u_p(r) = \exp\{ir(k \cos \Psi + \sqrt{k_0^2 - k^2} \sin \Psi)\}.$$

При больших  $|k|$

$$k \cos \Psi + \sqrt{k_0^2 - k^2} \sin \Psi \approx k e^{i\Psi}.$$

Таким образом, стандартная оценка, получаемая с помощью леммы Ватсона, оказывается справедлива для переменной  $k e^{i\Psi}$ . Возможность выбирать  $\Psi$  в интервале  $(-\pi, \pi)$  приводит к соответствующему расширению сектора, в котором справедлива асимптотика.

Последнее, о чем следует упомянуть, это справедливость асимптотических оценок для производных функций  $U_n^m(k)$  на бесконечности. Из свойств асимптотических рядов не очевидно, что асимптотики (6.7), (6.8) можно дифференцировать. Для того, чтобы установить возможность такого дифференцирования, снова воспользуемся интегралами по контурам  $\Gamma_1 \dots \Gamma_4$ . Заметим, что комбинация

$$-\sqrt{k_0^2 - k^2} \frac{dU_n^m}{dk}$$

может быть получена в результате взятия того же контурного интеграла, которым определяется функция  $U_n^m$ , только вместо краевой функции Грина  $v^m$  необходимо взять ее производную  $\partial v^m / \partial \phi$ . Асимптотики последней производной легко оцениваются, и возможность дифференцировать асимптотики  $U_n^m$  устанавливается непосредственно.

## Приложение 2

### §35. Симметрия спектрального уравнения для задачи о двух полосах

#### Симметрия решений спектрального уравнения

Пусть  $\mathbf{U}$  — введенная с помощью (7.1) матрица, состоящая из спектральных функций, соответствующих краевым функциям Грина. Введем матрицу  $\mathbf{G}$  с помощью соотношения

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35.1)$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\mathbf{U} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (35.2)$$

Введем преобразование  $\check{\cdot}$ , производимое над произвольной матрицей  $\mathbf{V}$ , зависящей от  $k$ :

$$\check{\mathbf{V}}(k) = i(k_0^2 - k^2)^{-1/2} \Xi (\mathbf{V}^T(-k))^{-1} \Xi, \quad (35.3)$$

где

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема выражает свойство симметрии матрицы  $\mathbf{G}$ :

**ТЕОРЕМА 35.1** Для значений  $k$ , принадлежащих отрезку  $(-k_0, k_0)$  действительной оси физического листа и для всех аналитических продолжений с этого отрезка выполняется соотношение

$$\check{\mathbf{G}}(k) = \mathbf{G}(k). \quad (35.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**

Будем доказывать, что

$$\mathbf{G}^{-1}(k) = -i\sqrt{k_0^2 - k^2} \Xi \mathbf{G}^T(-k) \Xi. \quad (35.5)$$

Исследуем свойства матрицы  $\mathbf{G}(k)$ . Эта матрица состоит из четырех строк  $r^1 \dots r^4$ . Каждая строка состоит из четырех элементов  $r_1(k) \dots r_4(k)$  (верхние индексы опущены). Нетрудно доказать следующие свойства элементов каждой из строк:

- а) функция  $r_1(k)$  регулярна в нижней полуплоскости и растет там не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_1}$ ;
- б) функция  $\sqrt{k_0^2 - k^2}(r_1(k) - r_2(k))$  — целая; функция  $(r_1(k) - r_2(k))$  растет не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_1}$ , в верхней полуплоскости и не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_2}$ , в нижней полуплоскости;
- в) функция  $(r_2(k) - r_3(k))$  — целая; она растет не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_2}$ , в верхней полуплоскости и не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_3}$  в нижней полуплоскости;
- г) функция  $\sqrt{k_0^2 - k^2}(r_3(k) - r_4(k))$  — целая; функция  $(r_3(k) - r_4(k))$  растет не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_3}$ , в верхней полуплоскости и не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_4}$ , в нижней полуплоскости;
- д) функция  $r_4(k)$  регулярна в верхней полуплоскости и растет там не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_4}$ .

Назовем строку из произвольных четырех функций *правильной*, если для нее выполняются перечисленные выше условия. Выполняются два нетривиальных утверждения:

**УТВЕРЖДЕНИЕ 35.1** Любая правильная строка  $r(k)$  может быть представлена в виде линейной комбинации строк матрицы  $\mathbf{G}$ :

$$r = d_1 r^1 + d_2 r^2 + d_3 r^3 + d_4 r^4, \quad (35.6)$$

где  $d_1 \dots d_4$  — константы относительно переменной  $k$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 35.2 Для каждого  $m = 1 \dots t$  следующая строка, содержащая элементы обратной матрицы  $\mathbf{G}^{-1}$ , взятые в точке  $-k$ , является правильной:

$$(k_0^2 - k^2)^{-1/2} \{(\mathbf{G}^{-1}(-k))_m^1, -(\mathbf{G}^{-1}(-k))_m^2, (\mathbf{G}^{-1}(-k))_m^3, -(\mathbf{G}^{-1}(-k))_m^4\}. \quad (35.7)$$

Идея доказательства первого утверждения заключается в следующем. Формула (35.6) может быть интерпретирована как система линейных уравнений относительно коэффициентов  $d_1 \dots d_4$ . Решение этой системы может быть записано в форме отношений определителей. Применяя технику, использованную в данной главе, а именно исследуя поведение определителей в верхней и нижней полуплоскости и применяя теорему Лиувилля, заключаем, что коэффициенты  $d_1 \dots d_4$  — константы.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Все условия правильной строки могут быть проверены непосредственно. Рассмотрим в качестве примера третье условие, относящееся к разности второго и третьего элементов строки:

$$h \equiv r_2 - r_3 = -(k_0^2 - k^2)^{-1/2} [(\mathbf{G}^{-1}(-k))_1^2 + (\mathbf{G}^{-1}(-k))_1^3] =$$

$$-\sqrt{k_0^2 - k^2} \gamma(k) \begin{vmatrix} G_1^2(-k) & G_2^2(-k) - G_3^2(-k) & G_4^2(-k) \\ G_1^3(-k) & G_2^3(-k) - G_3^3(-k) & G_4^3(-k) \\ G_1^4(-k) & G_2^4(-k) - G_3^4(-k) & G_4^4(-k) \end{vmatrix}.$$

Напомним, что  $\gamma(k) = e^{ik(a_1+a_2+a_3+a_4)}$ .

С одной стороны,

$$h = -\sqrt{k_0^2 - k^2} \gamma(k) \left( \begin{vmatrix} U_1^2(-k) & U_2^2(-k) & U_4^2(-k) \\ U_1^3(-k) & U_2^3(-k) & U_4^3(-k) \\ U_1^4(-k) & U_2^4(-k) & U_4^4(-k) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} U_3^2(-k) & U_2^2(-k) & U_4^2(-k) \\ U_3^3(-k) & U_2^3(-k) & U_4^3(-k) \\ U_3^4(-k) & U_2^4(-k) & U_4^4(-k) \end{vmatrix} \right).$$

(Здесь мы воспользовались свойствами определителей и вычли второй и третий столбцы из первого).

Оба определителя в последней формуле представляют собой в нижней полуплоскости регулярные функции, деленные на  $\sqrt{k_0^2 - k^2}$ . Первый определитель растет там как

$$k^{-5/2} e^{-ik(a_1+a_2+a_4)},$$

а второй — как

$$k^{-3/2} e^{-ik(a_2+a_3+a_4)}.$$

С другой стороны,

$$h = -\sqrt{k_0^2 - k^2}\gamma(k) \left( \left| \begin{array}{ccc} U_0^2(-k) & U_2^2(-k) & U_3^2(-k) \\ U_0^3(-k) & U_2^3(-k) & U_3^3(-k) \\ U_0^4(-k) & U_2^4(-k) & U_3^4(-k) \end{array} \right| + \right. \\ \left. + \left| \begin{array}{ccc} U_0^2(-k) & U_2^2(-k) & U_1^2(-k) \\ U_0^3(-k) & U_2^3(-k) & U_1^3(-k) \\ U_0^4(-k) & U_2^4(-k) & U_1^4(-k) \end{array} \right| \right).$$

Это представление дает возможность исследовать поведение  $h(k)$  в верхней полуплоскости. В результате удастся доказать, что  $h$  — целая функция, растущая не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_2}$ , в верхней полуплоскости и не быстрее, чем  $k^{-1/2}e^{ika_3}$ , в нижней. Таким образом, выполнение выбранного условия доказано. Похожим образом можно доказать выполнение оставшихся четырех условий.

Как следует из первой теоремы, строка (35.7) может быть представлена в виде линейной комбинации строк матрицы  $\mathbf{G}$ . Коэффициенты могут быть найдены с помощью асимптотик (6.7). Результат есть (35.5).  $\square$

### Симметрия коэффициентов спектрального уравнения

Симметрия (35.5) описывает преобразование *решений* спектрального уравнения. Выясним, какому преобразованию *коэффициентов* уравнения это соответствует.

Прежде всего, отметим, что матрица  $\mathbf{G}$  является решением спектрального уравнения (7.2), поскольку ее столбцы являются линейными комбинациями столбцов матрицы  $\mathbf{U}$ .

Выведем уравнение для  $\mathbf{G}^{-1}$ . Прежде всего, заметим, что  $(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G})' = 0$ , откуда

$$((\mathbf{G}^{-1})^T)' = -\mathbf{K}^T(\mathbf{G}^{-1})^T$$

Далее, производя несложные преобразования, убеждаемся в том, что матрица

$$\check{\mathbf{G}}(k) \equiv i(k_0^2 - k^2)^{-1/2}\Xi(\mathbf{G}^{-1}(-k))^T\Xi$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dk}\check{\mathbf{G}}(k) = \left\{ \Xi(\mathbf{K}(-k))^T\Xi - \frac{1}{2}\mathbf{I}\left(\frac{1}{k-k_0} + \frac{1}{k+k_0}\right) \right\} \check{\mathbf{G}}(k). \quad (35.8)$$

С другой стороны, в соответствии с (35.5)

$$\check{\mathbf{G}}(k) = \mathbf{G}(k).$$

Уравнение вида (7.2), которому может удовлетворять заданная невырожденная матрица, единственно, поэтому выражение (35.8) может быть переписано как тождество для коэффициентов

$$\mathbf{K}(k) = \Xi (\mathbf{K}(-k))^T \Xi - \frac{1}{2} \mathbf{I} \left( \frac{1}{k - k_0} + \frac{1}{k + k_0} \right)$$

или

$$\Xi (\mathbf{K}^+)^T \Xi + \mathbf{K}^- = -\frac{1}{2} \mathbf{I}. \quad (35.9)$$

Можно утверждать, что тождество (35.9) следует из (35.5). Заметим, что из данного тождества непосредственно следует (7.10).

## Приложение 3

# Дифракционный ряд для дифракции на двух полосах

### §36. Структура дифракционного ряда

Процесс рассеяния на сложном препятствии можно представить как бесконечную последовательность актов дифракции на более простых объектах — элементах первоначального препятствия. Методы, основанные на дифракционных рядах, хорошо работают при условии, что характерные размеры рассеивателей значительно больше длины волны в среде. Пусть в среде имеется затухание, т.е. параметр  $k_0$  уравнения Гельмгольца можно представить в виде

$$k_0 = \Lambda(\kappa' + i\kappa''), \quad (36.1)$$

где  $\Lambda$  — большой безразмерный параметр.

В настоящей работе ставится цель приблизиться к точным решениям некоторых дифракционных задач. Поэтому дифракционный ряд будет использоваться не вполне традиционным образом. Будет предложена техника *точных* преобразований ряда, с помощью которой будут получены формулы, описывающие волновые поля, а именно формула расщепления, спектральное уравнение и эволюционное уравнение. Это позволит, во-первых, получить независимое подтверждение уже выведенных формул, а во-вторых, выразить неизвестные константы, входящие в коэффициенты спектрального уравнения, в виде асимптотических рядов. Это даст возможность избежать решения задачи о нахождении параметров для вычисления коэффициентов.

Будем предполагать, что все ряды, используемые в этой главе, сходятся абсолютно. Для этого можно выбрать параметр  $k_0$  имеющим достаточно большую мнимую часть.

## Формальное построение дифракционного ряда

С формальной точки зрения, построение дифракционного ряда заключается в следующем. Исходная дифракционная задача заменяется на рекуррентную последовательность более простых (частных) дифракционных задач, описывающих рассеяние на отдельных элементах рассеивателя. В нашем случае такими элементами рассеивателя являются вершины, и частные дифракционные задачи эквивалентны классической задаче Зоммерфельда для полупрямой. Решение каждой из этих задач называется членом дифракционного ряда. Каждый член имеет *порядок*, т.е. его номер в последовательности актов дифракции.

Для каждой из частных дифракционных задач заданы неоднородные граничные условия. В правую часть этих условий входит падающее поле (для членов нулевого порядка) или поле членов на единицу меньшего порядка (для членов ненулевого порядка). Сумма всех членов дифракционного ряда должна удовлетворять граничным условиям.

Существуют методы построения дифракционного ряда для дифракции на выпуклых многоугольниках, на одиночной полосе и щели, а также на некоторых других фигурах. Не пытаясь обобщить эти методы, построим дифракционный ряд для задачи о дифракции на системе полос.

Напомним, что для определенности выбрано  $0 < \theta^{\text{in}} < \pi/2$ .

Будем нумеровать члены дифракционного ряда при помощи *дифракционных индексов*. Дифракционным индексом назовем последовательность символов, принадлежащих множеству  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Эти символы обозначают вершины рассеивателя. Первый слева символ в дифракционном индексе будет относиться к первому акту рассеяния, последний — к последнему. Будем полагать, что последовательные акты дифракции происходят лишь на соседних вершинах, т.е. на вершинах  $a_m$  и  $a_n$ , для которых  $m = n \pm 1$ . Вследствие этого, последовательно идущие символы дифракционного индекса должны отличаться на единицу. Таким образом, индекс 1232123 является допустимым, а индексы 124 и 122 — недопустимыми. Назовем *порядком* дифракционного индекса, а также порядком соответствующего члена дифракционного ряда, длину индекса минус 1. Будем обозначать дифракционные индексы строчными греческими буквами, а элементы индексов (символы из набора  $\{1, 2, 3, 4\}$ ) — строчными латинскими буквами.

Представим рассеянное поле в виде ряда

$$u^{\text{sc}} = u_4 + u_{43} + u_{432} + u_{434} + \dots \quad (36.2)$$

В выписанном дифракционном ряду первым символом всех индексов является 4, причем в ряду по одному разу присутствуют члены со всеми допустимыми индексами, начинающимися с 4. (Первый символ 4, поскольку первый акт дифракции происходит на самой правой вершине).

Каждый член ряда  $u_\alpha(x, y)$  в области  $y > 0$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1), условиям излучения и условию Мейкснера в вершине. Кроме того, для членов дифракционного ряда выполняются следующие граничные условия. Член с индексом 4 (единственный член нулевого порядка) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} u_4(x, 0) &= -e^{-ik_*x}, & \text{при } x < a_4, \\ \partial_y u_4(x, 0) &= 0, & \text{при } x > a_4. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Граничные условия для остальных членов ряда имеют различную структуру в зависимости от пары последних символов в дифракционном индексе, т.е. в зависимости от того, на какой вершине происходит очередной акт рассеяния и с какой стороны на эту вершину падает волна. Выпишем эти условия.

Для дифракции на вершине  $a_1$  существует лишь один вариант: предшествующим символом может быть только 2. Этому соответствуют граничные условия

$$\begin{aligned} u_{\alpha 1}(x, 0) &= 0, & x > a_1, \\ \partial_y u_{\alpha 1}(x, 0) &= -\partial_y u_\alpha(x, 0), & x < a_1. \end{aligned} \quad (36.4)$$

Здесь и ниже символом  $\alpha$  обозначена некоторая последовательность символов в дифракционном индексе.

При дифракции на вершине  $a_2$  возможны два варианта. Предыдущий акт дифракции мог произойти на вершине  $a_1$ :

$$\begin{aligned} u_{\alpha 12}(x, 0) &= 0, & x < a_2, \\ \partial_y u_{\alpha 12}(x, 0) &= -\partial_y u_{\alpha 1}(x, 0), & x > a_2 \end{aligned} \quad (36.5)$$

или на вершине  $a_3$ :

$$\begin{aligned} u_{\alpha 32}(x, 0) &= -u_{\alpha 3}(x, 0), & x < a_2, \\ \partial_y u_{\alpha 32}(x, 0) &= 0, & x > a_2. \end{aligned} \quad (36.6)$$

Аналогично, дифракции на вершине  $a_3$  соответствуют два случая:

$$\begin{aligned} u_{\alpha 23}(x, 0) &= -u_{\alpha 2}(x, 0), & x > a_3, \\ \partial_y u_{\alpha 23}(x, 0) &= 0, & x < a_3, \end{aligned} \quad (36.7)$$

и

$$\begin{aligned} u_{\alpha 43}(x, 0) &= 0, & x > a_3, \\ \partial_y u_{\alpha 43}(x, 0) &= -\partial_y u_{\alpha 4}(x, 0), & x < a_3. \end{aligned} \quad (36.8)$$

Вершине  $a_4$  соответствует лишь один вариант (при непустом индексе  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} u_{\alpha 4}(x, 0) &= 0, & x < a_4, \\ \partial_y u_{\alpha 4}(x, 0) &= -\partial_y u_\alpha(x, 0), & x > a_4. \end{aligned} \quad (36.9)$$

Очевидно, в граничные условия для каждого члена дифракционного ряда входят значения поля или его производной, даваемые предыдущим членом, т.е. таким членом, у которого удален последний символ индекса.

Покажем, что сумма всех дифракционных членов удовлетворяет граничным условиям (1.6), (1.7). Очевидно, необходимо проверить выполнение граничных условий на каждом из пяти интервалов, на которые ось  $x$  разбивается вершинами рассеивателя. В качестве примера рассмотрим отрезок  $(a_2, a_3)$ . Разобьем все члены дифракционного ряда на группы следующим образом:

$$u^{\text{sc}} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} [u_{\alpha_1 23} + u_{\alpha_2 32} + (u_{\alpha_3 1} + u_{\alpha_3 12}) + (u_{\alpha_4 4} + u_{\alpha_4 43})],$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — разрешенные дифракционные индексы, начинающиеся с символа 4, а заканчивающиеся таким образом, чтобы полный индекс соответствующего члена был разрешенным. Ниже будет использоваться более компактное обозначение для сумм членов дифракционного ряда. Символом  $u_{\alpha_1 - \alpha_2}$  будет обозначаться сумма всех дифракционных членов, имеющих разрешенные индексы, начинающиеся с последовательности  $\alpha_1$  и заканчивающиеся последовательностью  $\alpha_2$ . С использованием таких обозначений разбиение дифракционного ряда, приведенное выше, может быть записано в виде

$$u^{\text{sc}} = u_{4-23} + u_{4-32} + (u_{4-1} + u_{4-12}) + (u_{4-4} + u_{4-43}),$$

где, например,  $u_{4-12}$  — сумма всех членов с индексами, заканчивающимися парой символов 12.

Каждая из четырех частей последнего выражения удовлетворяет граничному условию  $\partial_y u = 0$  на отрезке  $(a_2, a_3)$ . Это легко проверить, обратившись к граничным условиям для соответствующих членов: например, для суммы  $u_{4-1} + u_{4-12}$  необходимо использовать второе условие в (36.5). Разбивая дифракционный ряд другими способами, можно доказать выполнение граничных условий на остальных четырех интервалах.

Итак, для членов дифракционного ряда построена рекуррентная система дифракционных задач. Для единственного члена нулевого порядка  $u_4$  сформулирована задача, в которой в качестве правой части граничного условия выступает падающая волна. Для всех остальных членов в правой части стоит поле предыдущего члена. Заметим, что у каждого члена ряда, кроме первого, есть ровно один предыдущий и один или два последующих, т.е. ряд имеет “разветвляющуюся” структуру. Это обстоятельство и определило выбор несколько громоздкого (однако весьма гибкого) аппарата дифракционных индексов.

## Явные выражения для членов дифракционного ряда

Перейдем к спектральному описанию полей. В области  $y > 0$  представим

каждый член ряда в виде интеграла Фурье:

$$u_\alpha(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(k) e^{-ikx + i\sqrt{k_0^2 - k^2}y} dk. \quad (36.10)$$

Сумма всех членов ряда может быть записана как

$$u^{\text{sc}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{4-}(k) e^{-ikx + i\sqrt{k_0^2 - k^2}y} dk, \quad (36.11)$$

$W_{4-}$  — сумма всех членов вида  $W_\alpha(k)$ , где  $\alpha$  — разрешенные дифракционные индексы, начинающиеся с символа 4:

$$W_{4-} = W_4 + W_{43} + W_{432} + W_{434} + \dots$$

Для последовательного решения частных дифракционных задач воспользуемся методом Винера-Хопфа. Используем стандартную процедуру вывода и решения функциональных уравнений Винера-Хопфа для задачи о полупрямой, подробно описанную, например, в монографии [6]. Результат есть

$$W_4(k) = \frac{i}{(k - k_*)} \frac{\beta_4(k)}{\beta_4(k_*)}, \quad (36.12)$$

$$W_{\alpha m} = -\beta_m F_\varepsilon[(\beta_m)^{-1} W_\alpha], \quad (36.13)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1(k) &= \frac{i^{1/2} e^{ia_1 k}}{\sqrt{k_0 - k}}, & \beta_2(k) &= -\frac{i^{1/2} e^{ia_2 k}}{\sqrt{k_0 + k}}, \\ \beta_3(k) &= \frac{i^{1/2} e^{ia_3 k}}{\sqrt{k_0 - k}}, & \beta_4(k) &= -\frac{i^{1/2} e^{ia_4 k}}{\sqrt{k_0 + k}}; \end{aligned} \quad (36.14)$$

$F_\varepsilon$  заменяет  $F_+$  или  $F_-$  (т.е. символ  $\varepsilon$  представляет собой “+” или “-”); операторы  $F_+$  и  $F_-$  выделяют из произвольной достаточно гладкой убывающей на бесконечности функции  $V$  составляющие, регулярные (и убывающие) в верхней и нижней полуплоскости, соответственно:

$$V(k) = F_+[V] + F_-[V].$$

Явный вид этих операторов дается формулами

$$\begin{aligned} F_+[V](k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau)}{\tau - k} d\tau & \text{при } \text{Im } k > 0, \\ F_-[V](k) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau)}{\tau - k} d\tau & \text{при } \text{Im } k < 0. \end{aligned} \quad (36.15)$$

Символ  $\varepsilon$  обозначает “+”, если  $m$  равно последнему символу индекса  $\alpha$  плюс 1, и “-”, если  $m$  равно последнему символу индекса  $\alpha$  минус 1. Переменная  $k$  может принимать чисто действительные значения. При этом контур интегрирования обходит точку  $k$  снизу в первом интеграле и сверху во втором. Свойства операторов  $F_{\pm}$  подробно обсуждаются в следующем параграфе.

Покажем на примере одного из членов, каким образом была получена формула (36.13). Рассмотрим член  $u_{\alpha 23}$  для некоторого  $\alpha$ . Воспользуемся граничными условиями (36.7). Функциональное уравнение Винера-Хопфа для такой задачи имеет вид

$$\Phi_+(k) - i\sqrt{k_0^2 - k^2} \Phi_-(k) = -i\sqrt{k_0^2 - k^2} e^{-ika_3} R(k), \quad (36.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_+(k) &= \int_{a_3}^{\infty} \partial_y u_{\alpha 23}(x, +0) e^{ik(x-a_3)} dx, \\ \Phi_-(k) &= \int_{-\infty}^{a_3} u_{\alpha 23}(x, 0) e^{ik(x-a_3)} dx, \\ R(k) &= \int_{a_3}^{\infty} u_{\alpha 2}(x, 0) e^{ikx} dx. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$W_{\alpha 23}(k) = \frac{e^{ika_3}}{i\sqrt{k_0^2 - k^2}} \Phi_+(k)$$

и

$$R(k) = e^{ika_3} F_+[e^{-ika_3} W_{\alpha 2}(k)].$$

В соответствии с традиционным методом решения уравнения Винера-Хопфа, уравнение (36.16) переписывается в виде

$$\frac{\Phi_+(k)}{\sqrt{k_0 + k}} - i\sqrt{k_0 - k} \Phi_-(k) = -i\sqrt{k_0 - k} e^{-ika_3} R(k). \quad (36.17)$$

Раскладывая правую часть в сумму функций, регулярных в верхней и нижней плоскости и убывающих там, и применяя теорему Лиувилля, получаем:

$$\frac{\Phi_+(k)}{\sqrt{k_0 + k}} = -iF_+[\sqrt{k_0 - k} e^{-ika_3} R(k)].$$

Преобразуем правую часть последней формулы.

$$\begin{aligned}
 -iF_+[\sqrt{k_0 - k} e^{-ika_3} R(k)] &= -iF_+[\sqrt{k_0 - k} F_+[e^{-ika_3} W_{\alpha_2}(k)]] = \\
 &= -iF_+[\sqrt{k_0 - k} (e^{-ika_3} W_{\alpha_2}(k) - F_-[e^{-ika_3} W_{\alpha_2}(k)])].
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$F_+[\sqrt{k_0 - k} F_-[e^{-ika_3} W_{\alpha_2}(k)]] \equiv 0.$$

Это тождество может быть доказано с помощью замыкания контура интегрирования внешнего интеграла в нижней полуплоскости. Окончательно получаем

$$W_{\alpha_{23}}(k) = -\frac{e^{ika_3}}{\sqrt{k_0 - k}} F_+[\sqrt{k - k_0} e^{-ika_3} W_{\alpha_2}(k)],$$

что является частным случаем формулы (36.13).

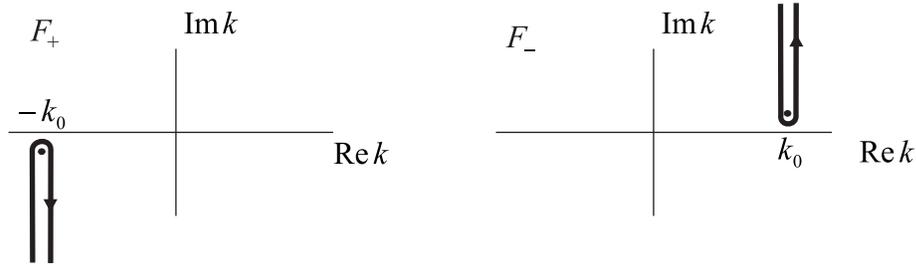


Рис. 36.1: Деформирование контуров интегрирования

Интегралы, входящие в (36.15), можно оценить при больших  $\Lambda$  (см. (36.1)). Для этого необходимо деформировать контура интегрирования таким образом, чтобы ветви оказались в верхней полуплоскости для интегралов типа  $F_-$ , и в нижней для интегралов типа  $F_+$  (Рис. 36.1). К таким интегралам можно применить обычную технику и показать, что дифракционный ряд является асимптотическим. Кроме того, можно получить оценки для  $\Lambda$  и  $\kappa''$ , гарантирующие абсолютную сходимость ряда. Здесь этот вопрос, однако, не обсуждается.

Таким образом, для членов дифракционного ряда получена рекуррентная система явных формул. Каждый член порядка  $n$  выражается через  $n$  вложенных интегралов типа Коши. Такая конструкция представляется весьма сложной; дальнейшей целью будет преобразование (упрощение) дифракционного ряда.

### §37. О свойствах операторов $F_{\pm}$

Все результаты первой главы были получены при помощи одного приема, примененного много раз, а именно с помощью исследования свойств определителей типа Вронского и применения теоремы Лиувилля. В настоящем параграфе будет построен метод, играющий похожую роль для дифракционного ряда. Техника выделения рациональной функции, изложенная ниже, также будет использована многократно на протяжении данной главы, и с ее помощью будут получены все необходимые результаты. Кроме того, данная техника может оказаться полезной не только для преобразования дифракционных рядов, но и для вычислений, выполняемых в рамках традиционного метода Винера-Хопфа. Соответствующие примеры будут рассмотрены в конце настоящего параграфа.

#### Элементарные свойства операторов $F_{\pm}$

а) Прежде всего, заметим, что  $F_{\pm}$  — линейные операторы. Это значит, что для произвольных  $V$ ,  $V_1$  и  $V_2$ , для которых определено действие операторов  $F_{\pm}$  выполняются очевидные тождества

$$F_{\pm}[cV] = cF_{\pm}[V],$$

$$F_{\pm}[V_1 + V_2] = F_{\pm}[V_1] + F_{\pm}[V_2].$$

б) Как уже было упомянуто, основное свойство операторов  $F_{\pm}$  заключается в том, что с их помощью функцию  $V(k)$ , регулярную в полосе  $|\operatorname{Im} k| < \delta$  и убывающую на бесконечности в этой полосе быстрее, чем некоторая отрицательная степень  $k$ , можно разложить в сумму функций

$$V = V_+ + V_-, \quad (37.1)$$

$$V_+ = F_+[V], \quad V_- = F_-[V],$$

таких, что  $V_-$  регулярна и убывает в нижней полуплоскости, а  $V_+$  регулярна и убывает в верхней полуплоскости. Регулярность и убывание соответствующих функций нетрудно показать, воспользовавшись определением (36.15). Тождество (37.1) можно доказать следующим образом. Выберем  $k$  чисто действительным. Воспользовавшись регулярностью функции  $V$  в полосе, проведем контур интегрирования в операторе  $F_+$  чуть ниже действительной оси, а в операторе  $F_-$  — чуть выше. Изменим направление обхода контура при вычислении интеграла  $F_-$ . В результате получится контурный интеграл, окружающий единственный полюс подынтегральной функции. Вычисление вычета в этом полюсе дает тождество (37.1).

в) Операторы  $F_{\pm}$  инвариантны относительно трансляций вдоль действительной оси. Из этого следует тождество

$$(F_{\pm}[V])' = F_{\pm}[V'], \quad \left( ' \equiv \frac{d}{dk} \right). \quad (37.2)$$

Данное тождество может быть доказано с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau)}{\tau - k} d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau) d \left( \frac{1}{\tau - k} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'(\tau)}{\tau - k} d\tau.$$

Разумеется, функция  $V$  должна быть достаточно “хорошей”, т.е. должно быть корректно определено значение операторов  $F_{\pm}$  на ее производной.

г) Свойства, перечисленные выше, очевидны. Теперь рассмотрим свойства, которые менее очевидны. На них и будут строиться преобразования дифракционного ряда.

Пусть  $\xi$  не принадлежит действительной оси. Тогда

$$F_{\pm} \left[ \frac{V(k)}{k - \xi} \right] = \frac{F_{\pm}[V(k)]}{k - \xi} + \frac{\mathcal{F}_{\pm}[V, \xi]}{k - \xi}, \quad (37.3)$$

где функционалы  $\mathcal{F}_{\pm}$  определены как

$$\mathcal{F}_{\pm}[V, \xi] = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau)}{\tau - \xi} d\tau. \quad (37.4)$$

Очевидно, величина  $\mathcal{F}_{\pm}[V(k), \xi]$  — константа относительно переменной  $k$ .

Свойство (37.3) можно доказать, воспользовавшись очевидным соотношением

$$\frac{1}{(\tau - \xi)(\tau - k)} = \frac{1}{k - \xi} \left[ \frac{1}{\tau - k} - \frac{1}{\tau - \xi} \right].$$

Свойство (37.3) допускает простую интерпретацию. Операторы  $F_{\pm}$  осуществляют разложение функции  $V$  на слагаемые  $V = V_{+} + V_{-}$ , регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскости. Попробуем разложить таким же образом функцию  $V/(k - \xi)$ . Разложение вида

$$\frac{V}{k - \xi} = \frac{V_{+}}{k - \xi} + \frac{V_{-}}{k - \xi}$$

почти подходит, однако одно из слагаемых имеет нежелательный полюс в точке  $k = \xi$ . В зависимости от того, в какой полуплоскости (верхней или нижней)

лежит  $\xi$ , лишней полюс имеет, соответственно, первое или второе слагаемое. Нежелательный полюс может быть легко устранен с помощью вычитания. Исходя из этого,

$$\mathcal{F}_+[V, \xi] = \begin{cases} -V_+(\xi), & \text{при } \text{Im}[\xi] > 0 \\ V_-(\xi), & \text{при } \text{Im}[\xi] < 0 \end{cases} \quad (37.5)$$

Пользуясь разложением (37.1), можно также записать, что

$$\mathcal{F}_+[V, \xi] = \begin{cases} V_-(\xi) - V(\xi), & \text{при } \text{Im}[\xi] > 0 \\ -V_+(\xi) + V(\xi), & \text{при } \text{Im}[\xi] < 0 \end{cases} \quad (37.6)$$

имея в виду, что в правой части стоят аналитические продолжения соответствующих функций.

Свойство (37.3) можно обобщить. Применяя его несколько раз, получаем для целого  $n > 0$

$$F_{\pm} \left[ \frac{V(k)}{(k-\xi)^n} \right] = \frac{F_{\pm}[V]}{(k-\xi)^n} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{(k-\xi)^m} \mathcal{F}_{\pm} \left[ \frac{V}{(k-\xi)^{n-m}}, \xi \right]. \quad (37.7)$$

д) Пользуясь очевидным соотношением

$$\frac{\tau}{\tau-k} = \frac{k}{\tau-k} + 1,$$

можно доказать свойство

$$F_{\pm}[kV(k)] = kF_{\pm}[V(k)] + \mathcal{C}_{\pm}[V], \quad \mathcal{C}_{\pm}[V] = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} V(\tau) d\tau. \quad (37.8)$$

Данное тождество справедливо, если сходятся все входящие в него интегралы.

Функционалы  $\mathcal{C}_{\pm}$  связаны с асимптотикой функций  $F_{\pm}[V(k)]$  на бесконечности, а именно, справедливо равенство

$$\mathcal{C}_{\pm}[V] = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \left[ \mp \frac{k}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau)}{\tau-k} d\tau \right],$$

т.е., если  $F_+[V(k)]$  или  $F_-[V(k)]$  имеют асимптотику вида  $bk^{-1} + o(k^{-1})$  в верхней или нижней полуплоскости, соответственно, то  $\mathcal{C}_{\pm}[V] = -b$ .

Формулу (37.8) также можно обобщить, применив ее несколько раз:

$$F_{\pm}[k^n V(k)] = k^n F_{\pm}[V(k)] + \sum_{m=1}^n k^{n-m} \mathcal{C}_{\pm}[k^{m-1} V(k)]. \quad (37.9)$$

Предполагается, что все интегралы, входящие в (37.9), сходятся.

е) Выпишем элементарное следствие формул (37.7) и (37.9). Пусть  $R(k)$  — рациональная функция  $k$ , такая, что произведение  $V(k)R(k)$  убывает на бесконечности при действительных  $k$  как некоторая отрицательная степень  $k$ . Применяя разложение  $R$  на простые дроби, получаем, что

$$F_{\pm}[R(k)V(k)] = R(k)F_{\pm}[V(k)] + r(k), \quad (37.10)$$

где  $r(k)$  — некоторая рациональная функция  $k$ , все коэффициенты которой можно вычислить, применяя формулы (37.7), (37.9).

## §38. Вывод формулы расщепления, спектрального уравнения и эволюционного уравнения с помощью дифракционного ряда

### Вспомогательные функции и преобразование членов дифракционного ряда

Рассмотрим ряд  $W_{4-}$ , построенный в §36. Выпишем явное выражение для одного из членов ряда, например для  $W_{432}$ :

$$W_{432} = \frac{i}{\beta_4(k_*)} \beta_2(k) F_- \left[ \frac{\beta_3(k)}{\beta_2(k)} F_- \left[ \frac{\beta_4(k)}{\beta_3(k)} \frac{1}{k - k_*} \right] \right]. \quad (38.1)$$

Ближайшей целью будет разделить зависимость от  $k$  и  $k_*$ . Нетрудно видеть, что зависимость от  $k_*$  содержится во множителе  $\beta^{-1}(k_*)$  перед всей комбинацией, а также во множителе  $(k - k_*)^{-1}$ .

Введем вспомогательные функции  $G_\alpha(k)$ , зависящие лишь от одной переменной  $k$ , и имеющие в качестве индексов дифракционные индексы, подчиняющиеся сформулированным выше правилам. Здесь, в отличие от членов ряда  $W_{4-}$ , не предполагается, что все индексы начинаются с символа 4. Вспомогательные функции определим с помощью рекуррентных формул:

$$G_m(k) = \beta_m(k), \quad m = 1 \dots 4, \quad (38.2)$$

$$G_{\alpha m} = \beta_m F_\varepsilon [(\beta_m)^{-1} G_\alpha]. \quad (38.3)$$

Формулы для  $G_\alpha$  сходны с формулами (36.12) и (36.13) для  $W_\alpha$ . Различие имеется в определении первых членов (отсутствует множитель  $(k - k_*)^{-1}$ ), а также в коэффициентах. Отсутствие зависимости функций  $G_\alpha$  от  $k_*$  позволяет говорить, что в известном смысле этот набор устроен проще, чем члены исходного ряда  $W_\alpha$ .

Выразим  $W_\alpha(k, k_*)$  через  $G_\alpha(k)$ . Для этого воспользуемся формулой (37.3), применяя ее последовательно ко всем операторам  $F_\pm$ , входящим в (38.1), начиная с внутреннего:

$$W_{43}(k, k_*) = -\frac{i}{\beta_4(k_*)(k - k_*)} \{g_4(k_*)G_{43}(k) + g_{43}(k_*)G_3(k)\},$$

$$W_{432}(k, k_*) = \frac{i}{\beta_4(k_*)(k - k_*)} \{g_4(k_*)G_{432}(k) + g_{43}(k_*)G_{32}(k) + g_{432}(k_*)G_2(k)\},$$

где введены обозначения

$$g_4(k_*) = 1, \quad g_{43}(k_*) = \mathcal{F}_-[G_4/\beta_3, k_*],$$

$$g_{432}(k_*) = \mathcal{F}_-[G_{43}/\beta_2, k_*] + \mathcal{F}_-[G_4/\beta_3, k_*]\mathcal{F}_-[G_3/\beta_2, k_*].$$

Результатом последовательного применения формулы (37.3), очевидно, является преобразование выражения для  $W_{432}(k, k_*)$  к представлению, в которое входят функции зависящие только от  $k$  и только от  $k_*$ .

Такая же процедура может быть применена к произвольному члену дифракционного ряда  $W_\alpha$ . Результат есть

$$W_\alpha = \frac{i(-1)^n}{\beta_4(k_*)(k - k_*)} \sum_{m=0}^n g_{s(\alpha, m)}(k_*) G_{t(\alpha, n-m)}(k), \quad n = N(\alpha), \quad (38.4)$$

где  $s(\alpha, n)$  — дифракционный индекс, состоящий из первых  $n + 1$  символов индекса  $\alpha$ ;  $t(\alpha, n)$  — дифракционный индекс, состоящий из последних  $n + 1$  символов индекса  $\alpha$ ;  $N(\alpha)$  — порядок индекса  $\alpha$ .

Коэффициенты  $g_\alpha(k_*)$  задаются с помощью рекуррентных соотношений

$$g_m \equiv 1 \quad \text{при} \quad m = 1 \dots 4, \quad (38.5)$$

$$g_{\alpha m}(k_*) = \sum_{j=0}^n g_{s(\alpha, j)} \mathcal{F}_\varepsilon[(\beta_m)^{-1} G_{t(\alpha, n-j)}, k_*], \quad n = N(\alpha). \quad (38.6)$$

Формулу (38.4) совместно с соотношениями (38.6) нетрудно доказать по индукции.

Отметим важное свойство формулы (38.4). Она имеет характер свертки по дифракционному индексу, в том смысле, что конкатенация (соединение)  $s(\alpha, m)$  и  $t(\alpha, n - m)$  дает  $\alpha$  для всех членов суммы. Под конкатенацией понимается следующая операция. Берется индекс  $s(\alpha, m)$  и к нему справа приписывается индекс  $t(\alpha, n - m)$ , у которого удален первый символ. Заметим, что последний символ индекса  $s(\alpha, m)$  совпадает с первым символом индекса  $t(\alpha, n - m)$ .

Именно этот сверточный характер формулы (38.4) позволит ниже производить преобразования бесконечных сумм дифракционных членов.

### Преобразование дифракционного ряда с помощью представления (38.4). Вывод формулы расщепления

Введем величины  $g_{m-n}$  и  $G_{m-n}$  аналогично тому, как были выше введены величины  $W_{4-m}$ , т.е. будем полагать, что  $g_{m-n}$  (или  $G_{m-n}$ ) представляет собой бесконечную сумму всех возможных членов  $g_\alpha$  (соответственно,  $G_\alpha$ ), таких, что дифракционный индекс  $\alpha$  начинается с символа  $m$  и заканчивается символом

$n$ . При этом  $\alpha$ , как обычно, представляет собой разрешенный дифракционный индекс, т.е. его соседние символы отличаются на единицу.

Введенные таким образом функции  $G_{m-n}(k)$  тесно связаны со спектральными функциями  $U_n^m(k)$  краевых функций Грина, использованными в первой главе. Верны следующие равенства

$$\begin{aligned} U_0^m &= -G_{m-1}, \\ U_1^m &= G_{m-1} - G_{m-2}, \\ U_2^m &= G_{m-2} - G_{m-3}, \\ U_3^m &= G_{m-3} - G_{m-4}, \\ U_4^m &= G_{m-4}. \end{aligned} \tag{38.7}$$

Для того, чтобы доказать эти свойства, проверим, что правые части равенств удовлетворяют соответствующим функциональным ограничениям, сформулированным для  $U_n^m$ . Это легко сделать, воспользовавшись определением операторов  $F_{\pm}$  и формулами (38.2) и (38.3). Возьмем, например, комбинацию  $G_{m-2} - G_{m-3}$ . Представим ее в виде

$$\begin{aligned} G_{m-2} - G_{m-3} &= \delta_{m,2}G_2 + G_{m-12} + (G_{m-32} - G_{m-3}) = \\ &= \beta_2(\delta_{m,2} + F_+[\beta_2^{-1}G_{m-1}]) - (\beta_2F_-[\beta_2^{-1}G_{m-3}] - G_{m-3}) = \\ &= \beta_2(\delta_{m,2} + F_+[\beta_2^{-1}G_{m-1}] - F_+[\beta_2^{-1}G_{m-3}]). \end{aligned}$$

Пользуясь этим представлением, можно сделать вывод о том, что комбинация  $G_{m-2} - G_{m-3}$  регулярна в верхней полуплоскости, и, кроме того, справедлива соответствующая оценка роста (6.7). Представление вида

$$\begin{aligned} G_{m-2} - G_{m-3} &= (G_{m-2} - G_{m-23}) - G_{m-43} - \delta_{m,3}G_3 = \\ &= \beta_3(-\delta_{m,3} + F_-[\beta_3^{-1}G_{m-2}] - F_-[\beta_3^{-1}G_{m-4}]) \end{aligned}$$

позволяет сделать вывод о том, что комбинация  $G_{m-2} - G_{m-3}$  регулярна в нижней полуплоскости и удовлетворяет соответствующей оценке роста (6.8). Остальные комбинации анализируются похожим образом.

С помощью анализа определителей типа Вронского и теоремы Лиувилля нетрудно показать, что функциональная задача для определения  $U_n^m$  (т.е. набор из функциональных уравнений, оценок роста и условий регулярности) имеет не более одного решения. Следовательно, выполняются соотношения (38.7).

Заметим, что формулы (38.7) повторяют формулы (35.2) для матрицы  $\mathbf{G}$ . Это означает, что функции  $G_n^m$  (элементы матрицы  $\mathbf{G}$ ), введенные в §35, в точности совпадают с функциями  $G_{m-n}$ :

$$G_n^m(k) = G_{m-n}(k).$$

Именно поэтому для обозначения этих функций были использованы одинаковые буквы. Для обозначения матрицы из функций  $G_{m-n}$  ниже будем использоваться символ  $\mathbf{G}$ .

Воспользовавшись функциональной задачей для  $U_n$ , а также рекуррентными граничными условиями для членов дифракционного ряда, можно показать, что

$$\begin{aligned} U_0 &= W_{4-1}, \\ U_1 &= -(W_{4-1} + W_{4-2}), \\ U_2 &= W_{4-2} + W_{4-3}, \\ U_3 &= -(W_{4-3} + W_{4-4}), \\ U_4 &= W_{4-4}, \end{aligned} \quad (38.8)$$

где

$$\begin{aligned} U_0(k) &= \int_{-\infty}^{a_1} u^{\text{sc}}(x, 0) e^{ikx} dx - \frac{i e^{i(k-k_*)a_1}}{k - k_*}, \\ U_1(k) &= \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{a_1}^{a_2} \partial_y u^{\text{sc}}(x, 0) e^{ikx} dx, \\ U_2(k) &= \int_{a_2}^{a_3} u^{\text{sc}}(x, 0) e^{ikx} dx + \frac{i e^{i(k-k_*)a_2}}{k - k_*} - \frac{i e^{i(k-k_*)a_3}}{k - k_*}, \\ U_3(k) &= \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int_{a_3}^{a_4} \partial_y u^{\text{sc}}(x, 0) e^{ikx} dx, \\ U_4(k) &= \int_{a_4}^{\infty} u^{\text{sc}}(x, 0) e^{ikx} dx + \frac{i e^{i(k-k_*)a_4}}{k - k_*}. \end{aligned} \quad (38.9)$$

Отметим, что дифракционный коэффициент задачи о двух полосах,  $S(\theta; \theta^{\text{in}})$ , выражается через спектральные функции с помощью формулы

$$S(\theta; \theta^{\text{in}}) = \sqrt{k_0^2 - k^2} (U_1(k) + U_3(k)) = -\sqrt{k_0^2 - k^2} W_{4-}, \quad (38.10)$$

$$k = k(\theta) = -k_0 \cos \theta.$$

Применим формулу (38.4) к каждому члену ряда  $W_{4-n}$ . Воспользовавшись сверточным характером этой формулы, перегруппируем слагаемые и получим

представление в компактной форме

$$W_{4-n} = \frac{i(-1)^n}{\beta_4(k_*)(k-k_*)} \sum_{m=1}^4 g_{4-m}(k_*) G_{m-n}(k). \quad (38.11)$$

Вычислим сумму по всем  $n$  от 1 до 4:

$$W_{4-}(k, k_*) = -\frac{i}{\beta_4(k_*)(k-k_*)} \times \\ \times \sum_{m=1}^4 g_{4-m}(k_*) (G_{m-1}(k) - G_{m-2}(k) + G_{m-3}(k) - G_{m-4}(k)). \quad (38.12)$$

Формула (38.11) представляет собой аналог “слабой” формулы расщепления.

Для получения сильной формулы необходимо построить удобное представление для функций  $g_\alpha$ . Введем функции  $f_\alpha(k)$ , имеющие индексы дробного типа. Для всех индексов ненулевого порядка значения этих функций даются формулой

$$f_{\alpha m}(k) = \mathcal{F}_\varepsilon[\beta_m^{-1} G_\alpha, k], \quad (38.13)$$

где  $\varepsilon$ , как обычно, зависит от  $m$  и последнего символа  $\alpha$ . Для индексов нулевого порядка (т.е. состоящих из одного символа) значения функций  $f$  не определены.

Величины  $f_\alpha(k)$ , очевидно, связаны со значениями функций  $G_\alpha$  в точке  $k$ .

$$f_{\alpha m}(k) = \begin{cases} \beta_m^{-1}(k) G_{\alpha m}(k) \\ \beta_m^{-1}(k) (G_\alpha(k) - G_{\alpha m}(k)) \end{cases} \quad (38.14)$$

Первая возможность реализуется, когда  $\text{Im } k > 0$  и  $\varepsilon = +$  или  $\text{Im } k < 0$  и  $\varepsilon = -$ . Вторая возможность реализуется в остальных случаях. Заметим, что функции  $f_\alpha(k)$  имеют разрыв на действительной оси.

Используя введенные выше обозначения, формулу (38.6) можно переписать в виде

$$g_\alpha(k_*) = \sum_{j=0}^{n-1} g_{s(\alpha, j)}(k_*) f_{t(\alpha, n-j)}(k_*), \quad n = N(\alpha). \quad (38.15)$$

Выполняя суммирование и перегруппируя члены, получим следующее соотношение:

$$g_{m-n}(k_*) = \delta_{m,n} + \sum_{l=1}^4 g_{m-l}(k_*) f_{l-n}(k_*), \quad (38.16)$$

где  $f_{m-n}$  — сумма всех функций  $f_\alpha$ , имеющих индексы ненулевого порядка, начинающиеся с  $m$  и кончающиеся  $n$ , например

$$f_{1-1} = f_{121} + f_{12321} + f_{12121} + \dots$$

Формула (38.16) может быть интерпретирована как система линейных алгебраических уравнений относительно величин  $g_{m-n}$ . Решение этой системы дается матричной формулой

$$\mathbf{g}(k_*) = (\mathbf{I} - \mathbf{f}(k_*))^{-1}, \quad (38.17)$$

где  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  — матрицы, состоящие из элементов  $f_{m-n}$  и  $g_{m-n}$  ( $m$  — первый индекс,  $n$  — второй),  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размерности  $4 \times 4$ .

Применяя формулу (38.14), получаем, что при  $\text{Im } k > 0$

$$\mathbf{I} - \mathbf{f}(k) = \mathbf{G}(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4(k) \end{pmatrix}^{-1}, \quad (38.18)$$

а при  $\text{Im } k < 0$

$$\mathbf{I} - \mathbf{f}(k) = \mathbf{G}(k) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4(k) \end{pmatrix}^{-1}. \quad (38.19)$$

Заметим, что в нашем случае  $\text{Im } k_* > 0$ , и следует использовать формулу (38.18). Подставляя (38.18) в (38.17) и (38.11), получим сильную формулу расщепления в невзаимной форме, а именно

$$U_n(k, k) = \frac{i}{k - k_*} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{U}^{-1}(k_*))_m^4 U_n^m(k). \quad (38.20)$$

Воспользовавшись результатом (35.5), получим соотношение

$$g_{4-m}(k_*) = -i(-1)^{m-1} \beta_4(k_*) \sqrt{k_0^2 - k_*^2} \times \\ \times (G_{m-1}(-k_*) - G_{m-2}(-k_*) + G_{m-3}(-k_*) - G_{m-4}(-k_*)). \quad (38.21)$$

Подставляя это значение в “слабую” формулу расщепления (38.12), получаем

$$W_{4-}(k, k_*) = -\frac{\sqrt{k_0^2 - k_*^2}}{(k - k_*)} \sum_{m=1}^4 (-1)^{m-1} (G_{m-1}(k) - G_{m-2}(k) + G_{m-3}(k) - G_{m-4}(k)) \times \\ (G_{m-1}(-k_*) - G_{m-2}(-k_*) + G_{m-3}(-k_*) - G_{m-4}(-k_*)). \quad (38.22)$$

Это формула расщепления в “сильной” форме. Принимая во внимание (38.7) и (38.8), выражение (38.22) можно привести к виду (1.11).

### Вывод спектрального уравнения для функций $G_{m-n}(k)$

Выведем уравнения (7.2) с помощью техники преобразований дифракционных рядов. Во-первых, тем самым будет получено независимое подтверждение уравнения (7.2), а во-вторых, неизвестные параметры, входящие в коэффициенты (7.3) этого уравнения, будут представлены в виде асимптотических рядов, что позволит эффективно вычислять коэффициенты в коротковолновом приближении.

Ниже будут получены дифференциальные уравнения вида (7.2) для функций  $G_{m-n}$ . В соответствии с формулами (38.7), столбцы матрицы  $\mathbf{U}$  являются линейными комбинациями функций столбцов матрицы  $\mathbf{G}$ , поэтому матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{G}$  удовлетворяют одинаковым уравнениям.

Продифференцируем ряд  $G_{m-n}$  по  $k$  почленно. Для этого построим производные функций  $G_\alpha$ . Заметим, что коэффициенты  $\beta_m(k)$  удовлетворяют соотношениям:

$$\beta'_m(k) = \left[ ia_m - \frac{1}{2(k \pm k_0)} \right] \beta_m(k), \quad (38.23)$$

где знак “+” выбирается для  $m = 2, 4$ , а знак “-” для  $m = 1, 3$ .

Соотношения (38.23) и (37.2) позволяют построить формулы для производных  $G_\alpha$ . Функции  $G_\alpha$  нулевого порядка, очевидно, удовлетворяют уравнениям, совпадающим с (38.23). Функции более высокого порядка удовлетворяют уравнениям

$$G'_{\alpha m} = \beta_m F_\varepsilon[\beta_m^{-1} G'_\alpha] + \frac{1}{2(k \mp k_0)} \beta_m \mathcal{F}_\varepsilon[\beta_m^{-1} G_\alpha, \pm k_0], \quad (38.24)$$

где верхние знаки выбираются при  $m = 1, 3$ , а нижние — при  $m = 2, 4$ . Напомним, что  $\varepsilon$  обозначает “+”, если  $m$  есть последний символ  $\alpha$  плюс 1, и “-”, если  $m$  есть последний символ  $\alpha$  минус 1.

С помощью (38.24) нетрудно построить рекуррентную формулу для производных  $G'_\alpha(k)$ :

$$G'_\alpha(k) = ia_j G_\alpha(k) + \sum_{m=0}^n \left( \frac{P_{s(\alpha, m)}}{k - k_0} + \frac{M_{s(\alpha, m)}}{k + k_0} \right) G_{t(\alpha, n-m)}(k), \quad n = N(\alpha) \quad (38.25)$$

где  $j$  — первый символ индекса  $\alpha$ ,  $P_\alpha$  и  $M_\alpha$  — коэффициенты, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$P_m = -\frac{1}{2} \text{Odd}[m] \quad M_m = -\frac{1}{2} \text{Even}[m], \quad (38.26)$$

$$P_{\alpha m} = \sum_{j=0}^n P_{s(\alpha, j)} \mathcal{F}_\varepsilon[\beta_m^{-1} G_{t(\alpha, n-j)}, k_0] + \frac{\text{Odd}[m]}{2} \mathcal{F}_\varepsilon[(\beta_m)^{-1} G_\alpha, k_0], \quad (38.27)$$

$$M_{\alpha m} = \sum_{j=0}^n M_{s(\alpha, j)} \mathcal{F}_\varepsilon[\beta_m^{-1} G_{t(\alpha, n-j)}, -k_0] + \frac{\text{Even}[m]}{2} \mathcal{F}_\varepsilon[(\beta_m)^{-1} G_\alpha, -k_0], \quad (38.28)$$

$n = N(\alpha)$ ;  $\text{Odd}[m] = 1$  для нечетных  $m$ ,  $\text{Odd}[m] = 0$  для четных  $m$ ,  $\text{Even}[m] = 1 - \text{Odd}[m]$ . Выписанные формулы можно, например, доказать по индукции.

Формула (38.25) имеет вид свертки по дифракционному индексу. Это позволяет перегруппировать члены при вычислении бесконечных сумм:

$$G'_{m-n} = ia_m G_{m-n} + \sum_{j=1}^4 \left( \frac{P_{m-j}}{k - k_0} + \frac{M_{m-j}}{k + k_0} \right) G_{j-n}, \quad (38.29)$$

где  $P_{m-n}$  и  $M_{m-n}$  — суммы всех величин  $P_\alpha$  и  $M_\alpha$  с индексами, начинающимися с символа  $m$  и кончающимися символом  $n$ .

Уравнения (38.29) представляют собой замкнутую систему линейных однородных дифференциальных уравнений относительно  $G_{m-n}$ . В матричной форме эта система может быть записана в виде

$$\mathbf{G}' = \mathbf{K}\mathbf{G}, \quad (38.30)$$

где коэффициенты  $\mathbf{K}$  имеют вид (7.3). Элементы матриц  $\mathbf{K}^\pm$  выражаются через суммы  $P_{m-n}$  и  $M_{m-n}$ :

$$K_{m,n}^+ = P_{m-n}, \quad K_{m,n}^- = M_{m-n}. \quad (38.31)$$

В соответствии со сделанными выше замечаниями, именно эти коэффициенты стоят в уравнении (7.2).

Формулы для  $P_{m-n}$  и  $M_{m-n}$  имеют весьма сложную структуру. Рекурсия заложена в определении каждого члена в формулах (38.27) и (38.28), сами эти формулы имеют рекуррентную форму, и, кроме того, необходимо вычислить бесконечную сумму членов, определяемых этими формулами.

Используя функции  $f_\alpha$ , можно упростить формулы для  $P_{m-n}$  и  $M_{m-n}$ . Преобразуем (38.27) и (38.28) и выполним суммирование. После перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} P_{m-n} &= \frac{\text{Odd}[n]}{2} (f_{m-n}(k_0) - \delta_{m,n}) + \sum_{l=1}^4 P_{m-l} f_{l-n}(k_0), \\ M_{m-n} &= \frac{\text{Even}[n]}{2} (f_{m-n}(-k_0) - \delta_{m,n}) + \sum_{l=1}^4 M_{m-l} f_{l-n}(-k_0). \end{aligned} \quad (38.32)$$

Выписанные соотношения представляют собой линейные уравнения для  $P_{m-n}$  и  $M_{m-n}$ . Решим эти уравнения и запишем результат в матричной форме, учитывая (38.30):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^+ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{f}(k_0))\mathbf{Od}(\mathbf{I} - \mathbf{f}(k_0))^{-1}, \\ \mathbf{K}^- &= -\frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{f}(-k_0))\mathbf{Ev}(\mathbf{I} - \mathbf{f}(-k_0))^{-1}, \end{aligned} \quad (38.33)$$

где

$$\mathbf{Od} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Ev} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрицы  $\mathbf{I} - \mathbf{f}(\pm k_0)$  связаны с  $\mathbf{G}(\pm k_0)$  с помощью соотношений (38.18) и (38.19).

Ряды  $f_{m-n}(k)$  имеют асимптотическую природу при больших  $k_0$  с положительной мнимой частью. Практический рецепт вычисления коэффициентов уравнения (7.2) заключается в том, чтобы выбрать достаточно большие значения  $a_1 \dots a_4$ , вычислить значения  $f_{m-n}(\pm k_0)$  приближенно (взяв несколько первых членов), воспользоваться формулами (38.33) и решить эволюционные уравнения (8.4) для вычисления коэффициентов при желаемых значениях  $a_1 \dots a_4$ .

## Вывод эволюционных уравнений

Выведем эволюционные уравнения вида (8.1) для функций  $G_{m-n}(k)$ . По соображениям линейности, эволюционные уравнения для матрицы  $\mathbf{G}$  должны иметь те же коэффициенты, что и уравнения для  $\mathbf{U}$ .

Метод вывода эволюционных уравнений сходен с методом, использованным для вывода спектральных уравнений. Продифференцируем члены  $G_\alpha$  по параметру  $a_j$ :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} G_m = ik\delta_{j,m} G_m, \quad (38.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} G_{\alpha m} = \beta_m F_\varepsilon \left[ \beta_m^{-1} \frac{\partial}{\partial a_j} G_\alpha \right] - i\delta_{m,j} \mathcal{C}_\varepsilon [\beta_m^{-1} G_\alpha] G_m, \quad (38.35)$$

где  $\mathcal{C}$  — функционал, введенный в (37.8). С помощью индукции нетрудно доказать формулу, не содержащую рекурсии:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} G_\alpha = ik\delta_{l,j} G_\alpha + \sum_{v=0}^n B_{s(\alpha,v)}^j G_{t(\alpha,n-v)}, \quad n = N(\alpha), \quad (38.36)$$

$$B_{\alpha m}^j = i(\delta_{l,j} - \delta_{j,m}) \mathcal{C}_\varepsilon [\beta_m^{-1} G_\alpha], \quad B_m^j = 0, \quad (38.37)$$

где  $l$  — первый символ  $\alpha$ , символ  $\varepsilon$  используется так же, как и раньше.

Рассматривая ряды из членов  $G_\alpha$  и перегруппируя слагаемые, получаем уравнения для производных от рядов  $G_{m-n}$ :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} G_{m-n} = ik\delta_{j,m} G_{m-n} + \sum_{l=1}^4 B_{m-l}^j G_{l-n}, \quad (38.38)$$

где  $B_{m-n}^j$  — сумма всех величин  $B_\alpha^j$  с индексами  $\alpha$ , начинающимися с  $m$  и кончающимися  $n$ .

Заметим, что суммы  $C_\varepsilon[\beta_m^{-1} G_\alpha]$  связаны с асимптотиками функций  $G_{m-n}(k)$ , и, следовательно, с асимптотиками функций  $U_n^m(k)$  при больших  $k$ . Детальное рассмотрение дает соотношение

$$B_{m-n}^j = (-1)^{n-1} C_n^m (\delta_{j,m} - \delta_{j,n})$$

Таким образом, уравнения (38.38) эквивалентны уравнениям (8.1) при

$$A_{m,n}^j = ik\delta_{j,m}\delta_{m,n} + B_{m-n}^j. \quad (38.39)$$

Итак, все основные уравнения главы 1 выведены с помощью дифракционных рядов. Заметим, что при этом один раз был использован результат главы 1, а именно формула (35.5). Эта формула также может быть выведена с помощью дифракционных рядов, однако ее вывод весьма громоздкий.

## §39. Примеры вычислений на основе спектрального уравнения и дифракционных рядов

Цель настоящего параграфа — продемонстрировать возможность практического использования соотношений, полученных в первых двух главах. Формулы, выведенные выше, выглядят несколько непривычно, поэтому представляется важным продемонстрировать, что эти формулы приводят к разумным результатам.

### Решение спектрального уравнения (7.2)

Рассмотрим следующую дифракционную задачу. Пусть заданы следующие параметры (в безразмерных координатах):

$$k_0 = 1 + 0.2i, \quad a_1 = -12, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 12. \quad (39.1)$$

Это соответствует отношению длины волны к характерному размеру рассеивателя порядка единицы. Рассматривается случай нормального падения плоской волны на рассеиватель, т.е.

$$k_* = 0.$$

В соответствии с логикой построенной выше теории, прежде всего необходимо решить спектральное уравнение (7.2) для вспомогательных функций  $U_n^m(k)$ . Вместо этого будем решать уравнение (38.25) для функций  $G_{m-n}$  (функции  $U_n^m$  могут быть найдены по формулам (38.7)). После этого можно применить формулу расщепления для построения решения исходной дифракционной задачи.

Для того, чтобы приступить к решению уравнения (38.25), необходимо построить матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ , а также найти начальные условия. В качестве начальных условий выберем значения неизвестных функций  $G_{m-n}$  в точке  $k = k_{\text{ref}} = 0$ .

Для вычисления матриц  $\mathbf{K}^\pm$  и начальных условий  $G_{m-n}(0)$  воспользуемся техникой дифракционных рядов. При этом будем брать частичные суммы рядов, включающие члены порядка не выше 1. Таким образом, приближение для матрицы  $\mathbf{f}$  будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{f} \approx \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & 0 & 0 \\ f_{21} & 0 & f_{23} & 0 \\ 0 & f_{32} & 0 & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для всех величин, стоящих в правой части, известны явные интегральные представления (см. (38.13)). Вычисляя значения соответствующих интегралов при

$k = \pm k_0$ , находим

$$\mathbf{f}(k_0) \approx \begin{pmatrix} 0 & (7.25+4.04i) \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ (2.05-1.92i) \cdot 10^{-2} & 0 & -(2.05-1.92i) \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & -0.48-0.78i & 0 & (7.25+4.04i) \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & (2.05-1.92i) \cdot 10^{-2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(-k_0) \approx \begin{pmatrix} 0 & (2.05-1.92i) \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ (7.25+4.04i) \cdot 10^{-4} & 0 & -0.48-0.78i & 0 \\ 0 & -(2.05-1.92i) \cdot 10^{-2} & 0 & (2.05-1.92i) \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0 & (7.25+4.04i) \cdot 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}.$$

По формулам (38.33) вычисляются матрицы  $\mathbf{K}^\pm$ .

Аналогично, вычислим приближенные значения начальных условий. Усеченные ряды для функций  $G_{m-n}$  имеют вид

$$\mathbf{G}(k) \approx \begin{pmatrix} G_1(k) & G_{12}(k) & 0 & 0 \\ G_{21}(k) & G_2(k) & G_{23}(k) & 0 \\ 0 & G_{32}(k) & G_3(k) & G_{34}(k) \\ 0 & 0 & G_{43}(k) & G_4(k) \end{pmatrix}. \quad (39.2)$$

Подставляя сюда  $k = 0$  и используя явные формулы (38.2), (38.3), получаем значения

$$\mathbf{G}(0) \approx \begin{pmatrix} 0.76+0.63i & (0.68+1.43i) \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ -(0.68+1.43i) \cdot 10^{-3} & -0.76-0.63i & (5.48-0.51i) \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & -(5.48-0.51i) \cdot 10^{-2} & 0.76+0.63i & (0.68+1.43i) \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & -(0.68+1.43i) \cdot 10^{-3} & -0.76-0.63i \end{pmatrix}.$$

Практический интерес представляют комбинации

$$\begin{aligned} W^m(k) &\equiv U_1^m(k) + U_3^m(k) = \frac{S_m(k)}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} = \\ &= G_{m-1}(k) - G_{m-2}(k) + G_{m-3}(k) - G_{m-4}(k), \end{aligned} \quad (39.3)$$

входящие в формулу (38.22). Очевидно, что вектор  $\mathbf{W} \equiv (W^1, W^2, W^3, W^4)^T$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{W}' = \mathbf{KW} \quad (39.4)$$

с коэффициентами  $\mathbf{K}$ , такими же, как в уравнении (38.25), т.е. определяемыми о формуле (7.3). Начальные условия (значения компонент  $\mathbf{W}(0)$ ) могут быть легко вычислены с помощью уже найденных приближенных значений  $\mathbf{G}(0)$ .

Решим уравнение (39.4) численно, используя найденные выше коэффициенты и начальные условия. В качестве интервала, на котором строится численное решение, выберем отрезок действительной оси  $-80 < k < 80$ . Заметим, что для определения диаграмм направленности и дифракционных коэффициентов достаточно отрезка от  $-k_0$  до  $k_0$ . Существенно более длинный интервал выбран для того, чтобы можно было выполнить преобразование Фурье и перейти к координатному описанию (это будет сделано в следующем пункте).

Для выяснения корректности использованных уравнений сравним значения функций  $W^m(k)$ , полученные в результате решения спектрального уравнения (39.4) с приближенными значениями, вычисленными по формулам (39.2), (39.3).

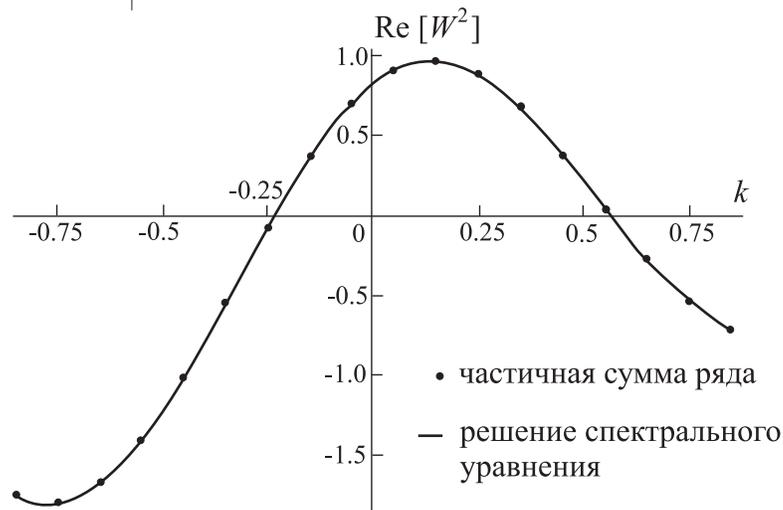


Рис. 39.1: Сравнение решения уравнения (39.4) с частичной суммой дифракционного ряда

На Рис. 39.1 сплошной линией показаны значения  $\text{Re}[W^2]$ , взятые при действительных  $k$ , лежащих в интервале  $-0.85 < k < 0.85$ , вычисленные с помощью спектрального уравнения. Точками на том же графике обозначены приближенные значения той же функции, вычисленные с помощью усеченного дифракционного ряда. Наблюдается хорошее согласие между этими двумя (совершенно различными) методами вычисления спектральных функций.

### Применение формулы расщепления. Проверка выполнения граничных условий

Вернемся к задаче о рассеянии плоской волны. Рассмотрим случай нормального падения.

Для вычисления функции  $W(k) = W_{4-}(k, k_*)$  воспользуемся формулой расщепления (38.22). В новых обозначениях эта формула выглядит как

$$W(k) = -\frac{\sqrt{k_0^2 - k_*^2}}{k - k_*} \sum_{m=1}^4 W^m(-k_*) W^m(k). \quad (39.5)$$

Значения  $W^m(-k_*) = 0$  выше были вычислены с помощью усеченного дифракционного ряда. Подставляя в качестве  $W^m(k)$  результат численного решения дифференциального уравнения (39.4), получаем функцию  $W(k)$ . Ее график показан на Рис. 39.2.

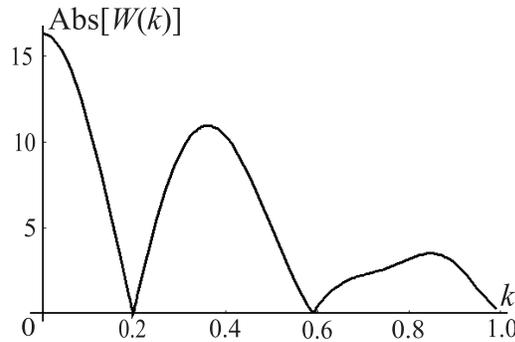


Рис. 39.2: Спектральная функция поля при  $k_* = 0$

Для выяснения правильности построенного решения необходимо проверить, насколько оно удовлетворяет граничным условиям (1.6), (1.7). Перейдем от спектрального описания поля к координатному с помощью Фурье-преобразования. Вычислим также нормальную производную поля по формуле

$$\partial_y u^{\text{sc}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\sqrt{k_0^2 - k^2} W(k) e^{-ikx + i\sqrt{k_0^2 - k^2}y} dk. \quad (39.6)$$

В обеих формулах положим  $y = 0$ .

Результаты вычислений показаны на Рис. 39.3 и Рис. 39.4.

Как видно из этих рисунков, граничные условия для рассеянного поля выполняются с хорошей точностью.

Трехмерная визуализация действительной части поля, восстановленного при помощи Фурье-преобразования, показана на Рис. 39.5.

Применим формулу расщепления к задаче о наклонном падении плоской волны. Положим угол падения  $\theta^{\text{in}}$  равным  $\pi/3$ , т.е.  $k_* = 0.5k_0$ . Коэффициенты  $W^4(-k_*)$  в формуле расщепления вычислим с помощью усеченных дифракционных рядов. Применим формулу расщепления и восстановим поле с помощью

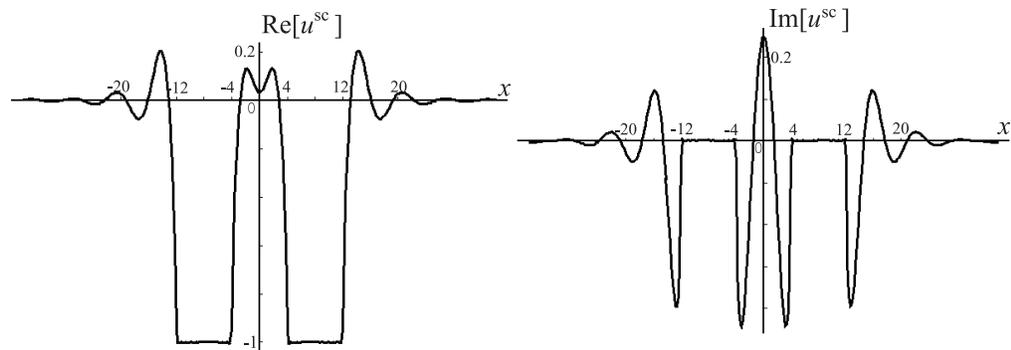


Рис. 39.3: Действительная и мнимая часть рассеянного поля при нормальном падении

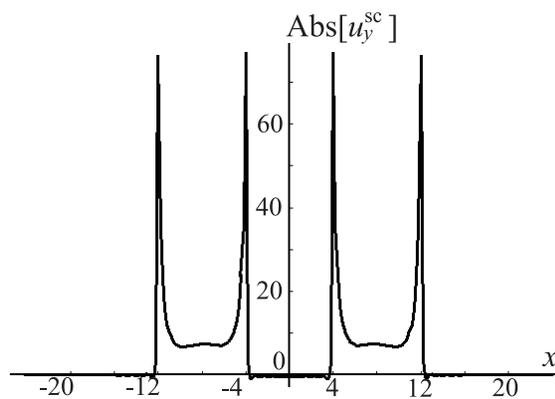


Рис. 39.4: Нормальная производная поля на оси  $x$

Фурье-преобразования. Рассеянное поле на оси  $x$  показано на Рис. 39.6. Видно, что и в этом случае граничные условия (1.6), (1.7) выполняются с хорошей точностью.

### Вычисления на основе эволюционных уравнений

Задача о дифракции на двух полосах содержит 4 параметра, относительно которых можно строить эволюционные уравнения (это величины  $a_1 \dots a_4$ ). Если не учитывать сдвиг рассеивателя как целого, остается 3 параметра. Это слишком много для демонстрационных целей. Поэтому продемонстрируем возможности эволюционных уравнений на примере решения задачи о дифракции на одной полосе.

Для одной полосы можно построить такую же теорию, как была построена для двух полос. Разница между ними будет лишь в том, что во всех суммах по числу вершин  $n = 4$  заменяется на  $n = 2$ .

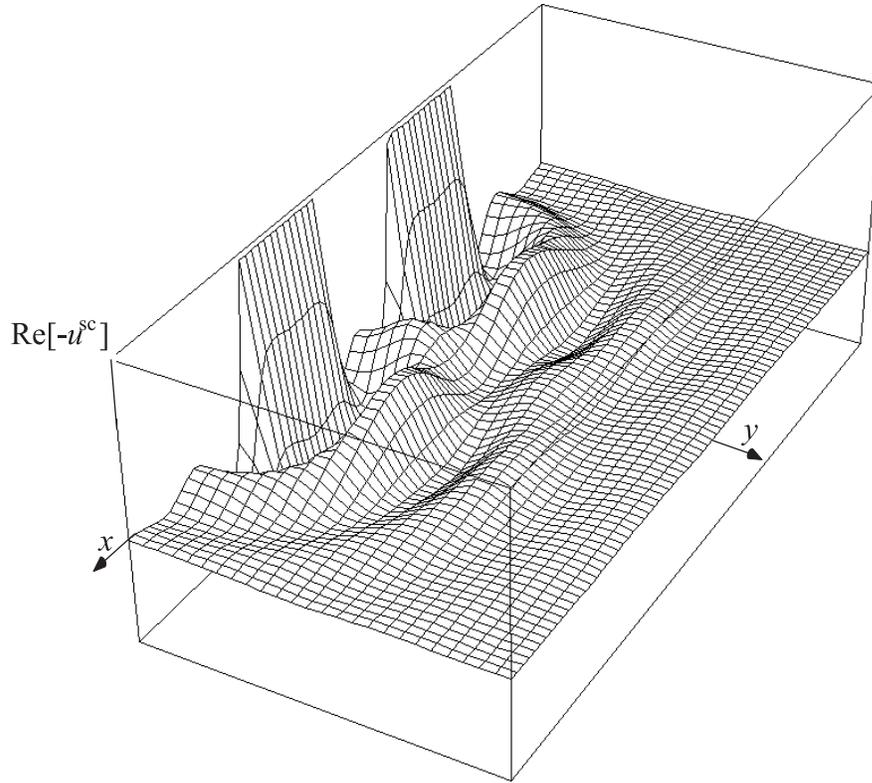


Рис. 39.5: Трехмерная визуализация волнового поля при нормальном падении

Пусть вершины рассеивателя имеют координаты  $(a_1, 0)$  и  $(a_2, 0)$ , где  $a_1 = -a$ ,  $a_2 = a$ . Задача об определении вспомогательных функций приобретает симметрию относительно прямой  $x = 0$ .

Множества вспомогательных функций для задачи об одной полосе имеют вид  $\{U_0^m(k), U_1^m(k), U_2^m(k)\}$ ,  $m = 1, 2$ . Эти функции могут быть организованы в матрицы

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{1-1} & G_{1-2} \\ G_{2-1} & G_{2-2} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} U_0^m &= -G_{m-1}, \\ U_1^m &= G_{m-1} - G_{m-2}, \\ U_2^m &= G_{m-2}. \end{aligned}$$

Уравнение (7.2) и эквивалентное ему уравнение (38.30) приобретают вид

$$\mathbf{U}' = \mathbf{K}\mathbf{U}, \quad \mathbf{G}' = \mathbf{K}\mathbf{G}, \quad (39.7)$$

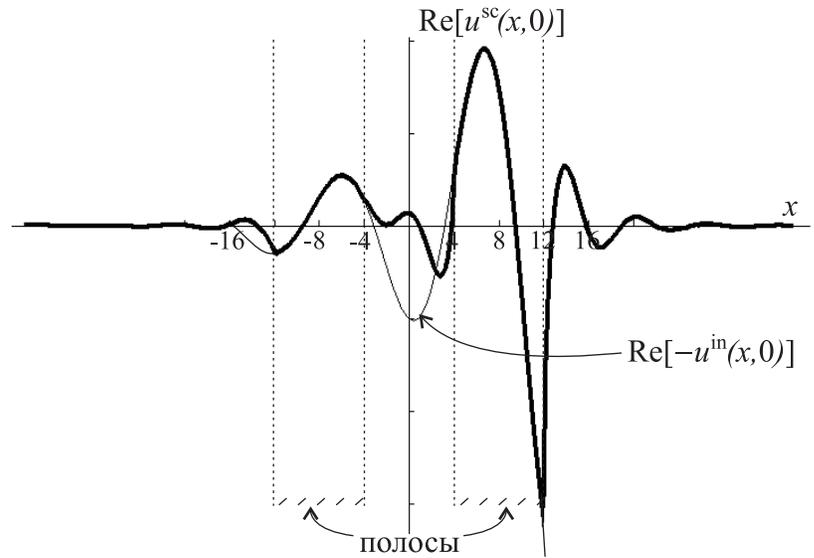


Рис. 39.6: Поле при наклонном падении

где

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}^+}{k - k_0} + \frac{\mathbf{K}^-}{k + k_0}.$$

Матрицы  $\mathbf{K}^+$  имеют размерность  $2 \times 2$ . В силу симметрии, выполняются следующие соотношения для элементов этих матриц:

$$K_{1,1}^- = K_{2,2}^+, \quad K_{2,2}^- = K_{1,1}^+, \quad K_{1,2}^- = K_{2,1}^+, \quad K_{2,1}^- = K_{1,2}^+. \quad (39.8)$$

Кроме того, из обсуждавшихся в §7 свойств матриц  $\mathbf{K}^+$  и  $\mathbf{K}^-$  следуют тождества

$$K_{1,1}^+ + K_{2,2}^+ = -1/2, \quad K_{1,1}^+ K_{2,2}^+ - K_{1,2}^+ K_{2,1}^+ = 0. \quad (39.9)$$

Таким образом, в коэффициенты уравнений (39.7) входят два неопределенных параметра. В качестве этих параметров можно, например, выбрать величины  $K_{1,1}^+$  и  $K_{1,2}^+$ . Эти величины зависят от  $k_0$  и  $a$ . Будем считать величину  $k_0$  постоянной и построим эволюционное уравнение, описывающее зависимость  $K_{1,1}^+$  и  $K_{1,2}^+$  от  $a$ .

Переписывая уравнения (8.4) для случая дифракции на одиночной полосе, используя соотношения (39.8) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a_2} - \frac{\partial}{\partial a_1},$$

получаем систему эволюционных уравнений

$$\frac{\partial K_{1,1}^+}{\partial a} = \frac{(K_{2,1}^+)^2 - (K_{1,2}^+)^2}{a}, \quad (39.10)$$

$$\frac{\partial K_{2,2}^+}{\partial a} = -\frac{(K_{2,1}^+)^2 - (K_{1,2}^+)^2}{a}, \quad (39.11)$$

$$\frac{\partial K_{1,2}^+}{\partial a} = -2ik_0 K_{1,2}^+ + \frac{(K_{1,2}^+ + K_{2,1}^+)(K_{2,2}^+ - K_{1,1}^+)}{a}, \quad (39.12)$$

$$\frac{\partial K_{2,1}^+}{\partial a} = 2ik_0 K_{2,1}^+ - \frac{(K_{1,2}^+ + K_{2,1}^+)(K_{2,2}^+ - K_{1,1}^+)}{a}. \quad (39.13)$$

Легко видеть, что данная система уравнений сохраняет соотношения (39.9).

Таким образом, имеется два пути для вычисления элементов матриц  $\mathbf{K}^\pm$ . Во-первых, можно воспользоваться усеченным дифракционным рядом при каждом из значений  $a$ . Во-вторых, можно вычислить  $K_{1,1}^+$  и  $K_{1,2}^+$  при определенном значении  $a = a_{\text{ref}}$  с помощью усеченного дифракционного ряда, а затем, численно решая систему (39.10)–(39.13), найти  $K_{1,1}^+$  и  $K_{1,2}^+$  при остальных значениях  $a$ . Сравним эти два пути. Положим  $a_{\text{ref}} = 20$ . Выберем  $k_0 = 1 + 0.01i$ . Как и прежде, будем ограничиваться членами дифракционных рядов, имеющих порядок не выше первого. Результаты расчетов показаны на Рис. 39.7. Сплошной линией показано решение эволюционного уравнения, а точками — результаты вычислений на основе рядов. Наблюдается хорошее согласие между обоими методами. Стоит отметить, что если выбрать меньшее значение  $a_{\text{ref}}$ , скажем,  $a_{\text{ref}} = 10$ , то согласие будет еще лучше.

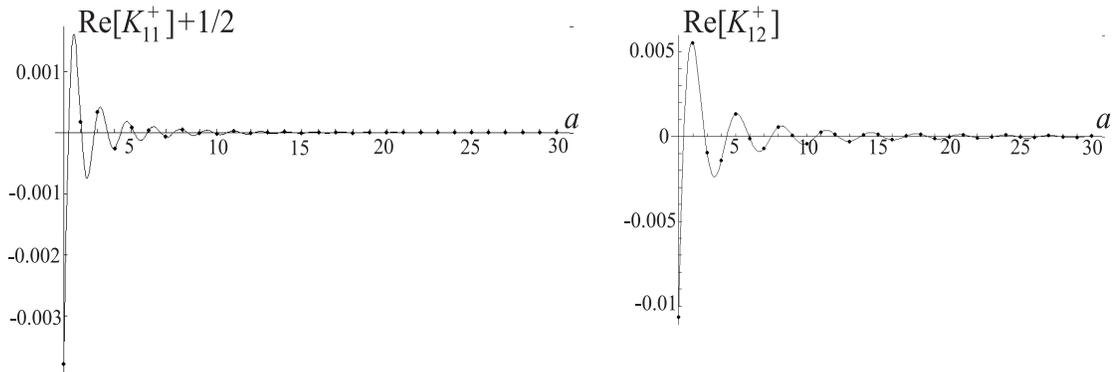


Рис. 39.7: Действительная часть  $K_{1,1}^+(a)$  и  $K_{1,2}^+(a)$ , вычисленная с помощью эволюционного уравнения и дифракционного ряда

# Литература

1. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction. // Math. Ann. — 1896. — V. 47. — P. 317–374.
2. Малюжинец Г.Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с произвольными поверхностными импедансами. // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 3. — С. 752–755.
3. Бабич В.М., Лялинов М.А., Грикуров В.Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в задачах дифракции. С.Пб.: ВВМ, 2004 — 103 с.
4. Osipov A.V., Norris, A.N. The Malyuzhinets theory for scattering from wedge boundaries: a review // Wave Motion. — 1999. — V. 29. — P. 313–340.
5. Norris A.N., Osipov A.V. Far-field analysis of the Malyuzhinets solution for plane and surface waves diffraction by an impedance wedge // Wave Motion. — 1999. — V. 30. — P. 69–89.
6. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: ИЛ, 1962 — 280 с.
7. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Советское радио, 1966 — 428 с.
8. Keller J.B. The geometrical theory of diffraction. // Journ. Opt. Soc. Am. — 1962. — V. 52. — P. 116–130.
9. Боровиков В.А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966 — 456 с.
10. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. Радио, 1962 — 244 с.
11. Sieger B. Die Beugung einer ebenen elektrischen Welle an einem Schirm von elliptischen Querschnitt. // Ann. Phys. — 1908. — V. 27. — P. 626–664.
12. Morse P.M., Rubinstein P.J. The Diffraction of Waves by Ribbons and by Slits. // Phys. Rev. — 1938. — V. 54. — P. 895–898.
13. Hansen E.B. Scalar diffraction by an infinite strip and a circular disc. // Journ. of Math. and Phys. — 1962. — V. 41. — P. 229–245.

14. Brooker G.A. Diffraction at a single ideally conducting slit. // *Journ. of Modern Optics*. — 2008. — V. 55, — P. 423–445.
15. Schwarzschild K. Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. // *Math. Ann.* — 1902. — V. 55. — P. 177–247.
16. Karp S.N., Russek A. Diffraction by a wide slit. // *Journ. Appl. Phys.* — 1956. — V. 27. — P. 886–894.
17. Clemmow P.C. Edge Currents in Diffraction Theory. // *Trans. Inst. of Radio Eng.* — 1956. — AP-4. — P. 282–287.
18. Millar R.F. Diffraction by a wide slit and complimentary strip (I and II). // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1958. — V. 54. — P. 479–511.
19. Braunbek W. Neue Naherungsmethode für die Beugung am ebenen Schirm. // *Zeitschrift für Physik*. — 1950. — V. 127. — P. 381–390.
20. Braunbek W., Zur Beugung an der Kreisscheibe. // *Zeitschrift für Physik*. — 1950. — V. 127. — P. 405–415.
21. Hannay J.H., Thain A. Exact scattering theory for any straight reflectors in two dimensions. // *Journ. Phys. A*. — 2003. — V. 36. — P. 4063–4080.
22. Stovicek P. The Green function for the two solenoid Aharonov–Bohm effect. // *Phys. Lett. A*. — 1989. — V. 142. — P. 5–10.
23. Stovicek P. Krein’s formula approach to the multisolenoid Aharonov–Bohm effect. // *J. Math. Phys.* — 1991. — V. 32. — P. 2114–2122.
24. Karp S.N., Keller J.B. Multiple diffraction by an aperture in a hard screen. // *Optica Acta*, — 1961. — V. 8. — P. 61–72.
25. Уфимцев П.Я. Вторичная дифракция электромагнитных волн на ленте. // *ЖТФ*. — 1958. — Т. 28. — С. 569–582.
26. Уфимцев П.Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте. // *Радиотехника и электроника*. — 1968. — Т. 13. — С. 1867–1869.
27. Уфимцев П.Я. Асимптотическое исследование задачи о дифракции на ленте. // *Радиотехника и электроника*. — 1969. — Т. 14. — С. 1173–1185.
28. Уфимцев П.Я. Асимптотическое решение задачи о дифракции на ленте в случае граничных условий Дирихле. // *Радиотехника и электроника*. — 1970. — Т. 15. — С. 914–923.

29. Уфимцев П.Я. Асимптотические разложения в теории дифракции плоской волны на ленте. // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 187. — С. 1257–1260.
30. Уфимцев П.Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. М.: Бином, 2007 — 366 с.
31. Jones D.S. The theory of Electromagnetism. Amsterdam: Elsevier, 1964 — 812 p.
32. Гринберг Г.А. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитной волны на плоскости с безграничной прямолинейной щелью и родственных ей проблем. // ЖТФ. — 1957. — Т. 27. — С. 2595–2605.
33. Гринберг Г.А. Метод решения дифракционных задач для плоских идеально проводящих экранов, основанный на изучении наводимых на экранах теневых токов. // ЖТФ. — 1958. — Т. 28. — С. 542–568.
34. Гринберг Г.А. Дифракция электромагнитной волны на полосе конечной ширины. // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129. — С. 295.
35. Курицын В.Н. К решению “ключевой” задачи для дифракции на идеальной проводящей полосе. // ЖТФ. — 1961. — Т. 31. — С. 1485–1490.
36. Попов Г.Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. // ЖТФ. — 1965. — Т. 35. — С. 381–389.
37. Хаскинд М.Д., Вайнштейн Л.А. Дифракция плоской волны на щели и ленте, Радиотехника и электроника. Т.9. с.1800–1811 (1964).
38. Фиалковский А.Т. Дифракция плоских электромагнитных волн на щели и ленте. // Радиотехника и электроника. — 1966. — Т. 11. — С. 178–186.
39. Нефедов Е.И., Фиалковский А.Т. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах. М.: Наука, 1972 — 204 с.
40. Боровиков В.А. Дифракция плоской волны на отрезке. // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 159. — С. 711–714.
41. Красильщикова Е.А. Дифракция звуковой волны на щели. // МЖГ. — 1975. — Т. 10. — С. 139–145.
42. Сологуб В.Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования. // ЖВММФ. — 1971. — Т. 11. — С. 837–855.

- 
43. Boersma J. Boundary value problems in diffraction theory and lifting surface theory. // *Compositio Mathematica*. — 1964. — V. 16. — P. 205–293.
  44. Kunik M., Skrzypacz P. Diffraction of light revisited. // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2008. — V. 31. — P. 793–820.
  45. Саутбеков С.С. Еще раз о дифракции на ленте и щели. // *Радиотехника и электроника*. — 2000. — Т. 45. — С. 1202–1209.
  46. DeAcetis L.A., Einstein F.S., Juliano R.A., Jr., Lazar I. Single strip diffraction: comparison of Kirchhoff theory and geometrical theory with the exact solution in the limit of small glancing angle and width; perpendicular polarization. // *Appl. Opt.* — 1976. — V. 15. — P. 2866–2870.
  47. Senior T., Uslenghi P. Comparison between Keller's and Ufimtsev's theories for the strip. // *IEEE Trans. Ant. Prop.* — 1971. — V. 19. — P. 557–558.
  48. Eswaran K. On the solutions of a class of dual integral equations occurring in diffraction problems. // *Proc. Roy. Soc. A.* — 1990. — V. 429. — P. 399–427.
  49. Gorenflo N. A new explicit solution method for the diffraction through a slit. // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physic.* — 2002. — V. 53. — P. 877–886.
  50. Lüneburg E. The Sommerfeld problem: methods, generalizations and frustrations. // *Proceedings of the Sommerfeld's workshop, Freudenstadt, 30 Sept. – 4 Oct. 96*, ed. by E. Meister, Frankfurt am Main, 1997.
  51. Williams W.E. A note on diffraction by a half plane. // *Canadian Journ. Phys.* — 1960. — V. 38. — P. 507–510.
  52. Kleinmann R.E. Plane wave diffraction by a strip. // *Proceedings of the Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas, Copenhagen, June 25–30, 1962*, ed. by E.C. Jordan, Pergamon Press, P. 97–103, 1963.
  53. Tinman R., Kleinman R.E. Integral representations for the field diffracted by a strip. // *URSI General Assembly 1960, Monograph on Radio Waves Circuits*, ed. by Silver, Elsevier, P. 38–65, 1963.
  54. Дагуров П.Н., Дмитриев А.В. Применение метода Кирхгофа к задаче дифракции волн на ленте при малых углах скольжения. // *Письма в ЖТФ*. — 2005. — Т. 31. — С. 22–27.

- 
55. Bindingavale S.S., Volakis J.L. Scattering by a narrow groove in an impedance plane. // *Radio Science*. — 1996. — V. 31. — P. 401–408.
  56. Idemen M. One-dimensional profile inversion of a halfspace bounded by a three-part impedance ground. // *Inverse Problems*. — 1996. — V. 12. — P. 641–666.
  57. Белинский Б.П. Интегральные уравнения для стационарной задачи дифракции коротких волн на препятствиях типа отрезка. // *ЖВММФ*. — 1973. — Т. 13. — С. 373–384.
  58. Serbest A.H., Uzgoren G., Buyukaksoy A. Diffraction of plane waves by a resistive strip residing between two impedance half-planes. // *Ann. Telecom.* — 1991. — V. 46. — P. 359–366.
  59. Asghar S., Hayat T., Ahmad B. Acoustic diffraction from a slit in an absorbing sheet. // *Jap. Journ. Ind. Appl. Math.* — 1996. — V. 13. — P. 519–532.
  60. Asghar S., Hayat T. Plane wave diffraction by a slit in an infinite penetrable sheet. // *Can. Appl. Math. Quart.* — 1999. — V. 7. — P. 1–15.
  61. Bernard J.M.L. Scattering by a three-part impedance plane: a new spectral approach. // *Quart. Journ. Appl. Math. Mech.* — 2005. — V. 58. — P. 383–418.
  62. Fox E.N. The diffraction of two-dimensional sound pulses incident on an infinite uniform slit in a perfectly reflecting screen. // *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. A*. — 1949. — V. 242. — P. 1–32.
  63. Itoh K., Takayama K. Shock wave propagation through a slit. // *Theor. Appl. Mech.* — 1988. — V. 36. — P. 103–112.
  64. Suedan G.A., Jull E.V. Two-dimensional beam diffraction by a half-plane and wide slit. // *IEEE Trans. Ant. Prop.* — 1987. — V. 35. — P. 1077–1083.
  65. Latta G.E. The solution of a class of integral equations. // *Journ. of Rational Mechanics and Analysis*. — 1956. — V. 5. — P. 821–834.
  66. Williams M.H. Diffraction by a finite strip. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 1982. — V. 35. — P. 103–124.
  67. Gorenflo N., Werner M. Solution of a finite convolution equation with a Hankel kernel by matrix factorization. // *SIAM Jour. Math. Anal.* — 1997. — V. 28. — P. 434–451.

- 
68. Baldwin G.L., Heins A.E. On diffraction of scalar waves by a periodic array of screens. // *Math. Scand.* — 1954. — V. 2. — P. 103–118.
  69. Лукьянов В.Д. Точное решение задачи о дифракции на решетке наклонно падающей плоской волны. // *Докл. АН СССР.* — 1980. — Т. 255. — С. 78–80.
  70. Лукьянов В.Д., Точное решение задачи о дифракции на решетке наклонно падающей плоской волны. // *ЖТФ.* — 1981. — Т. 51. — С. 2001–2006.
  71. Erbas B., Abrahams I.D. Scattering of sound waves by an infinite grating composed of rigid plates. // *Wave Motion.* — 2007. — V. 44. — P. 282–303.
  72. Храпков А.А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме. // *ПММ.* — 1971. — Т. 35. — С. 625–637.
  73. Lüneburg E., Westpfahl K. Diffraction of plane waves by an infinite strip grating. // *Ann. Phys.* — 1971. — V. 27. — P. 257–288.
  74. Achenbach J.D., Li Z.L. Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens. // *Wave Motion.* — 1986. — V. 8. — P. 225–234.
  75. Scarpetta E., Sumbatyan M.A. Explicit analytical results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens. // *IMA J. Appl. Math.* — 1996. — V. 56. — P. 109–120.
  76. Porter R., Evans D.V. Wave scattering by periodic arrays of breakwaters. // *Wave Motion.* — 1996. — V. 23. — P. 95–120.
  77. Шестопапов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Том 1. Дифракционные решетки. Киев: Наукова Думка, 1986 — 232 с.
  78. Shinbrot M. The solution of some integral equation of Wiener-Hopf type. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 1970. — V. 28. — P. 15–36.
  79. Сологуб В.Г. Дифракция плоской волны на ленточной решетке в случае коротких длин волн. // *ЖВММФ.* — 1972. — Т. 12. — С. 975–989.
  80. Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. О смешанной задаче для диссипативного уравнения Гельмгольца в двумерной области с разрезами с условием Дирихле на разрезах. // *Вестник Московского университета. Сер. 3.* — 2005. — С. 25–28.

81. Крутицкий П.А., Кольбасова В.В. О смешанной задаче для уравнения Гельмгольца в плоской области. // УМН. — 2005. — Т. 60. — С. 167–168.
82. Martin P.A., Wickham G.R. Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1983. — V. 390. — P. 91–129.
83. Gautesen A.K. On the Green's function for acoustical diffraction by a strip. // Journ. Acoust. Soc. Am. — 1983. — V. 74. — P. 600–604.
84. Biggs N.R.T., Porter D., Stirling D.S.G. Wave diffraction through a perforated breakwater. // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. — 2000. — V. 53. — P. 375–391.
85. Biggs N.R.T., Porter D. Wave diffraction through a perforated barrier of non-zero thickness. // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. — 2001. — V. 54. P. 523–547.
86. Biggs N.R.T., Porter D. Wave scattering by a perforated duct. // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. — 2002. — V. 55. — P. 249–272.
87. Biggs N.R.T., Porter D. Wave scattering by an array of perforated barriers. // IMA J. Appl. Math. — 2005. — V. 70. — P. 908–936.
88. Linton C., McIver P. Handbook of mathematical techniques for wave-structure interactions. London: ChapmanHall, 2001 — 298 p.
89. Craster R.V. The solution of a class of free boundary problems. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1997. — V. 453. — P. 607–630.
90. Craster R.V., Hoang V.H. Application of Fuchsian differential equations to free boundary problems. Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1998. — V. 454. — P. 1241–1252.
91. Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Особенности продолжения волновых полей. // УФН. — 1996. — Т. 166. — С. 1285–1308.
92. Kraus L., and Levine L.M. Diffraction by an elliptic cone. // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — V. 14. — P. 49–68.
93. Bowman J.J., Senior T.B., Uslenghi L.E. Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1987 — 728 p.

- 
94. Watson G.N. General Transforms. // Proc. Lond. Math. Soc. — 1933. — s2-35. — P. 156–199.
  95. Felsen L.B. Back scattering from wide-angle and narrow-angle cone. // Journ. Appl. Phys. — 1955. — V. 26. — P. 138–151.
  96. Felsen L.B. Plane wave scattering by small-angle cones. // IRE Trans. Ant. Prop. — 1957. — V. 5. — P. 121–129.
  97. Николаев Б.Г. О волновых процессах, возникающих при дифракции идеально отражающим конусом в осесимметричном случае. // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ. — 1972. — Т. 25. — С. 151–171.
  98. Николаев Б.Г. Дифракция поля точечного источника круговым конусом (неосесимметричный случай). // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ. — 1974. — Т. 42. — С. 212–227.
  99. Satterwhite R. Diffraction by a quarter plane, the exact solution and some numerical results. // IEEE Trans. Ant. Prop. — 1974. — V. 22. — P. 500–503.
  100. Hansen T.B. Corner diffraction coefficients for the quarter plane. // IEEE Trans. Ant. Prop. — 1991. — V. 39. — P. 976–984.
  101. Smyshlyaev V.P. Diffraction by conical surfaces at high frequencies. // Wave Motion. — 1990. — V. 12. — P. 329–339.
  102. Smyshlyaev V.P. The high frequency diffraction of electromagnetic waves by cones of arbitrary cross-section. // SIAM Journ. Appl. Math. — 1993. — V. 53. — P. 670–688.
  103. Babich V.M., Smyshlyaev V.P., Dement'ev D.B., Samokish B.A. Numerical calculation of the diffraction coefficients for an arbitrary shaped perfectly conducting cone. // IEEE Trans. Ant. Prop. — 1996. — V. 44. — P. 740–747.
  104. Babich V.M., Dement'ev D.B., Samokish B.A., Smyshlyaev V.P. On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary “nonsingular” directions of a smooth convex cone. // SIAM Journ. Appl. Math. — 2000. — V. 60. — P. 536–573.
  105. Bonner B.D., Graham I.G., Smyshlyaev V.P. The computation of conical diffraction coefficients in high-frequency acoustical wave scattering. // SIAM Journ. Num. Anal. — 2005. — V. 43. — P. 120–123.
  106. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Рассеяние поля электрического диполя на конической структуре с продольными щелями. // Радиотехника и электроника. — 2000 — Т. 45. — С. 792–798.

- 
107. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И., Преобразования Мелера-Фока в задачах дифракции волн на незамкнутых структурах во временной области. ДАН, Т.405, С.184–187 (2005).
  108. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Применение сингулярных интегральных уравнений для решения задачи дифракции волн на решетке из импедансных плоских нерегулярных лент. // Докл. АН. — 2002. — Т. 383. — С.189–193.
  109. Bernard J.M.L., Lyalinov M.A. The leading asymptotic term for the scattering diagram in the problem of diffraction by a narrow circular impedance cone. // Journ. Phys. A. — 1999. — V. 32. — P. L43–L48.
  110. Bernard J.M.L., Lyalinov M.A. Diffraction of scalar waves by an impedance cone of arbitrary cross-section. // Wave Motion. — 2001. — V. 33. — P. 155–181.
  111. Radlow J. Diffraction by a quarter-plane. // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1961. — V. 8. — P. 139–158.
  112. Meister E., Speck F.-O. A contribution to the quarter-plane problem in diffraction theory. // Journ. Math. Anal. Appl. — 1988. — V. 130. — P. 223–236.
  113. Albani M. On Radlow's quarter-plane diffraction solution. // Radio Science. — 2007. — V. 42. — P. RS6S11.
  114. Strang G. Toeplitz operators in a quarter-plane. // Bull. Am. Math. Soc. — 1970. — V. 76. — P. 1303–1307.
  115. Meister E., Speck F.-O. Some multidimensional Wiener-Hopf equations with applications. // Trends in Applications of pure Mathematics to Mechanics, ed. by H. Zorski. London: Pitman, 1979, P. 217–262.
  116. Meister E., Speck, F.-O., The Moore-Penrose inverse of Wiener-Hopf operators on the half axis and the quarter plane, Journal of Integral Equations, V. 9, pp.45–61 (1985).
  117. Speck F.-O., Duduchava R. Bessel potential operators for the quarter-plane. // Applicable Analysis. — 1992. — V. 45. — P. 49–68.
  118. Albani M., Capolino F., Maci S. Diffraction at the vertex of a quarter plane. // Ant. and Prop. Soc. Int. Symp. IEEE. 20–25 June 2004, P. 1991 – 1994.

119. Albani M., Capolino F., Maci S. Vertex diffraction coefficient for a quarter plane. // URSI Int. Symp. on EM Theory, Pisa, Italy, May 2004, P. 1146–1148.
120. Вайнштейн Л.А. Строгое решение задачи о плоском волноводе с открытым концом. // Изв. АН СССР, сер. физ. — 1948. — Т. 12. — С. 144–165.
121. Вайнштейн Л.А. О теории дифракции на двух параллельных полуплоскостях. // Изв. АН СССР, сер. физ. — 1948. — Т. 12. — С. 166–180.
122. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966 — 475 с.
123. Вайнштейн Л.А. Теория симметричных волн в круглом волноводе с открытым концом. // ЖТФ — 1948. — Т. 18 — С. 1543–1564.
124. Вайнштейн Л.А. Излучение несимметричных волн из открытого конца круглого волновода, диаметр которого значительно больше длины волны. // ДАН СССР — 1950. — Т. 74 — С. 485–488.
125. Вайнштейн Л.А. О дифракции волн на открытом конце круглого волновода, диаметр которого значительно больше длины волны. // ДАН СССР — 1950. — Т. 74 — С. 909–912.
126. Woersma J. Ray-optical analysis of reflection in an open-ended parallel-plane wave guide. I: TM case. // SIAM Journ. Appl. Math. — 1975. — V. 29 — P. 164–195.
127. Залипаев В.В., Попов М.М. Коротковолновое рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. I. Дифракция полутеневого поля на гладком выпуклом контуре // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1987. — Т. 165. С. 59–90.
128. Залипаев В.В., Попов М.М. Коротковолновое рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. II. Дифракция на бесконечной периодической границе. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1988. — Т. 173. С. 60–86.
129. Zalipaev V.V. Short-wave grazing scattering by periodic inclined half-planes // Journ. Math. Sci. — 1991. — V. 57. — P. 3101–3106.
130. Залипаев В.В. Рассеяние коротких волн на периодической структуре - эшелет // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1998. — Т. 250. — С. 109–136.

131. Shanin A.V., Craster R.V. Removable singular points for ordinary differential equations. // *Europ. Journ. Appl. Math.* — 2003. — V. 13. — P. 617–639.
132. Craster R.V., Shanin A.V., Doubravsky E.M. Embedding formulae in diffraction theory. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 2003. — V. 459. — P. 2475–2496.
133. Craster R.V., Shanin A.V. Embedding formula for diffraction by wedge and angular geometries. // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 2005. — V. 461. — P. 2227–2242.
134. Шанин А.В. Формула расщепления для электромагнитной задачи дифракции. // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* — 2005. — Т. 324. — С. 247–261.
135. Skelton E.A., Craster R.V., Shanin A.V. Embedding formulae for diffraction by non-parallel slits. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2008. — V. 61. — P. 93–116.
136. Shanin A.V., Craster R.V., Pseudo-differential operators for embedding formulae. // *Journ. Comput. Appl. Math.* — 2010. — V.234. — P. 1637–1646.
137. Skelton E.A., Craster R.V., Shanin A.V., Valyaev V.Yu. Embedding formulae for scattering by three-dimensional structures. // *Wave Motion.* — 2010. — V.47. — P. 299–317.
138. Shanin A.V. Three theorems concerning diffraction by a strip or a slit. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2001. — V. 54. — P. 107–137.
139. Shanin A.V. Diffraction of a plane wave by two ideal strips. // *Quart. Journ. Mech. Appl. Math.* — 2003. — V. 56. — P. 187–215.
140. Шанин А.В. К задаче о дифракции на щели. Некоторые свойства ряда Шварцшильда. // *Зап. науч. сем. ПОМИ РАН.* — 2001. — Т. 275. — С. 258–285.
141. Шанин А.В. О связи метода Винера-Хопфа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. // *Электромагнитные волны и электронные системы.* — 2002. — Т. 7. — С. 10–16.
142. Shanin A.V. A generalization of the separation of variables method for some 2D diffraction problems. // *Wave Motion.* — 2003. — V. 37. — P. 241–256.
143. Shanin A.V., Doubravsky E.M., Acoustical scattering at a gap between two orthogonal, semi-infinite barriers: coordinate and spectral equations. // *Journ. Eng. Math.* — 2007. — V. 59. — P. 437–449.

- 
144. Шанин А.В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Асимптотики решений координатных и спектральных уравнений. // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. — 2007. — Т. 342. — С. 233–256.
145. Шанин А.В. Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Постановка задачи определения неизвестных констант. // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. — 2008. — Т. 354. — С. 220–244.
146. Shanin A.V. Modified Smyshlyaev's formulae for the problem of diffraction of a plane wave by an ideal quarter-plane. // Wave Motion. — 2005. — V. 41. — P. 79-93.
147. Shanin A.V. Coordinate equations for the Laplace-Beltrami problem on a sphere with a cut. Quart. Journ. Mech. Appl. Math. — 2005. — V. 58. — P. 1–20.
148. Shanin A.V. Weinstein's Diffraction Problem: Embedding Formula and Spectral Equation in Parabolic Approximation. // SIAM Journ. Appl. Math. — 2009. — V. 70. — P. 1201–1218.
149. Шанин А.В. К задаче о возбуждении волн в клиновидной области. // Акуст. журн. — 1996. — Т. 42. — С. 696–701.
150. Шанин А.В. Возбуждение и рассеяние клиновой волны в упругом клине с углом раскрыва, близким к  $180^\circ$ . // Акуст. журн. — 1997. — Т. 43. — С. 402–408.
151. Шанин А.В. Возбуждение волнового поля в треугольной области с импедансными граничными условиями. // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. — 1998. — Т. 250. — С. 300–318.
152. Шанин А.В. О возбуждении волн в клиновидной области. // Акуст. журн. — 1998. — Т. 44. — С. 683–688.
153. Shanin A.V., Krylov V.V. An approximate theory for waves in a thin elastic wedge immersed in liquid. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 2000. — V. 456. — P. 2179–2196.
154. Будаев Б.В. Обобщенные ряды Мейкснера. // Изв. вузов. Радиофизика. — 1991. — Т. 34. — С. 216-219.
155. Макаров Г.И., Осипов А.В. К вопросу о структуре рядов Мейкснера. // Изв. вузов. Радиофизика. — 1986. — Т. 29. — С. 714-720.

- 
156. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968 — 460 с.
  157. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Мир, 1990 — 528 с.
  158. Robin L. Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales, Tome III, Paris: Gauthier-Villars, 1959 — 289 p.
  159. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979 — 832 с.
  160. Камотский В.В. Вычисление некоторых интегралов, описывающих волновые поля. // Зап. науч. сем. ПОМИ РАН. — 1999. — Т. 257. — С. 44–55.
  161. Ищенко Е.Ф. Открытые оптические резонаторы. М.: Сов. радио, 1980 — 208 с.
  162. Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М.: Наука, 1990 — 264 с.
  163. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука — 1979, 384 с.
  164. Anis A.A., Lloyd E.H. On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates // *Biometrika*. — 1953. — V. 40. — P. 35–42.
  165. Boersma J. On certain multiple integrals occurring in a waveguide scattering problem // *SIAM J. Math. Anal.* — 1978. — V. 9. — P. 377–393.
  166. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. М.: ИПРЖР, 1996 — 176 с.
  167. McDonald H.M. A class of diffraction problems. // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1915. — V. 14. — P. 410–427.
  168. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Том 2. М.: Мир, 1978 — 555 с.
  169. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964 — 428 с.
  170. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966 — 724 с.